1ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

Α1. α, Α2. γ, Α3. δ, Α4. β

Α5. α. Λ, β. Σ, γ. Λ, δ. Λ, ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η β.

Έστω υ το μέτρο της ταχύτητας με την οποία εκτοξεύεται το νερό από την οπή. Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Κ που ανήκει στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού και ενός σημείου Λ ακριβώς έξω από την οπή, τα οποία ανήκουν στην ίδια ρευματική γραμμή. Ισχύει:

$$p_{\alpha\tau\mu} + \rho g \frac{h}{2} = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 \text{ ή } \upsilon = \sqrt{gh} \text{ (1).}$$

Έστω υ' το μέτρο της ταχύτητας με την οποία πέφτει η φλέβα του υγρού στο έδαφος. Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ του σημείου Λ και ενός σημείου Μ της φλέβας του νερού, όταν πέφτει στο έδαφος, έχουμε:

$$p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Lambda^2 + \rho g\frac{h}{2} = p_M + \frac{1}{2}\rho\upsilon_M^2 + 0 \text{ ή } p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g\frac{h}{2} = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon'^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon' = \sqrt{\upsilon^2 + gh},$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$\upsilon' = \sqrt{2gh} \text{ (2).}$$

Έστω A' το εμβαδόν της φλέβας του νερού, όταν πέφτει στο έδαφος.

Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των σημείων Λ και Μ, έχουμε:

$$A_\Lambda\upsilon_\Lambda = A_M\upsilon_M \text{ ή } A\sqrt{gh} = A'\sqrt{2gh} \text{ ή } A' = \frac{\sqrt{2}}{2}A.$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Έστω h το ύψος στο οποίο ανυψώνουμε τη σφαίρα Σ_1 πάνω από την αρχική θέση ισορροπίας της, πριν την αφήσουμε ελεύθερη να κινηθεί. Από το παρακάτω σχήμα προκύπτει:

$$\sigma\upsilon\nu 60° = \frac{x}{\ell} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu 60° = \frac{h-\ell_1}{\ell_1} \text{ ή } h = \ell_1(1-\sigma\upsilon\nu 60°) \text{ ή } h = \frac{\ell_1}{2} \text{ (1).}$$

Έστω υ_1 το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας Σ_1 ελάχιστα πριν από την κρούση.

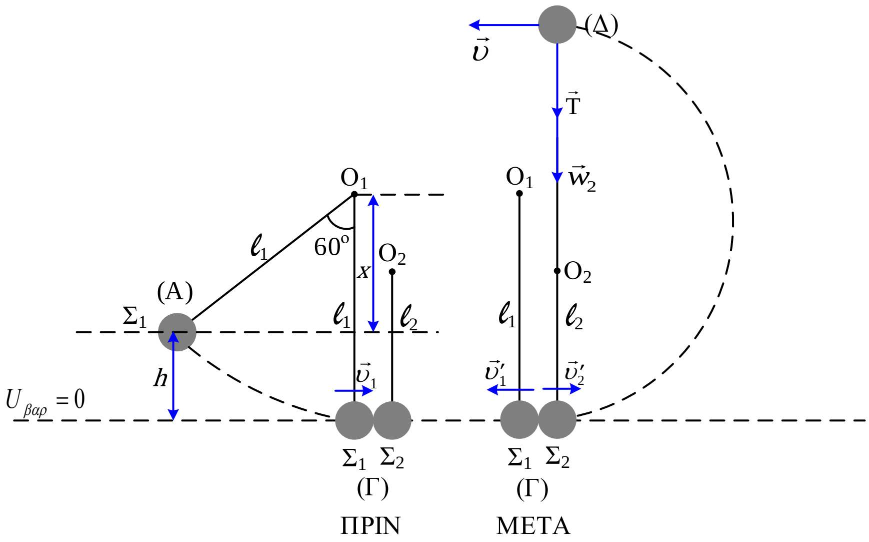
Από την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ των σχέσεων (Α) και (Γ) που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} \text{ ή } K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \text{ ή } 0 + m_1gh = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + 0 \text{ ή}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh},$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$\upsilon_1 = \sqrt{g\ell_1} \;\; (2).$$



Έστω υ'_2 το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας Σ2 αμέσως μετά την κρούση.

Ισχύει $\upsilon'_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1$, ή λόγω της σχέσης (2):

$$\upsilon'_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\sqrt{g\ell_1} \; (3).$$

Έστω υ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ2 στο ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει μετά την κρούση.

Στο σημείο Δ ισχύει:

$$\Sigma F_{\alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha} = F_K \;\text{ ή }\; T + w_2 = \frac{m_2\upsilon^2}{\ell_2} \;\text{ ή }\; T = \frac{m_2\upsilon^2}{\ell_2} - m_2 g \; (4).$$

Για να εκτελέσει το σώμα Σ2 ανακύκλωση, θα πρέπει να φτάσει στη θέση (Δ) με το νήμα τεντωμένο. Συνεπώς, στη θέση (Δ) ισχύει $T \geq 0$, ή λόγω της σχέσης (4):

$$\frac{m_2\upsilon^2}{\ell_2} - m_2 g \geq 0 \;\text{ ή }\; \upsilon \geq \sqrt{g\ell_2}.$$

Αφού το σώμα Σ2 μόλις που εκτελεί ανακύκλωση, το μέτρο της ταχύτητάς του στη θέση Δ είναι ίσο με:

$$\upsilon = \sqrt{g\ell_2} \; (5).$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε μεταξύ των θέσεων (Γ) και (Δ) της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το σώμα Σ2 μετά την κρούση έχουμε:

$$K_\Gamma + U_\Gamma = K_\Delta + U_\Delta \;\text{ ή }\; \frac{1}{2}m_2\upsilon'^2_2 + 0 = \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 + m_2 g 2\ell_2 \;\text{ ή }\; \upsilon'^2_2 = \upsilon^2 + 4g\ell_2,$$

ή λόγω της σχέσης (5):

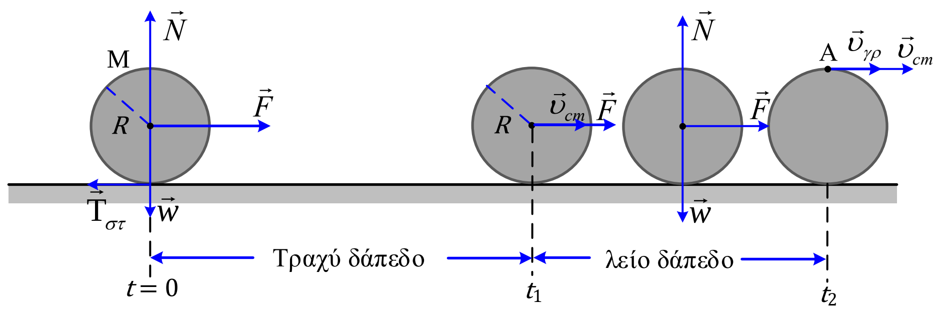
$$\upsilon'_2 = \sqrt{5g\ell_2} \; (6).$$

Από τις σχέσεις (3) και (6) προκύπτει:

$$\sqrt{5g\ell_2} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\sqrt{g\ell_1} \;\text{ ή }\; \sqrt{5g\frac{5\ell_1}{9}} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\sqrt{g\ell_1} \;\text{ ή }\; \frac{5}{3} = \frac{2m_1}{m_1+m_2} \;\text{ ή }\; m_1 = 5m_2.$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η β.

Έστω α_{cm} το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου κατά την κίνηση του από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 ελάχιστα πριν εισέλθει στην περιοχή όπου το οριζόντιο δάπεδο είναι λείο.



Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \;\text{ ή }\; T_{\sigma\tau}R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \;\text{ ή }\; T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}M\alpha_{cm} \text{ (1).}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε:

$$\Sigma F_x = M\alpha_{cm} \;\text{ ή }\; F - T_{\sigma\tau} = M\alpha_{cm} \text{ (2).}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$F = \frac{3}{2}M\alpha_{cm} \;\text{ ή }\; \alpha_{cm} = \frac{2F}{3M} \text{ (3).}$$

Έστω α'_{cm} το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το κέντρο μάζας του δίσκου από τη χρονική στιγμή t_1 που εισέρχεται στην περιοχή όπου το οριζόντιο δάπεδο είναι λείο μέχρι τη χρονική στιγμή t_2. Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής, έχουμε:

$$\Sigma F_x = M\alpha'_{cm} \;\text{ ή }\; F = M\alpha'_{cm} \;\text{ ή }\; \alpha'_{cm} = \frac{F}{M} \text{ (4).}$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει:

$$\alpha_{cm} = \frac{2}{3}\alpha'_{cm} \;\text{ ή }\; \alpha'_{cm} = 1{,}5\alpha_{cm} \text{ (5).}$$

Έστω υ_{cm} το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1. Ισχύει:

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}t_1 \text{ (6).}$$

Έστω υ'_{cm} το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2. Ισχύει $\upsilon'_{cm} = \upsilon_{cm} + \alpha'_{cm}(t_2 - t_1)$, ή λόγω των σχέσεων (5) και (6):

$$\upsilon'_{cm} = \alpha_{cm}t_1 + 1{,}5\alpha_{cm}(t_2 - t_1) \text{ (7).}$$

Ο αριθμός N_1 των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$N_1 = \frac{\theta_1}{2\pi} \;\text{ ή }\; N_1 = \frac{\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_1^2}{2\pi} \;\text{ ή }\; N_1 = \frac{\frac{1}{2}\frac{\alpha_{cm}}{R}t_1^2}{2\pi} \;\text{ ή }\; N_1 = \frac{\alpha_{cm}t_1^2}{4\pi R} \text{ (8).}$$

Από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 η συνολική ροπή που δέχεται ο δίσκος ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι ίση με το μηδέν.

Συνεπώς, το μέτρο ω της γωνιακής του ταχύτητας τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας τη χρονική στιγμή t_2.
Ο αριθμός N_2 των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$N_2 = \frac{\theta_2}{2\pi} \text{ ή } N_1 = \frac{\omega(t_2 - t_1)}{2\pi} \text{ ή } N_2 = \frac{\frac{\upsilon_{cm}}{R}(t_2 - t_1)}{2\pi} \text{ ή } N_2 = \frac{\upsilon_{cm}(t_2 - t_1)}{2\pi R},$$

ή λόγω της σχέσης (6):

$$N_2 = \frac{\alpha_{cm} t_1 (t_2 - t_1)}{2\pi R} \text{ (9).}$$

Όμως από την εκφώνηση ισχύει ότι $N_2 = 2N_1$, ή λόγω των σχέσεων (8) και (9):

$$\frac{\alpha_{cm} t_1 (t_2 - t_1)}{2\pi R} = 2\frac{\alpha_{cm} t_1^2}{4\pi R} \text{ ή } t_2 - t_1 = t_1 \text{ (10).}$$

Επομένως, από τη σχέση (7), λόγω της σχέσης (10), προκύπτει:

$$\upsilon'_{cm} = \alpha_{cm} t_1 + 1{,}5\alpha_{cm} t_1 \text{ ή } \upsilon'_{cm} = 2{,}5\alpha_{cm} t_1,$$

ή λόγω της σχέσης (6):

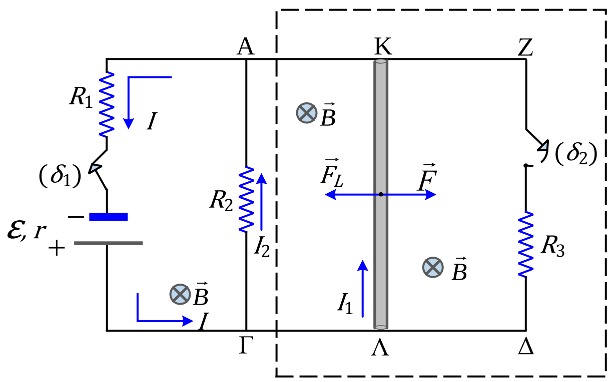
$$\upsilon'_{cm} = 2{,}5\upsilon_{cm}.$$

Το μέτρο υ_A της ταχύτητας του ανώτερου σημείου Α του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\upsilon_A = \upsilon'_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} \text{ ή } \upsilon_A = \upsilon'_{cm} + \omega R \text{ ή } \upsilon_A = 2{,}5\upsilon_{cm} + \upsilon_{cm} \text{ ή } \upsilon_A = 3{,}5\upsilon_{cm}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα ρεύματα που διαρρέουν τα κύκλωμα όταν ο διακόπτης (δ_1) είναι κλειστός και ο διακόπτης (δ_2) είναι ανοικτός. Για να ισορροπεί ο αγωγός ΚΛ, θα πρέπει η δύναμη Laplace $\vec{F}_L$ που δέχεται να είναι αντίθετη από την εξωτερική δύναμη $\vec{F}$. Επομένως, σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού οι μαγνητικές γραμμές του ομογενούς μαγνητικού πεδίου μέσα στο οποίο βρίσκεται ο αγωγός ΚΛ είναι κάθετες στη σελίδα με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.



Έστω R' η ισοδύναμη αντίσταση του αγωγού ΚΛ και του αντιστάτη R_2.
Ισχύει:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_{K\Lambda}} + \frac{1}{R_2} \text{ ή } R' = \frac{R_{K\Lambda} \cdot R_2}{R_{K\Lambda} + R_2} \text{ ή } R' = 0{,}6\ \Omega.$$

Έστω $R_{\varepsilon\xi}$ η ισοδύναμη αντίσταση του εξωτερικού τμήματος του κυκλώματος. Ισχύει:

$$R_{\varepsilon\xi} = R_1 + R' \text{ ή } R_{\varepsilon\xi} = 1\ \Omega.$$

Έστω I η ένταση του ρεύματος που διαρρέει την πηγή. Ισχύει:

$$I = \frac{E}{R_{\varepsilon\xi} + r} \text{ ή } I = 4\ \text{A}.$$

Η τάση $V_{K\Lambda}$ στα άκρα του αγωγού ΚΛ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$V_{K\Lambda} = IR' \text{ ή } V_{K\Lambda} = 2{,}4\ \text{V}.$$

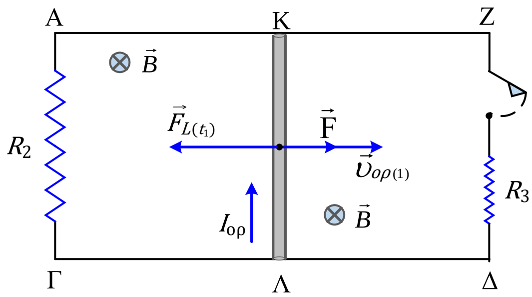
Συνεπώς, η ένταση I_1 του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ είναι ίση με:

$$I_1 = \frac{V_{K\Lambda}}{R_{K\Lambda}} \text{ ή } I_1 = 2{,}4\ \text{A}.$$

Αφού ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } F = F_L \text{ ή } F = BI_1\ell \text{ ή } F = 2{,}4\ \text{N}.$$

Γ2. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται πώς διαμορφώνεται το κύκλωμα, τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία ο αγωγός ΚΛ αποκτά την οριακή του ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{o\rho(1)}$.



Αφού ο αγωγός κινείται με την οριακή του ταχύτητα, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } F = F_{L(t_1)} \text{ ή } F = BI_{o\rho}\ell \text{ ή } F = B\frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_2 + R_{KL}}\ell \text{ ή } F = B\frac{\frac{d\Phi}{dt}}{R_2 + R_{KL}}\ell \text{ ή}$$

$$F = B\frac{B\frac{dS}{dt}}{R_2 + R_{KL}}\ell \text{ ή } F = B\frac{B\frac{dx}{dt}}{R_2 + R_{KL}}\ell \text{ ή } F = B\frac{B\upsilon_{o\rho(1)}\ell}{R_2 + R_{KL}}\ell \text{ ή } F = \frac{B^2\ell^2\upsilon_{o\rho(1)}}{R_2 + R_{KL}} \text{ ή}$$

$$\upsilon_{o\rho(1)} = \frac{F(R_2 + R_{KL})}{B^2\ell^2} \text{ ή } \upsilon_{o\rho(1)} = 6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Γ3. Έστω $Q_{R_{o\lambda}}$ η θερμότητα Joule που αποδίδεται από ολόκληρο το κύκλωμα προς το περιβάλλον από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1.

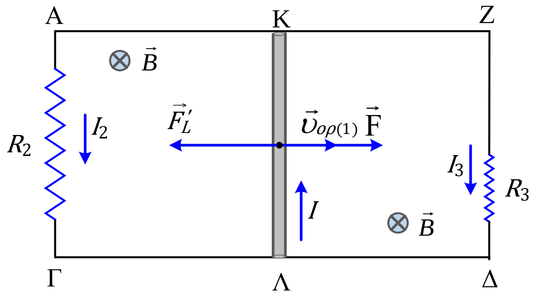
Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το κύκλωμα έχουμε:

$$E_{\alpha\rho\chi} + E_{\pi\rho o\sigma\varphi\acute{\varepsilon}\rho\varepsilon\tau\alpha\iota} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή } K_{\alpha\rho\chi} + W_F = K_{\tau\varepsilon\lambda} + Q_{R_{o\lambda}} \text{ ή}$$

$$0 + F \cdot S_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_{o\rho(1)}^2 + Q_{R_{o\lambda}} \text{ ή } Q_{R_{o\lambda}} = F \cdot S_1 - \frac{1}{2}m\upsilon_{o\rho(1)}^2 \text{ ή}$$

$$Q_{R_{o\lambda}} = 2{,}4\ \text{J}.$$

Γ4. Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία κλείνουμε το διακόπτη (δ_2) το κύκλωμα διαμορφώνεται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω $R_{2,3}$ η ισοδύναμη αντίσταση των αντιστατών R_2 και R_3. Ισχύει:

$$R_{2,3} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \text{ ή } R_{2,3} = 0{,}5\ \Omega.$$

Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{o\lambda}$ ολόκληρου του κυκλώματος είναι ίση με:

$$R_{o\lambda} = R_{2,3} + R_{K\Lambda} \text{ ή } R_{o\lambda} = 1{,}5\ \Omega.$$

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ_2) υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{o\lambda}} \text{ ή } I = \frac{B\upsilon_{o\rho(1)}\ell}{R_{o\lambda}} \text{ ή } I = 4\ \mathrm{A}.$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace $\vec{F}_L'$ που δέχεται ο αγωγός ΚΛ τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ_2) υπολογίζεται από τον τύπο:

$$F_L' = BI\ell \text{ ή } F_L' = 4\ \mathrm{N}.$$

Αφού $F < F_L'$, ο αγωγός από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά αρχίζει να επιβραδύνεται. Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται ο αγωγός από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Sigma F = F_L - F \text{ ή } \Sigma F = BI\ell - F \text{ ή } \Sigma F = B\frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{o\lambda}}\ell - F \text{ ή } \Sigma F = B\frac{B\upsilon\ell}{R_{o\lambda}}\ell - F \text{ ή}$$

$$\Sigma F = \frac{B^2\ell^2\upsilon}{R_{o\lambda}} - F \text{ (1).}$$

Αφού το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού ΚΛ μειώνεται, σύμφωνα με τη σχέση (1) το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται μειώνεται, μέχρι κάποια στιγμή να μηδενιστεί, οπότε αποκτά οριακή ταχύτητα $\upsilon_{o\rho(2)}$. Επομένως, η κίνηση που εκτελεί ο αγωγός ΚΛ από τη χρονική t_1 και μετά είναι επιβραδυνόμενη με επιβράδυνση που μειώνεται κατά μέτρο $\left(\alpha = \frac{\Sigma F}{m}\right)$ μέχρι να αποκτήσει τη νέα οριακή του ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{o\rho(2)}$ τη χρονική στιγμή t_2.

Τη χρονική στιγμή t_2 ισχύει ότι $\Sigma F = 0$, ή σύμφωνα με τη σχέση (1):

$$\frac{B^2\ell^2\upsilon_{o\rho(2)}}{R_{o\lambda}} = F \text{ ή } \upsilon_{o\rho(2)} = \frac{FR_{o\lambda}}{B^2\ell^2} \text{ ή } \upsilon_{o\rho(2)} = 3{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Γ5. Η ένταση $I_{ορ(2)}$ του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ τη χρονική στιγμή t_2 είναι ίση με:

$$I_{ορ(2)} = \frac{E_{επ}}{R_{ολ}} \text{ ή } I_{ορ(2)} = \frac{B υ_{ορ(2)} \ell}{R_{ολ}} \text{ ή } I_{ορ(2)} = 2{,}4 \text{ A.}$$

Η τάση $V'_{ΚΛ}$ στα άκρα του αγωγού ΚΛ τη χρονική στιγμή t_2 είναι ίση με:

$$V'_{ΚΛ} = I_{ορ(2)} R_{2,3} \text{ ή } V'_{ΚΛ} = 1{,}2 \text{ V.}$$

Η ένταση I_2 του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_2 τη χρονική στιγμή t_2 είναι ίση με:

$$I_2 = \frac{V'_{ΚΛ}}{R_2} \text{ ή } I_2 = 0{,}8 \text{ A.}$$

Ο ζητούμενος ρυθμός υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dQ_{R_2}}{dt} = I_2^2 R_2 \text{ ή } \frac{dQ_{R_2}}{dt} = 0{,}96 \text{ W.}$$

Το επαγωγικό φορτίο $q_{επ}$ που περνά από μία διατομή του αγωγού ΚΛ από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$q_{επ} = \frac{|\Delta \Phi|}{R_{ολ}} \text{ ή } q_{επ} = \frac{B \Delta S}{R_{ολ}} \text{ ή } q_{επ} = \frac{B \ell \cdot S_2}{R_{ολ}} \text{ ή } q_{επ} = 3 \text{ C.}$$

Έστω q_2 και q_3 το επαγωγικό φορτίο που περνά από μία διατομή του αντιστάτη R_2 και του αντιστάτη R_3 αντίστοιχα, από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2.
Από την αρχή διατήρησης του φορτίου έχουμε:

$$q_{επ} = q_2 + q_3 \text{ (2).}$$

Όμως στο στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt ισχύει:

$$dq_2 = I_2 dt \text{ (3) και } dq_3 = I_3 dt \text{ (4).}$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (2) και (3) έχουμε:

$$\frac{dq_2}{dq_3} = \frac{I_2}{I_3} \text{ ή } \frac{dq_2}{dq_3} = \frac{\frac{V_{ΚΛ}}{R_2}}{\frac{V_{ΚΛ}}{R_3}} \text{ ή } \frac{dq_2}{dq_3} = \frac{R_3}{R_2} \text{ ή } \frac{dq_2}{dq_3} = \frac{1}{2} \text{ ή } dq_3 = 2dq_2.$$

Συνεπώς, στο χρονικό διάστημα από t_1 μέχρι t_2 ισχύει:

$$q_3 = 2q_2 \text{ (5).}$$

Από τις σχέσεις (2) και (5) προκύπτει ότι $q_{επ} = 3q_2$ ή $q_2 = 1$ C. Επομένως:

$$q_3 = 2 \text{ C.}$$

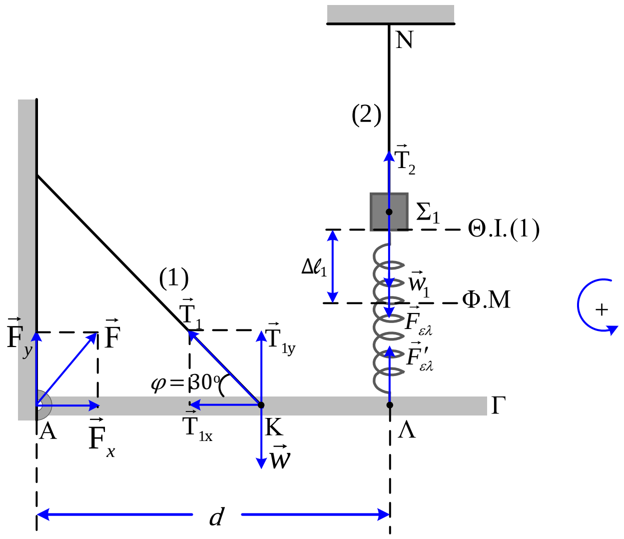
<u>**ΘΕΜΑ Δ**</u>

Δ1. Επειδή το μέτρο T_2 της δύναμης που δέχεται το σώμα $Σ_1$ από το νήμα (2) είναι μεγαλύτερο από το βάρος του $w_1 = m_1 g$, το σώμα $Σ_1$ ισορροπεί με το ελατήριο επιμηκυμένο σε σχέση με το φυσικό του μήκος.

Έστω $\Delta \ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του (Θ.Ι.(1)).
Στη Θ.Ι.(1) του σώματος $Σ_1$ ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \text{ ή } w_1 + F_{ελ} = T_2 \text{ ή } \Delta \ell_1 = 0{,}1 \text{ m.}$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος.



Ισχύει:

$$\vec{F}'_{\varepsilon\lambda} = -\vec{F}_{\varepsilon\lambda} \text{ ή } F'_{\varepsilon\lambda} = F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta\ell_1 \text{ ή } F'_{\varepsilon\lambda} = 10 \text{ N.}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \text{ ή } \tau_F + \tau_w + \tau_{T_1} + \tau_{F'_{\varepsilon\lambda}} = 0 \text{ ή } 0 - w\frac{L}{2} + T_1 y\frac{L}{2} + F'_{\varepsilon\lambda} d = 0 \text{ ή}$$

$$T_1 \eta\mu\varphi \frac{L}{2} + F'_{\varepsilon\lambda}\frac{3L}{4} = M\rho g\frac{L}{2} \text{ ή } T_1 = 20 \text{ N.}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή}$$

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \text{ (1) και } \Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \text{ (2).}$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \text{ ή } F_x = T_1 x \text{ ή } F_x = T\sigma\upsilon\nu 30° \text{ ή } F_x = 10\sqrt{3}.$$

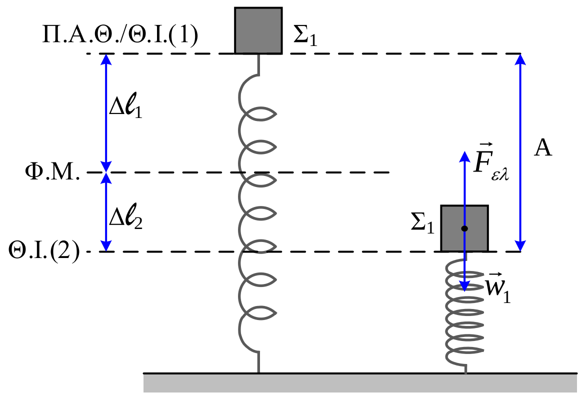
Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \text{ ή } F_y + T_1 y + F'_{\varepsilon\lambda} = w \text{ ή } F_y = T_1 \eta\mu\varphi + F'_{\varepsilon\lambda} = M\rho g \text{ ή } F_y = 5 \text{ N.}$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση υπολογίζεται από τον τύπο:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \text{ ή } F = \sqrt{325} \text{ N.}$$

Δ2. Μετά το κόψιμο του νήματος το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη νέα θέση ισορροπίας (Θ.Ι.(2)) που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω $\Delta\ell_2$ η συμπίεση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(2).

Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \;\text{ ή }\; w_1 = F_{\varepsilon\lambda} \;\text{ ή }\; m_1 g = k\Delta\ell_1 \;\text{ ή }\; \Delta\ell_1 = 0{,}1 \text{ m}.$$

Όπως προκύπτει από το σχήμα το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με:

$$A = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 \;\text{ ή }\; A = 0{,}2 \text{ m}.$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ1 από τη Θ.Ι.(2) είναι ίση με:

$$x = +A = +0{,}2 \text{ m}.$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ1 από τη Θ.Ι.(2) δίνεται από τη σχέση:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \text{ (3)}.$$

Από τη σχέση (3) για $t = 0$ και $x = +A$ έχουμε:

$$A = A\eta\mu\varphi_0 \;\text{ ή }\; \eta\mu\varphi_0 = 1 \;\text{ ή }\; \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \text{ (4)}.$$

Επειδή ισχύει ότι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ rad, από τη σχέση (4) προκύπτει ότι $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$D = m_1\omega^2 \;\text{ ή }\; k = m_1\omega^2 \;\text{ ή }\; \omega = 10\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

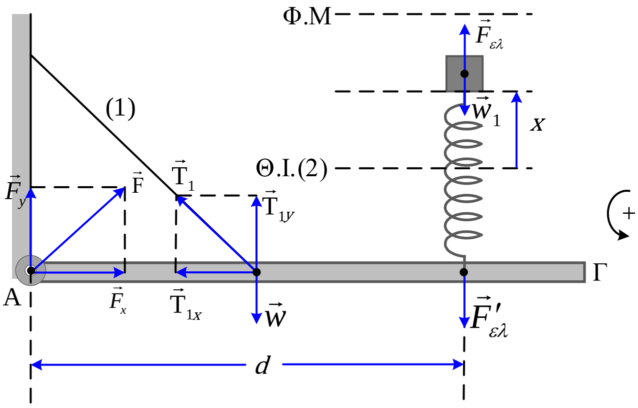
Συνεπώς, η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος Σ1 είναι η:

$$\alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \;\text{ ή }\; \alpha = -20\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \;(S.I.).$$

Δ3. Έστω ότι το σώμα Σ1 βρίσκεται σε μία τυχαία θέση πάνω από τη Θ.Ι.(2) (στον θετικό ημιάξονα) με απομάκρυνση x. Έστω $F_{\varepsilon\lambda}$ το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ1 από το ελατήριο στη θέση αυτή.

Ισχύει:

$$\Sigma F = -Dx \;\text{ ή }\; \Sigma F = -kx \;\text{ ή }\; F_{\varepsilon\lambda} - w_1 = -kx \;\text{ ή }\; F_{\varepsilon\lambda} = m_1 g - kx \text{ (5)}.$$



Επειδή η ράβδος ΑΓ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \text{ ή } T_{1y}\frac{L}{2} - w\frac{L}{2} - F'_{\varepsilon\lambda}\frac{3L}{4} = 0 \text{ ή } \frac{T_1\eta\mu\varphi}{2} = \frac{M\rho g}{2} + \frac{3F_{\varepsilon\lambda}}{4} \text{ ή } \frac{T_1}{4} = \frac{M\rho g}{2} + \frac{3F_{\varepsilon\lambda}}{4} \text{ ή}$$

$$T_1 = 2M\rho g + 3F_{\varepsilon\lambda},$$

ή λόγω της σχέσης (5):

$$T_1 = 2M\rho g + 3(m_1 g - kx) \text{ ή } T_1 = 2M\rho g + 3m_1 g - 3kx \text{ ή}$$

$$T_1 = 80 - 300x\ (S.I.), \text{ με } -0{,}2\ \text{m} \le x \le 0{,}2\ \text{m}.$$

Δ4. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος Σ1 και υ_1 το μέτρο της ταχύτητας του ελάχιστα πριν από την κρούση.

Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του σώματος Σ1 πριν από την κρούση έχουμε:

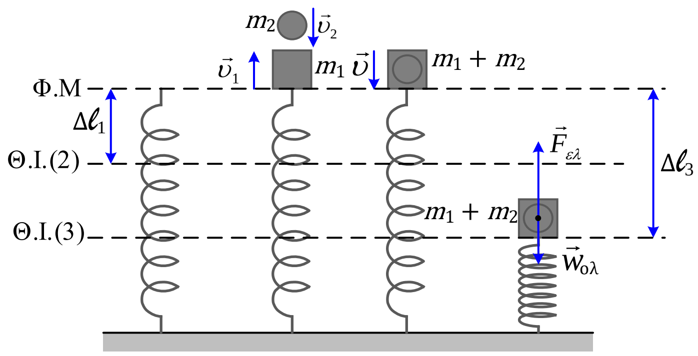
$$E = K + U \text{ ή } E = 3U + U \text{ ή } E = 4U \text{ ή } \frac{1}{2}DA^2 = 4\frac{1}{2}Dx_1^2 \text{ ή}$$

$$x_1 = \pm\frac{A}{2} \text{ ή } x_1 = 0{,}1\ \text{m}.$$

Συνεπώς, είναι:

$$K = 3U \text{ ή } \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = 3\frac{1}{2}kx_1^2 \text{ ή } \upsilon_1 = \sqrt{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Αφού $x_1 = \Delta\ell_2$, η κρούση γίνεται στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.



Έστω υ το μέτρο της ταχύτητας συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Ο για την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \text{ ή } m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = -(m_1 + m_2)\upsilon \text{ ή } \upsilon = 2\sqrt{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του (Θ.Ι.(3)) αμέσως μετά την κρούση είναι ίση με $x = \Delta\ell_3$, όπου $\Delta\ell_3$ η συμπίεση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος.

Στη Θ.Ι.(3) ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } (m_1 + m_2)g = k\Delta\ell_3 \text{ ή } \Delta\ell_3 = 0{,}4 \text{ m}.$$

Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του συσσωματώματος έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell_3^2 \text{ ή } A' = 0{,}8 \text{ m}.$$

Η μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που δέχεται το συσσωμάτωμα από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του είναι ίση με:

$$F_{\varepsilon\lambda(\max)} = k(\Delta\ell_3 + A) \text{ ή}$$

$$F_{\varepsilon\lambda(\max)} = 120 \text{ N (στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης).}$$

Αφού $A' > \Delta\ell_3$, η ελάχιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που δέχεται το συσσωμάτωμα από το ελατήριο είναι ίση με:

$$F_{\varepsilon\lambda(\min)} = 0 \text{ (στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος).}$$

Δ5. Όπως φαίνεται από τη σχέση (6) το πλάτος A' της ταλάντωσης του συσσωματώματος μειώνεται όσο μειώνεται το μέτρο υ της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Συνεπώς, το ελάχιστο πλάτος A'_{min} επιτυγχάνεται όταν $\upsilon = 0$.

Τότε σύμφωνα με τη σχέση (6) είναι:

$$A'_{min} = \Delta\ell_3 = 0{,}4 \text{ m}.$$

Όταν $\upsilon = 0$, από την Α.Δ.Ο προκύπτει:

$$m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2' \text{ ή } \upsilon_2' = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2ο Κριτήριο Αξιολόγησης

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

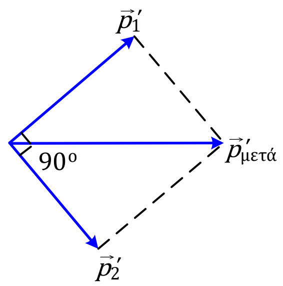
Α1. γ, Α2. δ, Α3. β, Α4. γ

Α5. α. Σ, β. Λ, γ. Σ, δ. Σ, ε. Λ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Οι ορμές $\vec{p}_1'$ και $\vec{p}_2'$ των σφαιρών Σ1 και Σ2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση και η ορμή $\vec{p}_1$ της σφαίρας Σ1 πριν από την κρούση φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Από την Α.Δ.Ο για την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{πριν} = \vec{p}_{μετά} \text{ ή } |\vec{p}_{πριν}| = |\vec{p}_{μετά}| \text{ ή } p_1 = \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2'συνφ} \text{ ή}$$

$$m_1υ_1 = \sqrt{(m_1υ_1')^2 + (m_2υ_2')^2 + 2m_1υ_1'm_2υ_2'συν90°} \text{ ή}$$

$$m_1υ_1 = \sqrt{m_1^2υ_1'^2 + m_2^2υ_2'^2} \text{ ή } m_1^2υ_1^2 = m_1^2υ_1'^2 + m_2^2υ_2'^2 \text{ ή}$$

$$m_1^2(υ_1^2 - υ_1'^2) = m_2^2υ_2'^2 \text{ (1).}$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική, ισχύει:

$$K_{ολ(πριν)} = K_{ολ(μετά)} \text{ ή } \frac{1}{2}m_1υ_1^2 = \frac{1}{2}m_1υ_1'^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2^2 \text{ ή } m_1(υ_1^2 - υ_1'^2) = m_2υ_2'^2 \text{ (2).}$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $m_1 = m_2$.

Έστω $υ_1''$ και $υ_2''$ τα μέτρα των ταχυτήτων των σφαιρών Σ1 και Σ2 αντίστοιχα στην περίπτωση που η μεταξύ τους κρούση είναι μετωπική και ελαστική.

Αφού $m_1 = m_2$, θα είναι $υ_1'' = 0$ και $υ_2'' = υ_1$.

Συνεπώς, το ζητούμενο ποσοστό είναι ίσο με:

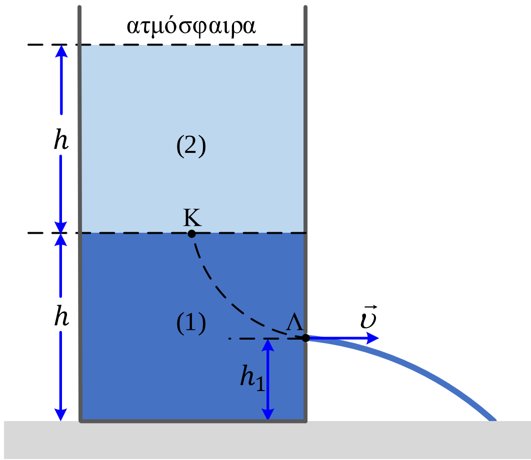
$$π = \frac{ΔK_2}{K_{1(πριν)}} \cdot 100\% \text{ ή } π = \frac{\frac{1}{2}m_2υ_2''^2}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2} \cdot 100\% \text{ ή } π = 100\%.$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Έστω το σημείο Κ της διαχωριστικής επιφάνειας των δύο υγρών που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Επειδή το υγρό (2) ισορροπεί, η πίεση p_K στο σημείο Κ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$p_K = p_{ατμ} + p_{υδροστ} \text{ ή } p_K = p_{ατμ} + ρ_2gh \text{ (1).}$$



Έστω υ το μέτρο της ταχύτητας με την οποία εκτοξεύεται το υγρό (1) από την οπή. Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ του σημείου Κ και ενός σημείου Λ που βρίσκεται ακριβώς έξω από την οπή, θεωρώντας ως επίπεδο αναφοράς για τη μέτρηση των υψών το σημείο Λ, προκύπτει:

$$p_K + \rho_1 g(h - h_1) = p_\Lambda + \tfrac{1}{2}\rho_1 \upsilon^2,$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$p_{\alpha\tau\mu} + \rho_2 gh + \rho_1 g(h - h_1) = p_{\alpha\tau\mu} + \tfrac{1}{2}\rho_1 \upsilon^2 \text{ ή } \upsilon = \sqrt{2\tfrac{\rho_2}{\rho_1}gh + 2g(h - h_1)} \text{ ή}$$

$$\upsilon = \sqrt{1{,}6gh + 2g(h - h_1)} \text{ ή } \upsilon = \sqrt{2g(1{,}8h - h_1)}\,.$$

Ο χρόνος πτώσης t της φλέβας του υγρού (1) από τη χρονική στιγμή που εξέρχεται από την οπή μέχρι να φτάσει στο έδαφος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$h_1 = \tfrac{1}{2}gt^2 \text{ ή } t = \sqrt{\tfrac{2h_1}{g}}.$$

Το βεληνεκές x της φλέβας του υγρού (1) είναι ίσο με $x = \upsilon t$, ή λόγω της σχέσης (2):

$$x = \sqrt{2g(1{,}8h - h_1)}\sqrt{\tfrac{2h_1}{g}} \text{ ή } x = \sqrt{4h_1(1{,}8h - h_1)} \text{ ή } x^2 = 4h_1(1{,}8h - h_1) \text{ ή}$$

$$4h_1^2 - 7{,}2h\,h_1 + x^2 = 0 \text{ (3).}$$

Για να έχει πραγματικές λύσεις η εξίσωση (3), πρέπει να ισχύει:

$$\Delta \geq 0 \text{ ή } (7{,}2h)^2 - 16x^2 \geq 0 \text{ ή } x \leq \tfrac{7{,}2h}{4} \text{ ή } x \leq 1{,}8h.$$

Συνεπώς, το μέγιστο βεληνεκές είναι $x_{max} = 1{,}8h$. Για $x = x_{max} = 1{,}8h$ προκύπτει ότι $\Delta = 0$. Επομένως, η εξίσωση (3) έχει λύση:

$$h_1 = \tfrac{7{,}2h}{8} \text{ ή } h_1 = 0{,}9h.$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η α.

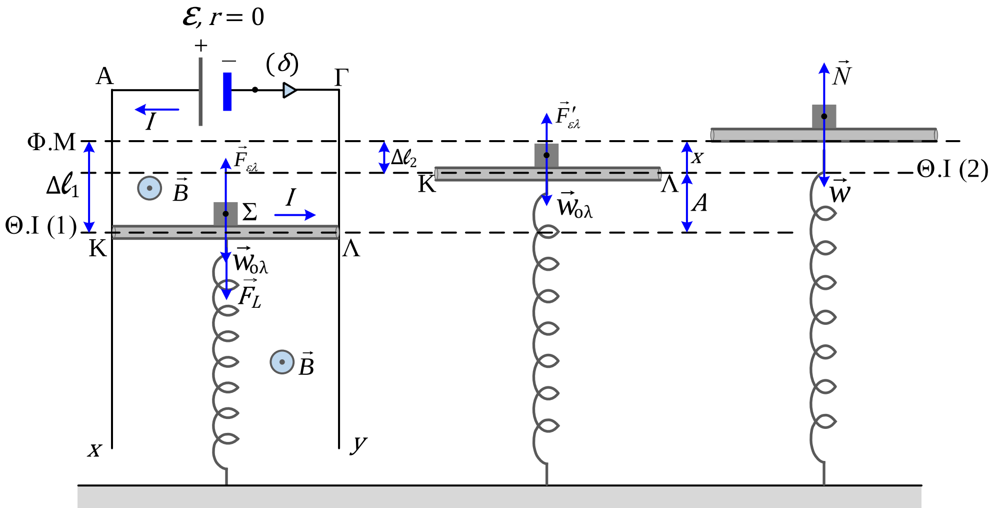
Έστω I η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ για όσο χρόνο ο διακόπτης (δ) είναι κλειστός. Ισχύει:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{K\Lambda}} \text{ ή } I = \frac{\mathcal{E}}{R} \, (1).$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace $\vec{F}_L$ που δέχεται ο αγωγός ΚΛ υπολογίζεται από τη σχέση $F_L = BI\ell$, ή λόγω της σχέσης (1):

$$F_L = \frac{B\mathcal{E}\ell}{R} \, (2).$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται το σύστημα αγωγός ΚΛ – σώμα Σ στην αρχική θέση ισορροπίας του (Θ.Ι.(1)).



Αφού το σύστημα ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \text{ ή } w_{ολ} + F_L = F_{ελ} \text{ ή } (M+m)g + \frac{B\mathcal{E}\ell}{R} = k\Delta\ell_1 \text{ ή}$$

$$\Delta\ell_1 = \frac{(M+m)g}{k} + \frac{B\mathcal{E}\ell}{kR} \, (3).$$

Αν ανοίξουμε τον διακόπτη, η θέση ισορροπίας του συστήματος αγωγός ΚΛ – σώμα Σ θα αλλάξει (Θ.Ι.(2)). Έστω $\Delta\ell_2$ η συμπίεση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(2). Ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \text{ ή } (M+m)g = k\Delta\ell_2 \text{ ή } \Delta\ell_2 = \frac{(M+m)g}{k} \, (4).$$

Το πλάτος A της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα αγωγός ΚΛ – σώμα Σ μετά το άνοιγμα του διακόπτη (δ) είναι ίσο με $A = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2$, ή λόγω των σχέσεων (3) και (4):

$$A = \frac{B\mathcal{E}\ell}{kR} \, (5).$$

Έστω η τυχαία θέση με απομάκρυνση x από τη Θ.Ι.(2) του συστήματος αγωγός ΚΛ – σώμα Σ που φαίνεται στο σχήμα (θεωρούμε ως θετική φορά για την ταλάντωση του συστήματος τη φορά προς τα πάνω). Αφού το σώμα Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ισχύει:

$$\Sigma F_{σώμα\,Σ} = -D_\Sigma \cdot x \text{ ή } N - w = -m\omega^2 x \text{ ή } N - mg = -m\frac{k}{M+m}x \text{ ή}$$

$$N = mg - \frac{km}{M+m}x \, (6).$$

Η επαφή ανάμεσα στον αγωγό ΚΛ και το σώμα Σ χάνεται όταν $N = 0$.

Από τη σχέση (6) προκύπτει ότι η επαφή μπορεί να χαθεί σε μία θέση με απομάκρυνση x_1 $(x_1 > 0)$ πάνω από τη Θ.Ι.(2). Συνεπώς, από τη σχέση (6) για $N = 0$ προκύπτει:

$$mg = \frac{km}{M+m}x_1 \;\; \text{ή} \;\; x_1 = \frac{(M+m)g}{k} \; (7).$$

Για να μην χάνεται η επαφή ανάμεσα στο σώμα Σ και τον αγωγό ΚΛ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συστήματος, θα πρέπει να ισχύει $x_1 > A$, ή λόγω των σχέσεων (5) και (7):

$$\frac{(M+m)g}{k} > \frac{B\mathcal{E}\ell}{kR} \;\; \text{ή} \;\; (M+m)gR > B\mathcal{E}\ell.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τη δοθείσα εξίσωση προκύπτει ότι το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης στα άκρα του πλαισίου είναι ίσο με $V_\pi = 12$ V και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του πλαισίου είναι ίση με $\omega = 18\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Έστω I το πλάτος της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο. Ισχύει:

$$V_\pi = IR_1 \;\; \text{ή} \;\; I = 6 \text{ A}.$$

Επομένως:

$$I = \frac{E_{\varepsilon\pi(\max)}}{R_{o\lambda}} \;\; \text{ή} \;\; I = \frac{N\omega BA}{R_\pi + R_1} \;\; \text{ή} \;\; B = \frac{I(R_\pi + R_1)}{N\omega\alpha^2} \;\; \text{ή} \;\; B = 1 \text{ T}.$$

Γ2. Η χρονική εξίσωση της στιγμιαίας ισχύος που καταναλώνει ο αντιστάτης R_1 είναι:

$$p = i\upsilon_{R_1} \;\; \text{ή} \;\; p = i\upsilon \;\; \text{ή} \;\; p = IV\eta\mu^2\omega t \; (1).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$p_{max} = IV.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο πηλίκο είναι ίσο με:

$$\frac{p_{max}}{\bar{P}} = \frac{IV}{I_{\varepsilon\nu}V_{\varepsilon\nu}} = \frac{IV}{\frac{I}{\sqrt{2}}\frac{V}{\sqrt{2}}} = 2.$$

Γ3. Το χρονικό διάστημα κατά το οποίο πραγματοποιούνται τρεις διαδοχικοί μηδενισμοί της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι ίσο με $\Delta t = T$, όπου T η περίοδος του εναλλασσόμενου ρεύματος.

Η θερμότητα Joule που αποδίδεται από το κύκλωμα στο χρόνο Δt είναι ίση με:

$$Q = I_{\varepsilon\nu}^2 R_{o\lambda}\Delta t \;\; \text{ή} \;\; Q = \left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2 (R_\pi + R_1)T \;\; \text{ή} \;\; Q = \frac{1}{2}I^2(R_\pi + R_1)\frac{2\pi}{\omega} \;\; \text{ή} \;\; Q = 18{,}84 \text{ J}.$$

Γ4. Έστω i η ένταση του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο τις χρονικές στιγμές στις οποίες η τάση στα άκρα του πλαισίου είναι ίση με $\upsilon = +6$ V.

Ισχύει:

$$\upsilon = iR \text{ ή } i = 3 \text{ A}.$$

Επομένως:

$$i = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_\pi + R_1} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = i(R_\pi + R_1) \text{ ή } N\left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = i(R_\pi + R_1) \text{ ή } \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = \frac{i(R_\pi + R_1)}{N} \text{ ή }$$

$$\left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = 0{,}09\,\frac{\text{Wb}}{\text{s}}.$$

Γ5. Έστω R_Σ η ωμική αντίσταση της θερμικής συσκευής. Ισχύει:

$$R_\Sigma = \frac{V_K^2}{P_K} \text{ ή } R_\Sigma = \frac{2}{3}\ \Omega.$$

Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{\varepsilon\xi}$ του εξωτερικού τμήματος του κυκλώματος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{1}{R_{\varepsilon\xi}} = \frac{1}{R_\Sigma} + \frac{1}{R_1} \text{ ή } R_{\varepsilon\xi} = \frac{R_\Sigma R_1}{R_\Sigma + R_1} \text{ ή } R_{\varepsilon\xi} = 0{,}5\ \Omega.$$

Το πλάτος I' της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I' = \frac{E_{\varepsilon\pi(\max)}}{R_{\varepsilon\xi} + R_\pi} \text{ ή } I' = \frac{N\omega BA}{R_{\varepsilon\xi} + R_\pi} \text{ ή } I' = 12 \text{ A}.$$

Το πλάτος V'_π της εναλλασσόμενης τάσης στα άκρα του πλαισίου υπολογίζεται από τον τύπο:

$$V'_\pi = I' R_{\varepsilon\xi} \text{ ή } V'_\pi = 6 \text{ V}.$$

Το πλάτος της τάσης V_Σ στα άκρα της συσκευής είναι ίσο με το πλάτος της τάσης στα άκρα του πλαισίου. Συνεπώς, ισχύει $V_\Sigma = V'_\pi = 6$ V.

Η ενεργός τιμή $V_{\varepsilon\nu(\Sigma)}$ της εναλλασσόμενης τάσης στα άκρα της συσκευής είναι ίση με:

$$V_{\varepsilon\nu(\Sigma)} = \frac{V_\Sigma}{\sqrt{2}} \text{ ή } V_{\varepsilon\nu(\Sigma)} = 3\sqrt{2} \text{ V}.$$

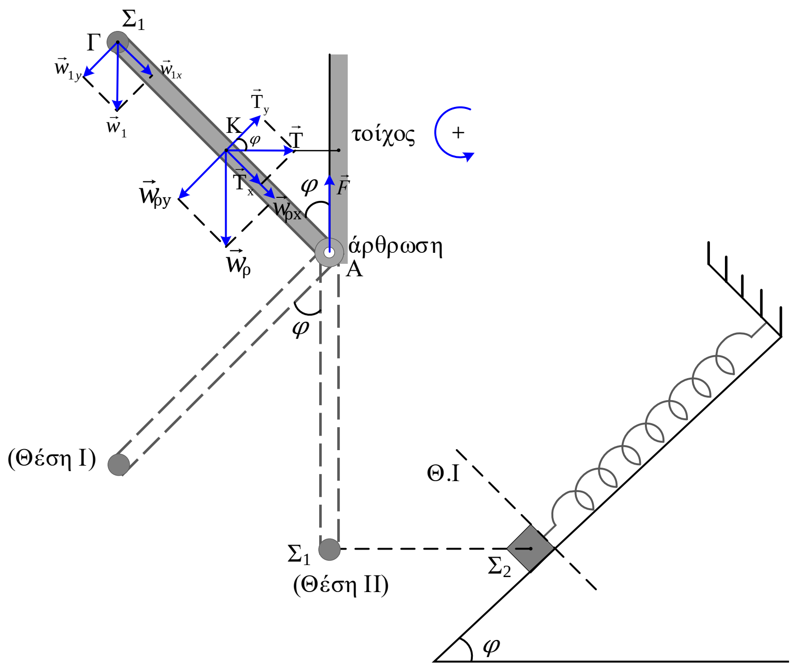
Αφού είναι $V_{\varepsilon\nu(\Sigma)} \neq V_K$, η θερμική συσκευή δεν λειτουργεί κανονικά.

Η μέση ισχύς $\bar{P}_\Sigma$ που καταναλώνει η θερμική συσκευή υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\bar{P}_\Sigma = \frac{V_{\varepsilon\nu(\Sigma)}^2}{R_\Sigma} \text{ ή } \bar{P}_\Sigma = 27 \text{ W}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται το σύστημα ράβδος – σώμα Σ_1 στη θέση ισορροπίας του.



Σχήμα 1

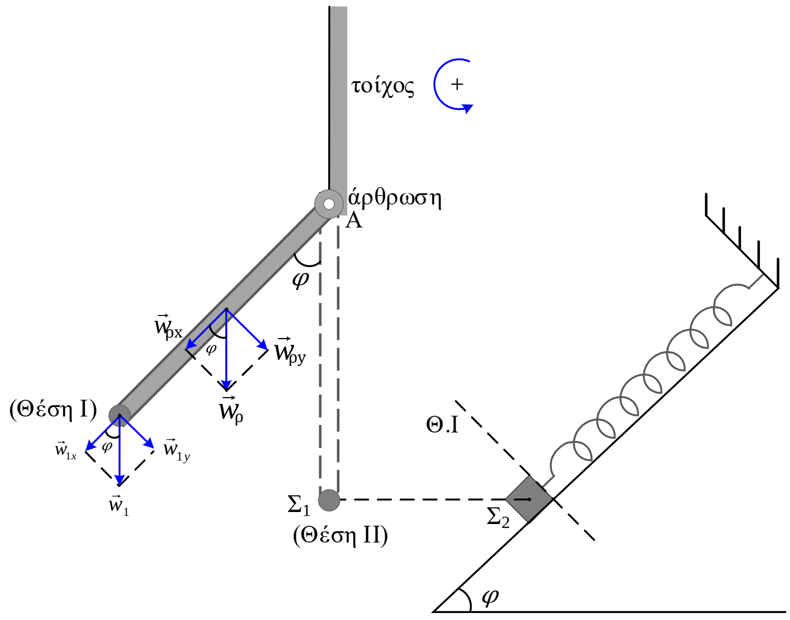
Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \text{ ή } \tau_F + \tau_w + \tau_{w_\rho} + \tau_T = 0 \text{ ή } 0 + w_{1y}L + w_{\rho y}\frac{L}{2} - T_y\frac{L}{2} = 0 \text{ ή}$$

$$w_1\eta\mu\varphi + \frac{w_\rho\eta\mu\varphi}{2} = \frac{T\sigma\upsilon\nu\varphi}{2} \text{ ή } m_1 g\eta\mu\varphi + \frac{M_\rho g\eta\mu\varphi}{2} = \frac{T\sigma\upsilon\nu\varphi}{2} \text{ ή}$$

$$T = 60 \text{ N.}$$

Δ2. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται το σύστημα ράβδος – σώμα Σ_1 τη χρονική στιγμή που διέρχεται από τη θέση I.



Σχήμα 2

Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος ράβδος – σώμα Σ_1 τη χρονική στιγμή που διέρχεται από τη θέση (Ι).

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης έχουμε:

$$\Sigma\tau = I_{o\lambda}\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } w_{1y}L + w_{\rho y}\frac{L}{2} = I_{o\lambda}\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή}$$

$$m_1 g\eta\mu\varphi L + \frac{M_\rho g\eta\mu\varphi L}{2} = \left[\frac{1}{12}M_\rho L^2 + M_\rho\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_1 L^2\right]\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή}$$

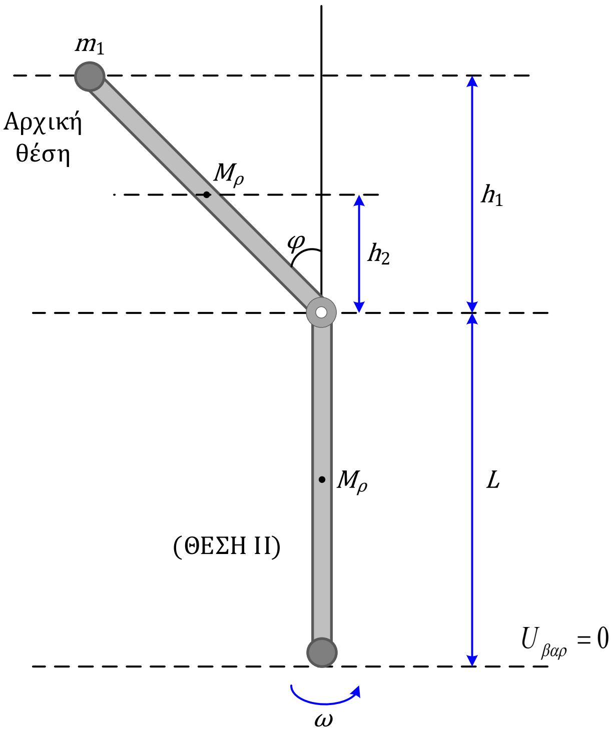
$$m_1 g\eta\mu\varphi L + \frac{M_\rho g\eta\mu\varphi L}{2} = \left(\frac{1}{3}M_\rho L^2 + m_1 L^2\right)\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή}$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{m_1 g\eta\mu\varphi + \frac{M_\rho g\eta\mu\varphi}{2}}{\frac{1}{3}M_\rho L + m_1 L} \text{ ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = 8\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_\rho = \Sigma\tau \text{ ή } \left(\frac{dL}{dt}\right)_\rho = I_\rho\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } \left(\frac{dL}{dt}\right)_\rho = \frac{1}{3}M_\rho L^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } \left(\frac{dL}{dt}\right)_\rho = 16\,\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2}.$$

Δ3. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για την κίνηση του συστήματος ράβδος – σώμα Σ_1 από την αρχική του θέση μέχρι τη θέση ΙΙ, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3

Έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)} \text{ ή } K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή}$$

$$m_1 g(h_1 + L) + M_\rho g(h_2 + L) = \frac{1}{2} I_{o\lambda}\omega^2 + M_\rho g \frac{L}{2} \text{ ή}$$

$$m_1 g(h_1 + L) + M_\rho g(h_2 + L) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} M_\rho L^2 + m_1 L^2\right)\omega^2 + M_\rho g \frac{L}{2} \ (1).$$

Όπως προκύπτει από το σχήμα 3 ισχύουν:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{h_1}{L} \text{ ή } h_1 = L\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή } h_1 = 0{,}8 \text{ m και}$$

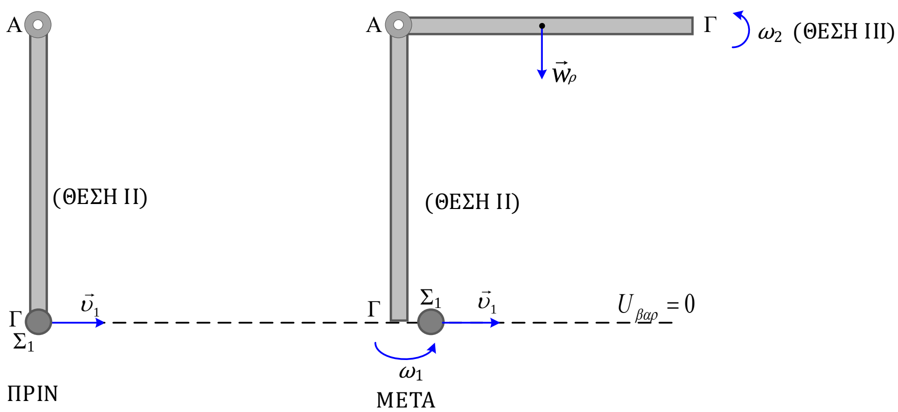
$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{h_2}{\frac{L}{2}} \text{ ή } h_2 = \frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή } h_2 = 0{,}4 \text{ m.}$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (1) προκύπτει ότι $\omega = 4\sqrt{3}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Το μέτρο υ_1 της γραμμικής ταχύτητας του σώματος Σ1 στη θέση ΙΙ είναι ίσο με:

$$\upsilon_1 = \omega L \text{ ή } \upsilon_1 = 4\sqrt{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ4. Αμέσως μετά την απόσπαση του σώματος Σ1 από τη ράβδο της οριζόντιας ταχύτητας του είναι ίσο με υ_1, ενώ το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου είναι ίσο με ω_1.



Σχήμα 4

Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα ράβδος – σώμα Σ1 κατά την απόσπαση του σώματος Σ1 έχουμε:

$$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \text{ ή } I_{o\lambda}\omega = I_\rho\omega_1 + m\upsilon_1 L \text{ ή}$$

$$\left(\frac{1}{3}M_\rho L^2 + m_1 L^2\right)\omega = \frac{1}{3}M_\rho L^2\omega_1 + m_1\omega L^2 \text{ ή}$$

$$\frac{1}{3}M_\rho L^2\omega = \frac{1}{3}M_\rho L^2\omega_1 \text{ ή}$$

$$\omega_1 = \omega = 4\sqrt{3}\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Έστω ω_2 το μέτρο της ταχύτητας της ράβδου τη χρονική στιγμή που γίνεται για πρώτη φορά οριζόντια μετά την απόσπαση του σώματος Σ1.

Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για την κίνηση της ράβδου μεταξύ των θέσεων ΙΙ και ΙΙΙ που φαίνονται στο σχήμα 4 έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)} \text{ ή } K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή}$$

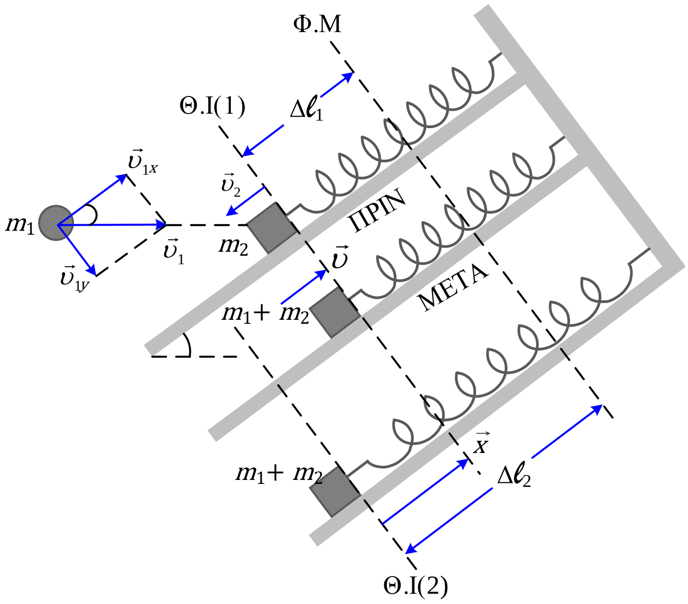
$$\frac{1}{2}I_\rho\omega_1^2 + M_\rho g\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I_\rho\omega_2^2 + M_\rho gL \ \text{ή}$$
$$\frac{1}{3}M_\rho L^2\omega_1^2 - M_\rho gL = \frac{1}{3}M_\rho L^2\omega_2^2 \ \text{ή}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}M_\rho L\omega_1^2 - M_\rho g}{\frac{1}{3}M_\rho L}} \ \text{ή} \ \omega_2 = 3\sqrt{2}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου στη θέση ΙΙΙ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} \ \text{ή} \ \frac{dK}{dt} = -\frac{\Sigma\tau\cdot d\theta}{dt} \ \text{ή} \ \frac{dK}{dt} = -\Sigma\tau\cdot\omega_2 \ \text{ή} \ \frac{dK}{dt} = -M_\rho g\frac{L}{2}\omega_2 \ \text{ή}$$
$$\frac{dK}{dt} = -90\sqrt{2}\,\frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Δ5. Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ1 πριν από την κρούση. Το μέτρο υ_2 της ταχύτητας του σώματος Σ2 ελάχιστα πριν από την κρούση είναι ίσο με:

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}A_1 \ \text{ή} \ \upsilon_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Έστω υ το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Από την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των σωμάτων Σ1 και Σ2 στον άξονα $x'x$ κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{x(\pi\rho\iota\nu)} = \vec{p}_{x(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} \ \text{ή} \ m_1\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\varphi - m_2\upsilon_2 = (m_1+m_2)\upsilon \ \text{ή} \ \upsilon = 0{,}3\sqrt{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ2 (Θ.Ι.(1)). Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \ \text{ή} \ m_2 g\eta\mu\varphi = k\Delta\ell_1 \ \text{ή} \ \Delta\ell_1 = \frac{m_2 g\eta\mu\varphi}{k}\,(2).$$

Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος (Θ.Ι.(2)). Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } (m_1 + m_2)g\eta\mu\varphi = k\Delta\ell_2 \text{ ή } \Delta\ell_2 = \frac{(m_1+m_2)g\eta\mu\varphi}{k} \text{ (3).}$$

Η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης $|x|$ του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του αμέσως μετά την κρούση είναι ίση με $|x| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$, ή λόγω των σχέσεων (2) και (3):

$$|x| = \frac{m_1 g\eta\mu\varphi}{k} \text{ ή } x = 0{,}06 \text{ m.}$$

Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 \text{ ή } A' = 0{,}12 \text{ m.}$$

Αφού η θετική φορά για την ταλάντωση του συσσωματώματος είναι η φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_2$, για $t = 0$ είναι $x = -0{,}06$ m.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση:

$$x = A'\eta\mu(\omega' t + \varphi_0) \text{ (4).}$$

Αν στη σχέση (4) θέσουμε $t = 0$ και $x = -0{,}06$ m, προκύπτει:

$$\eta\mu\varphi_0 = -\frac{1}{2} \text{ ή } \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{7\pi}{6} \text{ (5).}$$

Επειδή είναι $0 \le \varphi_0 < 2\pi$ rad, από τη σχέση (5) προκύπτει ότι $\varphi_0 = \frac{7\pi}{6}$ rad ή $\varphi_0 = \frac{11\pi}{6}$ rad. Για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{7\pi}{6}$ rad έχουμε $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6} < 0$, ενώ για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{11\pi}{6}$ rad έχουμε $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{11\pi}{6} > 0$. Αφού για $t = 0$ είναι $\upsilon < 0$, δεκτή λύση είναι η $\varphi_0 = \frac{7\pi}{6}$ rad.

Η γωνιακή συχνότητα ω' υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \text{ ή } \omega' = 5\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Τελικά, η σχέση (4) γράφεται:

$$x = 0{,}12\eta\mu\left(5t + \frac{7\pi}{6}\right) (S.I.).$$

3ο Κριτήριο Αξιολόγησης

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

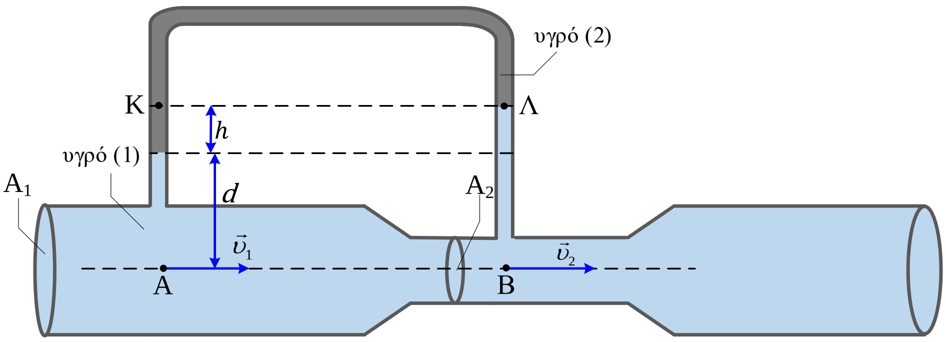
Α1. α, Α2. δ, Α3. β, Α4. γ

Α5. α. Σ, β. Λ, γ. Λ, δ. Λ, ε. Σ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Σωστή απάντηση είναι η β.

Έστω τα σημεία Α και Β που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των σημείων αυτών έχουμε:

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \text{ ή } \upsilon_2 = 2\upsilon_1 \ (1).$$

Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ των σημείων Α και Β έχουμε:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho_1\upsilon_1^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho_1\upsilon_2^2 \text{ ή } p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho_1(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2),$$

ή λόγω της σχέση (1):

$$p_A - p_B = \frac{3}{2}\rho_1\upsilon_1^2 \ (2).$$

Από τη συνθήκη υδροστατικής ισορροπίας μεταξύ των σημείων Κ και Α που φαίνονται στο σχήμα έχουμε:

$$p_A = p_K + \rho_2 gh + \rho_1 gd \text{ ή } p_K = p_A - \rho_2 gh - \rho_1 gd \ (3).$$

Από τη συνθήκη υδροστατικής ισορροπίας μεταξύ των σημείων Β και Λ που φαίνονται στο σχήμα έχουμε:

$$p_B = p_\Lambda + \rho_1 g(h+d) \text{ ή } p_\Lambda = p_B - \rho_1 gh - \rho_1 gd \ (4).$$

Για τα σημεία Κ και Λ ισχύει ότι $p_K = p_\Lambda$, ή λόγω των σχέσεων (3) και (4):

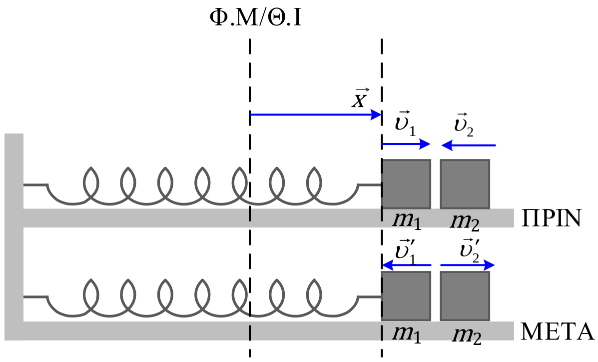
$$p_A - \rho_2 gh - \rho_1 gd = p_B - \rho_1 gh - \rho_1 gd \text{ ή } p_A - p_B = (\rho_2 - \rho_1)gh \ (5).$$

Από τις σχέσεις (3) και (5) προκύπτει:

$$\frac{3}{2}\rho_1\upsilon_1^2 = (\rho_2 - \rho_1)gh \text{ ή } \upsilon_1 = \sqrt{2gh}.$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Έστω $\vec{x}$ η απομάκρυνση του σώματος Σ1 από τη θέση ισορροπίας του και $\vec{\upsilon}_1$ η ταχύτητα ελάχιστα πριν από την κρούση.



Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του σώματος Σ$_1$ πριν από την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } E = 4U \text{ ή } \frac{1}{2}kA_1^2 = 4\frac{1}{2}kx^2 \text{ ή } x = \pm\frac{A_1}{2} \text{ ή } |x| = \frac{A_1}{2}\ (1).$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική και οι μάζες τους είναι ίσες, τα σώματα κατά τη διάρκεια της κρούσης ανταλλάσσουν ταχύτητες. Συνεπώς, ισχύει:

$$\upsilon_1' = \upsilon_2 \text{ ή } \upsilon_1' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}A_1\ (2).$$

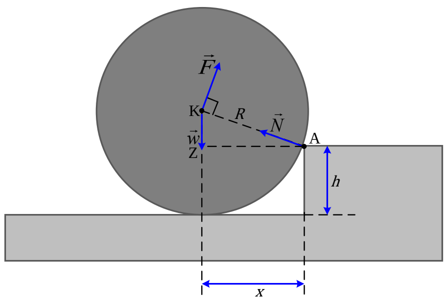
Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ$_1$ μετά την κρούση.
Από την Α.Δ.Ε έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}kx^2 \text{ ή } A_2^2 = \frac{m}{k}\upsilon_1'^2 + x^2,$$

ή λόγω των σχέσεων (1) και (2):

$$A_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}A_1.$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η α.



Για να υπερπηδήσει ο τροχός το εμπόδιο, θα πρέπει το μέτρο της ροπής της δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο Κ να είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της ροπής του βάρους $\vec{w}$. Συνεπώς, ισχύει:

$$|\tau_F| > |\tau_w| \text{ ή } FR > wx\ (1).$$

Από το τρίγωνο ΚΖΑ του παραπάνω σχήματος προκύπτει:

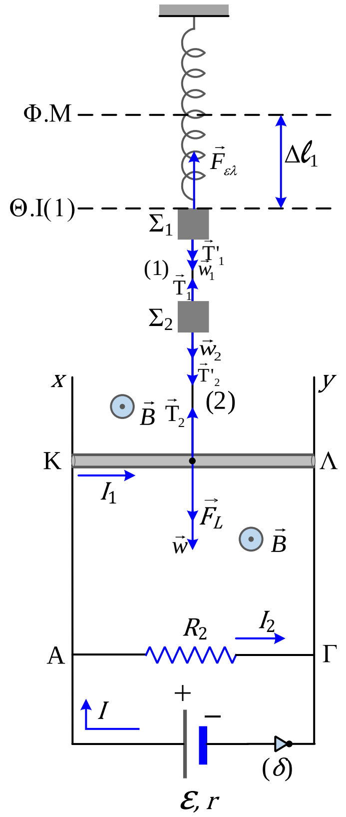
$$R^2 = x^2 + (R-h)^2 \text{ ή } x = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

Αντικαθιστώντας το x στη σχέση (1) έχουμε:

$$FR > w\frac{\sqrt{3}}{2}R \text{ ή } F > \frac{\sqrt{3}}{2}w.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα ρεύματα που διαρρέουν το κύκλωμα καθώς και οι δυνάμεις που δέχονται τα σώματα Σ_1, Σ_2 και η ράβδος ΚΛ.



Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{1,2}$ του εξωτερικού τμήματος του κυκλώματος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \text{ ή } R_{1,2} = 4\ \Omega.$$

Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{o\lambda}$ ολόκληρου του κυκλώματος είναι ίση με:

$$R_{o\lambda} = R_{1,2} + r \text{ ή } R_{o\lambda} = 5\ \Omega.$$

Η ένταση I του ρεύματος που διαρρέει την πηγή υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{o\lambda}} \text{ ή } I = 6\ \text{A}.$$

Η τάση $V_{K\Lambda}$ στα άκρα του αγωγού ΚΛ είναι ίση με:

$$V_{K\Lambda} = IR_{1,2} \text{ ή } V_{K\Lambda} = 24\ \text{V}.$$

Η ένταση I_1 του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ είναι:

$$I_1 = \frac{V_{K\Lambda}}{R_1} \text{ ή } I_1 = 4\ \text{A}.$$

Επομένως, το μέτρο της δύναμης Laplace $\vec{F}_L$ που δέχεται ο αγωγός ΚΛ είναι ίσο με:

$$F_L = BI_1\ell \text{ ή } F_L = 8\ \text{N}.$$

Αφού ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } T_2 = F_L + w \text{ ή } T_2 = mg + F_L \text{ ή } T_2 = 10\ \text{N}.$$

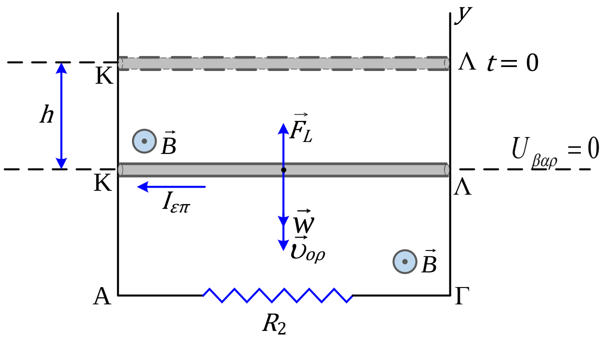
Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2. Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } w_1 + w_2 + T_2' = F_{\varepsilon\lambda} \text{ ή } m_1 g + m_2 g + T_2 = k\Delta\ell_1 \text{ ή } \Delta\ell_1 = 0{,}5\ \text{m}.$$

Η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο υπολογίζεται από τον τύπο:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\Delta\ell_1^2 \text{ ή } U_{\varepsilon\lambda} = 12{,}5\ \text{J}.$$

Γ2. Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιαστεί η φορά του ρεύματος που διαρρέει τη ράβδο τη χρονική στιγμή t_1 καθώς και οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος την ίδια χρονική στιγμή.



Το μέτρο της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο κύκλωμα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{|d\Phi|}{dt} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{BdS}{dt} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{Bdx\ell}{dt} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = B\upsilon\ell \ (1).$$

Τη χρονική στιγμή t_1 που η ράβδος ΚΛ αποκτά την οριακή της ταχύτητα ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } w = F_L \text{ ή } mg = BI_{\varepsilon\pi}\ell \text{ ή } mg = B\frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_1+R_2}\ell,$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$mg = \frac{B^2\ell^2\upsilon_{o\rho}}{R_1+R_2} \text{ ή } \upsilon_{o\rho} = \frac{mg(R_1+R_2)}{B^2\ell^2} \text{ ή } \upsilon_{o\rho} = 9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Έστω h η μετατόπιση του αγωγού ΚΛ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1. Ισχύει:

$$q_{\varepsilon\pi} = \frac{|\Delta\Phi|}{R_{o\lambda}} \text{ ή } q_{\varepsilon\pi} = \frac{B\Delta S}{R_1+R_2} \text{ ή } q_{\varepsilon\pi} = \frac{B\ell h}{R_1+R_2} \text{ ή } h = \frac{q_{\varepsilon\pi}(R_1+R_2)}{B\ell} \text{ ή } h = 4{,}5\ \text{m}.$$

Έστω $Q_{R_{o\lambda}}$ η θερμότητα Joule που αναπτύσσεται στο κύκλωμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1. Από την Α.Δ.Ε έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)} + Q_{R_{o\lambda}} \text{ ή } mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_{o\rho}^2 + Q_{R_{o\lambda}} \text{ ή } Q_{R_{o\lambda}} = mgh - \frac{1}{2}m\upsilon_{o\rho}^2 \text{ ή }$$

$$Q_{R_{o\lambda}} = 0{,}9\ \text{J}.$$

Γ3. Έστω $I'_{\varepsilon\pi}$ η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τη ράβδο τη χρονική στιγμή t στην οποία η τάση στα άκρα της είναι ίση με $V_{K\Lambda} = 6$ V. Ισχύει:

$$V_{K\Lambda} = I'_{\varepsilon\pi} R_2 \;\; \text{ή} \;\; I'_{\varepsilon\pi} = 0{,}5\text{ A}.$$

Έστω υ το μέτρο της ταχύτητας της ράβδου τη χρονική στιγμή t. Έχουμε:

$$I'_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_1+R_2} \;\; \text{ή} \;\; I'_{\varepsilon\pi} = \frac{B\upsilon\ell}{R_1+R_2} \;\; \text{ή} \;\; \upsilon = \frac{I'_{\varepsilon\pi}(R_1+R_2)}{B\ell} \;\; \text{ή} \;\; \upsilon = 4{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

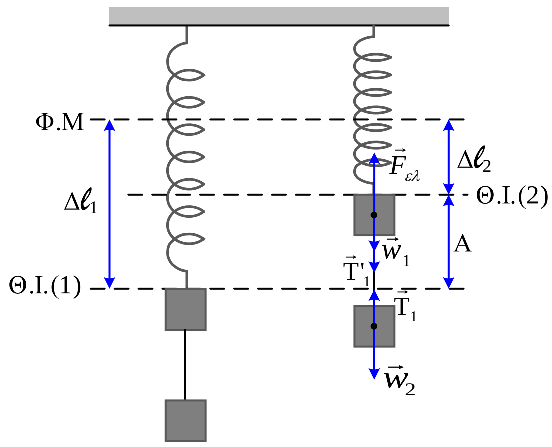
Το μέτρο της δύναμης Laplace που δέχεται η ράβδος τη χρονική στιγμή t είναι ίσο με:

$$F_L = BI'_{\varepsilon\pi}\ell \;\; \text{ή} \;\; F_L = 1\text{ N}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου τη χρονική στιγμή t υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} \;\; \text{ή} \;\; \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F dx}{dt} \;\; \text{ή} \;\; \frac{dK}{dt} = \Sigma F\upsilon \;\; \text{ή} \;\; \frac{dK}{dt} = (mg - F_L)\upsilon \;\; \text{ή} \;\; \frac{dK}{dt} = 4{,}5\,\frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Γ4. Μετά το κόψιμο του νήματος το σύστημα των σωμάτων Σ1 και Σ2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας (2) που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(2).

Από τη συνθήκη ισορροπίας για το σύστημα των σωμάτων Σ1 και Σ2 έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \;\; \text{ή} \;\; w_1 + w_2 = F_{\varepsilon\lambda} \;\; \text{ή} \;\; m_1 g + m_2 g = k\Delta\ell_2 \;\; \text{ή} \;\; \Delta\ell_2 = 0{,}4\text{ m}.$$

Από το σχήμα προκύπτει ότι το πλάτος A της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα των σωμάτων Σ1 και Σ2 είναι ίσο με:

$$A = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2 \;\; \text{ή} \;\; A = 0{,}1\text{ m}.$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από τη Θ.Ι.(2) του συστήματος των δύο σωμάτων είναι η:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \; (2).$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x = -A$, επομένως από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$-A = A\eta\mu\varphi_0 \;\; \text{ή} \;\; \eta\mu\varphi_0 = -1 \;\; \text{ή} \;\; \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{3\pi}{2} \; (3).$$

Επειδή είναι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ rad, από τη σχέση (3) προκύπτει ότι $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ rad.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = 5\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Άρα, η χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς που δέχεται το σώμα Σ2 προσδιορίζεται ως εξής:

$$\Sigma F_2 = -D_2 x \;\; ή \;\; \Sigma F_2 = -m_2\omega^2 x \;\; ή \;\; \Sigma F_2 = -m_2\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \;\; ή$$

$$\Sigma F_2 = -7{,}5\eta\mu\left(5t + \frac{3\pi}{2}\right) \; (S.I).$$

Γ5. Έστω ότι το σώμα Σ2 βρίσκεται σε μία τυχαία θέση του θετικού ημιάξονα με απομάκρυνση x. Ισχύει:

$$\Sigma F_2 = -D_2 x \;\; ή \;\; T_2 - w_2 = -m_2\omega^2 x \;\; ή \;\; T_2 = m_2 g - m_2\omega^2 x \;\; ή$$

$$T_2 = 30 - 75x \; (S.I.) \; (4), \text{ με } -0{,}1 \text{ m} \leq x \leq 0{,}1 \text{ m}.$$

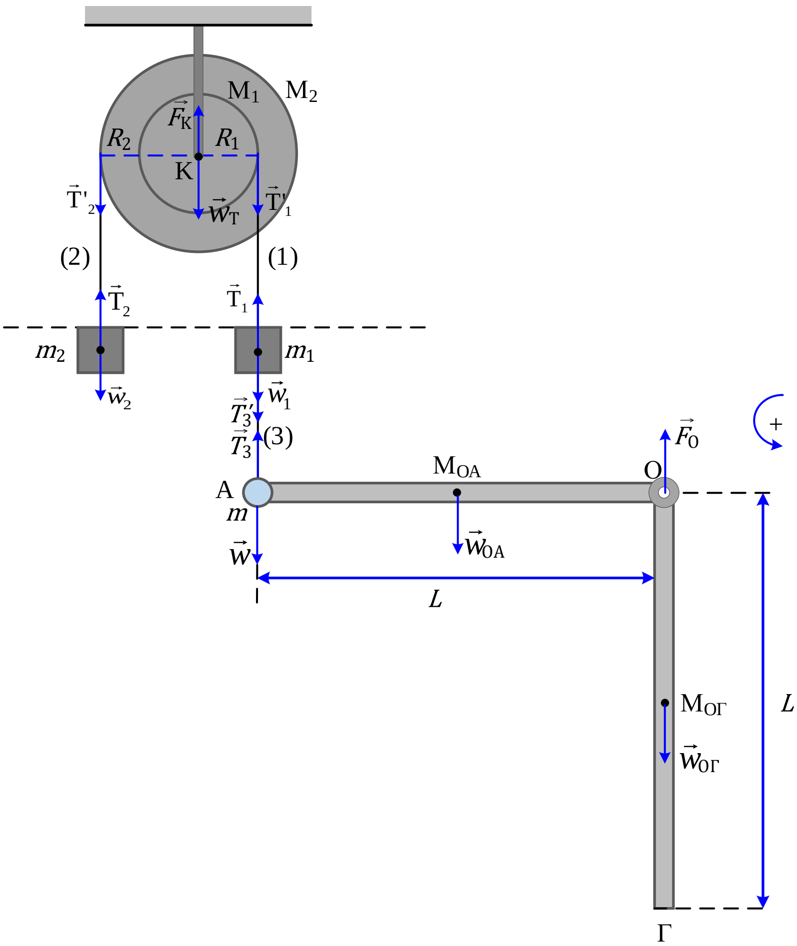
Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι για $x = -0{,}1$ m είναι $T_{max} = 37{,}5$ N, ενώ για $x = +0{,}1$ m είναι $T_{min} = 22{,}5$ N.

Άρα:

$$\frac{T_{max}}{T_{min}} = \frac{5}{3}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχονται τα σώματα.



Επειδή το σύστημα των δύο ράβδων και του σώματος Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(0)} = 0 \;\; ή \;\; \tau_{F_3} = \tau_w + \tau_{w_{OA}} + \tau_{F_0} + \tau_{w_{O\Gamma}} = 0 \;\; ή$$

$$-T_3 L + wL + w_{OA}\frac{L}{2} + 0 + 0 = 0 \;\; ή \;\; T_3 = mg + \frac{M_{OA}g}{2} \;\; ή \;\; T_3 = 20\text{ N}.$$

Επειδή το σώμα Σ_1 ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \;\; ή \;\; T_1 = w_1 + T_3 \;\; ή \;\; T_1 = 40\text{ N}.$$

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau = 0 \;\; ή \;\; \tau_{T_1'} + \tau_{T_2'} + \tau_{w_T} + \tau_{F_K} = 0 \;\; ή \;\; -T_1'R_1 + T_2'R_2 + 0 + 0 = 0 \;\; ή$$

$$T_1 R_1 = T_2 R_2 \;\; ή \;\; T_2 = 20\text{ N}.$$

Επειδή το σώμα Σ_2 ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_2 = \vec{0} \;\; ή \;\; T_2 = w_2 \;\; ή \;\; T_2 = m_2 g \;\; ή \;\; m_2 = 2\text{ kg}.$$

Δ2. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος των δύο ράβδων και του σώματος Σ ως προς τον άξονα περιστροφής των δύο ράβδων υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\left|\frac{dL}{dt}\right|_{ράβδοι-σώμα\;\Sigma} = \Sigma\tau \;\; ή \;\; \left|\frac{dL}{dt}\right|_{ράβδοι-σώμα\;\Sigma} = mgL + M_{OA}g\frac{L}{2} \;\; ή$$

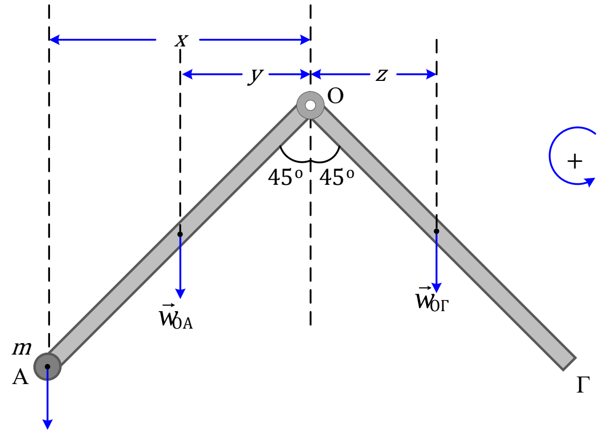
$$\left|\frac{dL}{dt}\right|_{ράβδοι-σώμα\;\Sigma} = \frac{80}{3}\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}.$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος της τροχαλίας και των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\left|\frac{dL}{dt}\right|_{τροχ-σώματα} = \Sigma\tau_{εξ} \;\; ή \;\; \left|\frac{dL}{dt}\right|_{τροχ-σώματα} = m_2 g R_2 - m_1 g R_1 \;\; ή$$

$$\left|\frac{dL}{dt}\right|_{τροχ-σώματα} = 20\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}.$$

Δ3. Τη χρονική στιγμή t που οι δύο ράβδοι σχηματίζουν γωνίες 45° με την κατακόρυφο που διέρχεται από το σημείο Ο το σύστημα των δύο ράβδων αποκτά τη μέγιστη γωνιακή του ταχύτητα.



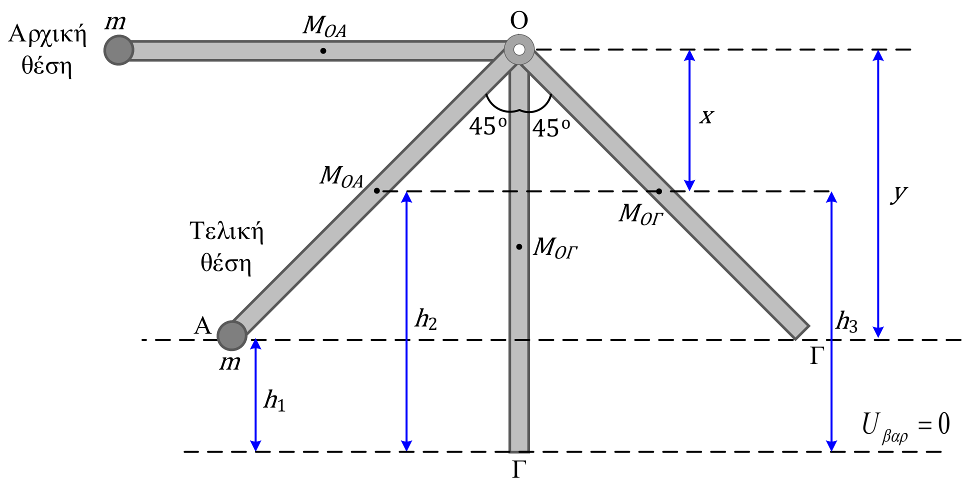
Τη χρονική στιγμή t ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \text{ ή } \tau_w + \tau_{w_{O\Gamma}} + \tau_{w_{OA}} = 0 \text{ ή } wx + w_{OA}y - w_{O\Gamma}z = 0 \text{ ή}$$

$$mg \cdot x + M_{OA} \cdot y = M_{O\Gamma} \cdot z \text{ ή } mgL\eta\mu 45° + M_{OA}g\frac{L}{2}\eta\mu 45° = M_{O\Gamma}g\frac{L}{2}\eta\mu 45° \text{ ή}$$

$$m + \frac{M_{OA}}{2} = \frac{M_{O\Gamma}}{2} \text{ ή } M_{O\Gamma} = 4 \text{ kg}.$$

Δ4. Έστω ω_{max} το μέτρο της μέγιστης γωνιακής ταχύτητας που αποκτά το σύστημα των δύο ράβδων και του σώματος Σ.



Από την Α.Δ.Μ.Ε μεταξύ της αρχικής και της τελικής θέσης του συστήματος που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)} \text{ ή } K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή}$$

$$mgL + M_{OA}gL + M_{O\Gamma}g\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega_{max}^2 + mgh_1 + M_{OA}gh_2 + M_{O\Gamma}gh_3 \text{ ή}$$

$$mgL + M_{OA}gL + M_{O\Gamma}g\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}M_{OA}L^2 + M_{OA}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}M_{O\Gamma}L^2 + M_{O\Gamma}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. mL^2\right]\omega_{max}^2 + mg(L-y) + M_{OA}g(L-x) + M_{O\Gamma}g(L-x) \text{ ή}$$

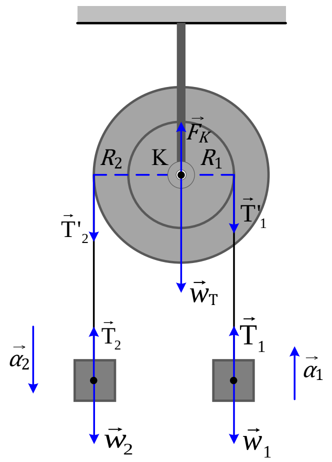
$$mgL + M_{OA}gL + M_{O\Gamma}g\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}M_{OA}L^2 + \frac{1}{3}M_{O\Gamma}L^2 + mL^2\right)\omega_{max}^2 +$$

$$mg(L - L\sigma\upsilon\nu 45°) + M_{OA}g\left(L - \frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu 45°\right) + M_{O\Gamma}g\left(L - \frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu 45°\right) \text{ ή}$$

$$\omega_{max} = 2\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Δ5. Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας και α_1, α_2 τα μέτρα των επιταχύνσεων των σωμάτων Σ1 και Σ2 αντίστοιχα. Επειδή τα νήματα δεν ολισθαίνουν στις περιφέρειες των δύο κυλίνδρων, ισχύουν:

$$\alpha_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu}R_1 \text{ και } \alpha_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu}R_2.$$



Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του σώματος Σ1 έχουμε:

$$\Sigma F_1 = m_1\alpha_1 \text{ ή } T_1 - w_1 = m_1\alpha_1 \text{ ή } T_1 = m_1 g + m_1\alpha_{\gamma\omega\nu} R_1 \text{ (1).}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του σώματος Σ2 έχουμε:

$$\Sigma F_2 = m_2\alpha_2 \text{ ή } w_2 - T_2 = m_2\alpha_2 \text{ ή } T_2 = m_2 g + m_2\alpha_{\gamma\omega\nu} R_2 \text{ (2).}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την περιστροφή της τροχαλίας έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } T_2'R_2 - T_1'R_1 = \left(\tfrac{1}{2}M_1R_1^2 + \tfrac{1}{2}M_2R_2^2\right)\alpha_{\gamma\omega\nu},$$

ή λόγω των σχέσεων (1) και (2):

$$\left(m_2 g - m_2\alpha_{\gamma\omega\nu} R_2\right)R_2 - \left(m_1 g + m_1\alpha_{\gamma\omega\nu} R_1\right)R_1 = \left(\tfrac{1}{2}M_1R_1^2 + \tfrac{1}{2}M_2R_2^2\right)\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή}$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{m_2 g R_2 - m_1 g R_1}{\frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2 + m_2R_2^2 + m_1R_1^2} \text{ ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Έστω h_1 και h_2 οι μετατοπίσεις των σωμάτων Σ1 και Σ2 αντίστοιχα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία τα σώματα απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 6$ m. Αφού τη χρονική στιγμή $t = 0$ τα σώματα Σ1 και Σ2 βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, ισχύει:

$$d = h_1 + h_2 \text{ ή } d = \tfrac{1}{2}\alpha_1 t_1^2 + \tfrac{1}{2}\alpha_2 t_1^2 \text{ ή } d = \left(\tfrac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}R_1 + \tfrac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}R_2\right)t_1^2 \text{ ή } t_1 = 2\text{ s}.$$

Το μέτρο της στροφορμής του συστήματος της τροχαλίας και των σωμάτων Σ1 και Σ2 ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$L_{o\lambda} = L_{\tau\rho o\chi} + L_1 + L_2 \text{ ή } L_{o\lambda} = I\omega + m_1 \upsilon_1 R_1 + m_2 \upsilon_2 R_2 \text{ ή}$$

$$L_{o\lambda} = \left(\tfrac{1}{2}M_1R_1^2 + \tfrac{1}{2}M_2R_2^2\right)\omega + m_1R_1^2\omega + m_2R_2^2\omega \text{ ή}$$

$$L_{o\lambda} = \left(\tfrac{1}{2}M_1R_1^2 + \tfrac{1}{2}M_2R_2^2 + m_1R_1^2 + m_2R_2^2\right)\omega \text{ (3).}$$

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \text{ ή } \omega = 2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Συνεπώς, από τη σχέση (3) προκύπτει ότι $L_{o\lambda} = 40\,\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$.

4ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

Α1. α, Α2. δ, Α3. γ, Α4. α

Α5. α. Λ, β. Σ, γ. Λ, δ. Λ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Το εμβαδόν διατομής A_2 της φλέβας του νερού στη θέση 2 είναι ίσο με:

$$A_2 = A_1 - \frac{75}{100}A_1 \text{ ή } A_2 = \frac{25}{100}A_1 \text{ ή } A_2 = 0{,}25\, A_1.$$

Έστω υ_2 το μέτρο της ταχύτητας του νερού στο σημείο 2.

Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των σημείων 1 και 2 έχουμε:

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \text{ ή } \upsilon_2 = 4\upsilon_1.$$

Η κίνηση του νερού από το σημείο 1 στο σημείο 2 γίνεται με επιτάχυνση ίση με $\vec{g}$. Έστω Δt ο χρόνος κίνησης του νερού από το σημείο 1 στο σημείο 2. Ισχύει:

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 + g\Delta t \text{ ή } \Delta t = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{g} \text{ ή } \Delta t = \frac{3\upsilon_1}{g}.$$

Η παροχή Π της φλέβας του νερού που εξέρχεται από τη βρύση είναι ίση με $\Pi = A\upsilon_1$. Ο όγκος V της φλέβας του νερού που υπάρχει μεταξύ των σημείων 1 και 2 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Pi = \frac{V}{\Delta t} \text{ ή } V = \Pi\Delta t \text{ ή } V = A\upsilon_1 \cdot \frac{3\upsilon_1}{g} \text{ ή } V = 3\frac{A\upsilon_1^2}{g}.$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Έστω T_{01} η ιδιοπερίοδος της ταλάντωσης του συστήματος (k_1, m_1) και T_{02} η ιδιοπερίοδος της ταλάντωσης του συστήματος (k_2, m_2). Ισχύει:

$$\frac{T_{01}}{2} = 2\frac{T_{02}}{2} \text{ ή } T_{01} = 2T_{02} \text{ ή } f_{02} = 2f_{01} \text{ ή } f_{02} = 2\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \text{ ή } f_{02} = \frac{10}{\pi}\text{ Hz}.$$

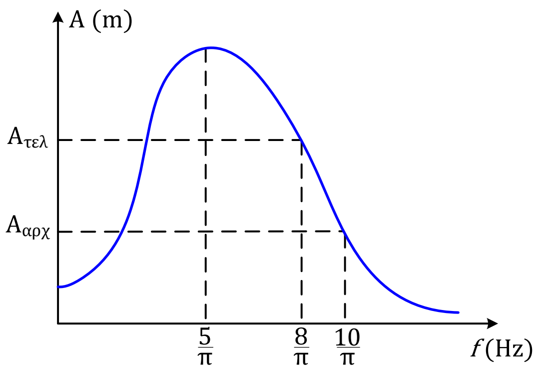
Αρχικά, ισχύουν οι σχέσεις $f > f_{01}$ και $f = f_{02}$.

Επομένως, αρχικά το σύστημα (k_2, m_2) βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού και το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης που εκτελεί είναι το μέγιστο δυνατό.

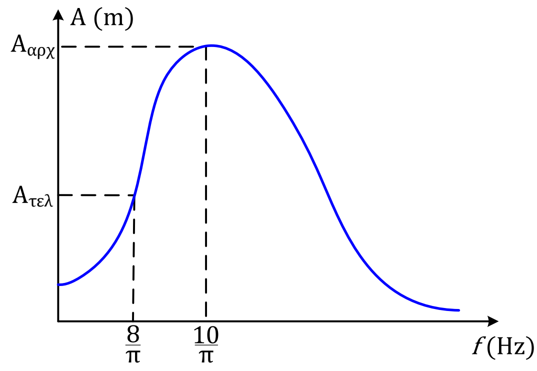
Αν μειώσουμε τη συχνότητα της σανίδας κατά 20%, τότε η συχνότητα f' της εξαναγκασμένης ταλάντωσης που εκτελούν τα δύο συστήματα θα γίνει ίση με:

$$f' = f - \frac{20}{100}f \text{ ή } f' = 0{,}8f \text{ ή } f' = \frac{8}{\pi}\text{ Hz}.$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις του πλάτους σε συνάρτηση με τη συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης για καθένα από τα δύο συστήματα ελατήριο – σώμα.



Σύστημα (k_1, m_1)



Σύστημα (k_2, m_2)

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω διαγράμματα, αν η συχνότητα του διεγέρτη (σανίδα) μειωθεί από την τιμή $f = \frac{10}{\pi}$ Hz στην τιμή $f' = \frac{8}{\pi}$ Hz, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του συστήματος (k_1, m_1) θα αυξηθεί, ενώ το πλάτος τηςεξαναγκασμένης ταλάντωσης του συστήματος (k_2, m_2) θα μειωθεί.

Β3. Σωστή απάντηση είναι η β.

Έστω ω_1 το μέτρο της αρχικής γωνιακής ταχύτητας με την οποία περιστρέφεται το πλαίσιο. Το πλάτος I_1 της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο είναι ίσο με:

$$I_1 = \frac{E_{\varepsilon\pi(\max)}}{R_{o\lambda}} \text{ ή } I_1 = \frac{N\omega_1 BA}{R} \text{ (1).}$$

Η θερμότητα Joule Q_1 που αποδίδει ο αντιστάτης στο περιβάλλον σε χρόνο $\Delta t_1 = 10T_1$, όπου T_1 η περίοδος περιστροφής του πλαισίου, είναι ίση με:

$$Q_1 = I_{\varepsilon\nu}^2 R\Delta t_1 \text{ ή } Q_1 = \left(\frac{I_1}{\sqrt{2}}\right)^2 R10T_1 \text{ ή } Q_1 = 5I_1^2 RT_1 \text{ ή}$$

$$Q_1 = 5I_1^2 R\frac{2\pi}{\omega_1} \text{ ή } Q_1 = 10\pi\frac{I_1^2 R}{\omega_1},$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$Q_1 = 10\pi\frac{\frac{N^2\omega_1^2 B^2 A^2}{R^2}R}{\omega_1} \text{ ή } Q_1 = 10\pi\frac{N^2 B^2 A^2 \omega_1}{R} \text{ (2).}$$

Έστω ω_2 το μέτρο της νέας γωνιακής ταχύτητας του πλαισίου.

Το πλάτος I_2 της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο, είναι ίσο με:

$$I_2 = \frac{E'_{\varepsilon\pi(\max)}}{R} \text{ ή } I_2 = \frac{N\omega_2 BA}{R} \text{ (3).}$$

Η θερμότητα Joule Q_2 που αποδίδει ο αντιστάτης στο περιβάλλον σε χρόνο $\Delta t_2 = 10T_2$, όπου T_2 η νέα περίοδος περιστροφής του πλαισίου, είναι ίση με:

$$Q_2 = I_{\varepsilon\nu}^2 R\Delta t_2 \text{ ή } Q_2 = \left(\frac{I_2}{\sqrt{2}}\right)^2 R10T_2 \text{ ή } Q_2 = 5I_2^2 RT_2 \text{ ή}$$

$$Q_2 = 5I_2^2 R\frac{2\pi}{\omega_2} \text{ ή } Q_2 = 10\pi\frac{I_2^2 R}{\omega_2},$$

ή λόγω της σχέσης (3):

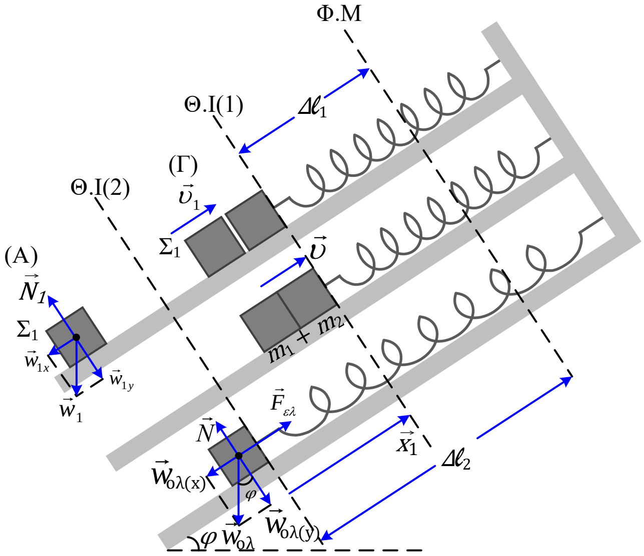
$$Q_2 = 10\pi\frac{N^2B^2A^2\omega_2}{R} \text{ (4).}$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (2) και (4), προκύπτει:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \text{ ή } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{2} \text{ ή } Q_2 = 2Q_1 \text{ ή } Q_2 = 2Q.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω υ_1 το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος ακριβώς πριν από την κρούση.



Από το Θ.Μ.Κ.Ε για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση μεταξύ των θέσεων (Α) και (Γ) που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_w \text{ ή } \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = -m_1 g\eta\mu\varphi S \text{ ή } \upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2g\eta\mu\varphi S} \text{ ή}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Έστω υ το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Ο για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)} = \vec{p}_{o\lambda(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} \text{ ή } m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon \text{ ή } \upsilon = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\pi = \frac{Q_K}{K_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)}}\cdot 100\% \text{ ή } \pi = \frac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}\cdot 100\% \text{ ή } \pi = 75\%.$$

Γ2. Στη Θ.Ι.(2) του συσσωματώματος ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_2 = \vec{0} \text{ ή } (m_1 + m_2)g\eta\mu\varphi = k\Delta\ell_2 \text{ (1).}$$

Σε μία τυχαία θέση με απομάκρυνση $\vec{x}$ κάτω από τη Θ.Ι.(2) ισχύει:

$$\Sigma F = w_{o\lambda(x)} - F_{\varepsilon\lambda} \text{ ή}$$
$$\Sigma F = (m_1 + m_2)g\eta\mu\varphi - k(\Delta\ell_2 + x) \text{ ή}$$
$$\Sigma F = (m_1 + m_2)g\eta\mu\varphi - k\Delta\ell_2 - kx,$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$\Sigma F = -kx.$$

Επομένως, μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

Γ3. Στη Θ.Ι.(1) ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } m_2 g\eta\mu\varphi = k\Delta\ell_1 \text{ ή } \Delta\ell_1 = 0{,}15 \text{ m.}$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $\Delta\ell_2 = 0{,}2$ m.

Έστω x_1 η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του (Θ.Ι.(2)) αμέσως μετά την κρούση. Ισχύει:

$$|x_1| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 \text{ ή } |x_1| = 0{,}05 \text{ m.}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση του συσσωματώματος, έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \text{ ή } A = 0{,}1 \text{ m.}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι η:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \text{ (2).}$$

Για $t = 0$ είναι $x = x_1 = +0{,}05$ m. Από τη σχέση (2) για $t = 0$ και $x = +0{,}05$ m προκύπτει:

$$\eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} \text{ ή } \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{6} \text{ (3).}$$

Αφού $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ rad, από τη σχέση (3) προκύπτει ότι $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$rad ή $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$rad.

Για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ είναι $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0$, ενώ για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ είναι $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0$. Αφού τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι θετική, δεκτή λύση είναι η $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$rad.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \text{ ή } \omega = 5\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του συσσωματώματος είναι η:

$$\alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \text{ ή } \alpha = -2{,}5\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{6}\right) \ (S.I.).$$

Γ4. Έστω x_2 η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη Θ.Ι.(2) τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του συσσωματώματος έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } E = 3U + U \text{ ή } \frac{1}{2}DA^2 = 4\frac{1}{2}Dx_2^2 \text{ ή } x_2 = \pm\frac{A}{2} \text{ ή } x_2 = -\frac{A}{2} \text{ ή}$$

$$x_2 = -0{,}05 \text{ m}.$$

Η ταχύτητα υ_2 του συσσωματώματος εκείνη τη χρονική στιγμή είναι αρνητική. Ισχύει:

$$K = 3U \text{ ή } \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_2^2 = 3\frac{1}{2}Dx_2^2 \text{ ή } \upsilon_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ο ζητούμενος ρυθμός υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F\upsilon \text{ ή } \frac{dK}{dt} = -Dx_2\upsilon_2 \text{ ή } \frac{dK}{dt} = -1{,}25\sqrt{3}\frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Γ5. Έστω x_3 η απομάκρυνση του συσσωματώματος τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή και $\Delta\ell_3$ η παραμόρφωση του ελατηρίου (επιμήκυνση ή συμπίεση) σε σχέση με το φυσικό του μήκος την ίδια χρονική στιγμή. Ισχύει:

$$U = U_{\varepsilon\lambda} \text{ ή } \frac{1}{2}Dx_3^2 = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_3)^2 \text{ ή } |x_3| = \Delta\ell_3 \text{ (4)}.$$

Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι το συσσωμάτωμα δεν μπορεί να βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, γιατί τότε είναι $0 = 0{,}2$ m (άτοπο).

Έστω ότι η θέση που ψάχνουμε είναι κάτω από τη Θ.Ι.(2). Τότε από τη σχέση (4) προκύπτει ότι $|x_3| = \Delta\ell_2 + |x_3|$ ή $0 = 0{,}2$ m (άτοπο).

Αφού είναι $A < \Delta\ell_2$, το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι συνεχώς επιμηκυμένο σε σχέση με το φυσικό του μήκος.

Έστω ότι η θέση που ψάχνουμε είναι πάνω από τη Θ.Ι(2). Από τη σχέση (4) προκύπτει:

$$|x_3| = \Delta\ell_2 - |x_3| \text{ ή } 2|x_3| = \Delta\ell_2 \text{ ή } |x_3| = \frac{\Delta\ell_2}{2} \text{ ή } |x_3| = 0{,}1 \text{ m ή } x_3 = +0{,}1 \text{ m}.$$

Επομένως, το σώμα εκείνη τη χρονική στιγμή βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του. Από τη σχέση (2) για $x = x_3 = +0{,}1$ m προκύπτει:

$$0{,}1 = 0{,}1\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ ή } \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \text{ ή } \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} \text{ ή}$$

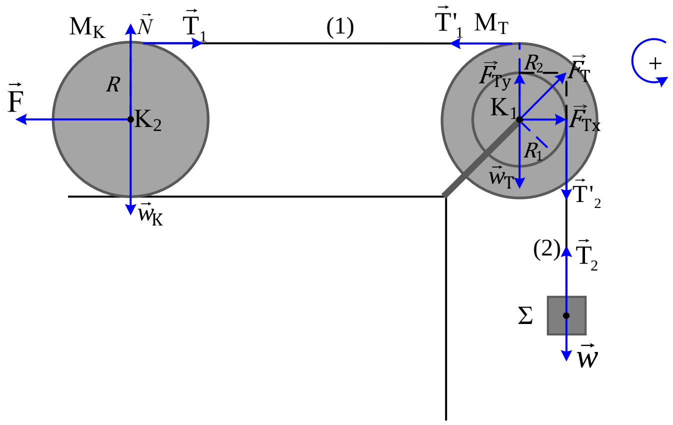
$$5t + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (5), με } k = 0,1,2,3 \ldots .$$

Από τη σχέση (5) για $k = 0$ προκύπτει:

$$5t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ ή } t = \frac{\pi}{15} \text{s}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχονται όλα τα σώματα.



Σχήμα 1

Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } T_2 = w \text{ ή } T_2 = mg \text{ ή } T_2 = 20 \text{ N}.$$

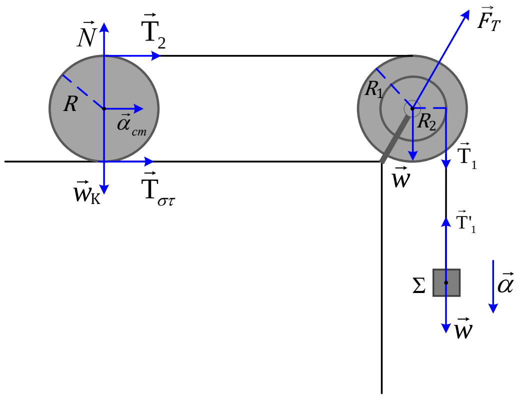
Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(K_1)} = 0 \text{ ή } -T'_2R_2 + T'_1R_1 = 0 \text{ ή } T_2R_2 = T_1R_1 \text{ ή } T_1 = 10 \text{ N}.$$

Επειδή ο κύλινδρος ισορροπεί, ισχύουν:

- $\Sigma\tau_{(K_2)} = 0$ ή $T_{\sigma\tau}R - T_1R = 0$ ή $T_{\sigma\tau} = T_1$ ή $T_{\sigma\tau} = 10$ N.
- $\Sigma\vec{F}_x = \vec{0}$ ή $F = T_1 + T_{\sigma\tau}$ ή $F = 20$ N.

Δ2. Οι δυνάμεις που δέχονται τα σώματα κατά τη διάρκεια των κινήσεων τους φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω α το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα Σ, $\alpha_{\gamma\omega\nu(T)}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας, α_{cm} και $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας και της γωνιακής επιτάχυνσης αντίστοιχα του κυλίνδρου.

Επειδή τα νήματα δεν ολισθαίνουν στις περιφέρειες του κυλίνδρου, της τροχαλίας και της κυκλικής εγκοπής, ισχύουν:

$\alpha = \alpha_{\gamma\omega\nu(T)}R_2$ (3) και

$2\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu(T)}R_1$ ή $2\alpha_{cm} = 2\alpha_{\gamma\omega\nu(T)}R_2$ ή $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu(T)}R_2$ (4).

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει:

$$\alpha_{cm} = \alpha \text{ (5).}$$

Επειδή ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει:

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R \text{ (6).}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του σώματος Σ έχουμε:

$$\Sigma F = m\alpha \text{ ή } w - T_2 = m\alpha \text{ ή } mg - T_2 = m\alpha \text{ ή } T_2 = mg - m\alpha \text{ (7).}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την περιστροφή της τροχαλίας έχουμε:

$$\Sigma\tau = I_T\alpha_{\gamma\omega\nu(T)} \text{ ή } T_2'R_2 - T_1'R_1 = \frac{1}{2}M_TR_1^2\alpha_{\gamma\omega\nu(T)} \text{ ή}$$

$$T_2R_2 - 2T_1R_2 = 2M_TR_2^2\alpha_{\gamma\omega\nu(T)} \text{ ή } T_2 - 2T_1 = 2M_TR_2\alpha_{\gamma\omega\nu(T)},$$

ή λόγω της σχέσης (3):

$$T_2 - 2T_1 = 2M_T\alpha \text{ (8).}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του κυλίνδρου έχουμε:

$$\Sigma F_x = M_K\alpha_{cm} \text{ ή } T_1 + T_{\sigma\tau} = M_K\alpha_{cm} \text{ (9).}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την περιστροφή του κυλίνδρου έχουμε:

$$\Sigma\tau = I_K\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } T_1R - T_{\sigma\tau}R = \frac{1}{2}M_KR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } T_1 - T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}M_KR\alpha_{\gamma\omega\nu},$$

ή λόγω της σχέσης (6):

$$T_1 - T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}M_K\alpha_{cm} \text{ (10).}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (9) και (10) προκύπτει:

$$2T_1 = \frac{3}{2}M_K\alpha_{cm} \text{ ή } T_1 = \frac{3}{4}M_K\alpha_{cm},$$

ή λόγω της σχέσης (5):

$$T_1 = \frac{3}{4}M_K\alpha \text{ (11).}$$

Από τη σχέση (8), λόγω των σχέσεων (7) και (11) προκύπτει:

$$mg - m\alpha - \frac{3}{2}M_K\alpha = 2M_T\alpha \text{ ή } \alpha = \frac{mg}{m + \frac{3}{2}M_K + 2M_T} \text{ ή } \alpha = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Δ3. Το μέτρο υ_{cm} της ταχύτητας του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με:

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}t_1 \text{ ή } \upsilon_{cm} = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Το μέτρο υ της ταχύτητας του ανώτερου σημείου του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με:

$$\upsilon = 2\upsilon_{cm} \text{ ή } \upsilon = 8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι $\alpha_{\gamma\omega\nu(T)} = 10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$.

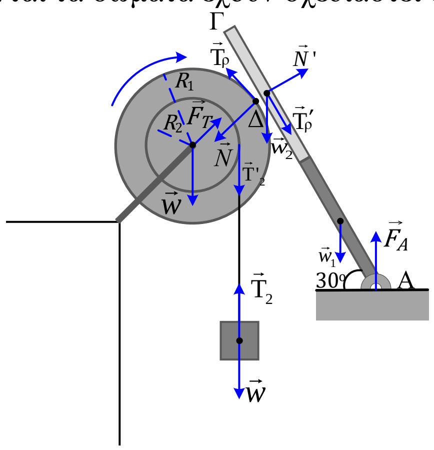
Η γωνία θ κατά την οποία έχει περιστραφεί η τροχαλία από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu(T)}t_1^2 \ \text{ ή } \ \theta = 20\,\mathrm{rad}.$$

Ο αριθμός N των περιστροφών που έχει εκτελέσει η τροχαλία από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσος με:

$$N = \frac{\theta}{2\pi} \ \text{ ή } \ N = \frac{10}{\pi}\ \text{περιστροφές.}$$

Δ4. Οι δυνάμεις που δέχονται τα σώματα έχουν σχεδιαστεί στο παρακάτω σχήμα.



Το μέτρο ω_1 της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu(T)}t_1 \ \text{ ή } \ \omega_1 = 20\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}.$$

Έστω $\alpha'_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης της τροχαλίας. Ισχύει:

$$\omega = \omega_1 - \alpha'_{\gamma\omega\nu}(t_2 - t_1) \ \text{ ή } \ 0 = \omega_1 - \alpha'_{\gamma\omega\nu}(t_2 - t_1) \ \text{ ή } \ \alpha'_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_1}{t_2 - t_1} \ \text{ ή}$$

$$\alpha'_{\gamma\omega\nu} = 10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}.$$

Έστω α' το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος Σ. Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας, ισχύει:

$$\alpha' = \alpha'_{\gamma\omega\nu}R_2 \ \text{ ή } \ \alpha' = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την περιστροφή της τροχαλίας έχουμε:

$$\Sigma\tau = I_T\alpha'_{\gamma\omega\nu} \ \text{ ή } \ T_\rho R_1 - T_2' R_2 = \frac{1}{2}M_T R_1^2 \alpha'_{\gamma\omega\nu} \ \text{ ή}$$

$$T_\rho 2R_2 - T_2' R_2 = \frac{1}{2}M_T (2R_2)^2 \alpha'_{\gamma\omega\nu} \ \text{ ή}$$

$$2T_\rho - T_2 = 2M_T R_2 \alpha'_{\gamma\omega\nu} \ \text{ ή } \ 2T_\rho - T_2 = 2M_T\alpha' \ (12).$$

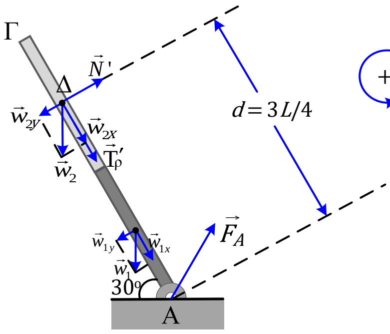
Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για το σώμα Σ έχουμε:

$$\Sigma F = m\alpha' \ \text{ ή } \ T_2 - w = m\alpha' \ \text{ ή } \ T_2 = mg + m\alpha' \ (13).$$

Από τη σχέση (12), λόγω τη σχέσης (13), προκύπτει:

$$2T_\rho - (mg + m\alpha') = 2M_T\alpha' \;\; \text{ή} \;\; T_\rho = \frac{mg+(2M_T+m)\alpha'}{2} \;\; \text{ή} \;\; T_\rho = 14 \text{ N}.$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί ξεχωριστά οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος ΑΓ.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \;\; \text{ή} \;\; w_{2y}\frac{3L}{4} - N'\frac{3L}{4} + w_{1y}\frac{L}{4} = 0 \;\; \text{ή} \;\; 3w_2\sigma\upsilon\nu30° - 3N + w_1\sigma\upsilon\nu30° = 0 \;\; \text{ή}$$

$$3m_2g\sigma\upsilon\nu30° + m_1g\sigma\upsilon\nu30° = 3N \;\; \text{ή} \;\; N = \frac{3m_2g\sigma\upsilon\nu30°+m_1g\sigma\upsilon\nu30°}{3} \;\; \text{ή} \;\; N = \frac{70\sqrt{3}}{3} \text{ N}.$$

Το μέτρο της τριβής ολίσθησης T_ρ μεταξύ της τροχαλίας και της ράβδου δίνεται από τη σχέση:

$$T_\rho = \mu N \;\; \text{ή} \;\; \mu = \frac{T_\rho}{N} \;\; \text{ή} \;\; \mu = 0{,}2\sqrt{3}.$$

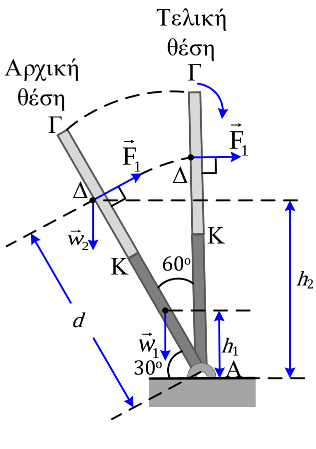
Δ5. Η ροπή αδράνειας I της ράβδου ΑΓ ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι ίση με:

$$I = I_{AK} + I_{K\Gamma} \;\; \text{ή} \;\; I = \frac{1}{12}m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_1\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \frac{1}{12}m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{3L}{4}\right)^2 \;\; \text{ή}$$

$$I = \frac{4m_1L^2}{48} + \frac{28m_2L^2}{48} \;\; \text{ή} \;\; I = \frac{(4m_1+28m_2)L^2}{48} \;\; \text{ή} \;\; I = 90 \text{ kgm}^2.$$

Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου τη χρονική στιγμή t_3 την οποία γίνεται για πρώτη φορά κατακόρυφη.

Από το Θ.Μ.Κ.Ε για την κίνηση της ράβδου από την αρχική μέχρι την τελική θέση που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα έχουμε:



$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F_1} + W_{w_1} + W_{w_2} \text{ ή}$$
$$\frac{1}{2}I\omega^2 = F_1 d\frac{\pi}{3} + U_{\alpha\rho\chi(1)} - U_{\tau\varepsilon\lambda(1)} + U_{\alpha\rho\chi(2)} - U_{\tau\varepsilon\lambda(2)} \text{ ή}$$
$$\frac{1}{2}I\omega^2 = F_1\left(\frac{3L}{4}\right)\frac{\pi}{3} + m_1 g h_1 - m_1 g\frac{L}{4} + m_2 g h_2 - m_2 g d \text{ ή}$$
$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{4}F_1 L\,\pi + m_1 g\left(h_1 - \frac{L}{4}\right) + m_2 g\left(h_2 - \frac{3L}{4}\right) \text{ (13).}$$

Από το τελευταίο σχήμα προκύπτουν τα εξής:

$$\sigma\upsilon\nu 60° = \frac{h_1}{\frac{L}{4}} \text{ ή } h_1 = \frac{L}{8} \text{ (14) και}$$
$$\sigma\upsilon\nu 60° = \frac{h_2}{\frac{3L}{4}} \text{ ή } h_2 = \frac{3L}{8} \text{ (15).}$$

Η σχέση (13), λόγω των σχέσεων (14) και (15), γίνεται:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{4}F_1 L\,\pi - \frac{1}{8}m_1 g L - \frac{3}{8}m_2 g L \text{ ή } \omega = \sqrt{\frac{\frac{F_1 L\,\pi}{2} - \frac{m_1 g L + 3m_2 g L}{4}}{I}} \text{ ή}$$
$$\omega = 1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}.$$

5ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

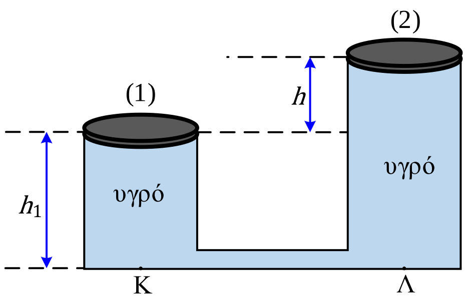
Α1. δ, Α2. β, Α3. β,Α4. γ

Α5. α. Λ, β. Σ, γ. Λ, δ. Σ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Έστω τα σημεία Κ και Λ που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Η πίεση p_K στο σημείο Κ υπολογίζεται από τη συνθήκη υδροστατικής ισορροπίας σύμφωνα με τη σχέση:

$$p_K = p_{\varepsilon\xi\omega\tau} + p_{\upsilon\delta\rho} \text{ ή } p_K = \frac{w_1}{A} + p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h_1 \text{ (1).}$$

Η πίεση p_Λ στο σημείο Λ υπολογίζεται από τη συνθήκη υδροστατικής ισορροπίας σύμφωνα με τη σχέση:

$$p_\Lambda = p_{\varepsilon\xi\omega\tau} + p_{\upsilon\delta\rho} \text{ ή } p_\Lambda = \frac{w_2}{A} + p_{\alpha\tau\mu} + \rho g (h_1 + h) \text{ (2).}$$

Όμως ισχύει ότι $p_K = p_\Lambda$, ή λόγω των σχέσεων (1) και (2):

$$\frac{w_1}{A} + p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h_1 = \frac{w_2}{A} + p_{\alpha\tau\mu} + \rho g (h_1 + h) \text{ ή } \frac{m_1 g}{A} = \frac{m_2 g}{A} + \rho g h \text{ ή}$$

$$m_1 = m_2 + \rho A h.$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η β.

Συγκρίνοντας τη χρονική εξίσωση του διακροτήματος:

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

με τη δοθείσα εξίσωση προκύπτουν τα εξής:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ ή } \omega_1 - \omega_2 = 8\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ (1)}$$

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 400\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ ή } \omega_1 + \omega_2 = 800\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ (2).}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$2\omega_1 = 808\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ ή } \omega_1 = 404\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Συνεπώς, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $\omega_2 = 396\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Για τις συχνότητες έχουμε:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \text{ ή } f_1 = 202 \text{ Hz και } f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} \text{ ή } f_2 = 198 \text{ Hz.}$$

Η περίοδος T_δ του διακροτήματος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \text{ ή } T_\delta = \frac{1}{4} \text{s.}$$

Η συχνότητα f της ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ ή } f = 200 \text{ Hz.}$$

Το χρονικό διάστημα Δt εντός του οποίου πραγματοποιούνται τρεις διαδοχικοί μηδενισμοί της ενέργειας της συνισταμένης ταλάντωσης είναι ίσο με το χρονικό διάστημα εντός του οποίου πραγματοποιούνται τρεις διαδοχικοί μηδενισμοί του πλάτους της συνισταμένης ταλάντωσης.

Συνεπώς, ισχύει:

$$\Delta t = 2T_\delta \text{ ή } \Delta t = \frac{1}{2} \text{s.}$$

Ο αριθμός N των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα σε χρόνο Δt είναι ίσος με:

$$N = f\Delta t \text{ ή } N = 100 \text{ ταλαντώσεις.}$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Από το Θ.Μ.Κ.Ε για την περιστροφική κίνηση του δίσκου στην πρώτη περίπτωση έχουμε:

$$W_F = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \text{ ή } Fr\theta = K \text{ ή } \frac{FR}{2}\theta = K \text{ ή } K = F\ell \text{ (1).}$$

Από το Θ.Μ.Κ.Ε για τη σύνθετη κίνηση του δίσκου στη δεύτερη περίπτωση έχουμε:

$$W_F = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \text{ ή } W_{F(\mu\varepsilon\tau)} + W_{F(\pi\varepsilon\rho)} = K' \text{ ή } FS + F\frac{R}{2}\theta = K' \text{ (2).}$$

Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει ότι $S = R\theta$. Συνεπώς, η σχέση (2) γράφεται:

$$FR\theta + F\frac{R}{2}\theta = K' \text{ ή } K' = \frac{3}{2}FR\theta \text{ (3).}$$

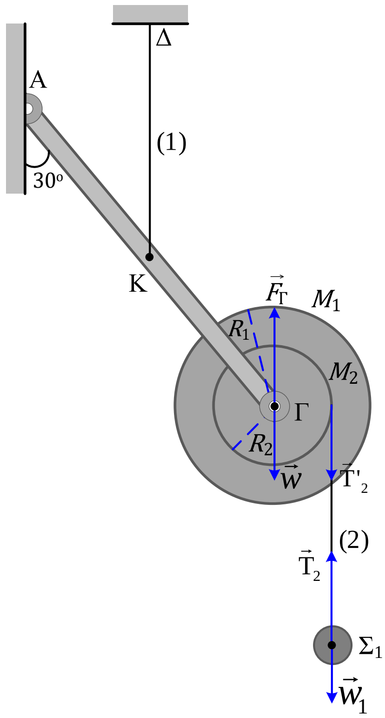
Επειδή το μήκος ℓ του νήματος που ξετυλίγεται από την περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής είναι ίσο με $\ell = \frac{R}{2}\theta$, η σχέση (3) γίνεται:

$$K' = 3F\ell \text{ (4).}$$

Από τις σχέσεις (1) και (4) προκύπτει ότι $K' = 3K$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται το σύστημα της τροχαλίας και του σώματος Σ_1 κατά τη διάρκεια της κίνησής του.



Η ροπή αδράνειας της διπλής τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I = \frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2 \text{ ή } I = 0{,}12\ \text{kgm}^2.$$

Έστω α το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ_1 και $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της διπλής τροχαλίας. Επειδή το νήμα (2) δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του δίσκου (2), ισχύει $\alpha = \alpha_\varepsilon$ ή $\alpha = \alpha_{\gamma\omega\nu}R_2$.

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του σώματος Σ_1 έχουμε:

$$\Sigma F = m_1\alpha \text{ ή } w_1 - T_2 = m_1\alpha \text{ ή } T_2 = m_1g - m_1\alpha_{\gamma\omega\nu}R_2 \text{ (1).}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την τροχαλία έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } T_2'R_2 = I\alpha_{\gamma\omega\nu},$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$(m_1g - m_1\alpha_{\gamma\omega\nu}R_2)R_2 = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{m_1gR_2}{I + m_1R_2^2} \text{ ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = 20\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Γ2. Η γωνία περιστροφής θ της τροχαλίας από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με:

$$\theta = N \cdot 2\pi \text{ ή } \theta = 40\ \text{rad}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_1^2 \text{ ή } t_1 = 2\ \text{s}.$$

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \;\; ή \;\; \omega = 40\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}.$$

Το μέτρο της στροφορμής της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$L = I\omega \;\; ή \;\; L = 4{,}8\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}.$$

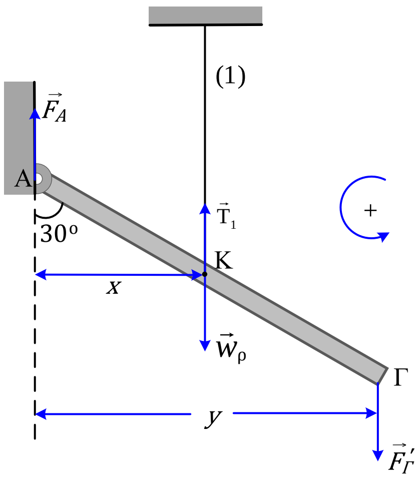
Γ3. Έστω F_Γ το μέτρο της δύναμης που δέχεται η τροχαλία από τη ράβδο. Επειδή η τροχαλία δεν εκτελεί μεταφορική κίνηση, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \;\; ή \;\; F_\Gamma = T_2' + w \;\; ή \;\; F_\Gamma = T_2 + (M_1 + M_2)g \; (2).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $T_2 = 12$ N.

Συνεπώς, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $F_\Gamma = 42$ N.

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος.



Επειδή οι δυνάμεις $\vec{T}_1$, $\vec{w}_\rho$ και $\vec{F}_\Gamma'$ που δέχεται η ράβδος είναι κατακόρυφες, η δύναμη $\vec{F}_A$ που δέχεται από την άρθρωση θα είναι επίσης κατακόρυφη.

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \;\; ή \;\; \tau_{F_A} + \tau_{T_1} + \tau_{w_\rho} + \tau_{F_\Gamma'} = 0 \;\; ή \;\; 0 + T_1 x - w_\rho x - F_\Gamma' y = 0 \;\; ή$$

$$T_1 \frac{L}{2}\eta\mu 30° = M_\rho g \frac{L}{2}\eta\mu 30° + F_\Gamma L \eta\mu 30° \;\; ή \;\; T_1 = M_\rho g + 2F_\Gamma \;\; ή \;\; T_1 = 100 \text{ N}.$$

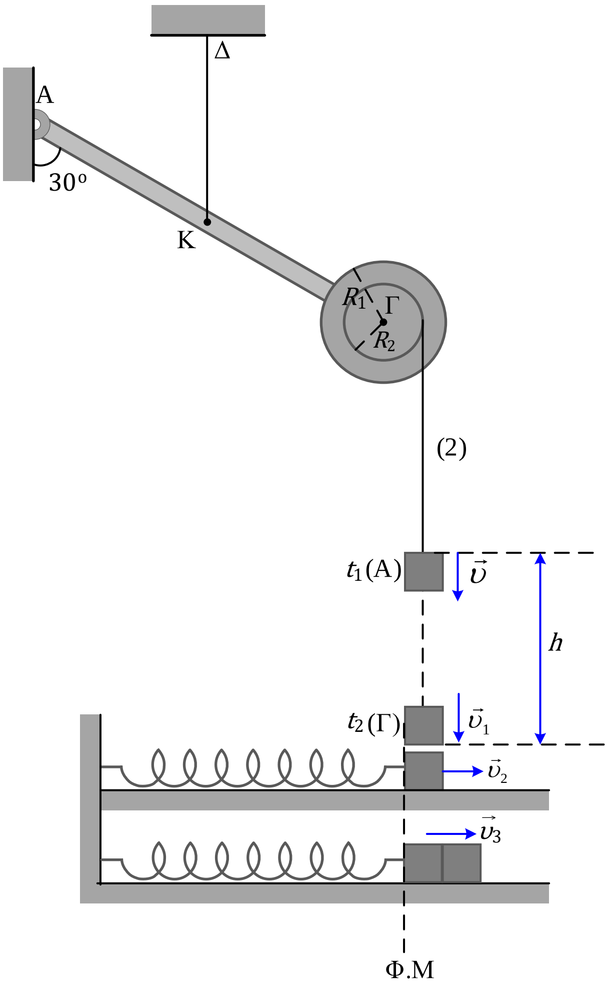
Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \;\; ή \;\; F_A + T_1 = w_\rho + F_\Gamma' \;\; ή \;\; F_A = M_\rho g + F_\Gamma - T_1 \;\; ή \;\; F_A = -42 \text{ N}.$$

Συνεπώς, η δύναμη $\vec{F}_A$ έχει μέτρο 42 N και φορά προς τα κάτω.

Γ4. Το μέτρο υ της ταχύτητας του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\upsilon = \alpha t_1 \;\; ή \;\; \upsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} R_2 t_1 \;\; ή \;\; \upsilon = 8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$



Έστω υ_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ελάχιστα πριν από την κρούση.

Από το Θ.Μ.Κ.Ε για την κίνηση του σώματος Σ_1 μεταξύ των θέσεων Α και Γ που φαίνονται στο σχήμα έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{w_1} \text{ ή } \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon^2 = m_1 gh \text{ ή } \upsilon_1 = \sqrt{\upsilon^2 + 2gh} \text{ ή }$$

$$\upsilon_1 = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Έστω υ_2 το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος ελάχιστα πριν από την κρούση.

Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του σώματος Σ_2 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } E = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \text{ ή } \upsilon_2 = \sqrt{\frac{2E}{m_2}} \text{ ή } \upsilon_2 = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Έστω υ_3 το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Ο στον άξονα $x'x$ για την κρούση των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 έχουμε:

$$\vec{p}_{(x)\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{(x)\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \text{ ή } m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon_3 \text{ ή } \upsilon_3 = 1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_3^2 \text{ ή } A_2 = 0{,}3 \text{ m}.$$

Επομένως, είναι:

$$\alpha_{max} = \omega_2^2 A_2 \text{ ή } \alpha_{max} = \frac{k}{m_1+m_2}A_2 \text{ ή } \alpha_{max} = 7{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

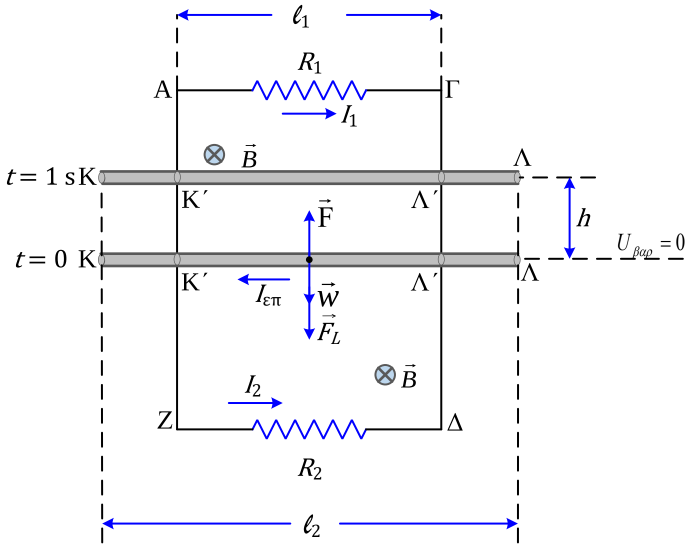
Η απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση είναι ίση με:

$$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = K_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)} - K_{o\lambda(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} \text{ ή } E_{\alpha\pi\omega\lambda} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon_3^2 \text{ ή}$$

$$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = 104{,}5\text{ J}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα επαγωγικά ρεύματα που διαρρέουν το κύκλωμα και οι δυνάμεις που δέχεται ο αγωγός ΚΛ.



Έστω $R_{K'\Lambda'}$ η ωμική αντίσταση του $K'\Lambda'$ του αγωγού ΚΛ. Ισχύουν:

$$R_{K\Lambda} = \rho\frac{\ell_2}{A}\text{ (1) και}$$

$$R_{K'\Lambda'} = \rho\frac{\ell_1}{A}\text{ (2),}$$

όπου A το εμβαδόν διατομής του αγωγού ΚΛ.

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{R_{K\Lambda}}{R_{K'\Lambda'}} = \frac{\ell_2}{\ell_1} \text{ ή } R_{K'\Lambda'} = \frac{\ell_1}{\ell_2}R_{K\Lambda} \text{ ή } R_{K'\Lambda'} = 2\ \Omega.$$

Το μέτρο της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο κύκλωμα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{|d\Phi|}{dt} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{BdS}{dt} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{Bdx\ell_1}{dt} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = B\upsilon\ell_1\text{ (3).}$$

Επειδή ο αγωγός ΚΛ εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα με επιτάχυνση μέτρου α, η χρονική εξίσωση του μέτρου υ της ταχύτητας του δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon = \alpha t\text{ (4).}$$

Η σχέση (3), λόγω της σχέσης (4), γίνεται:

$$E_{\varepsilon\pi} = B\ell_1 \alpha t \ (5).$$

Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{1,2}$ του συστήματος των αντιστατών R_1 και R_2 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{1}{R_{1,2}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \ \text{ή} \ R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \ \text{ή} \ R_{1,2} = 2\ \Omega.$$

Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{o\lambda}} \ \text{ή} \ I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{1,2} + R_{K'\Lambda'}},$$

ή λόγω της σχέσης (5):

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{B\ell_1 \alpha}{R_{1,2} + R_{K'\Lambda'}} t \ \text{ή} \ I_{\varepsilon\pi} = 3t \ (S.I.) \ (6).$$

Δ2. Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του αγωγού ΚΛ έχουμε:

$$\Sigma F = m\alpha \ \text{ή} \ F - w - F_L = m\alpha \ \text{ή} \ F = mg + BI_{\varepsilon\pi}\ell_1 + m\alpha,$$

ή λόγω της σχέσης (6):

$$F = 16 + 6t \ (S.I.) \ (7).$$

Σύμφωνα με τη σχέση (7) για $t = 1$ s το μέτρο της δύναμης F είναι ίσο με $F = 22$ N. Σύμφωνα με τη σχέση (4) το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού ΚΛ τη χρονική στιγμή $t = 1$ s είναι ίσο με $\upsilon = 6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Η ισχύς της δύναμης F τη χρονική στιγμή $t = 1$ s υπολογίζεται από τον τύπο:

$$P_F = F \cdot \upsilon \ \text{ή} \ P_F = 132\ \mathrm{W}.$$

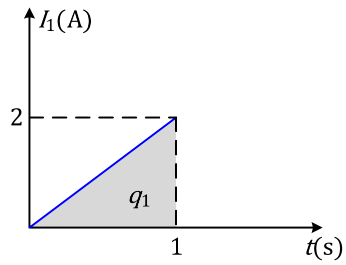
Δ3. Η χρονική εξίσωση της τάσης $V_{K\Lambda}$ στα άκρα του αγωγού ΚΛ προκύπτει από τη σχέση $V_{K\Lambda} = I_{\varepsilon\pi} R_{1,2}$, ή λόγω της σχέσης (6):

$$V_{K\Lambda} = 6t \ (S.I.) \ (8).$$

Η χρονική εξίσωση της έντασης I_1 του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_1 προκύπτει από τη σχέση $I_1 = \frac{V_{K\Lambda}}{R_1}$, ή λόγω της σχέσης (8):

$$I_1 = 2t \ (S.I.).$$

Στο διάγραμμα του παρακάτω σχήματος φαίνεται η γραφική παράσταση της έντασης I_1 του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 1$ s.



Το επαγωγικό φορτίο q_1 που περνά από μία διατομή του αντιστάτη R_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 έχει μέτρο αριθμητικά ίσο με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν που φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα. Συνεπώς, είναι:

$$q_1 = 1 \text{ C}.$$

Δ4. Έστω $Q_{R_{ολ}}$ η θερμότητα Joule που αποδίδεται από το κύκλωμα προς το περιβάλλον από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 1$ s.

Από την Α.Δ.Ε για το κύκλωμα έχουμε:

$$E_{αρχ} + E_{προσφ} = E_{τελ} + E_{απωλ} \text{ ή } K_{αρχ} + U_{αρχ} + W_F = K_{τελ} + U_{τελ} + Q_{R_{ολ}} \text{ (9)}.$$

Αν θεωρήσουμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που βρίσκεται ο αγωγός ΚΛ τη χρονική στιγμή $t = 0$, η σχέση (9) γίνεται:

$$0 + 0 + W_F = \frac{1}{2}mυ^2 + mgh + Q_{R_{ολ}} \text{ (10)}.$$

Η μετατόπιση h του αγωγού ΚΛ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 1$ s υπολογίζεται από τον τύπο:

$$h = \frac{1}{2}αt^2 \text{ ή } h = 3 \text{ m}.$$

Έστω dQ_{R_1} και dQ_{R_2} τα στοιχειώδη ποσά θερμότητας που εκλύουν οι αντιστάτες R_1 και R_2 αντίστοιχα, λόγω φαινομένου Joule, στο στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt. Ισχύουν:

$$dQ_1 = I_1^2 R_1 dt \text{ (11) και } dQ_2 = I_2^2 R_2 dt \text{ (12)}.$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (11) και (12) έχουμε:

$$\frac{dQ_1}{dQ_2} = \left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2 \frac{R_1}{R_2} \text{ ή } \frac{dQ_1}{dQ_2} = \left(\frac{\frac{V_{ΚΛ}}{R_1}}{\frac{V_{ΚΛ}}{R_2}}\right)^2 \frac{R_1}{R_2} \text{ ή } \frac{dQ_1}{dQ_2} = \frac{R_2}{R_1} \text{ ή } \frac{dQ_1}{dQ_2} = 2 \text{ (13)}.$$

Από τη σχέση (13) προκύπτει ότι οι θερμότητες Joule Q_1 και Q_2 που αποδίδονται από τους αντιστάτες R_1 και R_2 αντίστοιχα προς το περιβάλλον από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 1$ s συνδέονται με τη σχέση:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = 2 \text{ ή } Q_1 = 2Q_2 \text{ ή } Q_1 = 12 \text{ J}.$$

Έστω $dQ_{R_{K'Λ'}}$ η στοιχειώδης θερμότητα Joule που εκλύεται από το τμήμα $K'Λ'$ του αγωγού ΚΛ σε χρόνο dt. Είναι:

$$dQ_{R_{K'Λ'}} = I_{επ}^2 R_{K'Λ'} dt \text{ (14)}.$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (12) και (14) έχουμε:

$$\frac{dQ_2}{dQ_{R_{K'Λ'}}} = \frac{I_2^2 R_2 dt}{I_{επ}^2 R_{K'Λ'} dt} \text{ ή } \frac{dQ_2}{dQ_{R_{K'Λ'}}} = \left(\frac{I_2}{I_{επ}}\right)^2 \frac{R_2}{R_{K'Λ'}} \text{ ή } \frac{dQ_2}{dQ_{R_{K'Λ'}}} = \frac{\left(\frac{V_{ΚΛ}}{R_2}\right)^2}{\left(\frac{V_{ΚΛ}}{R_{1,2}}\right)^2} \frac{R_2}{R_{K'Λ'}} \text{ ή}$$

$$\frac{dQ_2}{dQ_{R_{K'Λ'}}} = \frac{R_{1,2}^2}{R_2 \cdot R_{K'Λ'}} \text{ ή } \frac{dQ_2}{dQ_{R_{K'Λ'}}} = \frac{1}{3} \text{ ή}$$

$$dQ_{R_{K'\Lambda'}} = 3dQ_2 \text{ (15).}$$

Από τη σχέση (15) προκύπτει ότι η σχέση που συνδέει τις θερμότητες Joule $Q_{R_{K'\Lambda'}}$ και Q_2 είναι:

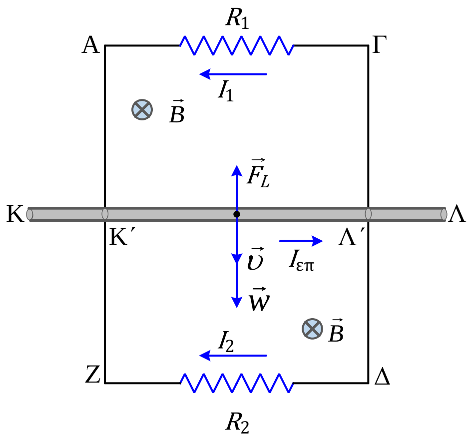
$$Q_{R_{K'\Lambda'}} = 3Q_2 \text{ ή } Q_{R_{K'\Lambda'}} = 18 \text{ J.}$$

Επομένως, η συνολική θερμότητα Joule $Q_{R_{o\lambda}}$ που εκλύεται από το κύκλωμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 1$ s είναι ίση με:

$$Q_{R_{o\lambda}} = Q_1 + Q_2 + Q_{R_{K'\Lambda'}} \text{ ή } Q_{R_{o\lambda}} = 36 \text{ J.}$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (10) προκύπτει ότι $W_F = 84$ J.

Δ5. Μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ ο αγωγός ΚΛ συνεχίζει για λίγο την κίνηση του προς τα πάνω μέχρι να σταματήσει στιγμιαία και αμέσως μετά αρχίζει να κινείται προς τα κάτω. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα ρεύματα που διαρρέουν το κύκλωμα και οι δυνάμεις που δέχεται ο αγωγός ΚΛ κατά την κάθοδό του.



Ο αγωγός ΚΛ αποκτά την οριακή του ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{o\rho}$ κατά την πτώση του τη χρονική στιγμή στην οποία η συνισταμένη δύναμη που δέχεται γίνεται ίση με το μηδέν. Συνεπώς, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } w = F_L \text{ ή } mg = BI_{\varepsilon\pi}\ell_1 \text{ ή } mg = B\frac{B\upsilon_{o\rho}\ell_1}{R_{1,2}+R_{K'\Lambda'}}\ell_1 \text{ ή}$$

$$mg = \frac{B^2\ell_1^2}{R_{1,2}+R_{K'\Lambda'}}\upsilon_{o\rho} \text{ ή } \upsilon_{o\rho} = \frac{mg(R_{1,2}+R_{K'\Lambda'})}{B^2\ell_1^2} \text{ ή } \upsilon_{o\rho} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του αγωγού τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της ταχύτητάς του είναι ίσο με $\upsilon = \frac{\upsilon_{o\rho}}{2} = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \Sigma F\upsilon \text{ (16).}$$

Υπάρχουν δύο χρονικές στιγμές στις οποίες ο αγωγός έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Η πρώτη χρονική στιγμή t_1 είναι κατά την άνοδό του με τη δράση της δύναμης $\vec{F}$. Τη χρονική στιγμή t_1 από τη σχέση (16) προκύπτει:

$$\frac{dK}{dt} = m\alpha\upsilon \ \text{ ή } \ \frac{dK}{dt} = 30\,\frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Η δεύτερη χρονική στιγμή t_2 είναι κατά την κάθοδό του.

Τη χρονική στιγμή t_2 από τη σχέση (16) προκύπτει:

$$\frac{dK}{dt} = (mg - F_L)\upsilon \ \text{ ή } \ \frac{dK}{dt} = \left(mg - \frac{B^2\ell_1^2}{R_{1,2}+R_{K'\Lambda'}}\upsilon\right)\upsilon \ \text{ ή } \ \frac{dK}{dt} = 25\,\frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

6ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

Α1. δ, Α2. α, Α3. δ, Α4. β

Α5. α. Σ, β. Σ, γ. Σ, δ. Σ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η α.

Έστω I η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το σωληνοειδές (Α). Ισχύει:

$$I = \frac{V}{R}\ (1),$$

όπου R η ωμική αντίσταση του σωληνοειδούς (Α).

Το μέτρο B της έντασης του ομογενούς μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο εσωτερικό του σωληνοειδούς (Α) υπολογίζεται από τον τύπο $B = k_\mu \frac{4\pi I N}{\ell}$, ή λόγω της σχέσης (1):

$$B = k_\mu \frac{4\pi V N}{R\ell}\ (2).$$

Η μαγνητική ροή Φ που διέρχεται από μία σπείρα που βρίσκεται στο κέντρο του σωληνοειδούς (Α) υπολογίζεται από τον τύπο $\Phi = BS$ ή $\Phi = B\pi\alpha^2$, ή λόγω της σχέσης (2):

$$\Phi = k_\mu \frac{4\pi^2 V N \alpha^2}{R\ell}\ (3).$$

Η ωμική αντίσταση R του σωληνοειδούς δίνεται από τη σχέση:

$$R = \rho \frac{L}{S_{\sigma\upsilon\rho\mu}}\ (4),$$

όπου ρ η ειδική αντίσταση, L το μήκος και $S_{\sigma\upsilon\rho\mu}$ το εμβαδόν διατομής του σύρματος από το οποίο είναι φτιαγμένο το σωληνοειδές (Α).

Η ωμική αντίσταση R' του σωληνοειδούς (Γ) δίνεται από τη σχέση:

$$R' = \rho \frac{L}{S_{\sigma\upsilon\rho\mu}}\ (5).$$

Συνεπώς:

$$R' = R\ (6).$$

Έστω I' η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το σωληνοειδές (Γ). Ισχύει $I' = \frac{V}{R'}$, ή λόγω της σχέσης (6):

$$I' = \frac{V}{R}\ (7).$$

Το μήκος L του σύρματος από το οποίο είναι φτιαγμένο το σωληνοειδές (Α), ο αριθμός N των σπειρών του και η ακτίνα α μίας σπείρας του συνδέονται με τη σχέση:

$$L = N 2\pi\alpha\ (8).$$

Στο σωληνοειδές (Γ) ισχύει:

$$L = N'2\pi\alpha' \text{ (9).}$$

Από τις σχέσεις (8) και (9) προκύπτει:

$$N'\alpha' = N\alpha \text{ ή } N' = 2N \text{ (10).}$$

Το μέτρο B'της έντασης του ομογενούς μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο εσωτερικό του σωληνοειδούς (Γ) είναι ίσο με $B' = k_\mu \frac{4\pi I' N'}{\ell'}$, ή λόγω της σχέσης (7):

$$B' = k_\mu \frac{4\pi V N'}{R\ell'} \text{ (11).}$$

Η μαγνητική ροή Φ' που διέρχεται από μία σπείρα που βρίσκεται στο κέντρο του σωληνοειδούς (Γ) είναι ίση με $\Phi' = B'S'$ ή $\Phi' = B'\pi\alpha'^2$, ή λόγω της σχέσης (11):

$$\Phi' = k_\mu \frac{4\pi^2 V N' \alpha'^2}{R\ell'} \text{ (12).}$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (12) και (3) προκύπτει ότι $\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{N'\alpha'^2 \ell}{N\alpha^2 \ell'}$, ή λόγω της σχέσης (10):

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{2N\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \ell}{N\alpha^2 \frac{\ell}{2}} \text{ ή } \frac{\Phi'}{\Phi} = 1 \text{ ή } \Phi' = \Phi.$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Ισχύει:

$$\upsilon_{\max(1)} = \upsilon_{\max(2)} \text{ ή } \omega A_1 = \omega A_2 \text{ ή } A_1 = A_2.$$

Έστω A το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης.

Έχουμε:

$$E = 4E_1 - E_2 \text{ ή } \frac{1}{2}DA^2 = 4\frac{1}{2}DA_1^2 - \frac{1}{2}DA_2^2 \text{ ή } A^2 = 4A_1^2 - A_2^2 \text{ ή } A = \sqrt{3}A_1.$$

Το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi} \text{ ή } \sqrt{3}A_1 = \sqrt{2A_1^2 + 2A_1^2\sigma\upsilon\nu\varphi} \text{ ή}$$

$$3A_1^2 = 2A_1^2(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi) \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{2},$$

ή επειδή $0 \le \varphi \le \pi$ rad:

$$\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Έστω θ η διαφορά φάσης ανάμεσα στη συνισταμένη ταλάντωση και τη συνιστώσα ταλάντωση (1). Ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{A_2\eta\mu\varphi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\varphi} \text{ ή } \varepsilon\varphi\theta = \frac{A_2\eta\mu\frac{\pi}{3}}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}} \text{ ή } \varepsilon\varphi\theta = \frac{A_1\frac{\sqrt{3}}{2}}{A_1 + A_1\frac{1}{2}} \text{ ή } \varepsilon\varphi\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Έστω υ_1 το μέτρο της ταχύτητας με την οποία εκτοξεύεται το υγρό από την οπή (1). Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Γ στην επιφάνεια του υγρού και ενός σημείου Δ ακριβώς έξω από την οπή (1), τα οποία βρίσκονται πάνω στην ίδια ρευματική γραμμή, έχουμε:

$$p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 + \rho g(h - h_1) = p_\Delta + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Delta^2 \text{ ή}$$

$$p_{\alpha\tau\mu} + 0 + \rho g(h - h_1) = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g(h - h_1)} \text{ (1).}$$

Έστω υ_2 το μέτρο της ταχύτητας με την οποία εκτοξεύεται το νερό από την οπή (2). Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Μ στην επιφάνεια του υγρού και ενός σημείου Ν ακριβώς έξω από την οπή (2), τα οποία βρίσκονται πάνω στην ίδια ρευματική γραμμή, έχουμε:

$$p_M + \frac{1}{2}\rho\upsilon_M^2 + \rho g(h - h_2) = p_N + \frac{1}{2}\rho\upsilon_N^2 \text{ ή}$$

$$p_{\alpha\tau\mu} + 0 + \rho g(h - h_2) = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g(h - h_2)} \text{ (2).}$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \sqrt{\frac{h-h_1}{h-h_2}} \text{ ή } \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{1}{2} \text{ ή } \upsilon_2 = 2\upsilon_1 \text{ (3).}$$

Έστω x_1 και x_2 οι οριζόντιες αποστάσεις που διανύουν οι φλέβες του υγρού που εξέρχονται από τις οπές (1) και (2) αντίστοιχα, από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι να συναντηθούν στο σημείο Κ. Ισχύει $x_1 = x_2$ ή $\upsilon_1 t_1 = \upsilon_2 t_2$, ή λόγω της σχέσης (3):

$$t_1 = 2t_2 \text{ (4).}$$

Έστω y_1 και y_2 οι κατακόρυφες αποστάσεις που διανύουν οι φλέβες του υγρού που εξέρχονται από τις οπές (1) και (2) αντίστοιχα, από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι να συναντηθούν στο σημείο Κ. Ισχύουν:

$$y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \text{ (5) και } y_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 \text{ (6).}$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (5) και (6), προκύπτει ότι $\frac{y_1}{y_2} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2$, ή λόγω της σχέσης (4):

$$y_1 = 4y_2 \text{ (7).}$$

Η σχέση που συνδέει τα ύψη h_1, h_2 με τις κατακόρυφες μετατοπίσεις y_1 και y_2 των δύο φλεβών είναι η:

$$h_1 - h_2 = y_1 - y_2 \text{ ή } 0{,}3h = 4y_2 - y_2 \text{ ή } y_2 = 0{,}1h \text{ (8).}$$

Συνεπώς, είναι:

$$y_1 = 4y_2 \text{ ή } y_1 = 0{,}4h \text{ (9).}$$

Έστω $\frac{1}{2}\rho\upsilon_{K(1)}^2$ η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου στο σημείο Κ της φλέβας του υγρού που εξέρχεται από την οπή (1). Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli ανάμεσα στο σημείο Δ ακριβώς έξω από την οπή (1) και στο σημείο Κ, θεωρώντας ως επίπεδο αναφοράς για τη μέτρηση των υψών το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Κ:

$$p_\Delta + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g y_1 = p_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_{K(1)}^2,$$

ή λόγω των σχέσεων (1) και (9):

$$p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_{K(1)}^2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho 2g(h-h_1) + \rho g 0{,}4h \text{ ή } \frac{1}{2}\rho\upsilon_{K(1)}^2 = 0{,}5\rho g h \text{ (10)}.$$

Έστω $\frac{1}{2}\rho\upsilon_{K(2)}^2$ η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου στο σημείο Κ της φλέβας του υγρού που εξέρχεται από την οπή (2). Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli ανάμεσα στο σημείο Ν ακριβώς έξω από την οπή (2) και στο σημείο Κ, θεωρώντας ως επίπεδο αναφοράς για την μέτρηση των υψών το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Κ:

$$p_N + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g y_2 = p_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_{K(2)}^2,$$

ή λόγω των σχέσεων (2) και (8):

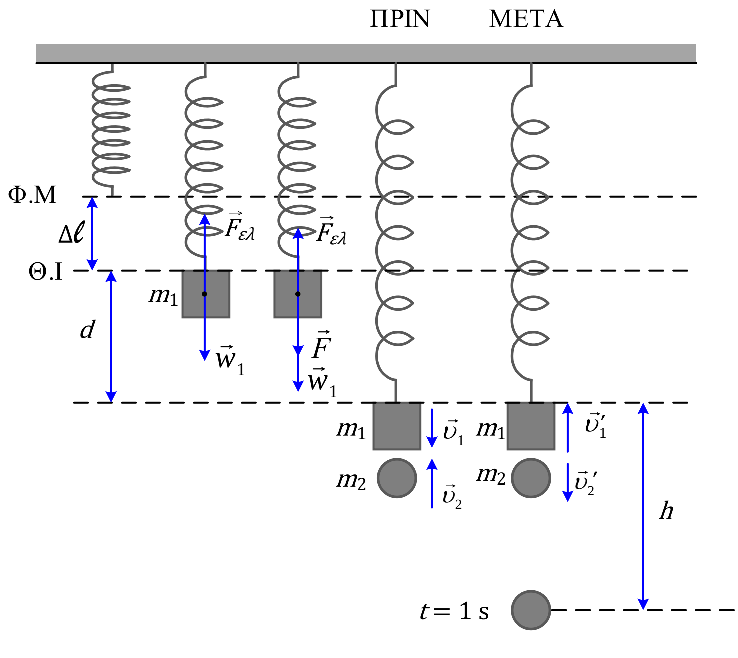
$$p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_{K(2)}^2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho 2g(h-h_2) + \rho g 0{,}1h \text{ ή } \frac{1}{2}\rho\upsilon_{K(2)}^2 = 0{,}5\rho g h \text{ (11)}.$$

Από τις σχέσεις (10) και (11) προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_{K(1)}^2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_{K(2)}^2.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Έστω υ_2' το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ2 αμέσως μετά την κρούση. Το σώμα Σ2 αμέσως μετά την κρούση κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω με επιτάχυνση ίσου μέτρου με την επιτάχυνση της βαρύτητας g. Συνεπώς, ισχύει:

$$h = \upsilon_2' t + \frac{1}{2} g t^2 \;\; ή \;\; \upsilon_2' = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Γ2. Επειδή η κρούση είναι ελαστική και τα σώματα έχουν ίσες μάζες, ανταλλάσσουν ταχύτητες κατά την κρούση. Έστω υ_1 και υ_1' τα μέτρα των ταχυτήτων του σώματος Σ1 ακριβώς πριν και αμέσως μετά την κρούση αντίστοιχα. Ισχύουν:

$$\upsilon_1 = \upsilon_2' \;\; ή \;\; \upsilon_1 = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \;\; και$$

$$\upsilon_1' = \upsilon_2 \;\; ή \;\; \upsilon_1' = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Γ3. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ1 μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του σώματος Σ1 μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \;\; ή \;\; \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}kd^2 \;\; ή \;\; A = \sqrt{\frac{m_1}{k}\upsilon_1'^2 + d^2} \;\; ή \;\; A = 0{,}1\sqrt{2}\ \mathrm{m}.$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ1 από τη θέση ισορροπίας του είναι $x = +d$ ή $x = +0{,}1$ m.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ1 από τη θέση ισορροπίας του είναι η:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)\ (1).$$

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = +0{,}1$ m προκύπτει:

$$\eta\mu\varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\; ή \;\; \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{4}\ (2).$$

Επειδή είναι $0 \le \varphi_0 < 2\pi$ rad, οι λύσεις της εξίσωσης (2) είναι $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ rad ή $\varphi_0 = \frac{3\pi}{4}$ rad.

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος Σ1 μετά την κρούση είναι η:

$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)\ (3).$$

Από την εξίσωση (3) για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ rad προκύπτει ότι $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} > 0$.

Από την εξίσωση (3) για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{3\pi}{4}$ rad προκύπτει ότι $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} < 0$.

Αφού αμέσως μετά την κρούση η ταχύτητα του σώματος Σ1 είναι αρνητική, δεκτή λύση είναι η $\varphi_0 = \frac{3\pi}{4}$ rad.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ1 μετά την κρούση είναι ίση με:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \;\; ή \;\; \omega = 10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}.$$

Συνεπώς, η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x = 0{,}1\sqrt{2}\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{4}\right)\ (S.I.).$$

Γ4. Έστω $\Delta\ell_1$ η παραμόρφωση του ελατηρίου τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία η δυναμική του ενέργεια είναι ίση με $U_{\varepsilon\lambda} = 2$ J για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$. Ισχύει:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\,(\Delta\ell_1)^2 \text{ ή } \Delta\ell_1 = 0{,}2 \text{ m}.$$

Έστω ότι το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_1 είναι συμπιεσμένο κατά $\Delta\ell_1$ σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Συνεπώς, το μέτρο της απομάκρυνσης x_1 του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με:

$$|x_1| = \Delta\ell + \Delta\ell_1 \ (4),$$

όπου $\Delta\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1.
Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } m_1 g = F_{\varepsilon\lambda} \text{ ή } m_1 g = k\,\Delta\ell \text{ ή } \Delta\ell = 0{,}1 \text{ m}.$$

Επομένως, από τη σχέση (4) προκύπτει ότι $|x_1| = 0{,}3$ m, που είναι άτοπο γιατί $|x_1| > A$.
Έστω ότι το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_1 είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell_1 = 0{,}2$ m σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Επειδή είναι $\Delta\ell_1 > \Delta\ell$, το σώμα θα βρίσκεται τη χρονική στιγμή t_1 σε μία θέση κάτω από τη θέση ισορροπίας του και έστω ότι η απομάκρυνσή του σε αυτή τη θέση είναι ίση με x_2. Ισχύει:

$$|x_2| = \Delta\ell_1 - \Delta\ell \text{ ή } |x_2| = 0{,}1 \text{ m ή } x_2 = +0{,}1 \text{ m}.$$

Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_1 κινείται προς τα κάτω, οπότε είναι $\upsilon > 0$.
Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του σώματος Σ_1 μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \text{ ή } \upsilon = +\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x_2^2)} \text{ ή } \upsilon = +1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F dx}{dt} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \Sigma F\upsilon \text{ ή } \frac{dK}{dt} = -Dx_2\upsilon \text{ ή } \frac{dK}{dt} = -10\,\frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Γ5. Από το Θ.Μ.Κ.Ε για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή που ξεκίνησε να κινείται μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_F + W_w + W_{F_{\varepsilon\lambda}} \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = Fd + m_1 gd + U_{\varepsilon\lambda(\alpha\rho\chi)} - U_{\varepsilon\lambda(\tau\varepsilon\lambda)} \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = Fd + m_1 gd + \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell + d)^2 \text{ ή}$$

$$F = 10 \text{ N}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η ροπή αδράνειας I_1 του στερεού Δ1 ως προς άξονα που διέρχεται από το Κ και είναι κάθετος στο επίπεδό του υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I_1 = I_\Delta - \frac{1}{2}mr^2 \;\; ή \;\; I_1 = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}mr^2 \;(1),$$

όπου m η μάζα του κυκλικού τμήματος ακτίνας r που αφαιρέθηκε από τον δίσκο.

Η πυκνότητα d του δίσκου δίνεται από τη σχέση:

$$d_\Delta = \frac{M}{V} \;\; ή \;\; d_\Delta = \frac{M}{\pi R^2 d} \;(2).$$

Η πυκνότητα d_1 του τμήματος του δίσκου που αφαιρέθηκε είναι:

$$d_1 = \frac{m}{\pi r^2 d} (3).$$

Όμως είναι $d_\Delta = d_1$, ή λόγω των σχέσεων (2) και (3):

$$\frac{M}{R^2} = \frac{m}{r^2} \;\; ή \;\; m = \left(\frac{r}{R}\right)^2 M \;(4).$$

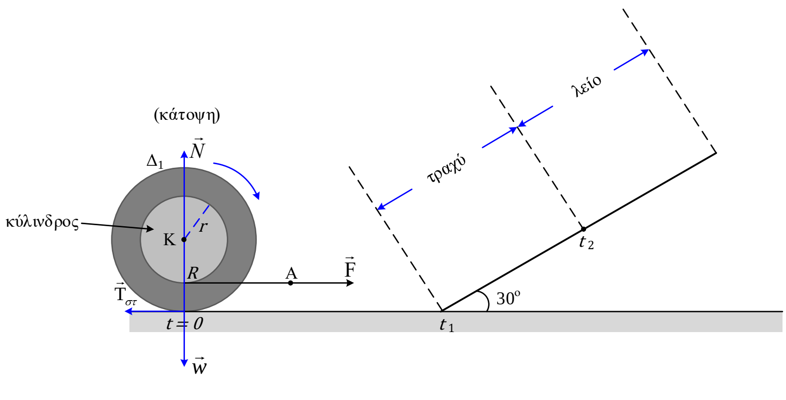
Συνεπώς, από τη σχέση (1), λόγω της σχέσης (3), προκύπτει ότι:

$$I_1 = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}\frac{r^4}{R^2}M \;\; ή \;\; I_1 = \frac{1}{2}MR^2\left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right) \;\; ή \;\; I_1 = 3{,}75 \text{ kg m}^2.$$

Δ2. Έστω I η ροπή αδράνειας του καρουλιού ως προς τον άξονα περιστροφής του. Ισχύει:

$$I = 2I_1 + I_K \;\; ή \;\; I = 2I_1 + \frac{1}{2}M_K r^2 \;\; ή \;\; I = 8 \text{ kg m}^2.$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται το καρούλι κατά τη διάρκεια της κίνησης του στο οριζόντιο δάπεδο.



Έστω α_{cm} το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του καρουλιού, όταν κινείται στο οριζόντιο δάπεδο και $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής του επιτάχυνσης. Επειδή το καρούλι κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο, ισχύει ότι $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$.

Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι η μάζα του στερεού Δ1 είναι ίση με $m = 0{,}5$ kg.

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του καρουλιού στο οριζόντιο δάπεδο έχουμε:

$$\Sigma F_x = (M_K + 2m)\alpha_{cm} \;\; ή \;\; F - T_{\sigma\tau} = (M_K + 2m)\alpha_{\gamma\omega\nu} R \;\; ή$$

$$T_{\sigma\tau} = F - (M_K + 2m)\alpha_{\gamma\omega\nu} R \text{ (5)}.$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την περιστροφική κίνηση του καρουλιού προκύπτει ότι $T_{\sigma\tau}R - Fr = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$, ή λόγω της σχέσης (5):

$$FR - (M_K + 2m)R^2\alpha_{\gamma\omega\nu} - Fr = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή}$$

$$F(R - r) = [I + (M_K + 2m)R^2]\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή}$$

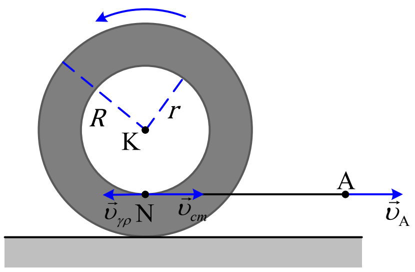
$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Συνεπώς, είναι $\alpha_{cm} = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Έστω υ_{cm} το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του καρουλιού τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s. Ισχύει:

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} t_1 \text{ ή } \upsilon_{cm} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Τη χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$ του άκρου Α του νήματος είναι ίση με την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_N$ του σημείου Ν που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ισχύει:

$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_N \text{ ή } \upsilon_A = \upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho} \text{ ή } \upsilon_A = \upsilon_{cm} - \omega r \text{ (6) ή}$$

$$\upsilon_A = \upsilon_{cm} - \frac{\upsilon_{cm}}{R} r \text{ ή } \upsilon_A = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μήκος ℓ του νήματος που τυλίχθηκε στην περιφέρεια του κυλίνδρου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με:

$$\ell = r\theta \text{ ή } \ell = r\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2 \text{ ή } \ell = 12{,}5 \text{ m}.$$

Δ3. Έστω Δx_A η μετατόπιση του σημείου Α από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1. Ισχύει:

$$\Delta x_A = \frac{1}{2}\alpha_A t_1^2 \text{ (7)},$$

όπου α_A η επιτάχυνση του σημείου Α. Από τη σχέση (6) έχουμε:

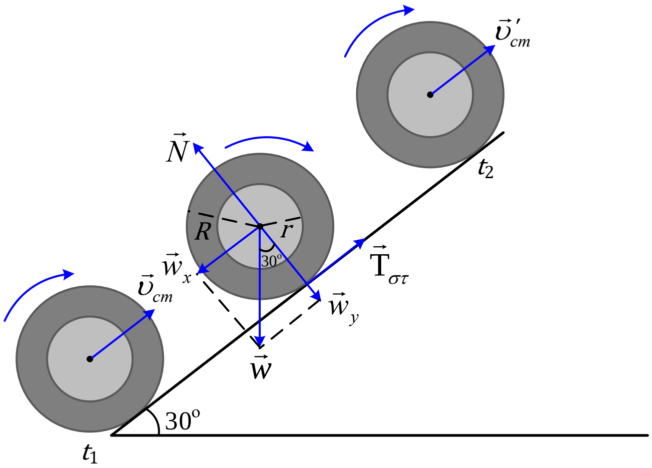
$$\frac{d\upsilon_A}{dt} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} - r\frac{d\omega}{dt} \text{ ή } \alpha_A = \alpha_{cm} - r\,\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } \alpha_A = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Συνεπώς, από τη σχέση (7) προκύπτει ότι $\Delta x_A = 12{,}5$ m.

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με:

$$W_F = F\Delta x_A \text{ ή } W_F = 200 \text{ J}.$$

Οι δυνάμεις που δέχεται το καρούλι από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 που κινείται πάνω στο τραχύ τμήμα του κεκλιμένου επιπέδου φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω α'_{cm} το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του καρουλιού και $\alpha'_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής του επιτάχυνσης κατά την κίνηση του από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2. Ισχύει ότι $\alpha'_{cm} = \alpha'_{\gamma\omega\nu}R$.

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του καρουλιού από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 έχουμε:

$$\Sigma F = (M_K + 2m)\,\alpha'_{cm} \text{ ή } w_x - T_{\sigma\tau} = (M_K + 2m)\,\alpha'_{cm} \text{ ή}$$
$$(M_K + 2m)g\eta\mu\varphi - T_{\sigma\tau} = (M_K + 2m)\,\alpha'_{\gamma\omega\nu}R \text{ (8).}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\alpha'_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } T_{\sigma\tau}R = I\alpha'_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } T_{\sigma\tau} = \frac{I\alpha'_{\gamma\omega\nu}}{R} \text{ (9).}$$

Η σχέση (8), λόγω της σχέσης (9), γίνεται:

$$(M_K + 2m)g\eta\mu\varphi - \frac{I\alpha'_{\gamma\omega\nu}}{R} = (M_K + 2m)R\alpha'_{\gamma\omega\nu} \text{ ή}$$
$$(M_K + 2m)g\eta\mu\varphi = \left[\frac{I}{R} + (M_K + 2m)R\right]\alpha'_{\gamma\omega\nu} \text{ ή}$$
$$\alpha'_{\gamma\omega\nu} = \frac{(M_K+2m)g\eta\mu\varphi}{\frac{I}{R}+(M_K+2m)R} \text{ ή } \alpha'_{\gamma\omega\nu} = 1{,}25\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Συνεπώς, είναι:

$$\alpha'_{cm} = \alpha'_{\gamma\omega\nu}R \text{ ή } \alpha'_{cm} = 2{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Έστω υ'_{cm} το μέτρο της ταχύτητας του καρουλιού τη χρονική στιγμή $t_2 = 7$ s. Ισχύει:

$$\upsilon'_{cm} = \upsilon_{cm} - \alpha'_{cm}(t_2 - t_1) \text{ ή } \upsilon'_{cm} = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο ω' της γωνιακής ταχύτητας του καρουλιού τη χρονική στιγμή t_2 είναι ίσο με:

$$\omega' = \frac{\upsilon'_{cm}}{R} \text{ ή } \omega' = 2{,}5\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Η κινητική ενέργεια του καρουλιού τη χρονική στιγμή t_2 είναι ίση με:

$$K = K_{\mu\varepsilon\tau} + K_{\pi\varepsilon\rho} \text{ ή } K = \frac{1}{2}(M_K + 2m)\upsilon'^2_{cm} + \frac{1}{2}I\omega'^2 \text{ ή } K = 50 \text{ J}.$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι ίσο με:

$$\pi = \frac{K}{W_F} \cdot 100\% \text{ ή } \pi = 25\%.$$

Δ4. Από τη χρονική στιγμή t_2 και μετά το καρούλι εισέρχεται σε περιοχή όπου το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο, επομένως δεν δέχεται τη δύναμη της στατικής τριβής. Οι δυνάμεις που δέχεται το καρούλι από τη χρονική στιγμή t_2 έως τη χρονική στιγμή t_3 είναι το βάρος του $\vec{w}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το κεκλιμένο επίπεδο, οι οποίες δεν προκαλούν ροπές ως προς τον άξονα περιστροφής του. Συνεπώς, ισχύει:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau \text{ ή } \frac{dL}{dt} = 0.$$

Η περιστροφική κίνηση του καρουλιού από τη χρονική στιγμή t_2 έως τη χρονική στιγμή t_3 είναι ομαλή, ενώ η μεταφορική του κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη. Έστω α''_{cm} το μέτρο της επιβράδυνσης του κέντρου μάζας του καρουλιού από τη χρονική στιγμή t_2 και μετά. Ισχύει:

$$\Sigma F_x = (M_K + 2m)\alpha''_{cm} \text{ ή } (M_K + 2m)g\eta\mu\varphi = (M_K + 2m)\alpha''_{cm} \text{ ή } \alpha''_{cm} = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

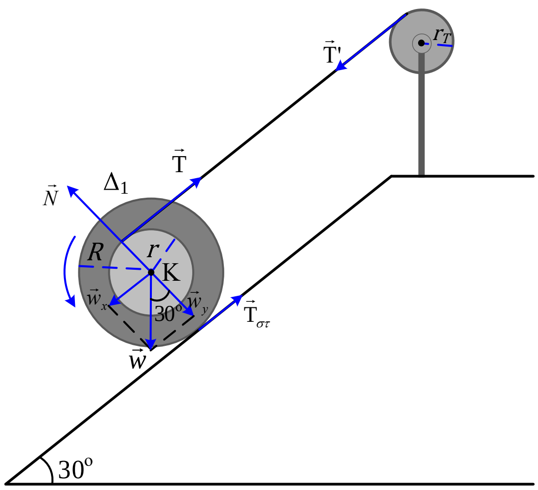
Από την εξίσωση της ταχύτητας του κέντρου μάζας του καρουλιού έχουμε:

$$\upsilon''_{cm} = \upsilon'_{cm} - \alpha''_{cm}(t_3 - t_2) \text{ ή } t_3 - t_2 = \frac{\upsilon'_{cm}}{\alpha''_{cm}} \text{ ή } t_3 - t_2 = 1 \text{ s}.$$

Ο αριθμός N των περιστροφών που εκτελεί το καρούλι από τη χρονική στιγμή t_2 έως τη χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$N = \frac{\theta}{2\pi} \text{ ή } N = \frac{\omega'(t_3 - t_2)}{2\pi} \text{ ή } N = \frac{1{,}25}{\pi} \text{ περιστροφές}.$$

Δ5. Οι δυνάμεις που δέχεται το σύστημα του καρουλιού και της τροχαλίας φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω $\alpha_{cm(K)}$ το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας και $\alpha_{\gamma\omega\nu(K)}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του καρουλιού. Επειδή το καρούλι κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο ισχύει ότι $\alpha_{cm(K)} = \alpha_{\gamma\omega\nu(K)} R$.

Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu(T)}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας. Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας και στην περιφέρεια του κυλίνδρου, ισχύει:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu(T)} r_T = \alpha_{cm(K)} + \alpha_{\gamma\omega\nu(K)} r \text{ ή } \alpha_{\gamma\omega\nu(T)} r_T = \alpha_{cm(K)} + \frac{\alpha_{cm(K)}}{R} r \text{ ή }$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu(T)} r_T = \frac{3}{2} \alpha_{cm(K)} \text{ (10).}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την τροχαλία έχουμε:

$$\Sigma\tau = I_T \alpha_{\gamma\omega\nu(T)} \text{ ή } T' r_T = \frac{1}{2} m_T r_T^2 \alpha_{\gamma\omega\nu(T)},$$

ή λόγω της σχέσης (10):

$$T = \frac{3}{4} m_T \alpha_{cm(K)} \text{ (11).}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του καρουλιού στο κεκλιμένο επίπεδο έχουμε:

$$\Sigma F_x = (M_K + 2m)\alpha_{cm(K)} \text{ ή }$$

$$(M_K + 2m) g\eta\mu\varphi - T_{\sigma\tau} - T = (M_K + 2m)\alpha_{cm(K)} \text{ (12).}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για το καρούλι έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu(K)} \text{ ή } T_{\sigma\tau} R - Tr = \frac{I\alpha_{cm(K)}}{R} \text{ ή } T_{\sigma\tau} - \frac{Tr}{R} = \frac{I\alpha_{cm(K)}}{R} \text{ (13).}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (12) και (13) έχουμε:

$$(M_K + 2m) g\eta\mu\varphi - T\left(1 + \frac{r}{R}\right) = \left(M_K + 2m + \frac{I}{R^2}\right)\alpha_{cm(K)},$$

ή λόγω της σχέσης (11):

$$(M_K + 2m) g\eta\mu\varphi - \frac{3}{4} m_T \alpha_{cm(K)}\left(1 + \frac{r}{R}\right) = \left(M_K + 2m + \frac{I}{R^2}\right)\alpha_{cm(K)} \text{ ή }$$

$$(M_K + 2m) g\eta\mu\varphi = \left[M_K + 2m + \frac{I}{R^2} + \frac{3}{4} m_T \left(1 + \frac{r}{R}\right)\right]\alpha_{cm(K)} \text{ ή }$$

$$\alpha_{cm(K)} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του στερεού σώματος Δ_1 ως προς τον άξονα περιστροφής του καρουλιού είναι ίσο με:

$$\left|\frac{dL}{dt}\right|_{\Delta_1} = I_1 \alpha_{\gamma\omega\nu(K)} \text{ ή } \left|\frac{dL}{dt}\right|_{\Delta_1} = I_1 \frac{\alpha_{cm(K)}}{R} \text{ ή }$$

$$\left|\frac{dL}{dt}\right|_{\Delta_1} = 3{,}75\,\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2}.$$

7ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

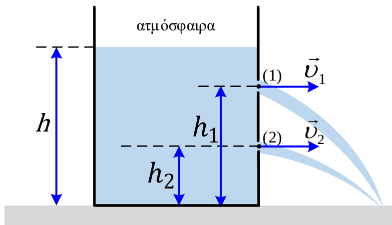
Α1. β, Α2. α, Α3. β, Α4. δ

Α5. α. Σ, β. Λ, γ. Σ, δ. Σ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η β.

Έστω υ_1 το μέτρο της ταχύτητας με την οποία εκτοξεύεται το υγρό από την οπή (1).



Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Κ στην επιφάνεια του υγρού και ενός σημείου Λ ακριβώς έξω από την οπή (1), τα οποία βρίσκονται πάνω στην ίδια ρευματική γραμμή, έχουμε:

$$p_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 + \rho g(h - h_1) = p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \text{ ή}$$

$$p_{\alpha\tau\mu} + 0 + \rho g(h - h_1) = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g(h - h_1)} \text{ (1).}$$

Ο χρόνος πτώσης Δt_1 της φλέβας του υγρού που εξέρχεται από την οπή (1) υπολογίζεται από τον τύπο:

$$h_1 = \frac{1}{2}g\Delta t_1^2 \text{ ή } \Delta t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \text{ (2).}$$

Το βεληνεκές x_1 της φλέβας του υγρού που εξέρχεται από την οπή (1) είναι ίσο με $x_1 = \upsilon_1\,\Delta t_1$, ή λόγω των σχέσεων (1) και (2):

$$x_1 = 2\sqrt{h_1(h - h_1)} \text{ (3).}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι το βεληνεκές της φλέβας του υγρού που εξέρχεται από την οπή (2) είναι ίσο με:

$$x_2 = 2\sqrt{h_2(h - h_2)} \text{ (4).}$$

Ισχύει ότι $x_1 = x_2$, ή λόγω των σχέσεων (3) και (4):

$$\sqrt{h_1(h - h_1)} = \sqrt{h_2(h - h_2)} \text{ ή } h_1(h - h_1) = h_2(h - h_2) \text{ ή}$$

$$h_1 h - h_1^2 = h_2 h - h_2^2 \text{ ή } h_1 h - h_2 h = h_1^2 - h_2^2 \text{ ή}$$

$$h(h_1 - h_2) = (h_1 - h_2)(h_1 + h_2) \text{ ή}$$

$$h = h_1 + h_2 \text{ (5).}$$

Ισχύει ότι $h_1 > \frac{h}{2}$, ή λόγω της σχέσης (5):

$$h - h_2 > \frac{h}{2} \text{ ή } h_2 < \frac{h}{2}.$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Επειδή οι ροπές των δυνάμεων που δέχονται τα δύο σώματα είναι σταθερές, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής κάθε σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι σταθερός. Συνεπώς, για τον δίσκο ισχύει:

$$\frac{dL_{δίσκου}}{dt} = Στ_{δίσκου} \text{ ή } \frac{ΔL_{δίσκου}}{Δt} = F \cdot R \text{ ή } \frac{L_1 - 0}{t - 0} = FR \text{ ή } L_1 = FRt \text{ (1).}$$

Για τον δακτύλιο ισχύει:

$$\frac{dL_{δακτυλίου}}{dt} = Στ \text{ ή } \frac{ΔL_{δακτυλίου}}{Δt} = F \cdot R \text{ ή } \frac{L_2 - 0}{t - 0} = FR \text{ ή } L_2 = FRt \text{ (2).}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $L_1 = L_2$.

Έστω I_1 η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του.

Η κινητική ενέργεια K_1 του δίσκου τη χρονική στιγμή t είναι ίση με:

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \text{ ή } K_1 = \frac{1}{2} I_1 \left(\frac{L_1}{I_1}\right)^2 \text{ ή } K_1 = \frac{1}{2}\frac{L_1^2}{I_1} \text{ (3).}$$

Έστω I_2 η ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς τον άξονα περιστροφής του.

Η κινητική ενέργεια K_2 του δακτυλίου τη χρονική στιγμή t_2 είναι ίση με:

$$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \text{ ή } K_2 = \frac{1}{2} I_2 \left(\frac{L_2}{I_2}\right)^2 \text{ ή } K_2 = \frac{1}{2}\frac{L_2^2}{I_2} \text{ (4).}$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (3) και (4) έχουμε:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{L_1^2 I_2}{L_2^2 I_1} \text{ ή } \frac{K_1}{K_2} = \frac{I_2}{I_1} \text{ (5).}$$

Όμως η ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς το κέντρο του είναι μεγαλύτερη από τη ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το κέντρο του, γιατί όλη η μάζα του δακτυλίου είναι κατανεμημένη στην περιφέρεια του, δηλαδή σε απόσταση R από το κέντρο του, ενώ στον δίσκο η μάζα του κατανέμεται και σε αποστάσεις μικρότερες από την ακτίνα R. Συνεπώς, ισχύει ότι $I_2 > I_1$. Επομένως, από τη σχέση (5) προκύπτει ότι $K_1 > K_2$.

Β3. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Έστω $Δ\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$Σ\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } mg = kΔ\ell \text{ ή } Δ\ell = \frac{mg}{k}.$$

Το αρχικό πλάτος A_0 της φθίνουσας ταλάντωσης είναι ίσο με:

$$A_0 = Δ\ell \text{ ή } A_0 = \frac{mg}{k}.$$

Το πλάτος A_1 της φθίνουσας ταλάντωσης στο τέλος της πρώτης περιόδου είναι ίσο με:

$$A_1 = \frac{A_0}{2} \text{ ή } A_1 = \frac{mg}{2k}.$$

Έστω A_2 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης στο τέλος της δεύτερης περιόδου. Ισχύει:

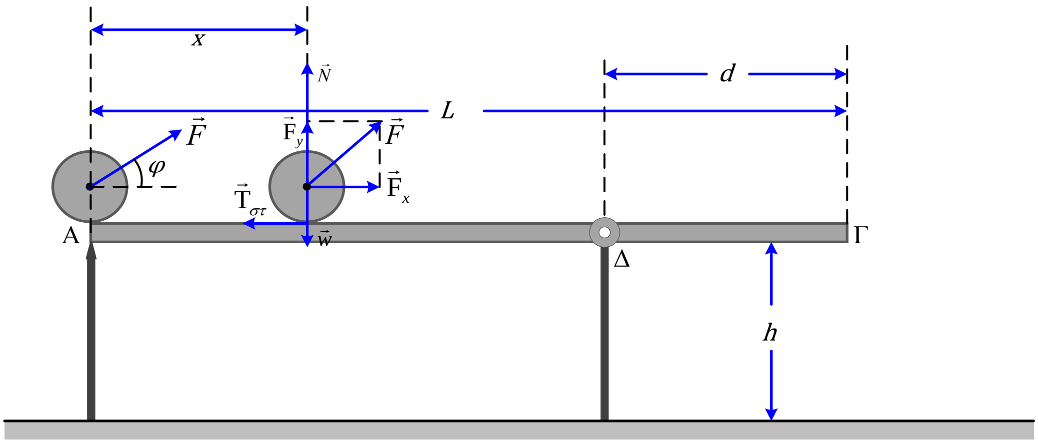
$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \text{ ή } A_1^2 = A_0 A_2 \text{ ή } \frac{m^2 g^2}{4k^2} = \frac{mg}{k} A_2 \text{ ή } A_2 = \frac{mg}{4k}.$$

Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο στο τέλος της δεύτερης περιόδου είναι ίσο με:

$$F_{\varepsilon\lambda} = k(\Delta\ell - A_2) \text{ ή } F_{\varepsilon\lambda} = k\left(\frac{mg}{k} - \frac{mg}{4k}\right) \text{ ή } F_{\varepsilon\lambda} = \frac{3mg}{4}.$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται ο δίσκος κατά τη διάρκεια της κίνησης του πάνω στη σανίδα.



Έστω α_{cm} το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου και $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής του επιτάχυνσης. Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει ότι $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$.

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον δίσκο έχουμε:

$$\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \text{ ή } F_x - T_{\sigma\tau} = m\alpha_{cm} \text{ ή } F\sigma\upsilon\nu\varphi - T_{\sigma\tau} = m\alpha_{cm} \text{ (1).}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για τον δίσκο έχουμε:

$$\Sigma\tau = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } T_{\sigma\tau} R = \frac{1}{2} mR^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} m\alpha_{cm} \text{ (2).}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$F\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{3}{2} m\alpha_{cm} \text{ ή } \alpha_{cm} = \frac{2F\sigma\upsilon\nu\varphi}{3m} \text{ ή } \alpha_{cm} = 4\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του υπολογίζεται από τον τύπο:

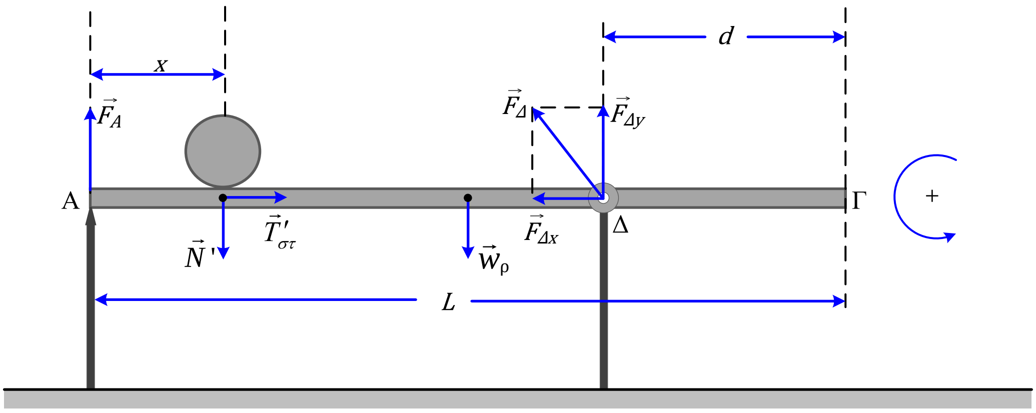
$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau \text{ ή } \frac{dL}{dt} = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} mR^2 \frac{\alpha_{cm}}{R} \text{ ή } \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} mR\alpha_{cm} \text{ ή } \frac{dL}{dt} = 0{,}4\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}.$$

Γ2. Το μέτρο της κάθετης δύναμης $\vec{N}$ που δέχεται ο δίσκος από τη σανίδα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Sigma\vec{F}_y=\vec{0} \text{ ή } N+F_y=mg \text{ ή } N=mg-F\eta\mu\varphi \text{ ή } N=2\text{ N}.$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται ο δίσκος από τη σανίδα είναι ίσο με $T_{\sigma\tau}=2$ N.

Έστω ότι ο δίσκος τη χρονική στιγμή t έχει μετατοπιστεί κατά x από την αρχική του θέση. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται η σανίδα τη χρονική στιγμή t.



Επειδή η σανίδα ισορροπεί, έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(\Delta)}=0 \text{ ή } -F_A(L-d)+N'(L-d-x)+w_\rho\left(\frac{L}{2}-d\right)=0 \text{ ή }$$

$$F_A(L-d)=N(L-d-x)+M_\rho g\left(\frac{L}{2}-d\right) \text{ ή } F_A=\frac{N(L-d-x)+M_\rho g\left(\frac{L}{2}-d\right)}{L-d} \text{ ή}$$

$$F_A=3-\frac{x}{3}\ (S.I.)\ (3).$$

Η σανίδα ανατρέπεται όταν $F_A=0$. Από τη σχέση (3) για $F_A=0$ προκύπτει ότι $x=9$ m. Επειδή είναι $x>L$, η σανίδα κατά τη διάρκεια της κίνησης του δίσκου πάνω σε αυτήν δεν ανατρέπεται.

Γ3. Έστω υ_{cm} το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου και ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t στην οποία η κινητική ενέργεια του δίσκου είναι ίση με $K=18$ J.

Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς ολισθαίνει, ισχύει ότι $\upsilon_{cm}=\omega R$. Έχουμε:

$$K=K_{\mu\varepsilon\tau}+K_{\pi\varepsilon\rho} \text{ ή } K=\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \text{ ή } K=\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{4}mR^2\omega^2 \text{ ή}$$

$$K=\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{4}m\upsilon_{cm}^2 \text{ ή } K=\frac{3}{4}m\upsilon_{cm}^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_{cm}=\sqrt{\frac{4K}{3m}} \text{ ή } \upsilon_{cm}=\sqrt{24}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Έχουμε:

$$\upsilon_{cm}=\alpha_{cm}t \text{ ή } t=\frac{\sqrt{24}}{4}\text{ s και}$$

$$x=\frac{1}{2}\alpha_{cm}t^2 \text{ ή } x=3\text{ m}.$$

Από τη σχέση (3) για $x=3$ m προκύπτει ότι $F_A=2$ N.

Επειδή η σανίδα ισορροπεί, ισχύουν:

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \text{ (4) και } \Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \text{ (5).}$$

Από τη σχέση (4) προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \text{ ή } F_{\Delta x} = T'_{\sigma\tau} \text{ ή } F_{\Delta x} = T_{\sigma\tau} = 2 \text{ N.}$$

Από τη σχέση (5) προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \text{ ή } F_{\Delta y} + F_A = N' + M_\rho g \text{ ή } F_{\Delta y} = 3 \text{ N.}$$

Επομένως, το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_\Delta$ που δέχεται η σανίδα από τον άξονα περιστροφής της τη χρονική στιγμή t είναι ίσο με:

$$F_\Delta = \sqrt{F_{\Delta x}^2 + F_{\Delta y}^2} \text{ ή } F_\Delta = \sqrt{13} \text{ N.}$$

Γ4. Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία ο δίσκος φτάνει στο άκρο Γ της σανίδας ισχύει:

$$L = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t_1^2 \text{ ή } t_1 = 2 \text{ s.}$$

Το μέτρο υ_{cm} της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με $\upsilon'_{cm} = \alpha_{cm}t_1 = 8\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ο ζητούμενος ρυθμός υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} + \frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F dx}{dt} + \frac{\Sigma\tau \cdot d\theta}{dt} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon'_{cm} + \Sigma\tau \cdot \omega' \text{ ή}$$

$$\frac{dK}{dt} = m\alpha_{cm}\upsilon'_{cm} + \frac{1}{2}mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu}\omega' \text{ ή } \frac{dK}{dt} = m\alpha_{cm}\upsilon'_{cm} + \frac{1}{2}mR^2\frac{\alpha_{cm}}{R}\frac{\upsilon'_{cm}}{R} \text{ ή}$$

$$\frac{dK}{dt} = m\alpha_{cm}\upsilon'_{cm} + \frac{1}{2}m\alpha_{cm}\upsilon'_{cm} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \frac{3}{2}m\alpha_{cm}\upsilon'_{cm} \text{ ή}$$

$$\frac{dK}{dt} = 48\frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Γ5. Από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά ισχύει ότι $\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = 0$. Επομένως, ο δίσκος εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση. Ισχύει:

$$h = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \text{ ή } t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ ή } t_2 - t_1 = 0{,}5 \text{ s.}$$

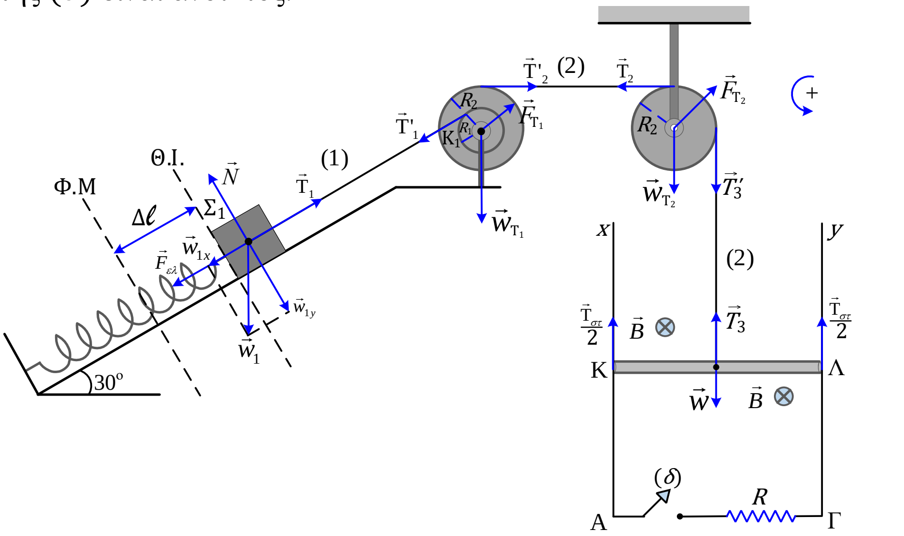
Ο αριθμός N των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι ίσος με:

$$N = \frac{\theta}{2\pi} \text{ ή } N = \frac{\omega(t_2 - t_1)}{2\pi} \text{ ή } N = \frac{\frac{\upsilon'_{cm}}{R}(t_2 - t_1)}{2\pi} \text{ ή}$$

$$N = \frac{10}{\pi} \text{ περιστροφές.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχονται τα σώματα, όταν ο διακόπτης (δ) είναι ανοικτός.



Επειδή το σώμα Σ1 ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \text{ ή } w_{1x} + F_{\varepsilon\lambda} = T_1 \text{ ή } m_1 g\eta\mu\varphi + k\Delta\ell = T_1 \text{ ή } T_1 = 70 \text{ N}.$$

Επειδή η τροχαλία T_1 ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(K_1)} = 0 \text{ ή } T_1' R_1 - T_2 R_2 = 0 \text{ ή } T_1 R_1 = T_2 R_2 \text{ ή } T_2 = 35 \text{ N}.$$

Επειδή η τροχαλία T_2 ισορροπεί, ισχύει:

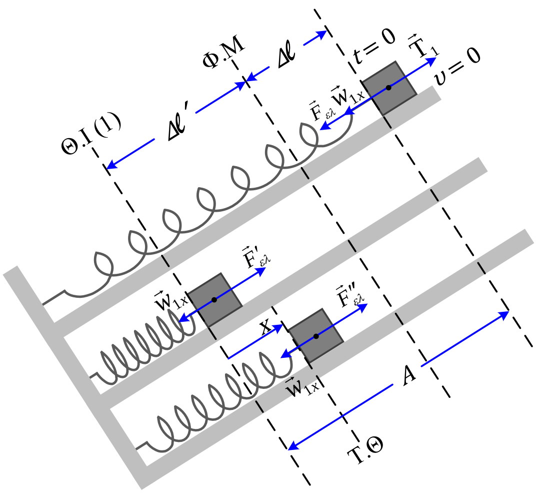
$$\Sigma\tau_{(K_2)} = 0 \text{ ή } +T_2 R_2 - T_3' R_2 = 0 \text{ ή } T_2 = T_3' \text{ ή } T_3 = 35 \text{ N}.$$

Επειδή το μέτρο του βάρους $\vec{w}$ του αγωγού ΚΛ είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της τάσης $\vec{T}_3$ του νήματος που δέχεται, η συνολική οριακή στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau(o\rho)}$ που δέχεται ο αγωγός ΚΛ έχει φορά προς τα πάνω.

Επειδή ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } w = T_3 + T_{\sigma\tau(o\rho)} \text{ ή } mg = T_3 + T_{\sigma\tau(o\rho)} \text{ ή } T_{\sigma\tau(o\rho)} = 5 \text{ N}.$$

Δ2.



Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ1 (Θ.Ι(1)) ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \text{ ή } w_{1x} = F'_{\varepsilon\lambda} \text{ ή } m_1 g\eta\mu\varphi = k\Delta\ell' \text{ (1).}$$

Στη τυχαία θέση που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα ισχύει:

$$\Sigma F_x = F''_{\varepsilon\lambda} - w_{1x} \text{ ή } \Sigma F_x = k(\Delta\ell' - x) - m_1 g\eta\mu\varphi \text{ ή } \Sigma F_x = k\Delta\ell' - kx - m_1 g\eta\mu\varphi,$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$\Sigma F_x = -kx.$$

Επομένως, η κίνηση του σώματος Σ1 είναι απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$. Ισχύει:

$$D = m_1\omega^2 \text{ ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \text{ ή } \omega = 5\sqrt{2}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Όπως προκύπτει από το σχήμα το πλάτος A της ταλάντωσης του σώματος Σ1 είναι ίσο με $A = \Delta\ell + \Delta\ell'$. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $\Delta\ell' = 0{,}1$ m.

Συνεπώς, είναι $A = 0{,}7$ m.

Για $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ1 από τη θέση ισορροπίας του είναι ίση με $x = +A = +0{,}7$ m. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ1 από τη θέση ισορροπίας του είναι η:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \text{ (2).}$$

Από τη σχέση (2) για $t = 0$ και $x = +A$ προκύπτει:

$$\eta\mu\varphi_0 = 1 \text{ ή } \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \text{ (3).}$$

Αφού $0 \le \varphi_0 < 2\pi$ rad, η λύση της εξίσωσης (3) είναι η $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad.

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος Σ1 είναι η:

$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \text{ ή } \upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \text{ ή}$$

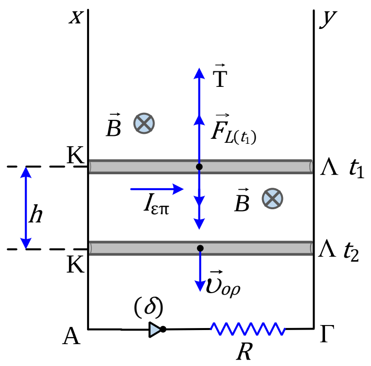
$$\upsilon = 3{,}5\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(5\sqrt{2}t + \frac{\pi}{2}\right)(S.I.).$$

Δ3. Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 1{,}6$ s ο αγωγός ΚΛ εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Το μέτρο υ_1 της ταχύτητας του αγωγού ΚΛ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\upsilon_1 = gt_1 \text{ ή } \upsilon_1 = 16\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται ο αγωγός ΚΛ τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ).



Το μέτρο της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο κύκλωμα δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{|d\Phi|}{dt} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{B dx \ell}{dt} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = B\upsilon\ell.$$

Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα δίνεται από τη σχέση:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R+R_{K\Lambda}} \text{ ή } I_{\varepsilon\pi} = \frac{B\upsilon\ell}{R+R_{K\Lambda}}.$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που δέχεται ο αγωγός ΚΛ δίνεται από τη σχέση:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi}\ell \text{ ή } F_L = \frac{B^2\ell^2\upsilon}{R+R_{K\Lambda}}.$$

Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 το μέτρο της δύναμης Laplace που δέχεται ο αγωγός ΚΛ είναι ίσο με:

$$F_{L(t_1)} = \frac{B^2\ell^2\upsilon_1}{R+R_{K\Lambda}} \text{ ή } F_{L(t_1)} = 80 \text{ N}.$$

Αφού είναι $F_{L(t_1)} + T > w$, ο αγωγός ΚΛ αρχίζει να επιβραδύνεται.

Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται ο αγωγός ΚΛ από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά είναι ίσο με:

$$\Sigma F = F_L + T - mg \text{ ή } \Sigma F = \frac{B^2\ell^2\upsilon}{R+R_{K\Lambda}} + T - mg \ (4).$$

Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι, καθώς ο αγωγός ΚΛ επιβραδύνεται και το μέτρο υ της ταχύτητάς του μειώνεται, το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται μειώνεται μέχρι να μηδενιστεί τη χρονική στιγμή t_2. Αφού ισχύει $\alpha = \frac{\Sigma F}{m}$, το μέτρο της επιβράδυνσης του αγωγού ΚΛ μειώνεται συνεχώς μέχρι να μηδενιστεί τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία αποκτά την οριακή του ταχύτητα.

Συνεπώς, η κίνηση του αγωγού ΚΛ από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι επιβραδυνόμενη με επιβράδυνση που μειώνεται κατά μέτρο.

Δ4. Τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία ο αγωγός ΚΛ αποκτά την οριακή του ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{o\rho}$ ισχύει $\Sigma F = 0$, ή λόγω της σχέσης (4):

$$\frac{B^2\ell^2\upsilon_{o\rho}}{R+R_{K\Lambda}} + T - mg = 0 \text{ ή } \upsilon_{o\rho} = \frac{(mg-T)(R+R_{K\Lambda})}{B^2\ell^2} \text{ ή } \upsilon_{o\rho} = 7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Έστω h η μετατόπιση του αγωγού από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2. Ισχύει:

$$q_{\varepsilon\pi} = \frac{|\varDelta\Phi|}{R+R_{K\Lambda}} \text{ ή } q_{\varepsilon\pi} = \frac{Bh\ell}{R+R_{K\Lambda}} \text{ ή } h = 1 \text{ m.}$$

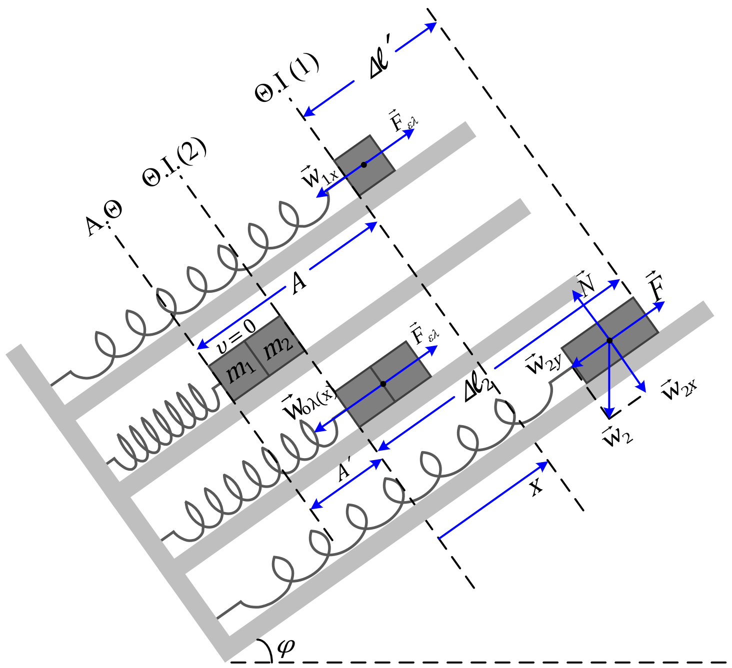
Έστω $Q_{R_{o\lambda}}$ το ποσό θερμότητας που εκλύεται από τους αντιστάτες του κυκλώματος λόγω φαινομένου Joule και Q_T το ποσό θερμότητας που εκλύεται λόγω της τριβής ολίσθησης.

Από την Α.Δ.Ε μεταξύ της θέσης του αγωγού ΚΛ τη χρονική στιγμή t_1 και της θέσης του τη χρονική στιγμή t_2, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση του τη χρονική στιγμή t_2, έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} - E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)} = Q_{R_{o\lambda}} + Q_T \text{ ή } \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh - \frac{1}{2}mv_{o\rho}^2 = Q_{R_{o\lambda}} + Th \text{ ή}$$

$$Q_{R_{o\lambda}} = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 - v_{o\rho}^2\right) + (mg - T)h \text{ ή } Q_{R_{o\lambda}} = 449 \text{ J.}$$

Δ5.



Έστω $\varDelta\ell_2$ η συμπίεση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας των δύο σωμάτων. Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \text{ ή } (m_1 + m_2)g\eta\mu\varphi = k\varDelta\ell_2 \text{ ή } \varDelta\ell_2 = 0{,}2 \text{ m.}$$

Όπως προκύπτει από το σχήμα το πλάτος A' της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα των σωμάτων Σ1 και Σ2 είναι ίσο με:

$$A' = \varDelta\ell' + A - \varDelta\ell_2 \text{ ή } A' = 0{,}6 \text{ m.}$$

Έστω η τυχαία θέση πάνω από τη θέση ισορροπίας (2) που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Στη θέση αυτή η αλγεβρική τιμή της δύναμης $\vec{F}$ που δέχεται το σώμα Σ2 από το σώμα Σ1 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Sigma F_2 = -D_2 x \text{ ή } F - m_2 g\eta\mu\varphi = -m_2 \omega'^2 x \text{ ή } F = m_2 g\eta\mu\varphi - m_2 \frac{k}{m_1+m_2} x \text{ (5).}$$

Για να χαθεί η επαφή μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2, θα πρέπει να γίνει $F = 0$. Συνεπώς, από τη σχέση (5) έχουμε:

$$x = \frac{(m_1+m_2)g\eta\mu\varphi}{k} \text{ ή } x = 0{,}2 \text{ m.}$$

Έστω υ το μέτρο της ταχύτητας των σωμάτων τη στιγμή που χάνεται η επαφή τους. Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του συστήματος των δύο σωμάτων έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 \text{ ή } \upsilon = 2\sqrt{2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Αμέσως μετά το χάσιμο της επαφής των δύο σωμάτων το σώμα Σ_1 συνεχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας 1 (Θ.Ι.(1)) με ολική ενέργεια E'. Από την Α.Δ.Ε για την νέα ταλάντωση του σώματος Σ_1, έχουμε:

$$E' = K + U \text{ ή } E' = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell')^2 \text{ ή } E' = 8{,}5 \text{ J.}$$

8ο Κριτήριο Αξιολόγησης

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. β, Α2. γ, Α3. γ, Α4. α

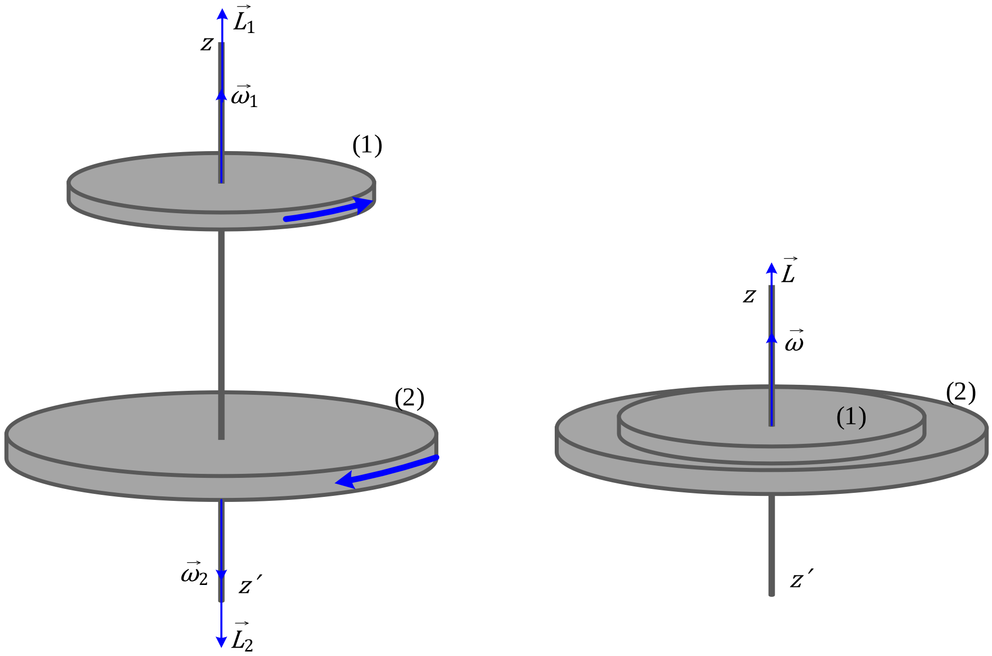
Α5. α. Λ, β. Λ, γ. Σ, δ. Σ, ε. Λ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Σωστή απάντηση είναι η β.

Ισχύει:

$$K_1 = K_2 \text{ ή } \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \text{ ή } I_1\omega_1^2 = I_2(2\omega_1)^2 \text{ ή } I_1 = 4I_2.$$



Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα των δύο δίσκων έχουμε:

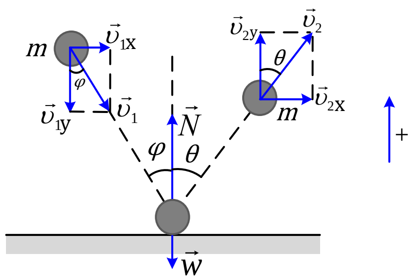
$$\vec{L}_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)} = \vec{L}_{o\lambda(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} \text{ ή } \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L} \text{ ή } L_1 - L_2 = L \text{ ή}$$

$$I_1\omega_1 - I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega \text{ ή } 4I_2\omega_1 - I_2 2\omega_1 = 5I_2\omega \text{ ή}$$

$$\omega = 0{,}4\omega_1.$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Αφού η κρούση είναι ελαστική, ισχύουν οι σχέσεις $\varphi = \theta$ και $\upsilon_2 = \upsilon_1$.



Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας στον άξονα $y'y$ είναι:

$$\Delta\vec{p}_y = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi} \text{ ή } \Delta p_y = m\upsilon_{2y} - (-m\upsilon_{1y}) \text{ ή}$$

$$\Delta p_y = m\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\theta + m\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή } \Delta p_y = 2m\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\varphi.$$

Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_y = \frac{\Delta\vec{p}_y}{\Delta t} \text{ ή } N - w = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} \text{ ή } N = mg + \frac{2m\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\varphi}{\Delta t}.$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Ο όγκος V του υγρού στο δοχείο είναι ίσος με $V = Ah$.

Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Κ της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού και ενός σημείου Λ ακριβώς έξω από την οπή έχουμε:

$$p_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 + \rho h\frac{h}{2} = p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Lambda^2 \text{ ή } p_{\alpha\tau\mu} + 0 + \rho h\frac{h}{2} = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Lambda^2 \text{ ή } \upsilon_\Lambda = \sqrt{gh}.$$

Η παροχή Π της οπής είναι ίση με:

$$\Pi = A_1\upsilon_\Lambda \text{ ή } \Pi = \frac{A\sqrt{gh}}{100}.$$

Έστω Δt ο χρόνος πτώσης του υγρού από τη χρονική στιγμή που εξέρχεται από την οπή μέχρι τη χρονική στιγμή που φτάνει στο έδαφος. Ισχύει:

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \text{ ή } \Delta t = \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Ο όγκος ΔV του υγρού που βρίσκεται στον αέρα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \text{ ή } \Delta V = \Pi\Delta t \text{ ή } \Delta V = \frac{A\sqrt{gh}}{100}\cdot\sqrt{\frac{h}{g}} \text{ ή } \Delta V = \frac{Ah}{100} \text{ ή } \Delta V = \frac{V}{100}.$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Από τη δοθείσα εξίσωση για $t = 0$ προκύπτει:

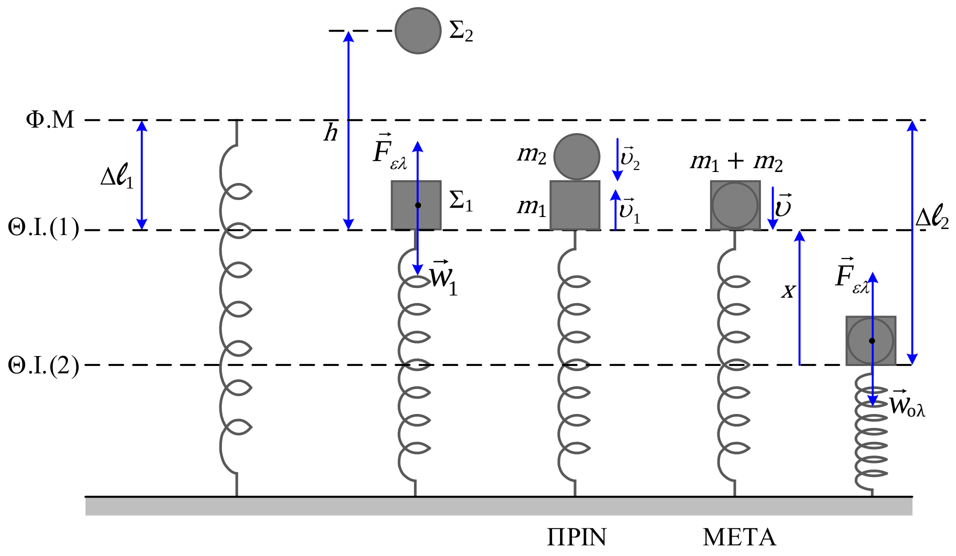
$$x = 0{,}3\sqrt{2}\eta\mu\frac{3\pi}{4} \text{ ή } x = 0{,}3\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } x = +0{,}3 \text{ m}.$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του συσσωματώματος είναι η:

$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \text{ ή } \upsilon = 1{,}5\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(5t + \frac{3\pi}{4}\right)(S.I.) \text{ (1)}.$$

Από την εξίσωση (1) για $t = 0$ έχουμε:

$$\upsilon = 1{,}5\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}\frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ ή } \upsilon = 1{,}5\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ ή } \upsilon = -1{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ ή } |\upsilon| = 1{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Γ2. Από την αρχική Θ.Ι.(1) του σώματος Σ_1 έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } m_1 g = k\Delta\ell_1 \text{ ή } \Delta\ell_1 = \frac{m_1 g}{k} \ (2).$$

Από τη Θ.Ι.(2) του συσσωματώματος έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } (m_1 + m_2)g = k\Delta\ell_2 \text{ ή } \Delta\ell_2 = \frac{(m_1+m_2)g}{k} \ (3).$$

Ισχύει ότι $x = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$, ή λόγω των σχέσεων (2) και (3):

$$x = \frac{m_2 g}{k} \text{ ή } m_2 = \frac{xk}{g} \text{ ή } m_2 = 12 \text{ kg}.$$

Ισχύει:

$$D = (m_1 + m_2)\omega_2^2 \text{ ή } k = (m_1 + m_2)\omega_2^2 \ (4),$$

όπου ω_2 η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Από τη σχέση (4), προκύπτει:

$$m_1 + m_2 = \frac{k}{\omega_2^2} \text{ ή } m_1 = \frac{k}{\omega_2^2} - m_2 \text{ ή } m_1 = 4 \text{ kg}.$$

Γ3. Επειδή οι ταχύτητες των δύο σωμάτων πριν από την κρούση είναι αντίθετες, ισχύει:

$$\vec{\upsilon}_1 = -\vec{\upsilon}_2 \text{ ή } |\upsilon_1| = |\upsilon_2|.$$

Από την Α.Δ.Ο για την κρούση έχουμε:

$$m_2|\upsilon_2| - m_1|\upsilon_1| = (m_1 + m_2)|\upsilon| \text{ ή } |\upsilon_1| = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Από το Θ.Μ.Κ.Ε για την κίνηση του σώματος Σ_2 πριν από την κρούση έχουμε:

$$W_{m_2 g} = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \text{ ή } m_2 g h = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \text{ ή } h = \frac{\upsilon_2^2}{2g} \text{ ή } h = 0{,}45 \text{ m}.$$

Γ4. Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + 0 \text{ ή } d = \sqrt{\frac{m_1}{k}}|\upsilon_1| \text{ ή } d = 0{,}3 \text{ m}.$$

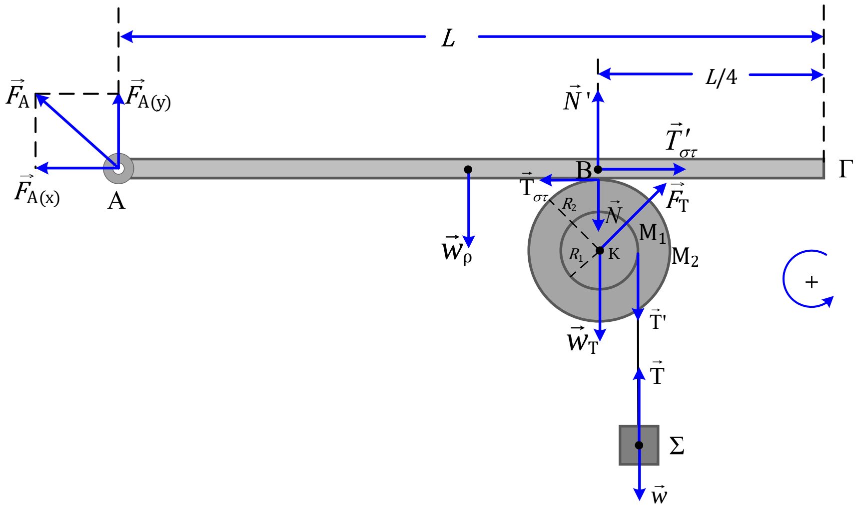
Η μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ_1 από το ελατήριο πριν από την κρούση είναι ίση με:

$$F_{\varepsilon\lambda(\max)} = k(\Delta\ell_1 + d) \text{ ή } F_{\varepsilon\lambda(\max)} = k\left(\frac{m_1 g}{k} + d\right) \text{ ή } F_{\varepsilon\lambda(\max)} = m_1 g + kd \text{ ή }$$

$$F_{\varepsilon\lambda(\max)} = 160 \text{ N}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχονται τα σώματα.



Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } T = mg \text{ ή } T = 10 \text{ N}.$$

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \text{ ή } T_{\sigma\tau}R_2 - T'R_1 = 0 \text{ ή } T_{\sigma\tau}R_2 = TR_1 \text{ ή } T_{\sigma\tau} = 5 \text{ N}.$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \text{ ή } N'\frac{3L}{4} - w_\rho\frac{L}{2} = 0 \text{ ή } \frac{3N'}{4} = \frac{1}{2}Mg \text{ ή } N' = \frac{2}{3}Mg \text{ ή } N' = 20 \text{ N}.$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη ότι:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή}$$

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \text{ (1) και } \Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \text{ (2).}$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$F_{Ax} = T'_{\sigma\tau} \text{ ή } F_{Ax} = T_{\sigma\tau} \text{ ή } F_{Ax} = 5 \text{ N}$$

και από τη σχέση (2) έχουμε:

$$F_{Ay} + N' = w_\rho \text{ ή } F_{Ay} = Mg - N' \text{ ή } F_{Ay} = 10 \text{ N}.$$

Συνεπώς, είναι:

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} \text{ ή } F_A = \sqrt{125} \text{ N ή } F_A = 5\sqrt{5} \text{ N}.$$

Δ2. Η ροπή αδράνειας της διπλής τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι ίση με:

$$I = \frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2 \ \text{ή}\ I = 0{,}09\ \mathrm{kgm^2}.$$

Έστω α το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος και $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας. Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του κυλίνδρου (1), ισχύει ότι $\alpha = \alpha_{\gamma\omega\nu}R_1$.

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για το σώμα Σ έχουμε:

$$\Sigma F = m\alpha \ \text{ή}\ w - T = m\alpha \ \text{ή}\ T = mg - m\alpha \ (3).$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την τροχαλία έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \ \text{ή}\ T'R_1 = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \ \text{ή}\ TR_1 = I\alpha_{\gamma\omega\nu},$$

ή λόγω της σχέσης (3):

$$(mg - m\alpha)R_1 = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \ \text{ή}\ \left(mg - m\alpha_{\gamma\omega\nu}R_1\right)R_1 = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \ \text{ή}$$

$$mgR_1 = (mR_1^2 + I)\alpha_{\gamma\omega\nu} \ \text{ή}\ \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{mgR_1}{mR_1^2 + I} \ \text{ή}\ \alpha_{\gamma\omega\nu} = 10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s^2}}.$$

Δ3. Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$\ell = R_1\theta \ \text{ή}\ \ell = R_1\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_1^2 \ \text{ή}\ t_1 = 4\ \mathrm{s}.$$

Τη χρονική στιγμή t_1 το μέτρο υ_1 της ταχύτητας του σώματος Σ είναι ίσο με:

$$\upsilon_1 = \alpha t_1 \ \text{ή}\ \upsilon_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu}R_1t_1 \ \text{ή}\ \upsilon_1 = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ο ζητούμενος ρυθμός είναι ίσος με:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} \ \text{ή}\ \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F\cdot dx}{dt} \ \text{ή}\ \frac{dK}{dt} = \Sigma F\upsilon \ \text{ή}\ \frac{dK}{dt} = m\alpha\upsilon_1 \ \text{ή}\ \frac{dK}{dt} = m\alpha_{\gamma\omega\nu}R_1\upsilon_1 \ \text{ή}$$

$$\frac{dK}{dt} = 4\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}.$$

Δ4. Έστω $\alpha'_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης της τροχαλίας και α' το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος Σ_1.

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s το μέτρο ω_1 της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας είναι ίσο με $\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu}t_1$ ή $\omega_1 = 40\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Ισχύει:

$$\omega = \omega_1 - \alpha'_{\gamma\omega\nu}(t_2 - t_1) \ \text{ή}\ 0 = \omega_1 - \alpha'_{\gamma\omega\nu}(t_2 - t_1) \ \text{ή}\ \alpha'_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_1}{t_2 - t_1} \ \text{ή}$$

$$\alpha'_{\gamma\omega\nu} = 20\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s^2}}.$$

Επομένως:

$$\alpha' = \alpha'_{\gamma\omega\nu}R_1 \ \text{ή}\ \alpha' = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}.$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για το σώμα Σ έχουμε:

$$\Sigma F = m\alpha' \ \text{ή}\ T - mg = m\alpha' \ \text{ή}\ T = 12\ \mathrm{N}.$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την τροχαλία έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\alpha'_{\gamma\omega\nu} \ \text{ή}\ T_\rho R_2 - T'R_1 = I\alpha'_{\gamma\omega\nu} \ \text{ή}\ T_\rho = 15\ \mathrm{N},$$

όπου T_ρ το μέτρο της δύναμης τριβής ολίσθησης που δέχεται η τροχαλία από τη ράβδο. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

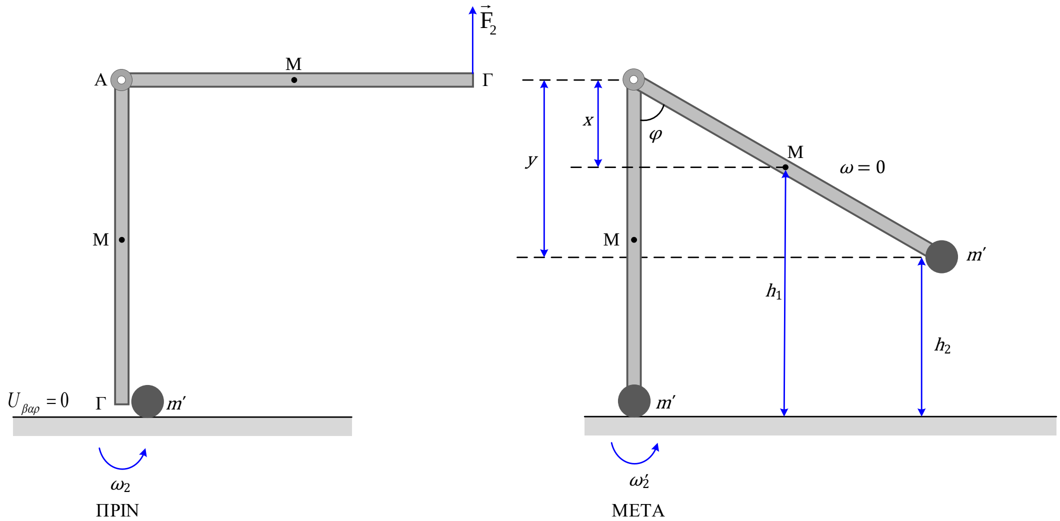
$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \text{ ή } N'\frac{3L}{4} - w_\rho\frac{L}{2} - F_1 L = 0 \text{ ή } N' = \frac{2Mg+4F_1}{3} \text{ ή } N' = 30\text{ N}.$$

Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ της ράβδου και της τροχαλίας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mu = \frac{T_\rho}{N} \text{ ή } \mu = 0{,}5.$$

Δ5. Η ροπή αδράνειας I_ρ της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι ίση με:

$$I_\rho = \frac{1}{3}ML^2 \text{ ή } I_\rho = 16\text{ kgm}^2.$$



Από το Θ.Μ.Κ.Ε ανάμεσα στην αρχική και την τελική θέση της κίνησης της ράβδου πριν από την κρούση, έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{w_\rho} + W_{F_2} \text{ ή } \frac{1}{2}I_\rho\omega_2^2 = Mg\frac{L}{2} + F_2\, L\frac{3\pi}{2} \text{ ή } \omega_2 = 2{,}5\sqrt{2}\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα ράβδος – σώμα Σ΄ έχουμε:

$$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \text{ ή } I_\rho\omega_2 = (I_\rho + m'L^2)\omega_2' \text{ ή } \omega_2' = 1{,}25\sqrt{2}\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε ανάμεσα στην αρχική και στην τελική θέση του συστήματος ράβδος – σώμα Σ΄ μετά την κρούση έχουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή } \frac{1}{2}\left(I_\rho + m'L^2\right)\omega_2'^2 + Mg\frac{L}{2} = Mgh_1 + m'gh_2 \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}\left(I_\rho + m'L^2\right)\omega_2'^2 + Mg\frac{L}{2} = Mg(L-x) + m'g(L-y) \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}\left(I_\rho + m'L^2\right)\omega_2'^2 + Mg\frac{L}{2} = Mg\left(L - \frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi\right) + m'g(L - L\sigma\upsilon\nu\varphi) \text{ ή}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{2} \text{ ή } \varphi = \frac{\pi}{3}\text{ rad}.$$

9ο Κριτήριο Αξιολόγησης

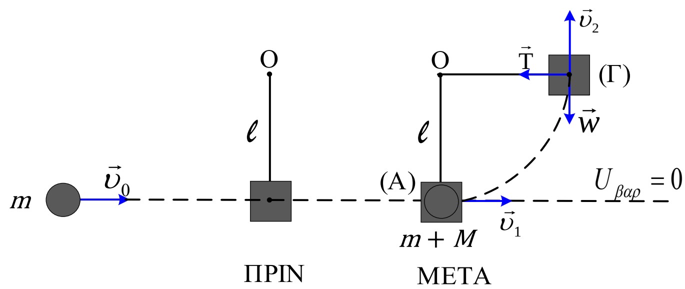
ΘΕΜΑ Α

Α1. β, Α2. α, Α3. δ, Α4. γ

Α5. α. Λ, β. Λ, γ. Λ, δ. Λ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η α.



Από την Α.Δ.Ο για την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \text{ ή } m\upsilon_0 = (M+m)\upsilon_1 \text{ ή } \upsilon_1 = \frac{\sqrt{44g\ell}}{4}.$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε για τις θέσεις (Α) και (Γ) του συσσωματώματος που φαίνονται στο σχήμα έχουμε:

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \text{ ή } \frac{1}{2}(M+m)\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}(M+m)\upsilon_2^2 + (M+m)g\ell \text{ ή}$$

$$\upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 - 2g\ell \text{ ή } \upsilon_2^2 = \frac{3}{4}g\ell.$$

Ισχύει:

$$\Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = F_K \text{ ή } T = \frac{(M+m)\upsilon_2^2}{\ell} \text{ή } T = 3\text{mg}.$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του του συσσωματώματος είναι ίσο με:

$$\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right| = \left|\Sigma\vec{F}\right| \text{ ή } \left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right| = \sqrt{T^2 + [(M+m)g]^2} \text{ ή } \left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right| = 5\text{mg}.$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Το μέτρο της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο κύκλωμα, όταν η ράβδος ΚΛ κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ είναι ίσο με:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{|d\Phi|}{dt} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{B dx \ell}{dt} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = B\upsilon\ell \text{ ή } V = B\upsilon\ell \text{ (1).}$$

Όταν ο διακόπτης (δ) είναι κλειστός, το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I_{\varepsilon\pi}$. Ισχύει:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{o\lambda}} \text{ ή } I_{\varepsilon\pi} = \frac{B\upsilon\ell}{R + R_{K\Lambda}} \text{ ή } I_{\varepsilon\pi} = \frac{B\upsilon\ell}{3R} \text{ (2).}$$

Η τάση V' που αναπτύσσεται στα άκρα του αγωγού ΚΛ, όταν ο διακόπτης (δ) είναι κλειστός είναι ίση με $V' = I_{\varepsilon\pi}R$, ή λόγω της σχέσης (2):

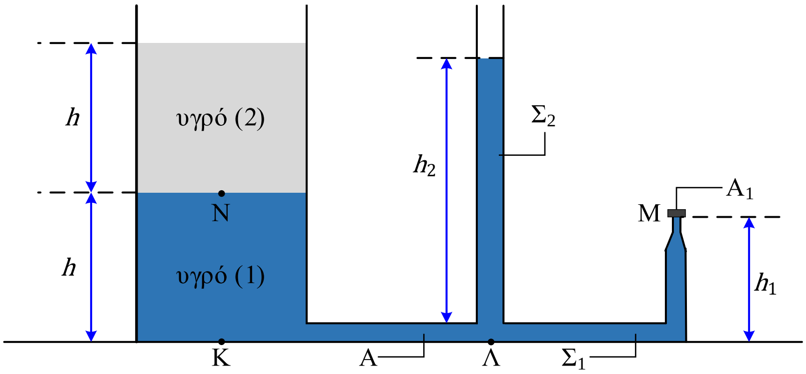
$$V' = \frac{B\upsilon\ell}{3} \ (4).$$

Από τις σχέσεις (1) και (4) προκύπτει ότι $V' = \frac{V}{3}$.

Β3. Σωστή απάντηση είναι η β.

Αρχικά τα υγρά (1) και (2) ισορροπούν. Έστω τα σημεία Κ και Λ που φαίνονται στο σχήμα. Από τη συνθήκη υδροστατικής ισορροπίας στο σημείο Κ έχουμε:

$$p_K = p_{\alpha\tau\mu} + \rho_1 g h + \rho_2 g h \ \text{ ή } \ p_K = p_{\alpha\tau\mu} + 1{,}8\rho_1 g h \ (1).$$



Από τη συνθήκη υδροστατικής ισορροπίας στο σημείο Λ έχουμε:

$$p_\Lambda = p_{\alpha\tau\mu} + \rho_1 g h_2 \ (2).$$

Για τα σημεία Κ και Λ ισχύει ότι $p_K = p_\Lambda$, ή λόγω των σχέσεων (1) και (2):

$$p_{\alpha\tau\mu} + 1{,}8\rho_1 g h = p_{\alpha\tau\mu} + \rho_1 g h_2 \ \text{ ή } \ h_2 = 1{,}8h.$$

Έστω υ_1 το μέτρο της ταχύτητας με την οποία εκτοξεύεται το υγρό (1) από το στόμιο του σωλήνα (1), όταν αφαιρέσουμε το πώμα.

Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ των σημείων Ν και Μ που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα έχουμε:

$$p_N + \frac{1}{2}\rho\upsilon_N^2 + \rho_1 g(h - h_1) = p_M + \frac{1}{2}\rho_1\upsilon_1^2 \ \text{ ή}$$

$$p_{\alpha\tau\mu} + \rho_2 g h + 0 + \rho_1 g(h - h_1) = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho_1\upsilon_1^2 \ \text{ ή}$$

$$0{,}8\rho_1 g h + \rho_1 g(h - h_1) = \frac{1}{2}\rho_1\upsilon_1^2 \ \text{ ή}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2{,}4gh} \ (3).$$

Έστω υ_Λ το μέτρο της ταχύτητας με την οποία ρέει το νερό στο σημείο Λ. Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των σημείων Λ και Μ έχουμε $A\upsilon_\Lambda = A_1\upsilon_1$ ή $\upsilon_\Lambda = \frac{\upsilon_1}{2}$, ή λόγω της σχέσης (3):

$$\upsilon_\Lambda = \frac{\sqrt{2{,}4gh}}{2} \ (4).$$

Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ των σημείων Λ και Μ έχουμε:

$$p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho_1\upsilon_\Lambda^2 = p_M + \frac{1}{2}\rho_1\upsilon_1^2 + \rho_1 g h_1,$$

ή λόγω των σχέσεων (3) και (4):

$$p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho_1\left(\frac{\sqrt{2{,}4gh}}{2}\right)^2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho_1\left(\sqrt{2{,}4gh}\right)^2 + 0{,}6\rho_1 gh \text{ ή}$$

$$p_\Lambda = p_{\alpha\tau\mu} + 1{,}5\rho_1 gh \text{ (5).}$$

Επειδή το υγρό (1) εξακολουθεί να ισορροπεί στο κατακόρυφο σωληνάκι Σ_2, ισχύει:

$$p_\Lambda = p_{\alpha\tau\mu} + \rho_1 g h_2' \text{ (6).}$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει ότι $h_2' = 1{,}5h$. Συνεπώς, η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού στο σωλήνα (2) θα κατέβει κατά:

$$\Delta h = h_2 - h_2' \text{ ή } \Delta h = 0{,}3\, h.$$

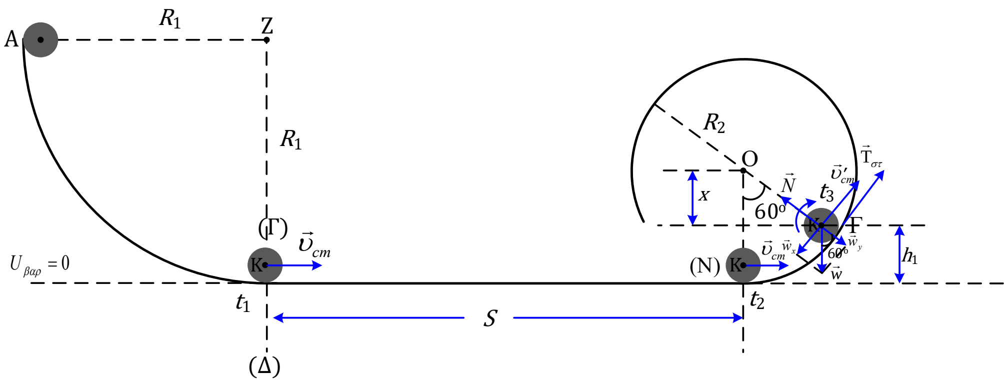
ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από την Α.Δ.Μ.Ε μεταξύ των θέσεων (Α) και (Δ) που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Delta)} \text{ ή } K_A + U_A = K_\Delta + U_\Delta \text{ ή } mgR_1 = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgr \text{ ή } mg(R_1 - r) = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\omega^2 \text{ ή}$$

$$g(R_1 - r) = \frac{1}{2}v_{cm}^2 + \frac{1}{5}v_{cm}^2 \text{ ή}$$

$$g(R_1 - r) = \frac{7}{10}v_{cm}^2 \text{ ή } v_{cm} = \sqrt{\frac{10g(R_1 - r)}{7}} \text{ ή } v_{cm} = 8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Γ2. Από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της παραμένει σταθερό και ίσο με $v_{cm} = 8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Συνεπώς, ισχύει:

$$v_{cm} = \omega r \text{ ή } \omega = \frac{v_{cm}}{r} \text{ ή } \omega = 16\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Έχουμε:

$$S = v_{cm}\Delta t \text{ ή } S = v_{cm}(t_2 - t_1) \text{ ή } t_2 - t_1 = 1\text{ s}.$$

Η περιστροφική κίνηση της σφαίρας από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι ομαλή. Ο αριθμός N των περιστροφών που εκτελεί η σφαίρα από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$N = \frac{\theta}{2\pi} \text{ ή } N = \frac{\omega(t_2 - t_1)}{2\pi} \text{ ή } N = \frac{8}{\pi} \text{ περιστροφές.}$$

Γ3. α. Από την Α.Δ.Μ.Ε μεταξύ των θέσεων (Ν) και (Γ) που βρίσκεται η σφαίρα τις χρονικές στιγμές t_2 και t_3 αντίστοιχα έχουμε:

$$E_{μηχ(N)} = E_{μηχ(Γ)} \text{ ή } K_N + U_N = K_Γ + U_Γ \text{ ή}$$
$$\frac{1}{2}mυ_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}ω^2 + mgr = \frac{1}{2}mυ_{cm}'^2 + \frac{1}{2}I_{cm}ω'^2 + mgh_1 \text{ ή}$$
$$\frac{1}{2}mυ_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2ω^2 + mgr = \frac{1}{2}mυ_{cm}'^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2ω'^2 + mg(R - x) \text{ ή}$$
$$\frac{1}{2}υ_{cm}^2 + \frac{1}{5}υ_{cm}^2 + gr = \frac{1}{2}υ_{cm}'^2 + \frac{1}{5}υ_{cm}'^2 + g\left[R - \frac{1}{2}(R - r)\right] \text{ ή}$$
$$\frac{7}{10}υ_{cm}^2 + gr = \frac{7}{10}υ_{cm}'^2 + g\frac{R+r}{2} \text{ ή}$$
$$υ_{cm}' = 7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Για τις ακτινικές δυνάμεις που δέχεται η σφαίρα στη θέση Γ ισχύει:

$$ΣF_{ακτ} = F_K \text{ ή } N - w_y = \frac{mυ_{cm}'^2}{R-r} \text{ ή } N = mgσυνφ + \frac{mυ_{cm}'^2}{R-r} \text{ ή } N = 59{,}5\ \mathrm{N}.$$

β. Στη θέση Γ από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση της σφαίρας έχουμε:

$$ΣF_x = mα_{cm} \text{ ή } w_x - T_{στ} = mα_{cm} \text{ ή } mgημφ - T_{στ} = mα_{cm} \text{ (1).}$$

Στη θέση Γ από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης έχουμε:

$$Στ = I_{cm}α_{γων} \text{ ή } T_{στ}r = \frac{2}{5}mr^2α_{γων} \text{ ή } T_{στ} = \frac{2}{5}mα_{cm} \text{ (2).}$$

Η σχέση (1), λόγω της σχέσης (2), γίνεται:

$$mgημφ - \frac{2}{5}mα_{cm} = mα_{cm} \text{ ή } α_{cm} = \frac{5gημφ}{7} \text{ (3).}$$

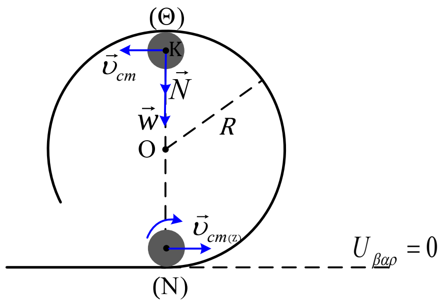
Από τη σχέση (2), λόγω της σχέσης (3), προκύπτει:

$$T_{στ} = \frac{2}{7}mgημφ \text{ ή } T_{στ} = 3\sqrt{3}\ \mathrm{N}.$$

Γ4. Από το Θ.Μ.Κ.Ε για την περιστροφική κίνηση της σφαίρας από τη χρονική στιγμή t_2 έως τη χρονική στιγμή t_3 έχουμε:

$$K_{τελ}^{περ} - K_{αρχ}^{περ} = W_{T_{στ}} \text{ ή } W_{T_{στ}} = \frac{1}{2}I_{cm}ω'^2 - \frac{1}{2}I_{cm}ω^2 \text{ ή}$$
$$W_{T_{στ}} = \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2ω'^2 - \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2ω^2 \text{ ή } W_{T_{στ}} = \frac{1}{5}mυ_{cm}'^2 - \frac{1}{5}mυ_{cm}^2 \text{ ή}$$
$$W_{T_{στ}} = \frac{1}{5}m(υ_{cm}^2 - υ_{cm}'^2) \text{ ή } W_{T_{στ}} = -6{,}3\ \mathrm{J}.$$

Γ5. Έστω ότι η σφαίρα φτάνει στο ανώτερο σημείο (Θ) του κυκλικού οδηγού με το κέντρο μάζας της να έχει ταχύτητα μέτρου $υ_{cm(Δ)}$.



Στο ανώτερο σημείο Θ ισχύει:

$$\Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = \frac{m\upsilon_{cm(\Theta)}^2}{R-r} \text{ ή } w + N = \frac{m\upsilon_{cm(\Theta)}^2}{R-r} \text{ ή } N = \frac{m\upsilon_{cm(\Theta)}^2}{R-r} - mg.$$

Για να εκτελέσει με ασφάλεια ανακύκλωση, πρέπει:

$$N \geq 0 \text{ ή } \frac{m\upsilon_{cm(\Theta)}^2}{R-r} - mg \geq 0 \text{ ή } \upsilon_{cm(\Theta)} \geq \sqrt{g(R-r)},$$

οπότε:

$$\upsilon_{cm(\Theta)}^{min} = \sqrt{g(R-r)} \; (4) \text{ ή } \upsilon_{cm(\Theta)}^{min} = \sqrt{21}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε μεταξύ της θέσης (Ν) της σφαίρας και της θέσης (Θ), θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο, έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(N)} = E_{\mu\eta\chi(\Theta)} \text{ ή } K_N + U_N = K_\Theta + U_\Theta \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgr = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm(\Theta)}^2 + \frac{1}{2}I\omega_{(\Theta)}^2 + mg(2R-r) \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\omega^2 + mgr = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm(\Theta)}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\omega_{(\Theta)}^2 + mg(2R-r) \text{ ή}$$

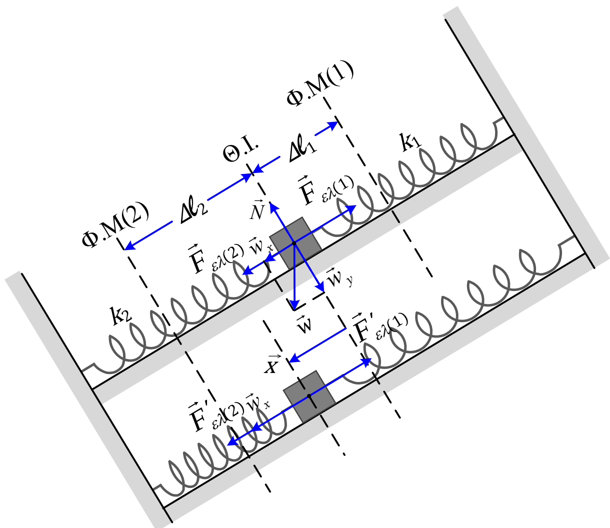
$$\frac{7}{10}\upsilon_{cm}^2 + gr = \frac{7}{10}\upsilon_{cm(\Theta)}^2 + g(2R-r) \text{ ή}$$

$$\upsilon_{cm(\Theta)} = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Επειδή είναι $\upsilon_{cm(\Theta)} < \upsilon_{cm(\Theta)}^{min}$, η σφαίρα δεν εκτελεί ανακύκλωση στον κυκλικό οδηγό.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}=\vec{0} \text{ ή } w_x+F_{\varepsilon\lambda(2)}=F_{\varepsilon\lambda(1)} \text{ ή } mg\eta\mu\varphi+k_2\Delta\ell_2=k_1\Delta\ell_1 \text{ (1).}$$

Στην τυχαία θέση που φαίνεται στο σχήμα ισχύει:

$$\Sigma F_x=F'_{\varepsilon\lambda(2)}+w_x-F'_{\varepsilon\lambda(1)} \text{ ή } \Sigma F_x=k_2(\Delta\ell_2-x)+mg\eta\mu\varphi-k_1(\Delta\ell_1+x) \text{ ή}$$

$$\Sigma F_x=k_2\Delta\ell_2-k_2x+mg\eta\mu\varphi-k_1\Delta\ell_1-k_1x,$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$\Sigma F_x=-k_2x-k_1x \text{ ή } \Sigma F_x=-(k_1+k_2)x.$$

Επομένως, το σώμα Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D=k_1+k_2$.

Δ2. Ισχύει:

$$D=m\omega^2 \text{ ή } \omega=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} \text{ ή } \omega=10\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Το πλάτος A της ταλάντωσης είναι ίσο με $A=\Delta\ell_1$. Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$mg\eta\mu\varphi+k_2 2\,\Delta\ell_1=k_1\,\Delta\ell_1 \text{ ή } \Delta\ell_1=\frac{mg\eta\mu\varphi}{k_1-2k_2} \text{ ή } \Delta\ell_1=0{,}2\text{ m}.$$

Συνεπώς, είναι $A=0{,}2$ m.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ από τη θέση ισορροπίας του είναι η:

$$x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \text{ (2).}$$

Επειδή για $t=0$ είναι $x=+A$, από την εξίσωση (2) προκύπτει:

$$\eta\mu\varphi_0=1 \text{ ή } \eta\mu\varphi_0=\eta\mu\frac{\pi}{2} \text{ (3).}$$

Επειδή ισχύει ότι $0\le\varphi_0<2\pi$ rad, από την εξίσωση (3) προκύπτει ότι $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$ rad.

Συνεπώς, είναι:

$$x=0{,}2\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{2}\right) (S.I.).$$

Δ3. Ισχύει ότι $F^{max}_{\varepsilon\lambda(1)}=k_1(\Delta\ell_1+A)$ και αφού $A<\Delta\ell_2$, είναι $F^{min}_{\varepsilon\lambda(2)}=k_2(\Delta\ell_2-A)$.

Συνεπώς, είναι:

$$\frac{F^{max}_{\varepsilon\lambda(1)}}{F^{min}_{\varepsilon\lambda(2)}}=\frac{k_1(\Delta\ell_1+A)}{k_2(\Delta\ell_2-A)} \text{ ή } \frac{F^{max}_{\varepsilon\lambda(1)}}{F^{min}_{\varepsilon\lambda(2)}}=6.$$

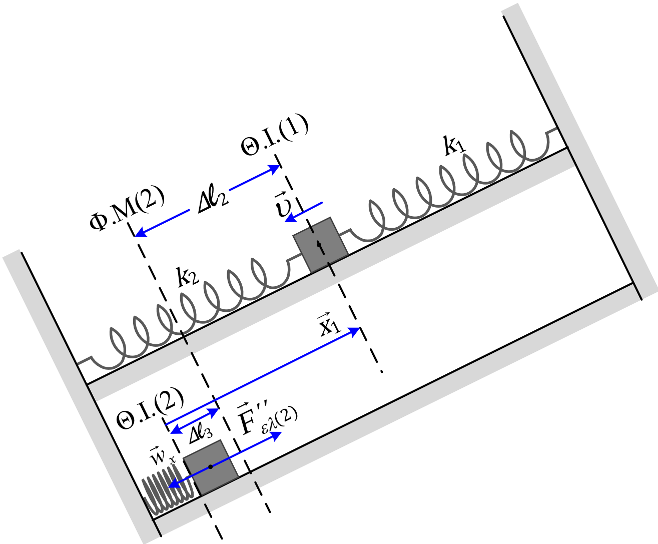
Δ4. Έστω $\Delta\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου (1) τη χρονική στιγμή t_1. Ισχύει:

$$U_{\varepsilon\lambda(1)}=\frac{1}{2}k_1(\Delta\ell)^2 \text{ ή } \Delta\ell=\sqrt{\frac{2U_{\varepsilon\lambda(1)}}{k_1}} \text{ ή } \Delta\ell=0{,}2\text{ m}.$$

Αφού $\Delta\ell=\Delta\ell_1$, το σώμα Σ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του. Συνεπώς:

$$\upsilon=\upsilon_{max} \text{ ή } \upsilon=\omega A \text{ ή } \upsilon=2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ5. Αν αφαιρέσουμε τη χρονική στιγμή t_1 το ελατήριο (1), τότε το σώμα Σ θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D' = k_2$ και γωνιακή συχνότητα ω_2 γύρω από τη θέση ισορροπίας (2) που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω $\Delta\ell_3$ η συμπίεση του ελατηρίου (2) στη νέα θέση ισορροπίας του σώματος Σ. Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } w_x = F''_{\varepsilon\lambda(2)} \text{ ή } mg\eta\mu\varphi = k_2\Delta\ell_3 \text{ ή } \Delta\ell_3 = 0{,}2 \text{ m.}$$

Η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης του σώματος Σ από τη νέα θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά την αφαίρεση του ελατηρίου (1) είναι ίση με:

$$|x_1| = \Delta\ell_2 + \Delta\ell_3 \text{ ή } |x_1| = 0{,}6 \text{ m.}$$

Έστω A_2 το πλάτος της νέας ταλάντωσης του σώματος Σ.

Από την Α.Δ.Ε για την νέα ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}k_2A_2^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}k_2x_1^2 \text{ ή } A_2 = \sqrt{\frac{m}{k_2}\upsilon^2 + x_1^2} \text{ ή}$$

$$A_2 = \sqrt{0{,}52} \text{ m.}$$

10ο Κριτήριο Αξιολόγησης

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. γ, Α2. α, Α3. α, Α4. β

Α5. α. Σ, β. Σ, γ. Λ, δ. Σ, ε. Λ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Σωστή απάντηση είναι η α.

Η χρονική εξίσωση της φάσης φ_1 της συνιστώσας ταλάντωσης (1) είναι η $\varphi_1 = 2\pi f_1 t$, ενώ η χρονική εξίσωση της φάσης φ_2 της συνιστώσας ταλάντωσης (2) είναι η $\varphi_2 = 2\pi f_2 t$. Η διαφορά φάσης των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων τη χρονική στιγμή $t = 0{,}25$ s είναι ίση με:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \text{ ή } \Delta\varphi = 2\pi f_1 t - 2\pi f_2 t \text{ ή } \Delta\varphi = 2\pi(f_1 - f_2)t \text{ ή}$$

$$f_1 - f_2 = 4 \text{ Hz (1).}$$

Το σώμα διέρχεται δύο φορές από τη θέση ισορροπίας του κάθε φορά που εκτελεί μία πλήρη ταλάντωση. Έστω N ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα σε χρόνο $\Delta t = 1$ s. Αφού το σώμα διέρχεται 100 φορές από τη θέση ισορροπίας του σε χρόνο $\Delta t = 1$ s, ισχύει ότι $N = 50$ ταλαντώσεις.

Η συχνότητα f της συνισταμένης ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$f = \frac{N}{\Delta t} \text{ ή } f = 50 \text{ Hz.}$$

Από την εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης που είναι η:

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\ \frac{f_1 - f_2}{2}t\right)\eta\mu\left(2\pi\ \frac{f_1 + f_2}{2}t\right),$$

προκύπτει ότι η συχνότητα της συνισταμένης ταλάντωσης είναι ίση με $f = \frac{f_1 + f_2}{2}$. Συνεπώς, είναι:

$$50 \text{ Hz} = \frac{f_1 + f_2}{2} \text{ ή } f_1 + f_2 = 100 \text{ Hz (2).}$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι $f_1 = 52$ Hz.

Β2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Η μέγιστη τιμή του μέτρου της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πλαίσιο (1) δίνεται από τη σχέση $E_{\varepsilon\pi(1)(\max)} = N\omega BA$.

Το πλάτος του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο (1) δίνεται από τη σχέση:

$$I_1 = \frac{N\omega BA}{2R} \text{ (1).}$$

Η μέση ισχύς που καταναλώνει ο αντιστάτης R_1 δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{P}_1 = I^2_{\varepsilon\nu(1)} R_1 \text{ ή } \bar{P}_1 = \left(\frac{I_1}{\sqrt{2}}\right)^2 R_1 \text{ ή } \bar{P}_1 = \frac{I_1^2 R}{2},$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$\bar{P}_1 = \frac{N^2\omega^2 B^2 A^2}{8R} \text{ (2).}$$

Η μέγιστη τιμή του μέτρου της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πλαίσιο (2) είναι ίση με $E_{\varepsilon\pi(2)(\max)} = N\omega BA$.

Το πλάτος της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο (2) είναι ίσο με:

$$I_2 = \frac{N\omega BA}{R+R_2} \text{ (3).}$$

Η μέση ισχύς που καταναλώνει ο αντιστάτης R_2 είναι ίση με:

$$\bar{P}_2 = I^2_{\varepsilon\nu(2)} R_2 \text{ ή } \bar{P}_2 = \left(\frac{I_2}{\sqrt{2}}\right)^2 R_2 \text{ ή } \bar{P}_2 = \frac{I_2^2 R_2}{2},$$

ή λόγω της σχέσης (3):

$$\bar{P}_2 = \frac{N^2\omega^2 B^2 A^2}{2(R+R_2)^2} R_2 \text{ (4).}$$

Αφού είναι $\bar{P}_1 = \bar{P}_2$, από τις σχέσεις (2) και (4) έχουμε:

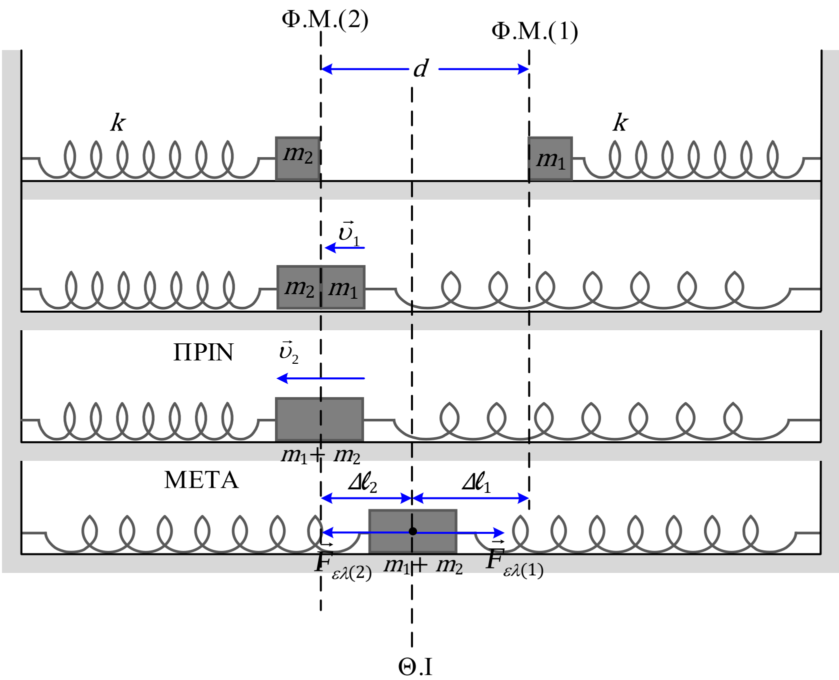
$$\frac{N^2\omega^2 B^2 A^2}{8R} = \frac{N^2\omega^2 B^2 A^2}{2(R+R_2)^2} R_2 \text{ ή } 2(R+R_2)^2 = 8RR_2 \text{ ή}$$

$$2(R^2 + R_2^2 + 2RR_2) = 8RR_2 \text{ ή } R^2 + R_2^2 - 2RR_2 = 0 \text{ ή}$$

$$(R - R_2)^2 = 0 \text{ ή } R_2 = R.$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η β.

Το πλάτος A_1 της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ1 πριν από την κρούση είναι ίσο με $A_1 = 2d$.



Έστω υ_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ελάχιστα πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kd^2 \text{ ή } \frac{1}{2}k(2d)^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kd^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{3k}{m_1}}d \text{ (1).}$$

Έστω υ_2 το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \text{ ή } m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon_2 \text{ ή } \upsilon_2 = \frac{\upsilon_1}{2},$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$\upsilon_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3k}{m_1}}d \text{ (2).}$$

Έστω $\Delta\ell_1$ και $\Delta\ell_2$ οι επιμηκύνσεις των ελατηρίων στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος. Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } F_{\varepsilon\lambda(1)} = F_{\varepsilon\lambda(2)} \text{ ή } k\Delta\ell_1 = k\Delta\ell_2 \text{ ή } \Delta\ell_1 = \Delta\ell_2.$$

Όπως προκύπτει από το σχήμα, είναι $d = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2$ ή $\Delta\ell_2 = \frac{d}{2}$.

Η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του αμέσως μετά την κρούση είναι ίση με:

$$|x| = \Delta\ell_2 \text{ ή } |x| = \frac{d}{2} \text{ (3).}$$

Έστω A_2 το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση το συσσωματώματος έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}2kA_2^2 = \frac{1}{2}2m_1\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}2kx^2 \text{ ή } A_2^2 = \frac{m_1}{k}\upsilon_2^2 + x^2,$$

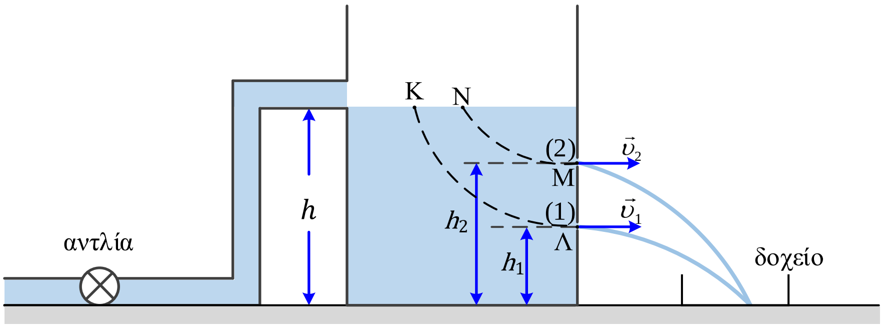
ή λόγω των σχέσεων (2) και (3):

$$A_2^2 = \frac{m_1}{k}\cdot\frac{1}{4}\frac{3k}{m_1}d^2 + \frac{d^2}{4} \text{ ή } A_2 = d.$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Έστω υ_1 το μέτρο της οριζόντιας ταχύτητας με την οποία εκτοξεύεται το νερό από την οπή (1).

Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Κ που βρίσκεται στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού και του σημείου Λ που βρίσκεται ακριβώς έξω από την οπή (1).



Έχουμε:

$$p_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 + \rho g(h - h_1) = p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Lambda^2 \text{ ή}$$

$$p_{\alpha\tau\mu} + 0 + \rho g(h - h_1) = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g(h - h_1)} \text{ ή } \upsilon_1 = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Γ2. Έστω Δt_1 ο χρόνος πτώσης της φλέβας του νερού που εξέρχεται από την οπή (1). Ισχύει:

$$h_1 = \frac{1}{2}g(\Delta t_1)^2 \text{ ή } \Delta t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \text{ ή } \Delta t_1 = 0{,}2\text{ s}.$$

Το βεληνεκές x_1 της φλέβας του νερού που εξέρχεται από την οπή (1) είναι ίσο με:

$$x_1 = \upsilon_1\Delta t_1 \text{ ή } x_1 = 0{,}8\text{ m}.$$

Έστω υ_2 το μέτρο της οριζόντιας ταχύτητας με την οποία εκτοξεύεται το νερό από την οπή (2).

Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ των σημείων N και M που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα έχουμε:

$$p_N + \rho g(h - h_2) + \frac{1}{2}\rho\upsilon_N^2 = p_M + \frac{1}{2}\rho\upsilon_M^2 \text{ ή}$$

$$p_{\alpha\tau\mu} + \rho g(h - h_2) + 0 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g(h - h_2)}.$$

Έστω Δt_2 ο χρόνος πτώσης της φλέβας του υγρού που εξέρχεται από την οπή (2). Ισχύει:

$$h_2 = \frac{1}{2}g(\Delta t_2)^2 \text{ ή } \Delta t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}.$$

Το βεληνεκές x_2 της φλέβας του νερού που εξέρχεται από την οπή (2) είναι ίσο με:

$$x_2 = \upsilon_2\Delta t_2 \text{ ή } x_2 = \sqrt{2g(h - h_2)}\sqrt{\frac{2h_2}{g}} \text{ ή } x_2 = 2\sqrt{h_2(h - h_2)}.$$

Αφού οι δύο φλέβες πέφτουν στο ίδιο σημείο, ισχύει ότι:

$$x_1 = x_2 \text{ ή } x_1 = 2\sqrt{h_2(h - h_2)} \text{ ή } x_1^2 = 4h_2(h - h_2) \text{ ή } 4h_2^2 - 4hh_2 + x_1^2 = 0 \text{ ή}$$

$$h_2^2 - h_2 + 0{,}16 = 0\ (S.I.)\ (1).$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι $h_2 = 0{,}8$ m, $h_2 = 0{,}2$ m. Αφού $h_2 > h_1 = 0{,}2$ m, δεκτή λύση είναι η $h_2 = 0{,}8$ m.

Γ3. Το μέτρο της ταχύτητας με την οποία εκτοξεύεται το νερό από την οπή (2) είναι:

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g(h - h_2)} \text{ ή } \upsilon_2 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Η ισχύς P της αντλίας δίνεται από τη σχέση:

$$P = \frac{dK + dU}{dt} \text{ ή } P = \frac{\frac{1}{2}dm\upsilon^2 + dmgh}{dt} \text{ ή } P = \frac{dm}{dt}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + gh\right) \text{ ή}$$

$$P = \frac{d(\rho V)}{dt}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + gh\right) \text{ ή } P = \rho\frac{dV}{dt}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + gh\right) \text{ ή}$$

$$P = \rho\Pi_{\sigma\omega\lambda\acute{\eta}\nu\alpha}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + gh\right) \text{ ή } P = \rho A_2\upsilon\left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + gh\right) \text{ (2),}$$

όπου υ το μέτρο της ταχύτητας με την οποία ρέει το νερό στον σωλήνα της αντλίας. Ισχύει ότι:

$$\Pi_{\sigma\omega\lambda\acute{\eta}\nu\alpha} = \Pi_{\text{οπή (1)}} + \Pi_{\text{οπή (2)}} \text{ ή } A_2\upsilon = A_1\upsilon_1 + A_1\upsilon_2 \text{ ή } \upsilon = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Συνεπώς, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $P = 72$ W.

Γ4. Η φλέβα του νερού που εξέρχεται από την οπή (1) πέφτει για πρώτη φορά στον πυθμένα του δοχείου τη χρονική στιγμή $t' = \Delta t_1 = 0{,}2$ s.

Ο χρόνος πτώσης της φλέβας του νερού που εξέρχεται από την οπή (2) είναι ίσος με:

$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} \text{ ή } \Delta t_2 = 0{,}4 \text{ s.}$$

Επομένως, η φλέβα του νερού που εξέρχεται από την οπή (2) πέφτει για πρώτη φορά στον πυθμένα του δοχείου τη χρονική στιγμή $t'' = \Delta t_2 = 0{,}4$ s.

Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία γεμίζει το δοχείο, οι όγκοι V_1 και V_2 του νερού που έχει εισέλθει στο δοχείο από τις οπές (1) και (2) αντίστοιχα και ο όγκος V του δοχείου ικανοποιούν τη σχέση:

$$V = V_1 + V_2 \text{ ή}$$

$$V = \Pi_{\text{οπή (1)}}(t_1 - t') + \Pi_{\text{οπή (2)}}(t_1 - t'') \text{ ή}$$

$$V = A_1\upsilon_1(t_1 - t') + A_1\upsilon_2(t_1 - t'') \text{ ή}$$

$$t_1 = 3{,}6 \text{ s.}$$

Γ5. Ο όγκος V_1' του νερού που έχει εισέλθει από την οπή (1) στο δοχείο τη χρονική στιγμή t_2 είναι ίσος με:

$$V_1' = \Pi_{\text{οπή (1)}}(t_2 - t') \text{ ή } V_1' = A_1\upsilon_1(t_2 - t') \text{ ή } V_1' = 5{,}6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3.$$

Ο όγκος V_2' του νερού που έχει εισέλθει στο δοχείο από την οπή (2) τη χρονική στιγμή t_2, είναι ίσος με:

$$V_2' = \Pi_{\text{οπή (2)}}(t_2 - t'') \text{ ή } V_2' = A_1\upsilon_2(t_2 - t'') \text{ ή } V_2' = 2{,}4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3.$$

Ο συνολικός όγκος V' του νερού στο δοχείο τη χρονική στιγμή t_2 είναι ίσος με:

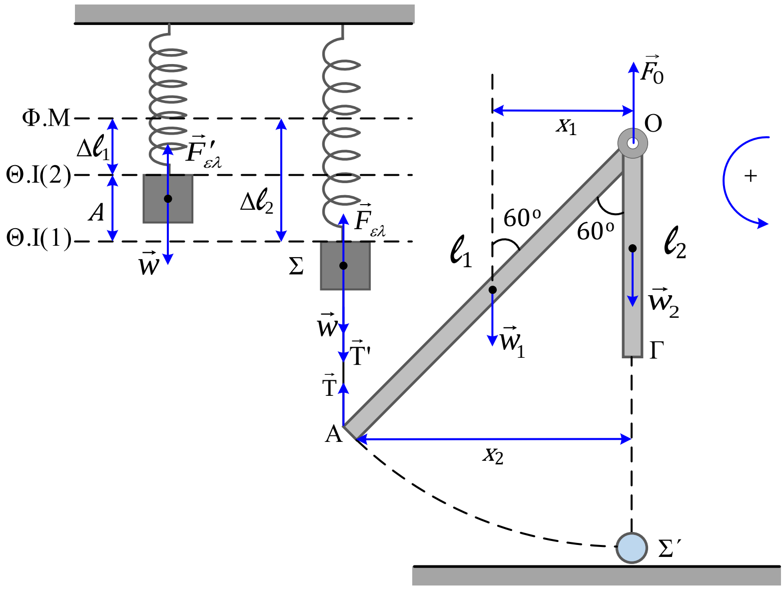
$$V' = V_1' + V_2' \text{ ή } V' = 8 \cdot 10^{-3}\text{m}^3.$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι ίσο με:

$$\pi = \frac{V_1'}{V'} \cdot 100\% \text{ ή } \pi = 70\%.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχονται τα σώματα.



Επειδή το σύστημα των δύο ράβδων ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \text{ ή } \tau_T + \tau_{w_1} + \tau_{w_2} + \tau_{F_0} = 0 \text{ ή } Tx_2 - w_1x_1 + 0 + 0 = 0 \text{ ή}$$

$$Tx_2 = Mgx_1 \text{ ή } T\ell_1\eta\mu 60° = Mg\frac{\ell_1}{2}\eta\mu 60° \text{ ή } T = \frac{Mg}{2} \text{ ή } T = 15\text{ N}.$$

β. Επειδή το σύστημα των δύο ράβδων ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } F_O + T = w_1 + w_2 \text{ ή } F_O = 2Mg - T \text{ ή } F_O = 45\text{ N}.$$

Δ2. Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ (Θ.Ι.(1)). Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } w + T' = F_{\varepsilon\lambda} \text{ ή } mg + T = k\Delta\ell_1 \text{ ή } \Delta\ell_1 = 0{,}25\text{ m}.$$

Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη νέα θέση ισορροπίας του σώματος Σ (Θ.Ι.(2)). Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } w' = F'_{\varepsilon\lambda} \text{ ή } mg = k\Delta\ell_2 \text{ ή } \Delta\ell_2 = 0{,}1\text{ m}.$$

Όπως φαίνεται από το σχήμα το πλάτος A της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ είναι $A = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2$ ή $A = 0{,}15$ m.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ από τη θέση ισορροπίας (2) είναι η:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)\ (1).$$

Για $t = 0$ είναι $x = -A = -0{,}15\ \mathrm{m}$. Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = -A$ προκύπτει:

$$\eta\mu\varphi_0 = -1 \ \text{ή}\ \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{3\pi}{2}\ (2).$$

Αφού $0 \le \varphi_0 < 2\pi$ rad, η λύση της εξίσωσης (1) είναι η $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ rad.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του σώματος Σ είναι ίση με:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \ \text{ή}\ \omega = 10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}.$$

Συνεπώς, η σχέση (1) γράφεται:

$$x = 0{,}15\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right)(S.I.).$$

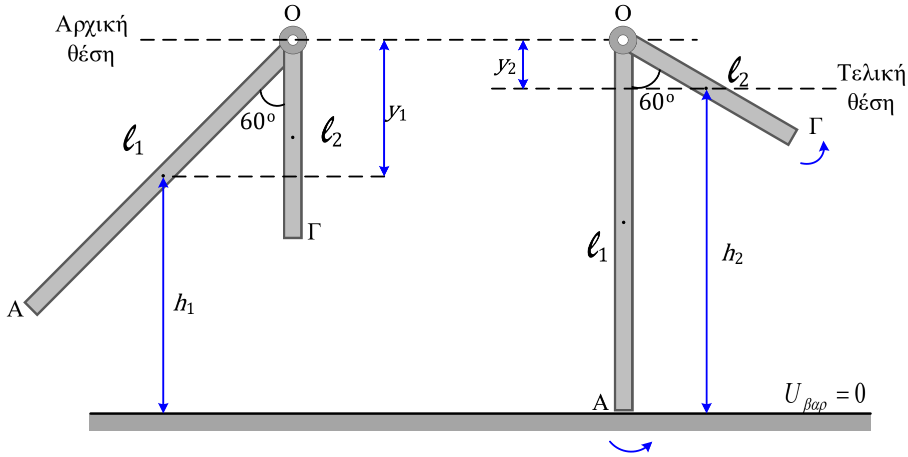
Δ3. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ από τη Θ.Ι.(2) τη χρονική στιγμή t στην οποία το μέτρο της ταχύτητάς του είναι ίσο με $\upsilon = 1{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Από την Α.Δ.Ε της ταλάντωσης έχουμε:

$$E = K + U \ \text{ή}\ \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 \ \text{ή}\ x = \pm\sqrt{A^2 - \frac{m}{k}\upsilon^2} \ \text{ή}\ x = 0.$$

Συνεπώς, τη χρονική στιγμή t η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο είναι ίση με:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2)^2 \ \text{ή}\ U_{\varepsilon\lambda} = 0{,}5\ \mathrm{J}.$$

Δ4.



Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε για το σύστημα των δύο ράβδων, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το άκρο Α της ράβδου ΟΑ στην τελική θέση του συστήματος:

$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)}$ ή $K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή

$0 + Mgh_1 + Mg\left(\ell_1 - \frac{\ell_2}{2}\right) = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{Mg\ell_1}{2} + Mgh_2$ ή

$Mg(\ell_1 - y_1) + Mg\left(\ell_1 - \frac{\ell_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}M\ell_1^2 + M\left(\frac{\ell_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}M\ell_2^2 + M\left(\frac{\ell_2}{2}\right)^2\right]\omega^2 +$
$\frac{Mg\ell_1}{2} + Mg(\ell_1 - y_2)$ ή

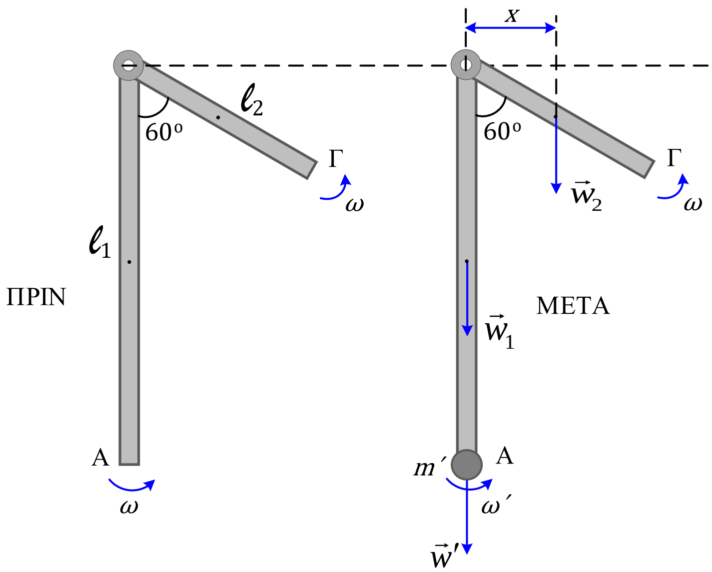
$Mg\left(\ell_1 - \frac{\ell_1}{2}\sigma\upsilon\nu 60°\right) + Mg\left(\ell_1 - \frac{\ell_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}M\ell_1^2 + \frac{1}{3}M\ell_2^2\right)\omega^2 + \frac{Mg\ell_1}{2} +$
$Mg\left(\ell_1 - \frac{\ell_2}{2}\sigma\upsilon\nu 60°\right)$ ή

$\frac{3}{4}Mg\ell_1 + Mg\left(\ell_1 - \frac{\ell_2}{2}\right) = \frac{1}{6}M(\ell_1^2 + \ell_2^2)\omega^2 + \frac{Mg\ell_1}{2} + Mg\left(\ell_1 - \frac{\ell_2}{4}\right)$ ή

$\frac{3}{4}g\ell_1 + g\left(\ell_1 - \frac{\ell_2}{2}\right) = \frac{1}{6}(\ell_1^2 + \ell_2^2)\omega^2 + \frac{g\ell_1}{2} + g\left(\ell_1 - \frac{\ell_2}{4}\right)$ ή

$$\omega = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Δ5. Έστω ω' το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος των δύο ράβδων και του σώματος Σ αμέσως μετά την κρούση.



Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής κατά τη διάρκεια της κρούσης για το σύστημα των δύο ράβδων και του σώματος Σ έχουμε:

$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$ ή $I\omega = I'\omega'$ ή $\frac{1}{3}M(\ell_1^2 + \ell_2^2)\omega = \left[\frac{1}{3}M(\ell_1^2 + \ell_2^2) + m'\ell_1^2\right]\omega'$ ή

$$\omega' = 0{,}5\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Ο ζητούμενος ρυθμός είναι ίσος με:

$\frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma\tau\cdot d\omega}{dt}$ ή $\frac{dK}{dt} = -w_2 x\omega'$ ή $\frac{dK}{dt} = -Mg\frac{\ell_2}{2}\eta\mu 60°\omega'$ ή $\frac{dK}{dt} = -11{,}25\sqrt{3}\,\frac{\text{J}}{\text{s}}.$

11ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

Α1. β, Α2. γ, Α3. β, Α4. γ

Α5. α. Σ, β. Σ, γ. Σ, δ. Λ, ε. Σ

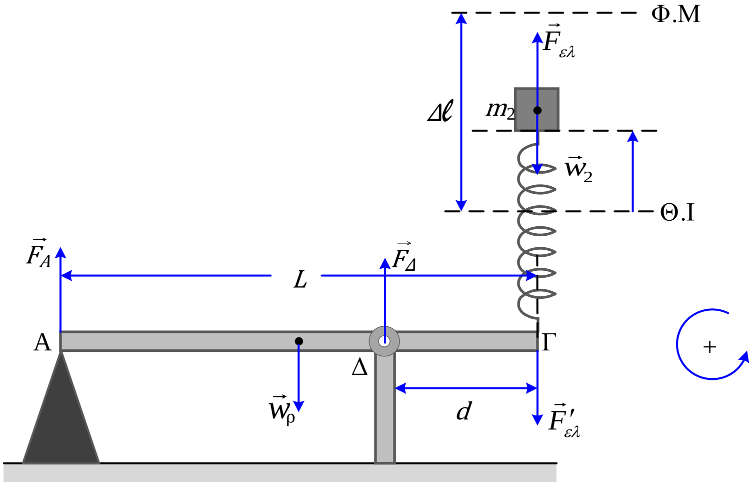
ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η α.

Έστω υ_2' η ταχύτητα του σώματος Σ2 μετά την κρούση. Είναι:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 \text{ ή } \upsilon_2' = \upsilon_1.$$

Η ράβδος ΑΓ μπορεί να ανατραπεί στην περίπτωση που η δύναμη που δέχεται από το ελατήριο έχει φορά προς τα κάτω.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(\Delta)} = 0 \text{ ή } -F_A(L-d) + w_\rho\left(\frac{L}{2}-d\right) - F'_{\varepsilon\lambda}d = 0 \text{ ή}$$

$$-F_A\frac{3L}{4} + Mg\frac{L}{4} - F'_{\varepsilon\lambda}\frac{L}{4} = 0 \text{ ή } F_A = \frac{Mg}{3} - \frac{F'_{\varepsilon\lambda}}{3} \text{ (1).}$$

Για να μην ανατρέπεται η ράβδος, πρέπει $F_A \geq 0$, ή λόγω της σχέσης (1):

$F'_{\varepsilon\lambda} \leq Mg$ ή $F_{\varepsilon\lambda} \leq Mg$.

Συνεπώς, όταν η δύναμη $\vec{F}'_{\varepsilon\lambda}$ που δέχεται η ράβδος έχει φορά προς τα κάτω, το μέτρο της δεν πρέπει να υπερβαίνει την τιμή Mg. Επομένως, για να μην ανατρέπεται η ράβδος, το σώμα Σ2 θα πρέπει να φτάνει στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του και το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ που δέχεται από το ελατήριο να είναι το πολύ ίσο με Mg.

Έστω A_{max} το μέγιστο πλάτος με το οποίο μπορεί να ταλαντωθεί το σώμα Σ2, χωρίς η ράβδος να ανατρέπεται. Στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης πρέπει να ισχύει:

$$F_{\varepsilon\lambda}^{max} \leq Mg \text{ ή } k(\Delta\ell + A) \leq Mg \text{ ή } k\Delta\ell + kA \leq Mg \text{ (2).}$$

Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ2 ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } m_2 g = k\Delta\ell \text{ ή } 3mg = k\Delta\ell \text{ (3).}$$

Η σχέση (3), λόγω της σχέσης (2), γίνεται:

$$3mg + kA \leq 5mg \text{ ή } A \leq \frac{2mg}{k},$$

οπότε $A_{max} = \frac{2mg}{k}$.

Η μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας που πρέπει να έχει το σώμα Σ2 αμέσως μετά την κρούση, ώστε η ράβδος να μην ανατρέπεται είναι ίση με:

$$\upsilon'_{2(max)} = \omega A_{max} \text{ ή } \upsilon'_{2(max)} = \sqrt{\frac{k}{3m}}\frac{2mg}{k} \text{ ή } \upsilon'_{2(max)} = 2g\sqrt{\frac{m}{3k}} \text{ ή}$$

$$\upsilon_{1(max)} = 2g\sqrt{\frac{m}{3k}}.$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Ισχύει:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \text{ ή } A_1^2 = A_0 A_2 \text{ ή } A_1^2 = \frac{A_0^2}{4} \text{ ή } A_1 = \frac{A_0}{2}.$$

Συνεπώς, είναι:

$$\frac{A_4}{A_5} = \frac{A_0}{A_1} \text{ ή } \frac{A_4}{A_5} = 2 \text{ ή } A_4 = 2A_5 \text{ (1).}$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι ίσο με:

$$\pi = \frac{E_4 - E_5}{E_4} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2}DA_4^2 - \frac{1}{2}DA_5^2}{\frac{1}{2}DA_4^2} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{A_5^2}{A_4^2}\right) \cdot 100\%,$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$\pi = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \cdot 100\% = 75\%.$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Έστω υ_1 το μέτρο της ταχύτητας του υγρού (1) που εκρέει από την οπή Ο.

Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Κ της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού (1) και ενός σημείου Λ ακριβώς έξω από την οπή Ο έχουμε:

$$p_K + \frac{1}{2}\rho_1 \upsilon_K^2 + \rho_1 g(h - h_1) = p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho_1 \upsilon_1^2 \text{ ή}$$

$$p_{\alpha\tau\mu} + 0 + \rho_1 g(h - h_1) = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho_1 \upsilon_1^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g(h - h_1)} \text{ ή } \upsilon_1 = \sqrt{gh} \text{ (1).}$$

Έστω υ_2 το μέτρο της ταχύτητας του υγρού (2) που εκρέει από την οπή Ο΄.

Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Μ της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού (2) και ενός σημείου Ν ακριβώς έξω από την οπή Ο΄ έχουμε:

$$p_M + \frac{1}{2}\rho_2 \upsilon_M^2 + \rho_2 g(2h - h_2) = p_N + \frac{1}{2}\rho_2 \upsilon_2^2 \text{ ή}$$

$$p_{\alpha\tau\mu} + 0 + \rho_2 g(2h - h_2) = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho_2 \upsilon_2^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g(2h - h_2)} \text{ ή } \upsilon_2 = \sqrt{gh} \text{ (2).}$$

Έστω ότι οι φλέβες των δύο υγρών πέφτουν ταυτόχρονα τη χρονική στιγμή $t = 0$ στον πυθμένα του δοχείου $Δ_3$.

Τη χρονική στιγμή t ο όγκος V του υγρού στο δοχείο είναι ίσος με:

$$V = V_1 + V_2 \text{ ή } V = \Pi_1 t + \Pi_2 t \text{ ή } V = A\upsilon_1 t + A\upsilon_2 t,$$

ή λόγω των σχέσεων (1) και (2):

$$V = 2A\sqrt{gh}t.$$

Η πυκνότητα ρ του ομογενούς μείγματος που δημιουργείται στο δοχείο είναι ίση με:

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V} \text{ ή } \rho = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V} \text{ ή } \rho = \frac{\rho_1 A\upsilon_1 t + \rho_2 A\upsilon_2 t}{V} \text{ ή}$$

$$\rho = \frac{\rho_1 A\sqrt{gh}t + \rho_2 A\sqrt{gh}t}{2A\sqrt{gh}t} \text{ ή } \rho = \frac{A\sqrt{gh}t(\rho_1 + \rho_2)}{A\sqrt{gh}t} \text{ ή}$$

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}.$$

ΘΕΜΑ Γ

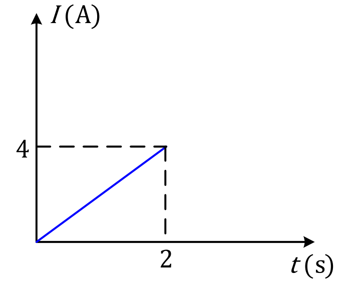
Γ1. Η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο κύκλωμα δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{|d\Phi|}{dt} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{BdS}{dt} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{Bdx\ell}{dt} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = B\upsilon\ell.$$

Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα δίνεται από τη σχέση:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_1 + R_{K\Lambda}} \text{ ή } I_{\varepsilon\pi} = \frac{B\upsilon\ell}{R_1 + R_{K\Lambda}} \text{ ή } I_{\varepsilon\pi} = \frac{B\ell\alpha t}{R_1 + R_{K\Lambda}} \text{ ή } I_{\varepsilon\pi} = 2t \; (S.I.).$$

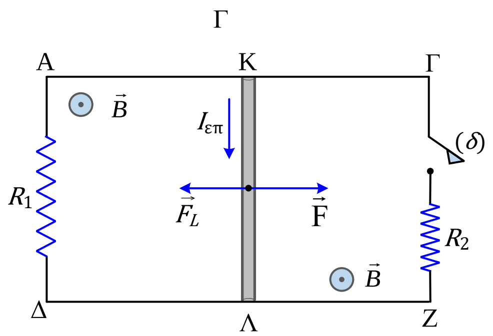
Το επαγωγικό φορτίο υπολογίζεται από το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της έντασης του επαγωγικού ρεύματος και του άξονα των χρόνων από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 2$ s.



Συνεπώς, είναι:

$$q_{\varepsilon\pi} = 4 \text{ C.}$$

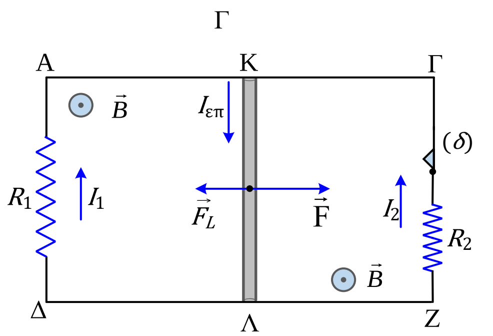
Γ2. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται ο αγωγός ΚΛ κατά τη διάρκεια της κίνησής του.



Ισχύει:

$$\Sigma F = m\alpha \text{ ή } F - F_L = m\alpha \text{ ή } F = F_L + m\alpha \text{ ή } F = BI_{\varepsilon\pi}\ell + m\alpha \text{ ή }$$
$$F = 2t + 6\ (S.I.)\ (1).$$

Γ3. Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s υπολογίζεται από τη σχέση (1). Είναι $F = 10$ N. Από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά το κύκλωμα διαμορφώνεται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{1,2}$ του συστήματος των αντιστατών R_1 και R_2 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{1}{R_{1,2}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ ή } R_{1,2} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \text{ ή } R_{1,2} = 1\ \Omega.$$

Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ) υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{B\upsilon\ell}{R_{1,2} + R_{K\Lambda}} \text{ ή } I_{\varepsilon\pi} = \frac{B\ell\alpha t_1}{R_{1,2} + R_{K\Lambda}} \text{ ή } I_{\varepsilon\pi} = 6\text{ A}.$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που δέχεται ο αγωγός τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ) είναι ίσο με: $F_L = BI_{\varepsilon\pi}\ell$ ή $F_L = 6$ N. Αφού είναι $F > F_L$, ο αγωγός συνεχίζει να επιταχύνεται. Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται ο αγωγός ΚΛ από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά είναι:

$$\Sigma F = F - F_L \text{ ή } \Sigma F = F - BI_{\varepsilon\pi}\ell \text{ ή } \Sigma F = F - B\frac{B\upsilon\ell}{R_{1,2} + R_{K\Lambda}}\ell \text{ ή }$$
$$\Sigma F = F - \frac{B^2\ell^2\upsilon}{R_{1,2} + R_{K\Lambda}}\ (2).$$

Αφού ο αγωγός ΚΛ συνεχίζει να επιταχύνεται από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά, το μέτρο υ της ταχύτητάς του αυξάνεται, οπότε από τη σχέση (2) προκύπτει ότι το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται μειώνεται και γίνεται ίσο με το μηδέν τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία αποκτά την οριακή του ταχύτητα $\upsilon_{o\rho}$. Συνεπώς, από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 η κίνηση του αγωγού ΚΛ είναι επιταχυνόμενη με επιτάχυνση που μειώνεται κατά μέτρο $\left(\alpha = \frac{\Sigma F}{m}\right)$.

Τη χρονική στιγμή t_2 ισχύει ότι $\Sigma F = 0$, ή λόγω της σχέσης (2):

$$F - \frac{B^2\ell^2\upsilon_{o\rho}}{R_{1,2}+R_{K\Lambda}} = 0 \text{ ή } \upsilon_{o\rho} = \frac{F(R_{1,2}+R_{K\Lambda})}{B^2\ell^2} \text{ ή } \upsilon_{o\rho} = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Γ4. Ισχύει:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F dx}{dt} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \Sigma F \upsilon,$$

ή λόγω της σχέσης (2):

$$\frac{dK}{dt} = \left(F - \frac{B^2\ell^2\upsilon}{R_{1,2}+R_{K\Lambda}}\right)\upsilon \text{ ή } \frac{dK}{dt} = F\upsilon - \frac{B^2\ell^2\upsilon^2}{R_{1,2}+R_{K\Lambda}} \text{ ή } \frac{B^2\ell^2\upsilon^2}{R_{1,2}+R_{K\Lambda}} - F\upsilon + \frac{dK}{dt} = 0 \text{ ή}$$

$$\upsilon^2 - 20\upsilon + 64 = 0\ (S.I.)\ (3).$$

Η εξίσωση (3) έχει λύσεις $\upsilon = 16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ και $\upsilon = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Όμως, επειδή είναι $t > t_1$, θα είναι $\upsilon > \upsilon_{t_1} = \alpha t_1 = 12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Συνεπώς, δεκτή λύση είναι η $\upsilon = 16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ τη χρονική στιγμή t είναι ίση με:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{B\upsilon\ell}{R_{1,2}+R_{K\Lambda}} \text{ ή } I_{\varepsilon\pi} = 8\text{ A}.$$

Η τάση $V_{K\Lambda}$ του αγωγού ΚΛ τη χρονική στιγμή t είναι ίση με:

$$V_{K\Lambda} = I_{\varepsilon\pi}R_{1,2} \text{ ή } V_{K\Lambda} = 8\text{ V}.$$

Η ένταση I_2 του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_2 τη χρονική στιγμή t υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I_2 = \frac{V_{K\Lambda}}{R_2} \text{ ή } I_2 = 4\text{ A}.$$

Συνεπώς, ο ζητούμενος ρυθμός είναι ίσος με:

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{R_2} = I_2^2R_2 \text{ ή } \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{R_2} = 32\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}.$$

Γ5. Έστω $Q_{R_{o\lambda}}$ η θερμότητα Joule που εκλύεται από τους αντιστάτες του κυκλώματος από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2. Από την Α.Δ.Ε έχουμε:

$$E_{\alpha\rho\chi} + E_{\pi\rho o\sigma\varphi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} + Q_{R_{o\lambda}} \text{ ή } \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + F\cdot S = \frac{1}{2}m\upsilon_{o\rho}^2 + Q_{R_{o\lambda}} \text{ ή}$$

$$Q_{R_{o\lambda}} = \frac{1}{2}m\left[(\alpha t_1)^2 - \upsilon_{o\rho}^2\right] + FS \text{ ή } Q_{R_{o\lambda}} = 32\text{ J}.$$

Έστω $Q_{R_{1,2}}$ η θερμότητα που εκλύεται από το σύστημα των αντιστατών R_1, R_2 και $Q_{R_{K\Lambda}}$ η θερμότητα που εκλύεται από τον αγωγό ΚΛ. Επειδή οι $R_{1,2}$ και $R_{K\Lambda}$ διαρρέονται κάθε χρονική στιγμή από το ίδιο ρεύμα $I_{\varepsilon\pi}$, έχουμε:

$$\frac{dQ_{R_{K\Lambda}}}{dQ_{R_{1,2}}} = \frac{I_{\varepsilon\pi}^2 R_{K\Lambda} dt}{I_{\varepsilon\pi}^2 R_{1,2} dt} \text{ ή } \frac{dQ_{R_{K\Lambda}}}{dQ_{R_{1,2}}} = \frac{R_{K\Lambda}}{R_{1,2}} \text{ ή } Q_{R_{K\Lambda}} = Q_{R_{1,2}}.$$

Ισχύει:

$$Q_{R_{o\lambda}} = Q_{R_{K\Lambda}} + Q_{R_{1,2}} \text{ ή } Q_{R_{o\lambda}} = 2Q_{R_{1,2}} \text{ ή } Q_{R_{1,2}} = 16 \text{ J}.$$

Έστω dQ_{R_1} και dQ_{R_2} τα στοιχειώδη ποσά θερμότητας που εκλύονται από τους αντιστάτες R_1 και R_2 αντίστοιχα σε χρόνο dt. Έχουμε:

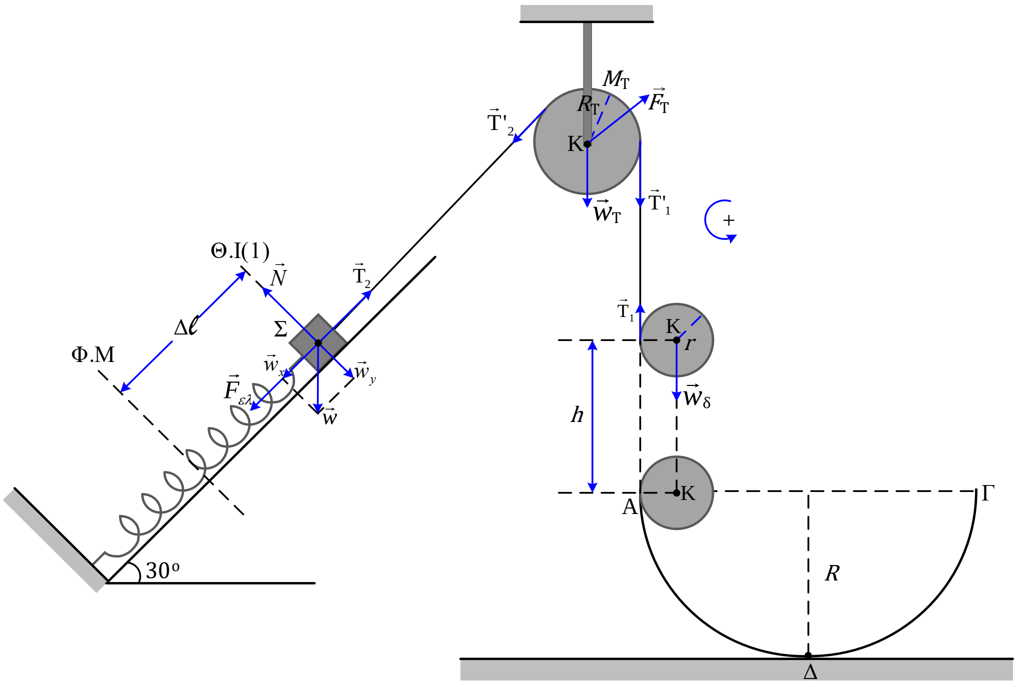
$$\frac{dQ_{R_1}}{dQ_{R_2}} = \frac{\frac{V_{K\Lambda}^2}{R_1}dt}{\frac{V_{K\Lambda}^2}{R_2}dt} \text{ ή } \frac{dQ_{R_1}}{dQ_{R_2}} = \frac{R_2}{R_1} \text{ ή } dQ_{R_2} = dQ_{R_1}.$$

Επομένως, για τις θερμότητες Q_{R_1} και Q_{R_2} που εκλύουν οι αντιστάτες R_1 και R_2 αντίστοιχα από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 ισχύει ότι $Q_{R_1} = Q_{R_2}$. Άρα, έχουμε:

$$Q_{R_{1,2}} = Q_{R_1} + Q_{R_2} \text{ ή } Q_{R_{1,2}} = 2Q_{R_1} \text{ ή } Q_{R_1} = 8 \text{ J}.$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 ελάχιστα πριν κοπεί το νήμα.



Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε:

$$\Sigma F = m\alpha_{cm} \text{ ή } M_\delta g - T_1 = M_\delta \alpha_{cm} \text{ (1).}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης έχουμε:

$$\Sigma\tau = I_\delta \alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } T_1 r = \frac{1}{2} M_\delta r \alpha^2_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } T_1 = \frac{1}{2} M_\delta \alpha_{cm} \text{ (2).}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\alpha_{cm} = \frac{2g}{3} \text{ ή } \alpha_{cm} = \frac{20}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Συνεπώς, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $T_1 = 10$ N.

Δ2. Ισχύει:

$$h = \frac{1}{2}\alpha_{cm} t_1^2 \text{ ή } t_1 = \sqrt{\frac{2h}{\alpha_{cm}}} \text{ ή } t_1 = 0{,}6 \text{ s.}$$

Το μέτρο υ_{cm} της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με:

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} t_1 \text{ ή } \upsilon_{cm} = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

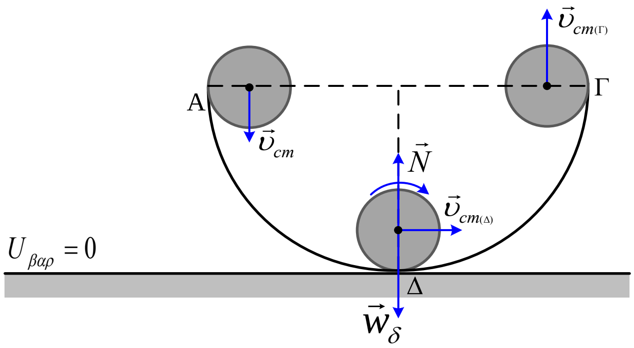
Το μέτρο ω της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με:

$$\omega = \frac{\upsilon_{cm}}{r} \text{ ή } \omega = 20\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Συνεπώς, είναι:

$$L = I_\delta \omega \text{ ή } L = \frac{1}{2} M_\delta r^2 \omega \text{ ή } L = 1{,}2\ \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}.$$

Δ3. Από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο ημισφαίριο.



Έστω $\upsilon_{cm(\Delta)}$ το μέτρο της ταχύτητας του δίσκου, όταν φτάνει στο σημείο Δ. Από την Α.Δ.Μ.Ε μεταξύ των σημείων Α και Δ που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Delta)} \text{ ή } K_A + U_A = K_\Delta + U_\Delta \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}M_\delta \upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_\delta \omega^2 + M_\delta g R = \frac{1}{2}M_\delta \upsilon_{cm(\Delta)}^2 + \frac{1}{2}I_\delta \omega_\Delta^2 + M_\delta g R \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}M_\delta \upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} M_\delta r^2 \omega^2 + M_\delta g R = \frac{1}{2}M_\delta \upsilon_{cm(\Delta)}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}M_\delta r^2 \omega_\Delta^2 + M_\delta g r \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4}\upsilon_{cm}^2 + gR = \frac{1}{2}\upsilon_{cm(\Delta)}^2 + \frac{1}{4}\upsilon_{cm(\Delta)}^2 + gr \text{ ή}$$

$$\frac{3}{4}\upsilon_{cm}^2 + g(R - r) = \frac{3}{4}\upsilon_{cm(\Delta)}^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_{cm(\Delta)} = 4\sqrt{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της ακτινικής δύναμης $\vec{N}$ που δέχεται ο δίσκος από το ημισφαίριο στο σημείο Δ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = F_K \text{ ή } N - w_\delta = \frac{M_\delta \upsilon_{cm(\Delta)}^2}{R-r} \text{ ή } N = M_\delta g + \frac{M_\delta \upsilon_{cm(\Delta)}^2}{R-r} \text{ ή } N = 110 \text{ N}.$$

Έστω $\upsilon_{cm(\Gamma)}$ το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου, όταν διέρχεται από το άλλο άκρο του ημισφαιρίου ΑΓ.

Από την Α.Δ.Μ.Ε μεταξύ των θέσεων Α και Γ έχουμε:

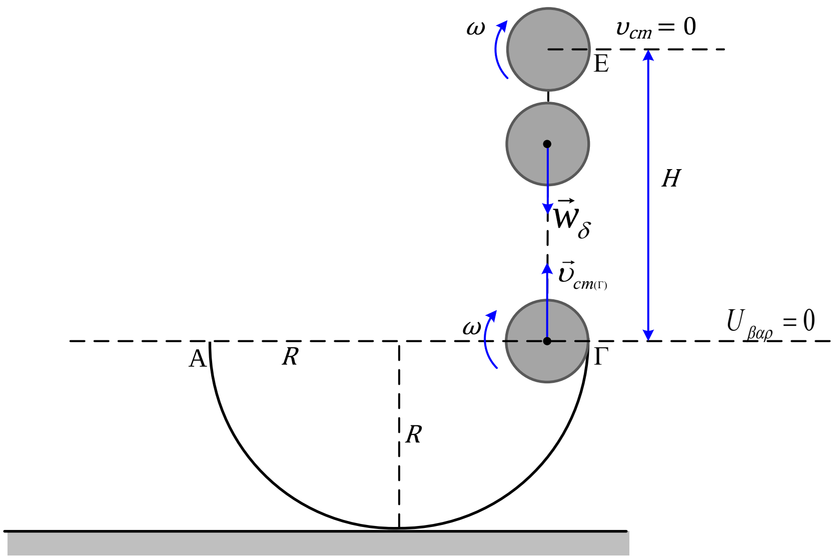
$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} \text{ ή } K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}M_\delta \upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_\delta \omega^2 + M_\delta gR = \frac{1}{2}M_\delta \upsilon_{cm(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2}I\omega_\Gamma^2 + M_\delta gR \text{ ή}$$

$$\frac{3}{4}M_\delta \upsilon_{cm}^2 = \frac{3}{4}M_\delta \upsilon_{cm(\Gamma)}^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_{cm(\Gamma)} = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Έστω H το μέγιστο ύψος πάνω από το άκρο Γ του ημισφαιρίου στο οποίο φτάνει ο δίσκος (θέση Ε στο παρακάτω σχήμα).



Από τη θέση (Γ) έως τη θέση (Ε) ο δίσκος δέχεται μόνο τη δύναμη του βάρους του, οπότε ισχύει ότι $\Sigma\tau = 0$. Συνεπώς, είναι $\omega_E = \omega_\Gamma$.

Από την Α.Δ.Μ.Ε μεταξύ των θέσεων (Γ) και (Ε) έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} = E_{\mu\eta\chi(E)} \text{ ή } K_\Gamma + U_\Gamma = K_E + U_E \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}M_\delta \upsilon_{cm(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2}I_\delta \omega_\Gamma^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}I_\delta \omega_E^2 + M_\delta gH \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}M_\delta \upsilon_{cm(\Gamma)}^2 = M_\delta gH \text{ ή } H = \frac{\upsilon_{cm(\Gamma)}^2}{2g} \text{ ή } H = 0{,}8 \text{ m}.$$

Δ4. Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1, ελάχιστα πριν κοπεί το νήμα που συνδέει το δίσκο με την τροχαλία, το σώμα Σ και η τροχαλία ισορροπούν. Συνεπώς, για την τροχαλία ισχύει:

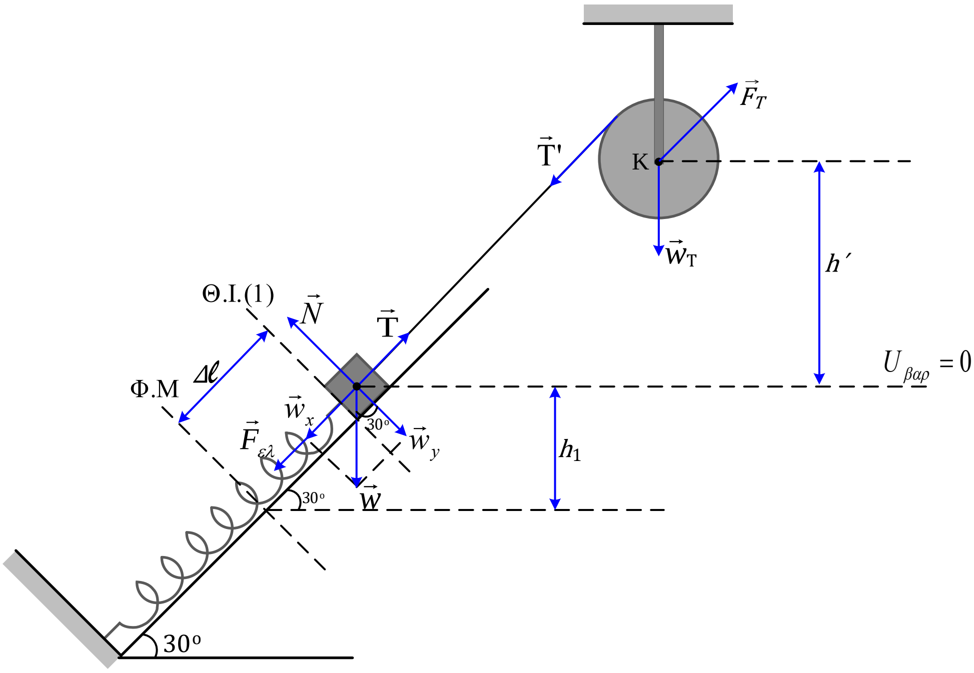
$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \text{ ή } T_2'R - T_1'R = 0 \text{ ή } T_2' = T_1 \text{ ή } T_2 = 10 \text{ N}.$$

Αφού στο σώμα Σ είναι $T_2 > w_x$ ή $T_2 > mg\eta\mu\varphi$, το ελατήριο είναι αρχικά επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell$.

Στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } T_2 = mg\eta\mu\varphi + k\Delta\ell \text{ ή } \Delta\ell = 0{,}05 \text{ m}.$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται το σύστημα τροχαλία – σώμα Σ τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά την κοπή του νήματος που συνδέει την τροχαλία με τον δίσκο.



Έστω α το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ και $\alpha_{\gamma\omega\nu(T)}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά την κοπή του νήματος που συνδέει την τροχαλία με τον δίσκο. Ισχύει ότι $\alpha = \alpha_{\gamma\omega\nu(T)} R_T$.

Για το σώμα Σ ισχύει:

$$\Sigma F_x = m\alpha \text{ ή } F_{\varepsilon\lambda} + w_x - T = m\alpha \text{ ή } k\Delta\ell + mg\eta\mu\varphi - T = m\alpha \text{ (3).}$$

Για την τροχαλία ισχύει:

$$\Sigma\tau = I_T \alpha_{\gamma\omega\nu(T)} \text{ ή } T' R_T = \frac{1}{2} M_T R_T^2 \alpha_{\gamma\omega\nu(T)} \text{ ή } T = \frac{1}{2} M_T \alpha \text{ (4).}$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$k\Delta\ell + mg\eta\mu\varphi = \left(\frac{1}{2} M_T + m\right)\alpha \text{ ή } \alpha = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι ίσος με:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau \text{ ή } \frac{dL}{dt} = I_T \alpha_{\gamma\omega\nu(T)} \text{ ή } \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} M_T R_T^2 \alpha_{\gamma\omega\nu(T)} \text{ ή } \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} M_T R_T \alpha \text{ ή}$$

$$\frac{dL}{dt} = 1\,\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}.$$

Δ5. Έστω υ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ τη χρονική στιγμή που διέρχεται από τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος και ω_T το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας την ίδια χρονική στιγμή.

Από την Α.Δ.Μ.Ε για το σύστημα τροχαλία – σώμα Σ έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)} \text{ ή } K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή}$$

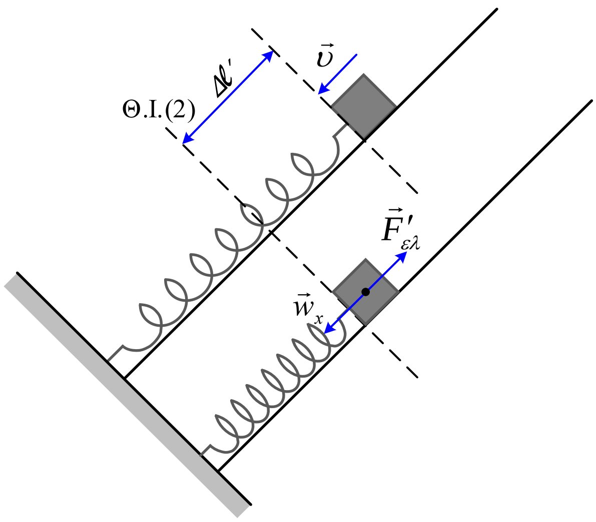
$$0 + mgh_1 + M_T gh' = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I_T\omega_T^2 + M_T gh' \text{ ή}$$

$$mg\Delta\ell\eta\mu30° = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{4}M_T R_T^2\omega_T^2 \text{ ή}$$

$$mg\Delta\ell\eta\mu30° = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{4}M_T\upsilon^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{4mg\Delta\ell\eta\mu30°}{2m+M_T}} \text{ ή } \upsilon = 0{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Έστω $\Delta\ell'$ η συμπίεση του ελατηρίου στη νέα θέση ισορροπίας του σώματος Σ (Θ.Ι(2)) γύρω από την οποία εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.



Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } mg\eta\mu\varphi = k\Delta\ell' \text{ ή } \Delta\ell' = 0{,}05 \text{ m}.$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ γύρω από τη Θ.Ι.(2).

Από την Α.Δ.Ε της ταλάντωσης έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell')^2 \text{ ή } A = \sqrt{\frac{m}{k}\upsilon^2 + (\Delta\ell')^2} \text{ ή}$$

$$A = 0{,}05\sqrt{2} \text{ m}.$$

12ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

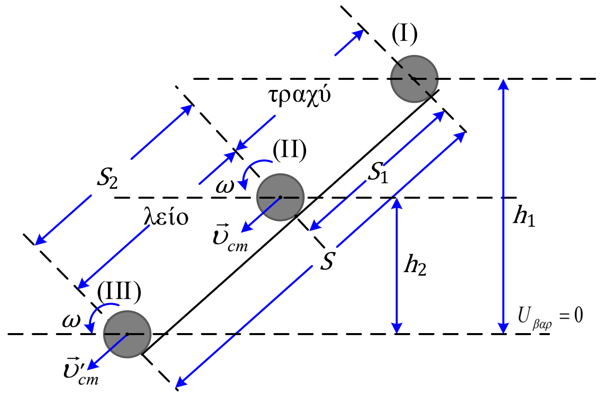
Α1. β, Α2. α, Α3. α, Α4. γ

Α5. α. Σ, β. Σ, γ. Λ, δ. Σ, ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Από την Α.Δ.Μ.Ε μεταξύ της θέσης στην οποία αφήνεται να κινηθεί αρχικά ο δίσκος [θέση (Ι)] και της θέσης ΙΙΙ που βρίσκεται στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου έχουμε:



$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)} \text{ ή } K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή}$$

$$0 + Mgh_1 = K + 0 \text{ ή } K = Mgh_1 \text{ ή}$$

$$K = MgS\eta\mu\varphi \text{ (1).}$$

Έστω K' η κινητική ενέργεια του δίσκου τη χρονική στιγμή που εισέρχεται στην περιοχή όπου το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο (θέση (ΙΙ)). Κατά την κίνηση του από τη θέση (Ι) στη θέση (ΙΙ) ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, οπότε κάθε χρονική στιγμή ισχύει ότι $\upsilon_{cm} = \omega R$.

Από την Α.Δ.Μ.Ε μεταξύ των θέσεων (Ι) και (ΙΙ) έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)} \text{ ή } K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή}$$

$$0 + Mgh_1 = K' + Mgh_2 \text{ ή } K' = Mg(h_1 - h_2) \text{ ή}$$

$$K' = Mg(S\eta\mu\varphi - S_2\eta\mu\varphi) \text{ ή } K' = Mg(S - S_2)\eta\mu\varphi \text{ ή}$$

$$K' = MgS_1\eta\mu\varphi \text{ ή } K' = \frac{1}{2}MgS\eta\mu\varphi \text{ (2).}$$

Έστω $K_{\pi\varepsilon\rho}$ η κινητική ενέργεια του δίσκου λόγω της στροφικής του κίνησης και $K_{\mu\varepsilon\tau}$ η κινητική ενέργεια του δίσκου λόγω της μεταφορικής του κίνησης στη θέση ΙΙ. Ισχύει:

$$\frac{K_{\mu\varepsilon\tau}}{K_{\pi\varepsilon\rho}} = \frac{\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2}{\frac{1}{2}I\omega^2} \text{ ή } \frac{K_{\mu\varepsilon\tau}}{K_{\pi\varepsilon\rho}} = \frac{M\upsilon_{cm}^2}{\frac{1}{2}MR^2\omega^2} \text{ ή } \frac{K_{\mu\varepsilon\tau}}{K_{\pi\varepsilon\rho}} = 2 \text{ ή } K_{\mu\varepsilon\tau} = 2K_{\pi\varepsilon\rho}.$$

Στη θέση (ΙΙ) ισχύει:

$$K' = K_{\mu\varepsilon\tau} + K_{\pi\varepsilon\rho} \text{ ή } K' = 3K_{\pi\varepsilon\rho} \text{ ή } K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{K'}{3},$$

ή λόγω της σχέσης (2):

$$K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{6} MgS\eta\mu\varphi \text{ (3).}$$

Όταν ο δίσκος περνά στην περιοχή όπου το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο, παύει να ασκείται η στατική τριβή, οπότε η συνολική ροπή των δυνάμεων που δέχεται ο δίσκος ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι ίση με το μηδέν.

Συνεπώς, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή που φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου είναι ίσο με το μέτρο ω της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή που εισέρχεται στην περιοχή όπου το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο.

Επομένως, η κινητική ενέργεια του δίσκου λόγω της στροφικής του κίνησης τη χρονική στιγμή που φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου είναι ίση με $K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{6} MgS\eta\mu\varphi$.

Άρα:

$$\frac{K_{\pi\varepsilon\rho}}{K} = \frac{\frac{1}{6} Mg\eta\mu\varphi}{MgS\eta\mu\varphi} \text{ ή } \frac{K_{\pi\varepsilon\rho}}{K} = \frac{1}{6}.$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η α.

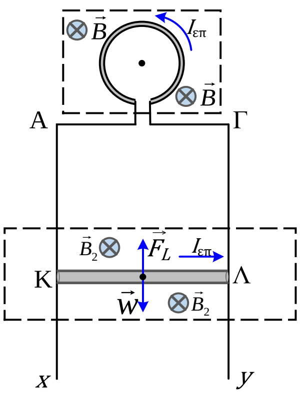
Επειδή η ένταση $\vec{B}_1$ του μαγνητικού πεδίου (1) αυξάνεται, στο πλαίσιο δημιουργείται ΗΕΔ από επαγωγή. Το μέτρο της ΗΕΔ από επαγωγή που δημιουργείται στο πλαίσιο δίνεται από τον τύπο:

$$E_{\varepsilon\pi} = N\frac{|d\Phi|}{dt} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = N\frac{dBA}{dt} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = N\lambda A \text{ (1).}$$

Το επαγωγικό ρεύμα που διαρρέει το πλαίσιο έχει αντίθετη φορά από τη φορά των δεικτών του ρολογιού, αφού σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz δημιουργεί στο κυκλικό πλαίσιο μαγνητικό πεδίο αντίθετης φοράς από το μαγνητικό πεδίο B_1, ώστε να αντιστέκεται στην αύξηση της μαγνητικής ροής που διέρχεται από το πλαίσιο.

Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο και τον αγωγό ΚΛ δίνεται από τη σχέση $I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{K\Lambda}+R_{\pi\lambda\alpha\iota\sigma\iota o\upsilon}}$, ή λόγω της σχέσης (1):

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{N\lambda A}{2R} \text{ (2).}$$



Ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από το ίδιο επαγωγικό ρεύμα που διαρρέει το πλαίσιο με φορά από το Κ προς το Λ.

Επειδή ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί, η δύναμη Laplace $\vec{F}_L$ που δέχεται είναι αντίθετη του βάρους του $\vec{w}$. Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού η ένταση $\vec{B}_2$ του ομογενούς μαγνητικού πεδίου μέσα στο οποίο βρίσκεται ο αγωγός ΚΛ έχει φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

Επειδή ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } w = F_L \text{ ή } mg = B_2 I_{\varepsilon\pi}\ell,$$

ή λόγω της σχέσης (2):

$$mg = B_2\frac{N\lambda A}{2R}\ell \text{ ή } B_2 = \frac{2mgR}{N\lambda A\ell}.$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Έστω υ_1 το μέτρο της ταχύτητας με την οποία εκρέει το υγρό από την οπή (1).

Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Κ της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού και ενός σημείου Λ ακριβώς έξω από την οπή (1) έχουμε:

$$p_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 + \rho g(h - h_1) = p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \text{ ή}$$

$$p_{\alpha\tau\mu} + 0 + \rho g(h - h_1) = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g(h - h_1)} \text{ ή } \upsilon_1 = \sqrt{0{,}4gh} \text{ (1).}$$

Έστω Π_1 η παροχή της οπής (1). Ισχύει ότι $\Pi_1 = A\upsilon_1$, ή λόγω της σχέσης (1):

$$\Pi_1 = A\sqrt{0{,}4gh} \text{ (2).}$$

Ο χρόνος Δt_1 εντός του οποίου γεμίζει το δοχείο Δ_2 όγκου V, όταν έχουμε ανοίξει μόνο την οπή (1) υπολογίζεται από τον τύπο $\Pi_1 = \frac{V}{\Delta t_1}$ ή $\Delta t_1 = \frac{V}{\Pi_1}$, ή λόγω της σχέσης (2):

$$\Delta t_1 = \frac{V}{A\sqrt{0{,}4gh}} \text{ (3).}$$

Έστω υ_2 το μέτρο της ταχύτητας με την οποία εκρέει το υγρό από την οπή (2).

Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Μ της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού και ενός σημείου Ν ακριβώς έξω από την οπή (2) έχουμε:

$$p_M + \rho g(h - h_2) + \frac{1}{2}\rho\upsilon_M^2 = p_N + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \text{ ή}$$

$$p_{\alpha\tau\mu} + \rho g(h - h_2) + 0 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g(h - h_2)} \text{ ή } \upsilon_2 = \sqrt{1{,}6gh} \text{ (4).}$$

Η παροχή της οπής (2) είναι $\Pi_2 = A\upsilon_2$, ή λόγω της σχέσης (4):

$$\Pi_2 = A\sqrt{1{,}6gh}.$$

Ο χρόνος Δt_2 εντός του οποίου γεμίζει το δοχείο Δ_2, όταν είναι ανοικτές και οι δύο οπές υπολογίζεται από τον τύπο:

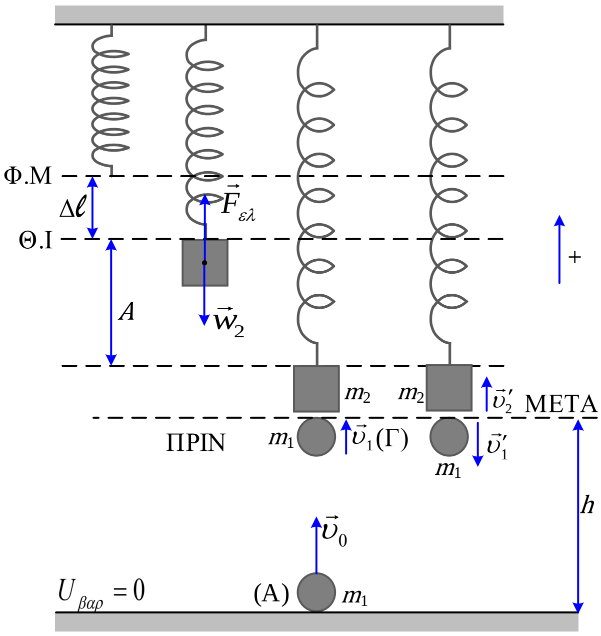
$$\Pi_1 + \Pi_2 = \frac{V}{\Delta t_2} \text{ ή } \Delta t_2 = \frac{V}{A\sqrt{0,4gh} + A\sqrt{1,6gh}} \text{ ή } \Delta t_2 = \frac{V}{A(\sqrt{0,4gh} + \sqrt{1,6gh})} \ (5).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (3) και (5) προκύπτει:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{\sqrt{0,4gh} + \sqrt{1,6gh}}{\sqrt{0,4gh}} \text{ ή } \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1,6gh}{0,4gh}}}{1} \text{ ή } \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = 3 \text{ ή } \Delta t_1 = 3\Delta t_2.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Έστω $|\upsilon_1|$ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος ελάχιστα πριν από την κρούση με το σώμα Σ_2.

Από την Α.Δ.Μ.Ε μεταξύ των θέσεων (Α) και (Γ) που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} \text{ ή } K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \text{ ή } \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + m_1gh \text{ ή}$$

$$|\upsilon_1| = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh} \text{ ή } |\upsilon_1| = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Έστω $|\upsilon_1'|$ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Ισχύει:

$$h = |\upsilon_1'|\Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \text{ ή } |\upsilon_1'| = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Γ2. Επειδή η κρούση είναι ελαστική, η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας υ_1' του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \text{ ή } -|\upsilon_1'| = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}|\upsilon_1| \text{ ή } m_2 = 3m_1 \text{ ή}$$

$$m_1 = 1 \text{ kg}.$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\pi = \frac{\Delta K_2}{K_{1(\pi\rho\iota\nu)}} \cdot 100\% \text{ ή } \pi = \frac{\frac{1}{2}m_2 \upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}m_1 \upsilon_1^2} \cdot 100\% \text{ ή}$$

$$\pi = \frac{m_2\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1\right)^2}{m_1\upsilon_1^2} \cdot 100\% \text{ ή } \pi = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} \cdot 100\% \text{ ή}$$

$$\pi = 75\%.$$

Γ3. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας υ_2' του σώματος Σ2 αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 \text{ ή } \upsilon_2' = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ2 πριν από την κρούση. Ισχύει:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \text{ ή } A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \text{ ή}$$

$$A = 0{,}2\sqrt{3}\text{ m}.$$

Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ2 μετά την κρούση.
Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ2 μετά την κρούση, έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 + \frac{1}{2}kA^2 \text{ ή } A' = \sqrt{\frac{m_2}{k}\upsilon_2'^2 + A^2} \text{ ή}$$

$$A' = 0{,}4\text{ m}.$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ2 από τη θέση ισορροπίας του μετά την κρούση είναι η:

$$x = A'\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \text{ (1)}.$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x = +0{,}2\sqrt{3}$ m. Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = +0{,}2\sqrt{3}$ m προκύπτει:

$$\eta\mu\varphi_0 = +\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή } \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{3} \text{ (2)}.$$

Επειδή είναι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ rad, οι λύσεις της εξίσωσης (2) είναι $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ rad και $\varphi_0 = \frac{2\pi}{3}$ rad. Για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ rad η ταχύτητα ταλάντωσης του σώματος Σ2 είναι $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} > 0$, ενώ για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{2\pi}{3}$ rad η ταχύτητα ταλάντωσης του σώματος Σ2 είναι $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} < 0$. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητα ταλάντωσης του σώματος Σ2 είναι αρνητική, δεκτή λύση είναι η $\varphi_0 = \frac{2\pi}{3}$ rad.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του σώματος είναι ίση με:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \text{ ή } \omega = 10\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Συνεπώς, η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x = 0{,}4\eta\mu\left(10t + \frac{2\pi}{3}\right)(S.I.).$$

Γ4. Η δύναμη που δέχεται το σώμα Σ2 από το ελατήριο μηδενίζεται στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Έστω $\Delta\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι του σώματος Σ2. Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } m_2 g = k\Delta\ell \text{ ή } \Delta\ell = 0{,}1 \text{ m}.$$

Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα Σ2 διέρχεται για πρώτη φορά μετά την κρούση από τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος, η απομάκρυνση x_1 από τη θέση ισορροπίας του είναι ίση με $x_1 = +\Delta\ell$ ή $x_1 = +0{,}1$ m.

Έστω υ_1 η ταχύτητα ταλάντωσης του σώματος Σ2 τη χρονική στιγμή t_1.

Από την Α.Δ.Ε της ταλάντωσης έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}m_2\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \text{ ή } \upsilon_1 = +\sqrt{\frac{k}{m_2}(A'^2 - x_1^2)} \text{ ή }$$

$$\upsilon_1 = +\sqrt{15}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ο ζητούμενος ρυθμός είναι ίσος με:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F dx}{dt} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \Sigma F\upsilon \text{ ή } \frac{dK}{dt} = -Dx_1\upsilon_1 \text{ ή }$$

$$\frac{dK}{dt} = -30\sqrt{15}\,\frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Γ5. Έστω A_Σ το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ3. Ισχύει:

$$A_\Sigma = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}} \text{ ή } A_\Sigma = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - A_1A_2} \text{ ή }$$

$$A_\Sigma = 0{,}4 \text{ m}.$$

Έστω θ η διαφορά φάσης ανάμεσα στη συνισταμένη ταλάντωση και τη συνιστώσα ταλάντωση (1). Ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{A_2\eta\mu\frac{2\pi}{3}}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}} \text{ ή } \varepsilon\varphi\theta = \sqrt{3} \text{ ή } \varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \text{ ή } \theta = \frac{\pi}{3}\text{rad}.$$

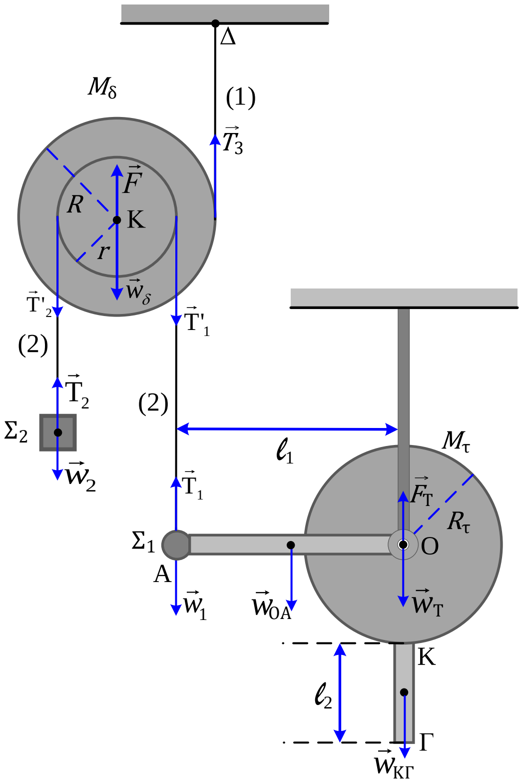
Συνεπώς, η ζητούμενη εξίσωση προκύπτει από τον τύπο:

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \text{ ή } U = \frac{1}{2}m_3\omega^2[A_\Sigma\eta\mu(\omega t + \theta)]^2 \text{ ή }$$

$$U = 16\eta\mu^2\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)\ (S.I.).$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχονται τα σώματα.



Επειδή το σύστημα των δύο ράβδων ΟΑ, ΚΓ και της τροχαλίας ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \text{ ή } +m_1 g\ell_1 - T_1\ell_1 + M_1 g\frac{\ell_1}{2} = 0 \text{ ή } T_1 = m_1 g + \frac{M_1 g}{2} \text{ ή}$$

$$T_1 = 25 \text{ N.}$$

Επειδή το σώμα Σ_2 ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } T_2 = m_2 g \text{ ή}$$

$$T_2 = 15 \text{ N.}$$

Επειδή ο δίσκος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \text{ ή } T_2' r + T_3 R - T_1' r = 0 \text{ ή } T_2 r + T_3 R = T_1 r \text{ ή}$$

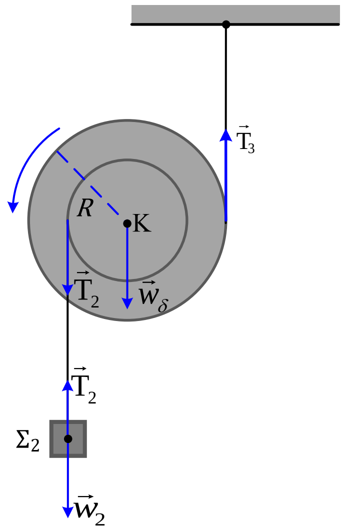
$$T_3 = 5 \text{ N.}$$

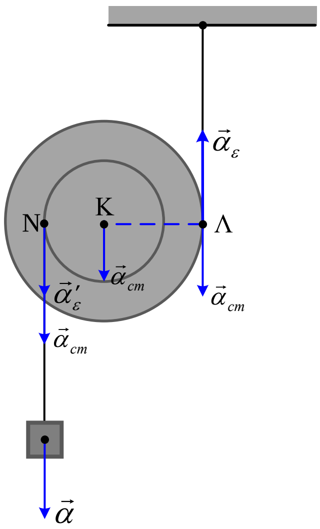
Επειδή ο δίσκος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } F + T_3 = w_\delta + T_1' + T_2' \text{ ή } F + T_3 = M_\delta g + T_1 + T_2 \text{ ή}$$

$$F = 65 \text{ N.}$$

Δ2. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται το σύστημα δίσκος – σώμα Σ_2 κατά τη διάρκεια της κίνησής του.





Έστω α_{cm} το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου, $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ το μέτρο της γωνιακής του επιτάχυνσης και α το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ2. Επειδή τα νήματα δεν ολισθαίνουν στις περιφέρειες του δίσκου και της κυκλικής εγκοπής, ισχύει:

$$\alpha_{cm} - \alpha_\varepsilon = 0 \;\; ή \;\; \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R \; (1)$$

και:

$$\alpha = \alpha_{cm} + \alpha'_\varepsilon \;\; ή \;\; \alpha = \alpha_{cm} + \alpha_{\gamma\omega\nu} r \;\; ή \;\; \alpha = \alpha_{cm} + \alpha_{\gamma\omega\nu}\frac{R}{2},$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$\alpha = \frac{3}{2}\alpha_{cm} \;\; ή \;\; \alpha_{cm} = \frac{2}{3}\alpha \; (2).$$

Για το σώμα Σ2 έχουμε:

$$\Sigma F = m_2\alpha \;\; ή \;\; w_2 - T_2 = m_2\alpha \;\; ή \;\; m_2 g - T_2 = m_2\alpha \;\; ή \;\; T_2 = m_2 g - m_2\alpha \; (3).$$

Για τη μεταφορική κίνηση του δίσκου ισχύει:

$$\Sigma F = M_\delta \alpha_{cm} \;\; ή \;\; M_\delta g + T_2 - T_3 = M_\delta \alpha_{cm} \; (4).$$

Για την περιστροφική κίνηση του δίσκου ισχύει:

$$\Sigma\tau = I_{cm(\delta)}\alpha_{\gamma\omega\nu} \;\; ή \;\; T_3 R + T_2 r = \frac{1}{2}M_\delta R^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \;\; ή \;\; T_3 R + T_2\frac{R}{2} = \frac{1}{2}M_\delta R^2 \alpha_{\gamma\omega\nu},$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$T_3 + \frac{T_2}{2} = \frac{1}{2}M_\delta \alpha_{cm} \; (5).$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (4) και (5) έχουμε:

$$M_\delta g + \frac{3}{2}T_2 = \frac{3}{2}M_\delta \alpha_{cm} \;\; ή \;\; 2M_\delta g + 3T_2 = 3M_\delta \alpha_{cm},$$

ή λόγω της σχέσης (2):

$$2M_\delta g + 3T_2 = 2M_\delta \alpha,$$

ή λόγω της σχέσης (3):

$$2M_\delta g + 3(m_2 g - m_2\alpha) = 2M_\delta \alpha \;\; ή \;\; \alpha = \frac{2M_\delta g + 3m_2 g}{3m_2 + 2M_\delta} \;\; ή \;\; \alpha = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Συνεπώς, είναι:

$$\alpha_{cm} = \frac{2}{3}\alpha \ \text{ ή } \ \alpha_{cm} = \frac{20}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Τη χρονική στιγμή t στην οποία το σώμα Σ_2 έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα προς τα κάτω κατά h ισχύει:

$$h = \frac{1}{2}\alpha t^2 \ \text{ ή } \ t = \sqrt{\frac{2h}{\alpha}} \ \text{ ή } \ t = 1 \text{ s}.$$

Το μέτρο υ_{cm} της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t είναι ίσο με:

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} t \ \text{ ή } \ \upsilon_{cm} = \frac{20}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η κινητική ενέργεια του δίσκου τη χρονική στιγμή t υπολογίζεται από τον τύπο:

$$K = K_{\mu\varepsilon\tau} + K_{\pi\varepsilon\rho} \ \text{ ή } \ K = \frac{1}{2}M_\delta \upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm(\delta)}\omega^2 \ \text{ ή }$$

$$K = \frac{1}{2}M_\delta \upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} \, M_\delta R^2 \omega^2 \ \text{ ή } \ K = \frac{3}{4}M_\delta \upsilon_{cm}^2 \ \text{ ή }$$

$$K = 100 \text{ J}.$$

Δ3. Έστω $\alpha_{\gamma\omega\nu(\Sigma)}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του ενιαίου στερεού σώματος Σ τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κοπή του νήματος (2) που συνδέει το δίσκο με το σώμα Σ_1.

Η ροπή αδράνειας I_Σ του στερεού σώματος Σ ως προς τον άξονα $x'x$ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I_\Sigma = I_{OA} + I_{cm(T)} + I_{K\Gamma} + I_{\Sigma_1} \ \text{ ή }$$

$$I_\Sigma = \frac{1}{12}M_1\ell_1^2 + M_1\left(\frac{\ell_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}M_T R_T^2 + \frac{1}{12}M_2\ell_2^2 + M_2\left(R_T + \frac{\ell_2}{2}\right)^2 + m_1\ell_1^2 \ \text{ ή }$$

$$I_\Sigma = \frac{1}{3}M_1\ell_1^2 + + \frac{1}{2}M_T R_T^2 + \frac{1}{12}M_2\ell_2^2 + M_2\left(R_T + \frac{\ell_2}{2}\right)^2 + m_1\ell_1^2 \ \text{ ή }$$

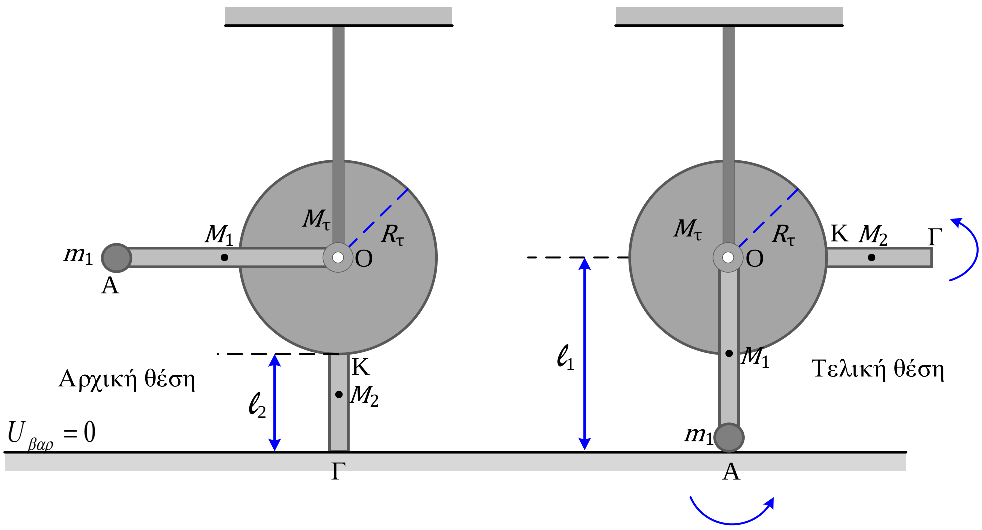
$$I_\Sigma = 0{,}64 \text{ kg m}^2.$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης έχουμε:

$$\Sigma\tau = I_\Sigma \alpha_{\gamma\omega\nu(\Sigma)} \ \text{ ή } \ m_1 g\ell_1 + \frac{M_1 g\ell_1}{2} = I_\Sigma \alpha_{\gamma\omega\nu(\Sigma)} \ \text{ ή }$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu(\Sigma)} = \frac{125}{8}\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Δ4. Έστω ω_Σ το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του στερεού σώματος Σ τη χρονική στιγμή που η ράβδος ΟΑ γίνεται κατακόρυφη για πρώτη φορά.



Επειδή είναι $R_T + \ell_2 = \ell_1$, το άκρο Γ της ράβδου ΚΓ στην αρχική θέση του στερεού Σ και το άκρο Α της ράβδου ΟΑ στη τελική θέση στο στερεού Σ βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε ανάμεσα στην αρχική και την τελική θέση του στερεού σώματος Σ που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία Α και Γ:

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)} \text{ ή } K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή}$$

$$m_1 g(R_T + \ell_2) + M_1 g(R_T + \ell_2) + M_T g(R_T + \ell_2) + M_2 g\frac{\ell_2}{2} = \frac{1}{2} I_\Sigma \omega_\Sigma^2 +$$

$$M_1 g\frac{\ell_1}{2} + M_T g\ell_1 + M_2 g\ell_1 \text{ ή}$$

$$m_1 g\ell_1 + M_1 g\ell_1 + M_2 g\frac{\ell_2}{2} = \frac{1}{2} I_\Sigma \omega_\Sigma^2 + M_1 g\frac{\ell_1}{2} + M_2 g\ell_1 \text{ ή}$$

$$\omega_\Sigma = 1{,}25\sqrt{2}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της στροφορμής του σώματος Σ_1 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$L_{\Sigma_1} = I_{\Sigma_1}\omega_\Sigma \text{ ή } L_{\Sigma_1} = m_1 \ell_1^2 \omega_\Sigma \text{ ή}$$

$$L_{\Sigma_1} = 0{,}2\sqrt{2}\,\text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

13ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

Α1. α, Α2. α, Α3. γ, Α4. β

Α5. α. Σ, β. Λ, γ. Λ, δ. Λ, ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Για τις ωμικές αντιστάσεις R_1 και R_2 δύο σωληνοειδών (1) και (2) αντίστοιχα ισχύει ότι $R_1 = R_2 = \frac{R}{2}$.

Όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός, η ένταση I ρεύματος που διαρρέει το σωληνοειδές (1) υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r} \text{ ή } I = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R}{2}+\frac{R}{2}} \text{ ή } I = \frac{\mathcal{E}}{R} \,(1).$$

Το μέτρο B της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο εσωτερικό του σωληνοειδούς (1) υπολογίζεται από τον τύπο:

$$B = \frac{k_\mu 4\pi I \frac{N}{2}}{\frac{\ell}{2}} \text{ ή } B = \frac{k_\mu 4\pi I N}{\ell},$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$B = \frac{4\pi k_\mu \mathcal{E} N}{R\ell} \,(2).$$

Έστω I' η ένταση του ρεύματος που διαρρέει την πηγή, όταν κλείσουμε τον διακόπτη (δ). Ισχύει:

$$I' = \frac{\mathcal{E}}{R_{1,2} + r} \text{ ή } I' = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R}{4}+\frac{R}{2}} \text{ ή } I' = \frac{4\mathcal{E}}{3R}.$$

Η πολική τάση της πηγής είναι ίση με:

$$V_\pi = \mathcal{E} - Ir \text{ ή } V_\pi = \mathcal{E} - \frac{4\mathcal{E}}{3R}\cdot\frac{R}{2} \text{ ή } V_\pi = \frac{\mathcal{E}}{3}.$$

Η ένταση I_1 του ρεύματος που διαρρέει το σωληνοειδές (1) είναι ίση με:

$$I_1 = \frac{V_\pi}{R_1} \text{ ή } I_1 = \frac{\frac{\mathcal{E}}{3}}{\frac{R}{2}} \text{ ή } I_1 = \frac{2\mathcal{E}}{3R} \,(3).$$

Το μέτρο B_1 της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του σωληνοειδούς (1) είναι ίσο με $B_1 = \mu \, \frac{k_\mu 4\pi I_1 \frac{N}{2}}{\frac{\ell}{2}}$, ή λόγω της σχέσης (3):

$$B_1 = \mu \, \frac{8\pi k_\mu \mathcal{E} N}{3R\ell} \,(4).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (4) και (2), προκύπτει:

$$\frac{B_1}{B} = \frac{2\mu}{3} \text{ ή } 1000 = \frac{2}{3}\mu \text{ ή } \mu = 1500.$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η β.

Έστω υ το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος στην πρώτη περίπτωση.

Από την Α.Δ.Ο για την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \text{ ή } m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon \text{ ή } \upsilon = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1+m_2} \text{ (1).}$$

Το ζητούμενο επί τοις εκατό ποσοστό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Pi_1 = \frac{K_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)} - K_{o\lambda(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})}}{K_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)}} \cdot 100\% \text{ ή } \Pi_1 = \left[1 - \frac{K_{o\lambda(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})}}{K_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)}}\right] \cdot 100\% \text{ ή}$$

$$\Pi_1 = \left[1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}\right] \cdot 100\%,$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$\Pi_1 = \left[1 - \frac{(m_1+m_2)\frac{m_1^2\upsilon_1^2}{(m_1+m_2)^2}}{m_1\upsilon_1^2}\right] \cdot 100\% \text{ ή } \Pi_1 = \left(1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right) \cdot 100\% \text{ ή}$$

$$\Pi_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot 100\% \text{ (2).}$$

Έστω υ' το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος στη δεύτερη περίπτωση.

Από την Α.Δ.Ο για την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \text{ ή } m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon' \text{ ή } \upsilon' = \frac{m_2\upsilon_2}{m_1+m_2} \text{ (3).}$$

Το ζητούμενο επί τοις εκατό ποσοστό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Pi_2 = \frac{K_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)} - K_{o\lambda(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})}}{K_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)}} \cdot 100\% \text{ ή } \Pi_2 = \left[1 - \frac{K_{o\lambda(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})}}{K_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)}}\right] \cdot 100\% \text{ ή}$$

$$\Pi_2 = \left[1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon'^2}{\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2}\right] \cdot 100\%,$$

ή λόγω της σχέσης (3):

$$\Pi_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot 100\% \text{ (4).}$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (3) και (4) προκύπτει:

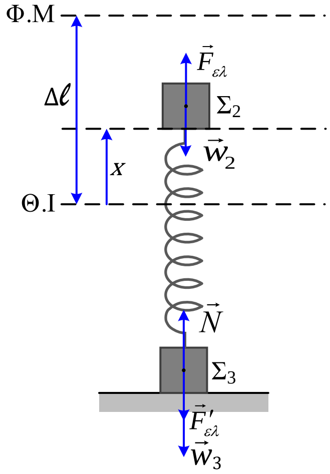
$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{m_2}{m_1} \text{ ή } \Pi_2 = \frac{m_1}{m_2}\Pi_1.$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η β.

Έστω υ_2' η ταχύτητα του σώματος Σ2 αμέσως μετά την κρούση. Αφού η κρούση είναι ελαστική, ισχύει:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 \text{ ή } \upsilon_2' = \frac{2}{5}\upsilon_1 \text{ (1).}$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχονται τα σώματα Σ2 και Σ3, όταν το σώμα Σ2 βρίσκεται σε μία τυχαία θέση με απομάκρυνση x $(x > 0)$ λίγο πάνω από τη θέση ισορροπίας του.



Στην τυχαία θέση ισχύει:

$$\Sigma F_2 = -Dx \text{ ή } F_{\varepsilon\lambda} - w_2 = -kx \text{ ή } F_{\varepsilon\lambda} = m_2 g - kx \text{ (2).}$$

Επειδή το σώμα Σ_3 ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F_3 = 0 \text{ ή } N = F'_{\varepsilon\lambda} + w_3 \text{ ή } N = F_{\varepsilon\lambda} + m_3 g,$$

ή λόγω της σχέσης (2):

$$N = m_2 g + m_3 g - kx \text{ ή } N = 5mg - kx \text{ (3).}$$

Για να μην ανασηκώνεται το σώμα, πρέπει να ισχύει:

$$N \geq 0 \text{ ή } 5mg - kx \geq 0 \text{ ή } x \leq \frac{5mg}{k}.$$

Επομένως, το μέγιστο πλάτος A_{max} της ταλάντωσης που μπορεί να εκτελέσει το σώμα Σ_2 χωρίς το σώμα Σ_3 να χάνει την επαφή του με το έδαφος είναι ίσο με:

$$A_{max} = \frac{5mg}{k} \text{ (4).}$$

Επειδή το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση είναι στη θέση ισορροπίας του, ισχύει:

$$\upsilon'_2 = \upsilon_{max} \text{ ή } \upsilon'_2 = \omega A \text{ ή } \upsilon'_2 = \sqrt{\frac{k}{4m}} A \text{ ή } \upsilon'_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} A \text{ (5).}$$

Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι $\upsilon'_{2(max)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} A_{max}$, ή λόγω των σχέσεων (1) και (4):

$$\frac{2}{5}\upsilon_{1(max)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{5mg}{k} \text{ ή } \upsilon_{1(max)} = \frac{25}{4} g\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

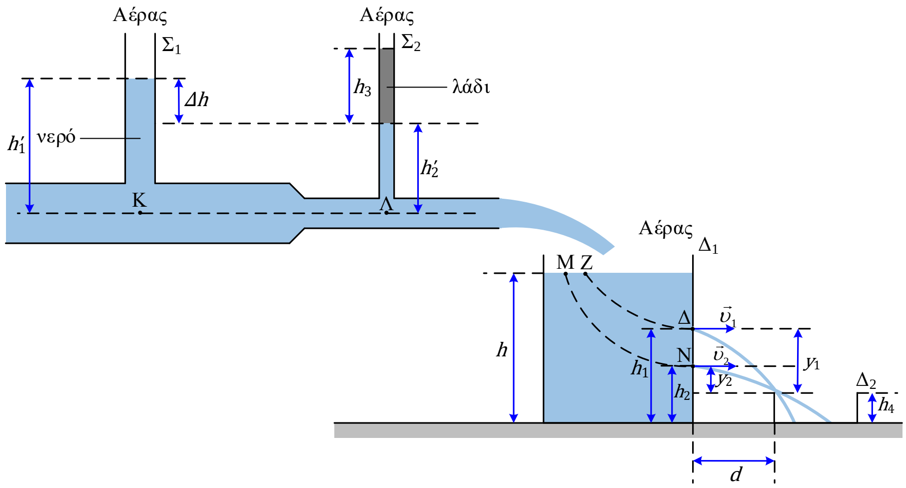
<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Έστω υ_2 το μέτρο της ταχύτητας με την οποία εκρέει το νερό από την οπή (2). Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Μ στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού στο δοχείο Δ_1 και ενός σημείου Ν ακριβώς έξω από την οπή (2) έχουμε:

$$p_M + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_M^2 + \rho_\nu g(h - h_2) = p_N + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_2^2 \text{ ή}$$

$$p_{\alpha\tau\mu} + 0 + \rho_\nu g(h - h_2) = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_2^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g(h - h_2)}\ (1).$$



Έστω Δt_2 ο χρόνος πτώσης της φλέβας του νερού που εξέρχεται από την οπή (2). Ισχύει:

$$h_2 = \frac{1}{2}g(\Delta t_2)^2 \ \text{ή}\ \Delta t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}\ (2).$$

Το βεληνεκές x_2 της φλέβας του νερού που εξέρχεται από την οπή (2) είναι ίσο με $x_2 = \upsilon_2 \Delta t_2$, ή λόγω των σχέσεων (1) και (2):

$$x_2 = 2\sqrt{h_2(h - h_2)}\ \text{ή}\ x_2^2 = 4h_2(h - h_2)\ \text{ή}\ 4h_2^2 - 4hh_2 + x_2^2 = 0\ (3).$$

Για να έχει πραγματικές λύσεις η εξίσωση (3), πρέπει:

$$\Delta \geq 0\ \text{ή}\ 16h^2 - 16x_2^2 \geq 0\ \text{ή}\ x_2 \leq h.$$

Επομένως $x_{2(max)} = h$.

Για $x_2 = x_{2(max)}$ είναι $\Delta = 0$, οπότε η μοναδική λύση της εξίσωσης (3) είναι η:

$$h_2 = \frac{h}{2}\ \text{ή}\ h_2 = 0{,}45\ \text{m}.$$

Γ2. Έστω υ_1 το μέτρο της ταχύτητας με την οποία εκρέει το νερό από την οπή (1). Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Ζ στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού στο δοχείο Δ₁ και ενός σημείου Δ ακριβώς έξω από την οπή (1) έχουμε:

$$p_Z + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_Z^2 + \rho_\nu g(h - h_1) = p_\Delta + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_1^2\ \text{ή}$$

$$p_{\alpha\tau\mu} + 0 + \rho_\nu g(h - h_1) = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_1^2\ \text{ή}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g(h - h_1)}\ \text{ή}\ \upsilon_1 = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $\upsilon_2 = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Η παροχή Π του σωλήνα είναι ίση με:

$$\Pi = \Pi_{o\pi\acute{\eta}\varsigma(1)} + \Pi_{o\pi\acute{\eta}\varsigma(2)}\ \text{ή}\ \Pi = A\upsilon_1 + A\upsilon_2\ \text{ή}\ \Pi = A(\upsilon_1 + \upsilon_2)\ \text{ή}\ \Pi = 10^{-3}\,\frac{m^3}{s}.$$

Έστω υ_K μέτρο της ταχύτητας του νερού στο σημείο Κ του οριζόντιου σωλήνα Venturi. Είναι:

$$\Pi = A_1 \upsilon_K \text{ ή } \upsilon_K = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Έστω υ_Λ μέτρο της ταχύτητας του υγρού στο σημείο Λ του οριζόντιου σωλήνα Venturi. Είναι:

$$\Pi = A_2 \upsilon_\Lambda \text{ ή } \upsilon_\Lambda = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ των σημείων Κ και Λ έχουμε:

$$p_K + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_K^2 = p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_\Lambda^2 \text{ ή } p_K - p_\Lambda = \frac{1}{2}\rho_\nu(\upsilon_\Lambda^2 - \upsilon_K^2) \text{ (4).}$$

Επειδή το νερό στον κατακόρυφο σωλήνα Σ1 ισορροπεί, ισχύει:

$$p_K = p_{\alpha\tau\mu} + \rho_\nu g h_1' \text{ (5).}$$

Από τη συνθήκη υδροστατικής ισορροπίας στον κατακόρυφο σωλήνα Σ2 έχουμε:

$$p_\Lambda = p_{\alpha\tau\mu} + \rho_\lambda g h_3 + \rho_\nu g h_2' \text{ (6).}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (5) και (6) προκύπτει:

$$p_K - p_\Lambda = \rho_\nu g h_1' - \rho_\lambda g h_3 - \rho_\nu g h_2' \text{ ή } p_K - p_\Lambda = \rho_\nu g \Delta h - \rho_\lambda g h_3 \text{ (7).}$$

Από τις σχέσεις (4) και (7) έχουμε:

$$\frac{1}{2}\rho_\nu(\upsilon_\Lambda^2 - \upsilon_K^2) = \rho_\nu g \Delta h - \rho_\lambda g h_3 \text{ ή } \Delta h = 0{,}21 \text{ m.}$$

Γ3. Έστω t_1 και t_2 οι χρόνοι από τη στιγμή που εξέρχονται οι φλέβες του νερού από τις οπές (1) και (2) αντίστοιχα μέχρι να εισέλθουν οριακά στο δοχείο Δ2. Ισχύουν:

$$d = \upsilon_1 t_1 \text{ (8) και } d = \upsilon_2 t_2 \text{ (9).}$$

Από τις σχέσεις (8) και (9) προκύπτει:

$$\upsilon_1 t_1 = \upsilon_2 t_2 \text{ ή } t_1 = 1{,}5 t_2 \text{ (10).}$$

Έστω y_1 και y_2 οι κατακόρυφες μετατοπίσεις των φλεβών του νερού από τις οπές (1) και (2) αντίστοιχα από τη χρονική στιγμή που εξέρχονται από τις οπές μέχρι να εισέλθουν οριακά στο δοχείο Δ2. Ισχύει:

$$y_1 - y_2 = h_1 - h_2 \text{ ή } \frac{1}{2} g t_1^2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = h_1 - h_2,$$

ή λόγω της σχέσης (10):

$$\frac{1}{2} g 1{,}25 t_2^2 = h_1 - h_2 \text{ ή } t_2 = 0{,}2 \text{ s.}$$

Συνεπώς, είναι $t_1 = 0{,}3$ s. Από τη σχέση (8) προκύπτει ότι $d = 0{,}6$ m.

Για το ύψος h_4 του δοχείου Δ2 ισχύει:

$$h_4 = h_1 - y_1 \text{ ή } h_4 = h_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \text{ ή } h_4 = 0{,}25 \text{ m.}$$

Γ4. Το μέτρο της οριζόντιας δύναμης F_1 που ασκεί το νερό στο δοχείο εξαιτίας της εκροής του νερού από την οπή (1) υπολογίζεται από τον τύπο:

$$F_1 = \frac{dp}{dt} \text{ ή } F_1 = \frac{d(mv_1)}{dt} \text{ ή } F_1 = \frac{dm}{dt}\upsilon_1 \text{ ή } F_1 = \frac{d(\rho_\nu V)}{dt}\upsilon_1 \text{ ή}$$

$$F_1 = \rho_\nu \frac{dV}{dt}\upsilon_1 \text{ ή } F_1 = \rho_\nu (A\upsilon_1)\upsilon_1 \text{ ή } F_1 = \rho_\nu A\upsilon_1^2 \text{ ή}$$

$$F_1 = 8 \cdot 10^{-1} \text{ N.}$$

Ομοίως το μέτρο της οριζόντιας δύναμης F_2 που ασκεί το νερό στο δοχείο Δ1 καθώς εκρέει το υγρό από την οπή (2) είναι ίσο με:

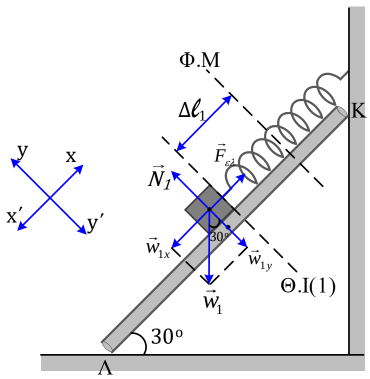
$$F_2 = \rho_\nu A\upsilon_2^2 \text{ ή } F_2 = 18 \cdot 10^{-1} \text{ N.}$$

Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι οριζόντιες με φορά προς τα δεξιά. Οι αντιδράσεις τους $\vec{F}_1'$ και $\vec{F}_2'$ εμφανίζονται στο δοχείο και έχουν φορά προς τα αριστερά. Επομένως, για να μην ολισθαίνει το δοχείο Δ1 πάνω στο δάπεδο πρέπει να ασκείται δύναμη $\vec{F}$ μέτρου:

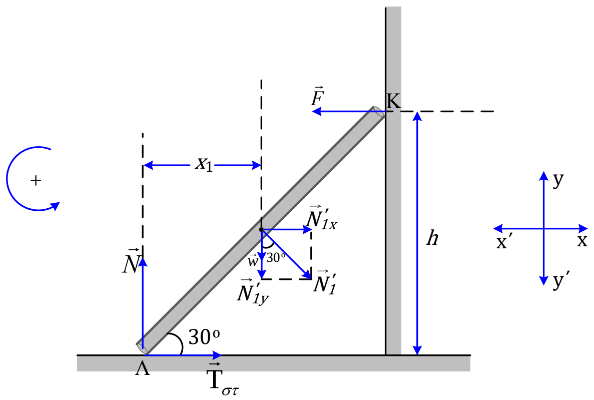
$$F = F_1 + F_2 \text{ ή } F = 2{,}6 \text{ N.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο σχήμα 1 έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα Σ1 πριν από την κρούση, ενώ στο σχήμα 2 έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος ΚΛ πριν από την κρούση.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Από την ισορροπία του σώματος Σ1 έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \text{ (1) και } \Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \text{ (2).}$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$N_1 = w_{1y} \text{ ή } N_1 = m_1 g\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή } N_1 = 10\sqrt{3} \text{ N.}$$

Επειδή η ράβδος ΚΛ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_\rho = \vec{0} \text{ ή}$$

$$\Sigma\vec{F}_{x(\rho)} = \vec{0} \text{ (3) και } \Sigma\vec{F}_{y(\rho)} = \vec{0} \text{ (4).}$$

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$F = T_{\sigma\tau} + N_{1x}' \text{ ή } F = T_{\sigma\tau} + N_1'\eta\mu\varphi \text{ ή } F = T_{\sigma\tau} + \frac{1}{2}N_1 \text{ (5).}$$

Από τη σχέση (4) έχουμε:

$$N = w + N_{1y}' \text{ ή } N = Mg + N_1'\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή } N = Mg + N_1\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή } N = 55 \text{ N.}$$

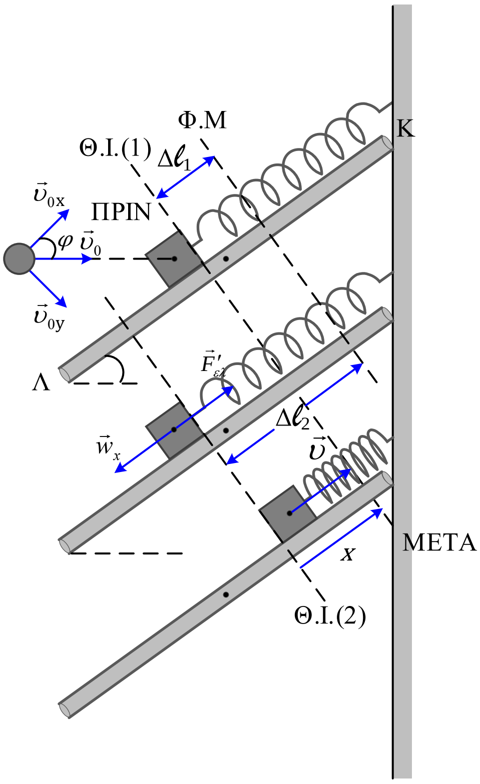
Επειδή η ράβδος ΚΛ ισορροπεί, ισχύει ακόμη ότι:

$$\Sigma\tau_{(\Lambda)} = 0 \;\text{ ή }\; Fh - N_1'\frac{L}{2} - w \cdot x_1 = 0 \;\text{ ή }\; FL\eta\mu\varphi = \frac{N_1'L}{2} + Mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi \;\text{ ή }$$

$$2F\eta\mu\varphi = N_1 + Mg\sigma\upsilon\nu\varphi \;\text{ ή }\; F = 30\sqrt{3}\,\text{N}.$$

Συνεπώς, από τη σχέση (5) προκύπτει ότι $T_{\sigma\tau} = 25\sqrt{3}$ N.

Δ2.



Από την Α.Δ.Ο στον άξονα $x'x$ για την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \;\text{ ή }\; m_2\upsilon_{0x} = (m_1 + m_2)\upsilon \;\text{ ή }\; m_2\upsilon_0\sigma\upsilon\nu\varphi = (m_1 + m_2)\upsilon \;\text{ ή }\; \upsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\pi = \frac{K_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)} - K_{o\lambda(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})}}{K_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)}} \cdot 100\% \;\text{ ή }\; \pi = \frac{\frac{1}{2}m_2\upsilon_0^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2}{\frac{1}{2}m_2\upsilon_0^2} \cdot 100\% \;\text{ ή }\; \pi = 62{,}5\%.$$

Δ3. Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ1. Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \;\text{ ή }\; m_1 g\eta\mu\varphi = k\Delta\ell_1 \;\text{ ή }\; \Delta\ell_1 = 0{,}1\text{ m}.$$

Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος. Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \;\text{ ή }\; (m_1 + m_2)g\eta\mu\varphi = k\Delta\ell_2 \;\text{ ή }\; \Delta\ell_2 = 0{,}2\text{ m}.$$

Η απομάκρυνση x του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι ίση με:

$$x = +(\Delta\ell_2 - \Delta\ell_1) \;\text{ ή }\; x = +0{,}1\text{ m}.$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του συσσωματώματος έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 \text{ ή } A = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}\upsilon^2 + x^2} \text{ ή }$$

$$A = 0{,}2 \text{ m}.$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι η:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \text{ (6)}.$$

Από την εξίσωση (6) για $t = 0$ και $x = +0{,}1$ m προκύπτει:

$$\eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} \text{ ή } \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{6} \text{ (7)}.$$

Επειδή είναι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ rad, οι λύσεις της εξίσωσης (7) είναι οι $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ rad και $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ rad.

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του συσσωματώματος είναι η:

$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \text{ (8)}.$$

Από την εξίσωση (8) για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ rad προκύπτει ότι $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0$, ενώ για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ rad προκύπτει ότι $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0$. Αφού για $t = 0$ είναι $\upsilon > 0$, δεκτή λύση είναι η $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ rad.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι ίση με:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \text{ ή } \omega = 5\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Συνεπώς, η εξίσωση (6) γίνεται:

$$x = 0{,}2\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{6}\right) \ (S.I.).$$

Δ4. Το μέτρο της επιτάχυνσης του συσσωματώματος γίνεται μέγιστο στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης του. Για $x = -A = -0{,}2$ m (κάτω ακραία θέση) είναι:

$$U_{\varepsilon\lambda(1)} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2 + A)^2 \text{ ή } U_{\varepsilon\lambda(1)} = 8 \text{ J}.$$

Για $x = +A = +0{,}2$ m (πάνω ακραία θέση) είναι:

$$U_{\varepsilon\lambda(2)} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2 - A)^2 \text{ ή } U_{\varepsilon\lambda(2)} = 0.$$

Δ5. Το μέτρο της κάθετης δύναμης $\vec{N}_2$ που ασκεί η ράβδος στο συσσωμάτωμα είναι ίσο με:

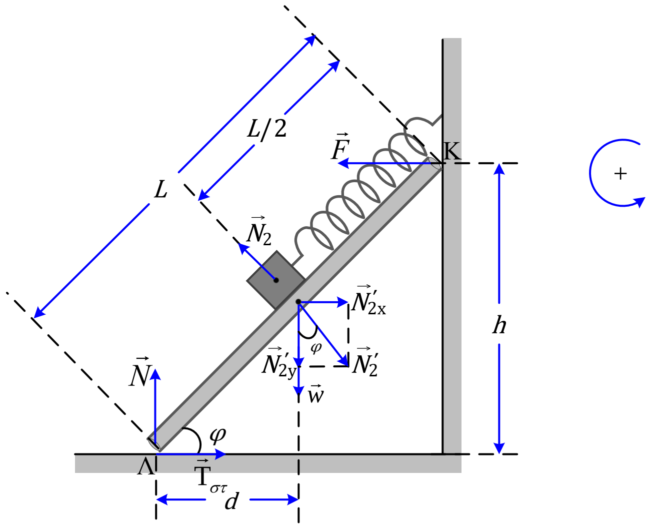
$$N_2 = (m_1 + m_2)g\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή } N_2 = 20\sqrt{3} \text{ N}.$$

Η ράβδος δέχεται από το συσσωμάτωμα την αντίδραση $\vec{N}_2'$ της δύναμης $\vec{N}_2$. Συνεπώς, είναι $N_2' = N_2 = 20\sqrt{3}$ N.

Έστω x η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του (Θ.Ι(2)) τις χρονικές στιγμές στις οποίες ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του είναι ίσος με $\frac{dp}{dt} = -10\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$. Ισχύει:

$$\frac{dp}{dt} = -Dx \ \text{ ή } \ x = +0{,}1 \text{ m}.$$

Επομένως, το συσσωμάτωμα τις παραπάνω χρονικές στιγμές βρίσκεται στη θέση όπου πραγματοποιήθηκε η κρούση, δηλαδή στο μέσο της ράβδου.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(\Lambda)} = 0 \ \text{ ή } \ -N_2\frac{L}{2} - wd + Fh = 0 \ \text{ ή } \ FL\eta\mu\varphi = \frac{N_2L}{2} + \frac{Mg\sigma\upsilon\nu\varphi L}{2} \ \text{ ή }$$

$$\frac{1}{2}F = \frac{1}{2}N_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}Mg \ \text{ ή } \ F = N_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}Mg \ \text{ ή } \ F = 40\sqrt{3}\text{ N}.$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \ \text{ ή } \ F = T_{\sigma\tau} + N_{2x} \ \text{ ή } \ F = T_{\sigma\tau} + N_2\eta\mu\varphi \ \text{ ή } \ T_{\sigma\tau} = F - N_2\eta\mu\varphi \ \text{ ή }$$

$$T_{\sigma\tau} = 30\sqrt{3}\text{ N}.$$

14ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

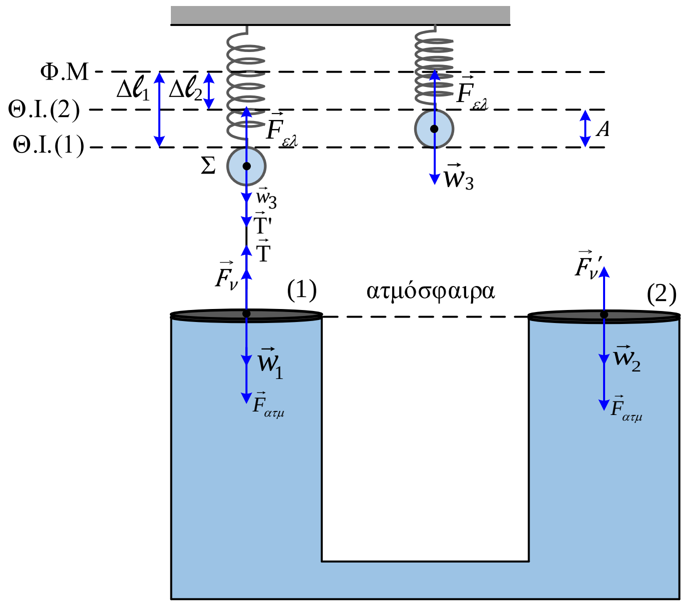
Α1. β, Α2. δ, Α3. α, Α4. β

Α5. α. Σ , β. Σ, γ. Λ, δ. Σ, ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχονται τα έμβολα και το σώμα Σ πριν κοπεί το νήμα.



Έστω p_1 η πίεση του υγρού στα σημεία ακριβώς κάτω από το έμβολο (1).

Επειδή το έμβολο (1) ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } w_1 + F_{\alpha\tau\mu} = F_\nu + T \text{ ή } \frac{w_1}{A_1} + \frac{F_{\alpha\tau\mu}}{A_1} = \frac{F_\nu}{A_1} + \frac{T}{A_1} \text{ ή } \frac{4mg}{A_1} + p_{\alpha\tau\mu} = p_1 + \frac{T}{A_1} \text{ ή}$$

$$p_1 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{4mg}{A_1} - \frac{T}{A_1} \text{ (1).}$$

Έστω p_2 η πίεση του υγρού στα σημεία ακριβώς κάτω από το έμβολο (2).

Επειδή το έμβολο (2) ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } F_\nu' = w_2 + F_{\alpha\tau\mu} \text{ ή } \frac{F_\nu'}{A_2} = \frac{w_2}{A_2} + \frac{F_{\alpha\tau\mu}}{A_2} \text{ ή } p_2 = \frac{mg}{A_2} + p_{\alpha\tau\mu} \text{ (2).}$$

Τα έμβολα έχουν το ίδιο εμβαδόν διατομής, δηλαδή $A_1 = A_2$.

Επειδή τα έμβολα βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, ισχύει ότι $p_1 = p_2$, ή λόγω των σχέσεων (1) και (2):

$$p_{\alpha\tau\mu} + \frac{4mg}{A_1} - \frac{T}{A_1} = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{mg}{A_2} \text{ ή } \frac{4mg}{A_1} - \frac{T}{A_1} = \frac{mg}{A_2} \text{ ή } T = 3mg.$$

Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ (Θ.Ι.(1)) πριν κοπεί το νήμα. Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } T + w_3 = F_{\varepsilon\lambda} \text{ ή } T + mg = k\Delta\ell_1 \text{ ή } 4mg = k\Delta\ell_1 \text{ ή } \Delta\ell_1 = \frac{4mg}{k} \,(3).$$

Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη νέα θέση ισορροπίας του σώματος Σ (Θ.Ι.(2)) αφού κοπεί το νήμα. Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } w_3 = F'_{\varepsilon\lambda} \text{ ή } mg = k\Delta\ell_2 \text{ ή } \Delta\ell_2 = \frac{mg}{k} \,(4).$$

Το πλάτος A της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ είναι ίσο με $A = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2$, ή λόγω των σχέσεων (3) και (4):

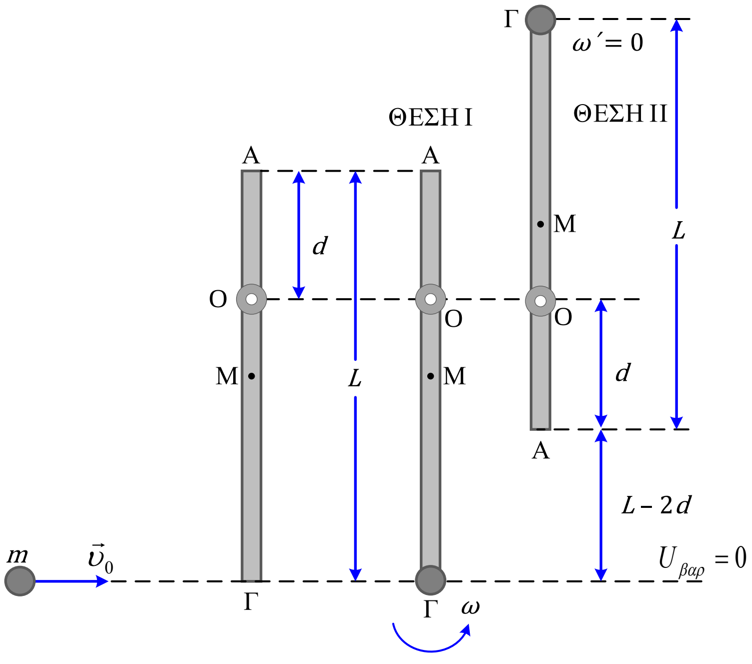
$$A = \frac{3mg}{k}.$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Η ροπή αδράνειας I του συστήματος της ράβδου και του σώματος Σ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2} - d\right)^2 + m(L-d)^2 \text{ ή } I = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{6}\right)^2 + m\left(\frac{2L}{3}\right)^2 \text{ ή}$$

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{ML^2}{36} + \frac{4}{9}mL^2 \text{ ή } I = \frac{mL^2}{9} + \frac{4mL^2}{9} \text{ ή } I = \frac{5mL^2}{9} + \frac{4mL^2}{9} \text{ ή } I = mL^2.$$



Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \text{ ή } m\upsilon_0(L-d) = I\omega \text{ ή } m\upsilon_0\frac{2L}{3} = mL^2\omega \text{ ή } \upsilon_0 = \frac{3}{2}L\omega \,(1).$$

Αφού η ράβδος μόλις που εκτελεί ανακύκλωση, όταν θα γίνει για πρώτη φορά κατακόρυφη μετά την κρούση, θα έχει γωνιακή ταχύτητα ίση με το μηδέν ($\omega' = 0$). Από την Α.Δ.Μ.Ε μεταξύ των θέσεων Ι και ΙΙ που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα έχουμε:

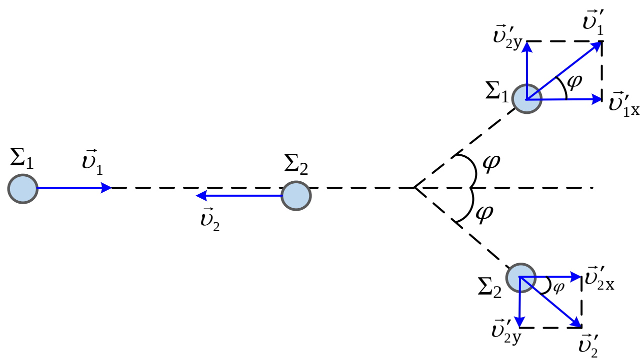
$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)} \text{ ή } K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + Mg\frac{L}{2} = 0 + Mg\left(\frac{L}{2} + L - 2d\right) + mg(L + L - 2d) \text{ ή}$$
$$\frac{1}{2}mL^2\omega^2 + \frac{1}{2}MgL = \frac{5}{6}MgL + \frac{4}{3}mgL \text{ ή}$$
$$\frac{1}{2}mL\omega^2 = \frac{1}{3}Mg + \frac{4}{3}mg \text{ ή } \frac{1}{2}mL\omega^2 = \frac{5}{3}mg + \frac{4}{3}mg \text{ ή } \frac{1}{2}L\omega^2 = 3g \text{ ή}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{L}}.$$

Συνεπώς, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$\upsilon_0 = \frac{3}{2}\sqrt{6gL}.$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η β.



Από την Α.Δ.Ο στον άξονα $y'y$ έχουμε:

$$\vec{p}_{y(\pi\rho\iota\nu)} = \vec{p}_{y(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} \text{ ή } 0 = m_1\upsilon'_{1y} - m_2\upsilon'_{2y} \text{ ή } m_1\upsilon'_1\eta\mu\varphi = m_2\upsilon'_2\eta\mu\varphi \text{ ή } \upsilon'_1 = \upsilon'_2.$$

Από την Α.Δ.Ο στον άξονα $x'x$ έχουμε:

$$\vec{p}_{x(\pi\rho\iota\nu)} = \vec{p}_{x(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} \text{ ή } m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon'_{1x} + m_2\upsilon'_{2x} \text{ ή}$$
$$m_1\upsilon_1 - m_1\frac{\upsilon_1}{2} = m_1\upsilon'_1\sigma\upsilon\nu\varphi + m_1\upsilon'_1\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή } \frac{m_1\upsilon_1}{2} = 2m_1\upsilon'_1\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή}$$
$$\upsilon'_1 = \frac{\upsilon_1}{2}.$$

Συνεπώς, είναι:

$$K_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \text{ ή } K_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_1\frac{\upsilon_1^2}{4} \text{ ή}$$
$$K_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)} = \frac{5}{8}m_1\upsilon_1^2$$

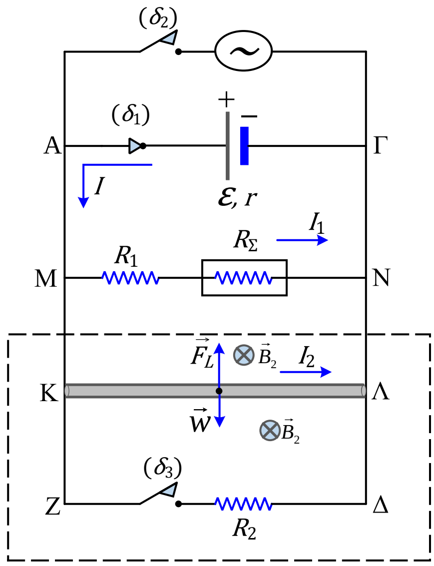
και:

$$K_{o\lambda(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \text{ ή } K_{o\lambda(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} = \frac{1}{2}m_1\frac{\upsilon_1^2}{4} + \frac{1}{2}m_1\frac{\upsilon_1^2}{4} \text{ ή}$$
$$K_{o\lambda(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} = \frac{1}{4}m_1\upsilon_1^2.$$

Επειδή είναι $K_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)} > K_{o\lambda(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})}$, η κρούση είναι ανελαστική.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα ρεύματα που διαρρέουν το κύκλωμα και οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος ΚΛ.



Έστω R_Σ η ωμική αντίσταση της συσκευής. Από τα στοιχεία κανονικής λειτουργίας της έχουμε:

$p_K = \frac{V_K^2}{R_\Sigma}$ ή $R_\Sigma = \frac{V_K^2}{p_K}$ ή $R_\Sigma = 1\ \Omega$.

Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{1,\Sigma}$ του συστήματος του αντιστάτη R_1 και της συσκευής είναι ίση με $R_{1,\Sigma} = R_1 + R_\Sigma$ ή $R_{1,\Sigma} = 2\ \Omega$.

Η ισοδύναμη αντίσταση R' του εξωτερικού τμήματος του κυκλώματος είναι ίση με:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_{1,\Sigma}} + \frac{1}{R_{K\Lambda}} \text{ ή } R' = \frac{R_{1,\Sigma} \cdot R_{K\Lambda}}{R_{1,\Sigma} + R_{K\Lambda}} \text{ ή } R' = 1\ \Omega.$$

Η ένταση I του ρεύματος που διαρρέει την πηγή υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R' + r} \text{ ή } I = 4\ \text{A}.$$

Η τάση V_π στους πόλους της πηγής είναι ίση με:

$$V_\pi = \mathcal{E} - Ir \text{ ή } V_\pi = 4\ \text{V}.$$

Η ένταση I_2 του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ είναι ίση με:

$$I_2 = \frac{V_\pi}{R_{K\Lambda}} \text{ ή } I_2 = 2\ \text{A}.$$

Αφού ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } mg = F_L \text{ ή } mg = B_2 I_2 \ell \text{ ή } B_2 = 1\ \text{T}.$$

Η ένταση I_1 του ρεύματος που διαρρέει την συσκευή είναι ίση με:

$$I_1 = \frac{V_\pi}{R_{1,\Sigma}} \text{ ή } I_1 = 2\ \text{A}.$$

Η τάση V_Σ στα άκρα της συσκευής είναι ίση με:

$$V_\Sigma = I_1 R_\Sigma \text{ ή } V_\Sigma = 2\ \text{V}.$$

Αφού $V_\Sigma < V_K$, η συσκευή δεν λειτουργεί κανονικά.

Γ2. Η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο κύκλωμα υπολογίζεται από τον τύπο:

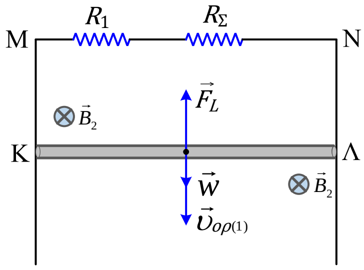
$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{|d\Phi|}{dt} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{B_2 dS}{dt} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{B_2 dx\ell}{dt} \text{ ή } E_{\varepsilon\pi} = B_2 \upsilon \ell.$$

Το επαγωγικό ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα έχει ένταση $I_{\varepsilon\pi}$ που δίνεται από τη σχέση:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{o\lambda}} \text{ ή } I_{\varepsilon\pi} = \frac{B_2 \upsilon \ell}{R_1 + R_\Sigma + R_{K\Lambda}}.$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace $\vec{F}_L$ που δέχεται ο αγωγός ΚΛ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$F_L = B_2 I_{\varepsilon\pi} \ell \text{ ή } F_L = \frac{B_2^2 \ell^2 \upsilon}{R_1 + R_\Sigma + R_{K\Lambda}}.$$

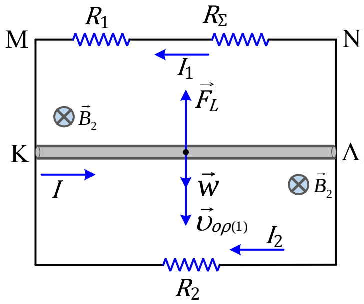


Ο αγωγός αποκτά την οριακή του ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{o\rho(1)}$, όταν:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } mg = F_L \text{ ή } mg = \frac{B_2^2 \ell^2 \upsilon_{o\rho(1)}}{R_1 + R_\Sigma + R_{K\Lambda}} \text{ ή } \upsilon_{o\rho(1)} = \frac{mg(R_1 + R_\Sigma + R_{K\Lambda})}{B_2^2 \ell^2} \text{ ή }$$

$$\upsilon_{o\rho(1)} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Γ3. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα ρεύματα που διαρρέουν το κύκλωμα και οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος ΚΛ αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ_3).



Ισχύει:

$$R_{\varepsilon\xi} = \frac{R_{1,\Sigma} \cdot R_2}{R_{1,\Sigma} + R_2} \text{ ή } R_{\varepsilon\xi} = 1\ \Omega.$$

Η ένταση I του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει τη ράβδο ΚΛ αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ_3) είναι ίση με:

$$I = \frac{B_2 \upsilon_{o\rho(1)} \ell}{R_{\varepsilon\xi} + R_{K\Lambda}} \text{ ή } I = \frac{8}{3}\ \text{A}.$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace $\vec{F}_L$ που δέχεται ο αγωγός ΚΛ αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ_3) είναι ίσο με:

$$F_L = B_2 I \ell \text{ ή } F_L = \frac{8}{3}\ \text{N}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου ΚΛ αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ_3) υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \Sigma F \upsilon_{o\rho(1)} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = (mg - F_L)\upsilon_{o\rho(1)} \text{ ή }$$

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{16}{3}\frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Γ4. Τη χρονική στιγμή στην οποία η ράβδος ΚΛ αποκτά τη νέα οριακή της ταχύτητα $\upsilon_{o\rho(2)}$ ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } mg = F_L \text{ ή } mg = \frac{B_2^2 \ell^2 \upsilon_{o\rho(2)}}{R_{\varepsilon\xi} + R_{K\Lambda}} \text{ ή } \upsilon_{o\rho(2)} = \frac{mg(R_{\varepsilon\xi} + R_{K\Lambda})}{B_2^2 \ell^2} \text{ ή }$$

$$\upsilon_{o\rho(2)} = 6\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Έστω $I_{o\rho(2)}$ η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τη ράβδο ΚΛ από τη χρονική στιγμή που αποκτά τη νέα οριακή της ταχύτητα και μετά. Ισχύει:

$$I_{o\rho(2)} = \frac{B_2 \upsilon_{o\rho(2)} \ell}{R_{\varepsilon\xi} + R_{K\Lambda}} \text{ ή } I_{o\rho(2)} = 2 \text{ A}.$$

Η τάση $V_{K\Lambda}$ στα άκρα του αγωγού ΚΛ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$V_{K\Lambda} = I_{o\rho(2)} \cdot R_{\varepsilon\xi} \text{ ή } V_{K\Lambda} = 2 \text{ V}.$$

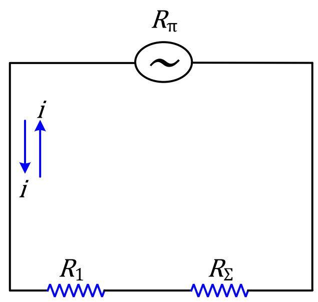
Έστω I_1' η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τη θερμική συσκευή από τη χρονική στιγμή που η ράβδος αποκτά τη νέα οριακή της ταχύτητας και μετά.
Ισχύει:

$$I_1' = \frac{V_{K\Lambda}}{R_{1,\Sigma}} \text{ ή } I_1' = 1 \text{ A}.$$

Η ζητούμενη θερμότητα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$Q_{R_\Sigma} = I_1'^2 R_\Sigma \Delta t \text{ ή } Q_{R_\Sigma} = 0{,}5 \text{ J}.$$

Γ5. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται πώς διαμορφώνεται το κύκλωμα με ανοικτούς τους διακόπτες (δ_1) και (δ_3) και κλειστό τον διακόπτη (δ_2).



Η μέγιστη τιμή της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πλαίσιο υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E_{\varepsilon\pi(max)} = N\omega B_1 A \text{ ή } E_{\varepsilon\pi(max)} = N\omega B_1 \alpha^2.$$

Το πλάτος I της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I = \frac{E_{\varepsilon\pi(max)}}{R_1 + R_\Sigma + R_\pi} \text{ ή } I = \frac{N\omega B_1 \alpha^2}{R_1 + R_\Sigma + R_\pi} \text{ (1).}$$

Το πλάτος V_Σ της εναλλασσόμενης τάσης στα άκρα της συσκευής είναι ίσο με:

$$V_\Sigma = IR_\Sigma \text{ ή } V_\Sigma = \frac{N\omega B_1 \alpha^2}{R_1 + R_\Sigma + R_\pi} R_\Sigma.$$

Αφού η συσκευή λειτουργεί κανονικά, ισχύει:

$$V_{\varepsilon\nu(\Sigma)} = V_K \text{ ή } \frac{V_\Sigma}{\sqrt{2}} = V_K \text{ ή } V_\Sigma = V_K\sqrt{2} \text{ ή } \frac{N\omega B_1 \alpha^2}{R_1 + R_\Sigma + R_\pi} R_\Sigma = \sqrt{2} V_K \text{ ή}$$

$$\omega = 40\sqrt{2}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Από τη σχέση (1) βρίσκουμε $I = 4\sqrt{2}$ A.

Η χρονική εξίσωση της εναλλασσόμενης τάσης υ_π που εμφανίζεται στα άκρα του πλαισίου προσδιορίζεται ως εξής:

$$\upsilon_\pi = i(R_1 + R_\Sigma) \text{ ή } \upsilon_\pi = I(R_1 + R_\Sigma)\eta\mu\omega t \text{ ή } \upsilon_\pi = 8\sqrt{2}\eta\mu\left(40\sqrt{2}t\right) \; (S.I.)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 πριν από την κρούση. Ισχύει:

$$\upsilon_0 = \upsilon_{max} \text{ ή } \upsilon_0 = \omega A \text{ ή } \upsilon_0 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} A \text{ ή}$$

$$A = 0{,}8 \text{ m}.$$

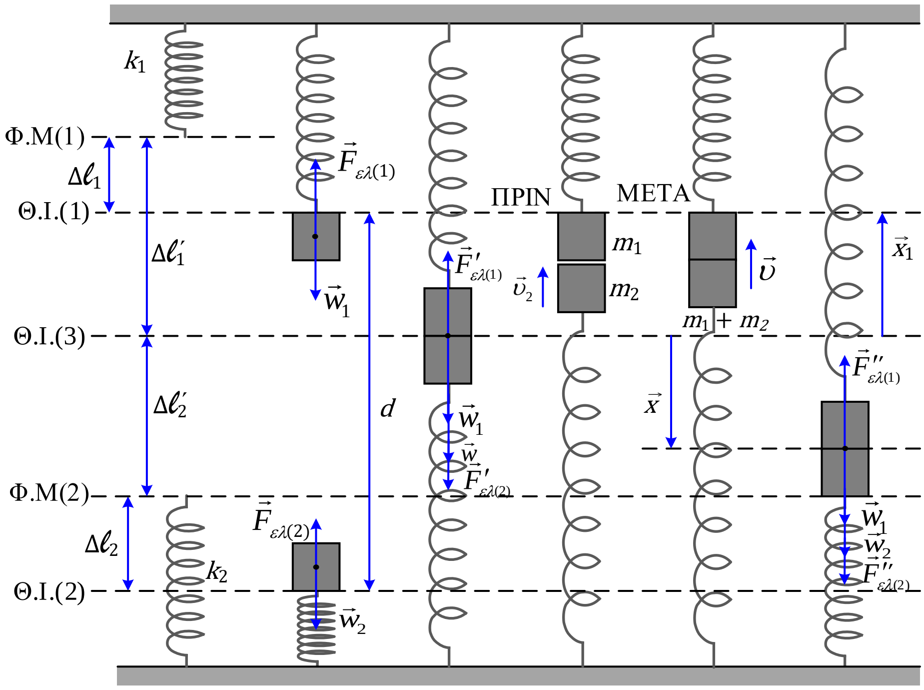
Έστω υ_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ελάχιστα πριν από την κρούση.

Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ_2 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \text{ ή } k_2A^2 = m_2\upsilon_2^2 + k_2d^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}(A^2 - d^2)} \text{ ή } \upsilon_2 = 4\sqrt{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ2.



Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται από την κρούση εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας (3) (Θ.Ι.(3)) που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } w_1 + w_2 + F'_{\varepsilon\lambda(2)} = F'_{\varepsilon\lambda(1)} \text{ ή}$$

$$m_1 g + m_2 g + k_2 \Delta\ell_2' = k_1 \Delta\ell_1' \text{ (1).}$$

Στην τυχαία θέση του συσσωματώματος με απομάκρυνση $\vec{x}$ από τη θέση ισορροπίας (3) που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα ισχύει:

$$\Sigma F = w_1 + w_2 + F''_{\varepsilon\lambda(2)} - F''_{\varepsilon\lambda(1)} \text{ ή}$$

$$\Sigma F = m_1 g + m_2 g + k_2(\Delta\ell_2' - x) - k_1(\Delta\ell_1' + x) \text{ ή}$$

$$\Sigma F = m_1 g + m_2 g + k_2 \Delta\ell_2' - k_2 x - k_1 \Delta\ell_1' - k_1 x,$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$\Sigma F = -k_1 x - k_2 x \text{ ή } \Sigma F = -(k_1 + k_2)x.$$

Επομένως, το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D_2 = k_1 + k_2$.

Δ3. Έστω υ το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, έχουμε:

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \text{ ή } m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon \text{ ή}$$

$$\upsilon = \sqrt{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Η απομάκρυνση x_1 του συσσωματώματος από τη Θ.Ι.(3) αμέσως μετά την κρούση είναι ίση με:

$$x_1 = +(\Delta\ell'_1 - \Delta\ell_1) \text{ (2)}.$$

Στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ1 (Θ.Ι(1)) ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } w_1 = F_{\varepsilon\lambda(1)} \text{ ή } m_1 g = k_1 \Delta\ell_1 \text{ ή } \Delta\ell_1 = 0{,}1 \text{ m}.$$

Στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ2 (Θ.Ι(2)) ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } w_2 = F_{\varepsilon\lambda(2)} \text{ ή } m_2 g = k_2 \Delta\ell_2 \text{ ή } \Delta\ell_2 = 0{,}1 \text{ m}.$$

Όπως προκύπτει από το σχήμα ισχύει:

$$\Delta\ell'_1 + \Delta\ell'_2 + \Delta\ell_2 = d + \Delta\ell_1 \text{ (3)}.$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (3) προκύπτει ότι $\Delta\ell'_1 = 0{,}2$ m και $\Delta\ell'_2 = 0{,}2$ m. Συνεπώς, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $x_1 = +0{,}1$ m.

Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση του συσσωματώματος έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}D_2 A_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 + \frac{1}{2}D_2 x_1^2 \text{ ή}$$

$$(k_1 + k_2)A_2^2 = (m_1 + m_2)\upsilon^2 + (k_1 + k_2)x_1^2 \text{ ή}$$

$$A_2 = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{k_1+k_2}\upsilon^2 + x_1^2} \text{ ή } A_2 = 0{,}2 \text{ m}.$$

Η γωνιακή συχνότητα ω_2 της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα είναι ίση με:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D_2}{m_1+m_2}} \text{ ή } \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m_1+m_2}} \text{ ή } \omega_2 = 10\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη Θ.Ι.(3) είναι η:

$$x = A_2 \eta\mu(\omega_2 t + \varphi_0) \text{ (4)}.$$

Από την εξίσωση (4) για $t = 0$ και $x = x_1 = +0{,}1$ m προκύπτει:

$$\eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} \text{ ή } \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{6} \text{ (5)}.$$

Αφού $0 \le \varphi_0 < 2\pi$ rad, οι λύσεις της εξίσωσης (5) είναι $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ rad, $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ rad.

Από τη χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του συσσωματώματος για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ rad προκύπτει ότι $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0$, ενώ για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ rad προκύπτει ότι $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0$. Επειδή για $t = 0$ είναι $\upsilon > 0$, δεκτή λύση είναι η $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ rad.

Συνεπώς, η εξίσωση (4) γίνεται:

$$x = 0{,}2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)(S.I.).$$

Δ4. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \Sigma F \upsilon \text{ ή } \frac{dK}{dt} = -D_2 x \cdot \upsilon.$$

Ισχύει:

$$\frac{dK}{dt} = 0 \text{ ή } -D_2 x \cdot \upsilon = 0, \text{ οπότε είναι } x = 0 \text{ ή } \upsilon = 0.$$

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος μηδενίζεται για πρώτη φορά, όταν $\upsilon = 0$ ή $x = +A$.

Συνεπώς, είναι:

$$\frac{dp}{dt} = -D_2 x \text{ ή } \frac{dp}{dt} = -D_2 A_2 \text{ ή } \frac{dp}{dt} = -(k_1 + k_2) A_2 \text{ ή}$$

$$\frac{dp}{dt} = -80 \ \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}.$$

15ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

Α1. α, Α2. γ, Α3. γ, Α4. δ

Α5. α. Σ, β. Λ, γ. Σ, δ. Λ, ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η β.

Το μέτρο E_1 της ΗΕΔ από επαγωγή που δημιουργείται στον κυκλικό αγωγό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E_1 = \frac{|d\Phi|}{dt} \text{ ή } E_1 = \frac{dBA}{dt} \text{ ή } E_1 = \frac{dB\pi\alpha^2}{dt} \text{ ή } E_1 = \lambda\pi\alpha^2.$$

Η ένταση I_1 του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει τον κυκλικό αγωγό είναι ίση με:

$$I_1 = \frac{E_1}{R} \text{ ή } I_1 = \frac{\lambda\pi\alpha^2}{R},$$

όπου R η ωμική αντίσταση του κυκλικού αγωγού.

Το μέτρο της έντασης B_K στο κέντρο του είναι:

$$B_K = k_\mu \frac{2\pi I_1}{\alpha} \text{ ή } B_K = \frac{2k_\mu \lambda\pi^2\alpha}{R} \text{ (1).}$$

Έστω L το μήκος του σύρματος από το οποίο είναι φτιαγμένος ο κυκλικός αγωγός. Ισχύει:

$$L = 2\pi\alpha \text{ (2).}$$

Για το κυκλικό πλαίσιο ισχύει:

$$L = N2\pi\alpha' \text{ (3).}$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$2\pi\alpha = N2\pi\frac{\alpha}{10} \text{ ή } N = 10 \text{ σπείρες.}$$

Επειδή το κυκλικό πλαίσιο είναι φτιαγμένο από ολόκληρο το σύρμα από το οποίο ήταν φτιαγμένος ο κυκλικός αγωγός, η ωμική του αντίσταση είναι ίση με την ωμική αντίσταση R του κυκλικού αγωγού.

Το μέτρο E_2 της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο κυκλικό πλαίσιο υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E_2 = N\frac{|d\Phi|}{dt} \text{ ή } E_2 = N\frac{dBA}{dt} \text{ ή } E_2 = N\lambda\pi\alpha'^2 \text{ ή } E_2 = \frac{N\lambda\pi\alpha^2}{100}.$$

Η ένταση I_2 του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει το κυκλικό πλαίσιο υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I_2 = \frac{E_2}{R} \text{ ή } I_2 = \frac{N\lambda\pi\alpha^2}{100R}.$$

Το μέτρο B'_K της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο κέντρο του κυκλικού πλαισίου εξαιτίας του επαγωγικού ρεύματος είναι ίσο με:

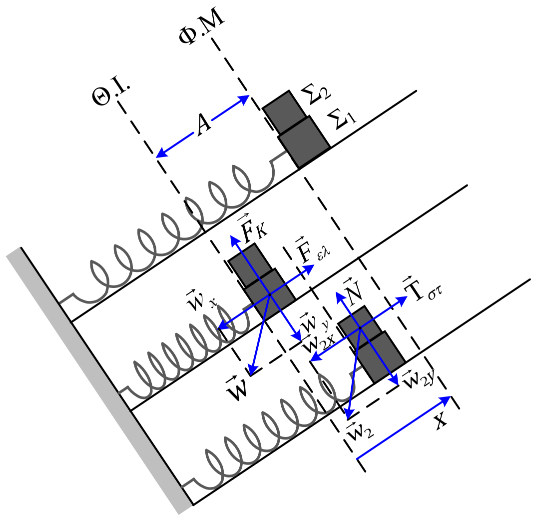
$$B'_K = N\frac{k_\mu 2\pi I_2}{\alpha'} \text{ ή } B'_K = \frac{Nk_\mu 2\pi\frac{N\lambda\pi\alpha^2}{100R}}{\frac{\alpha}{10}} \text{ ή } B'_K = N^2\frac{2k_\mu\lambda\pi^2\alpha}{10R} \text{ (4).}$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (4) και (1) έχουμε:

$$\frac{B'_K}{B_K} = \frac{N^2}{10} \text{ ή } B'_K = 10B_K.$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μηδενίζεται κάθε φορά που το ελατήριο βρίσκεται στην κατάσταση του φυσικού του μήκους. Επομένως, τη χρονική στιγμή στην οποία τοποθετούμε το σώμα Σ2 πάνω στο σώμα Σ1 το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και το σύστημα των δύο σωμάτων έχει ταχύτητα ίση με το μηδέν. Άρα, η θέση αυτή είναι η πάνω ακραία θέση για το σύστημα των δύο σωμάτων.



Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων.

Από τη συνθήκη ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \text{ ή } w_x = F_{\varepsilon\lambda} \text{ ή } (m_1 + m_2)g\eta\mu\varphi = kA \text{ ή } A = \frac{(m_1+m_2)g\eta\mu\varphi}{k} \text{ (1).}$$

Έστω η τυχαία θέση με απομάκρυνση $\vec{x}$ $(x > 0)$ του συστήματος των δύο σωμάτων που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Στη θέση αυτή ισχύει:

$$\Sigma F_2 = -D_2x \text{ ή } T_{\sigma\tau} - w_{2x} = -D_2x \text{ ή } T_{\sigma\tau} - m_2g\eta\mu\varphi = -m_2\omega^2x \text{ ή}$$

$$T_{\sigma\tau} = m_2g\eta\mu\varphi - m_2\frac{k}{m_1+m_2}x \text{ (2).}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή $T_{\sigma\tau(max)}$ της στατικής τριβής που δέχεται το σώμα Σ2 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του λαμβάνεται για $x = -A$ (κάτω ακραία θέση). Συνεπώς, από τη σχέση (2) για $x = -A$ προκύπτει:

$$T_{\sigma\tau(max)} = m_2\, g\eta\mu\varphi + m_2\frac{k}{m_1+m_2}A,$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$T_{\sigma\tau(max)} = 2m_2\, g\eta\mu\varphi \text{ (3).}$$

Για να μην ολισθαίνει το σώμα $Σ_2$ σε σχέση με το σώμα $Σ_1$ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συστήματος, θα πρέπει να ισχύει:

$$T_{στ(max)} \leq \mu_s N \text{ ή } T_{στ(max)} \leq \mu_s m_2\, gσυνφ,$$

ή λόγω της σχέσης (3):

$$2m_2\, gημφ \leq \mu_s m_2\, gσυνφ \text{ ή } \mu_s \geq 2εφφ.$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η β.

Έστω υ_1 το μέτρο της ταχύτητας με την οποία εκρέει το υγρό από το σωλήνα (1).

Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Ζ της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού στο δοχείο και ενός σημείου Δ ακριβώς έξω από το σωλήνα (1) έχουμε:

$$p_Z + \rho g(h-h_1) + \frac{1}{2}\rho\upsilon_Z^2 = p_Δ + \frac{1}{2}\rho\upsilon_Δ^2 \text{ ή}$$

$$p_{ατμ} + \rho g(h-h_1) + 0 = p_{ατμ} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g(h-h_1)}.$$

Έστω $Δt_1$ ο χρόνος πτώσης της φλέβας (1). Ισχύει:

$$h_1 = \frac{1}{2}g(Δt_1)^2 \text{ ή } Δt_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}.$$

Το βεληνεκές x_1 της φλέβας που εξέρχεται από τον οριζόντιο σωλήνα (1) είναι ίσο με:

$$x_1 = \upsilon_1 Δt_1 \text{ ή } x_1 = \sqrt{2g(h-h_1)}\sqrt{\frac{2h_1}{g}} \text{ ή } x_1 = 2\sqrt{h_1(h-h_1)} \text{ (2)}.$$

Έστω υ_2 το μέτρο της ταχύτητας με την οποία εκρέει το υγρό από τον σωλήνα (2).

Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Κ της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού και ενός σημείου Λ ακριβώς έξω από το σωλήνα (2) έχουμε:

$$p_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 + \rho g(h-h_2) = p_Λ + \frac{1}{2}\rho\upsilon_Λ^2 \text{ ή}$$

$$p_{ατμ} + 0 + \rho g(h-h_2) = p_{ατμ} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g(h-h_2)} \text{ (3)}.$$

Έστω $Δt_2$ ο χρόνος πτώσης της φλέβας (2). Ισχύει:

$$h_2 = \frac{1}{2}g(Δt_2)^2 \text{ ή } Δt_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}.$$

Το βεληνεκές x_2 της φλέβας που εξέρχεται από τον οριζόντιο σωλήνα (2) είναι ίσο με:

$$x_2 = \upsilon_2 Δt_2 \text{ ή } x_2 = 2\sqrt{h_2(h-h_2)} \text{ (4)}.$$

Ισχύει $x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}x_1$, ή λόγω των σχέσεων (2) και (4):

$$2\sqrt{h_2(h-h_2)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}2\sqrt{h_1(h-h_1)} \text{ ή } h_2(h-h_2) = \frac{4}{3}h_1(h-h_1) \text{ ή}$$

$$h_2(h-h_2) = \frac{4}{3}\frac{h}{4}\left(h-\frac{h}{4}\right) \text{ ή } h_2 h - h_2^2 = \frac{h^2}{4} \text{ ή}$$

$$h_2^2 - hh_2 + \frac{h^2}{4} = 0 \text{ (5)}.$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης (5) είναι $\Delta = h^2 - 4\frac{h^2}{4}$ ή $\Delta = 0$. Επομένως, η λύση της εξίσωσης (5) είναι η $h_2 = \frac{h}{2}$.

Από τις σχέσεις (1) και (3) για $h_1 = \frac{h}{4}$ και $h_2 = \frac{h}{2}$ προκύπτουν τα μέτρα των ταχυτήτων:

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{3gh}{2}} \text{ και } \upsilon_2 = \sqrt{gh}.$$

Έστω υ_M το μέτρο της ταχύτητας του υγρού στο σημείο Μ.

Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των σημείων Μ και Δ έχουμε:

$$A\upsilon_M = \frac{A}{2}\upsilon_1 \text{ ή } \upsilon_M = \frac{\upsilon_1}{2} \text{ ή } \upsilon_M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}gh}.$$

Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ των σημείων Μ και Δ έχουμε:

$$p_M + \frac{1}{2}\rho\upsilon_M^2 = p_\Delta + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \text{ ή } p_M + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}gh}\right)^2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\left(\sqrt{\frac{3}{2}gh}\right)^2 \text{ ή}$$

$$p_M = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{9}{16}\rho gh \text{ (6).}$$

Έστω υ_N το μέτρο της ταχύτητας στο σημείο Ν.

Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των σημείων Ν και Λ έχουμε:

$$A\upsilon_N = \frac{A}{2}\upsilon_2 \text{ ή } \upsilon_N = \frac{\upsilon_2}{2} \text{ ή } \upsilon_N = \frac{1}{2}\sqrt{gh}.$$

Από την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ των σημείων Ν και Λ έχουμε:

$$p_N + \frac{1}{2}\rho\upsilon_N^2 = p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \text{ ή } p_N + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{2}\sqrt{gh}\right)^2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\left(\sqrt{gh}\right)^2 \text{ ή}$$

$$p_N = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{3}{8}\rho gh \text{ (7).}$$

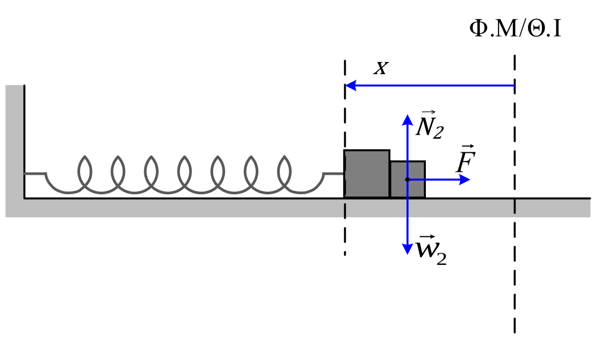
Επομένως, είναι:

$$p_M - p_N = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{9}{16}\rho gh - \left(p_{\alpha\tau\mu} + \frac{3}{8}\rho gh\right) \text{ ή } p_M - p_N = \frac{9}{16}\rho gh - \frac{3}{8}\rho gh \text{ ή}$$

$$p_M - p_N = \frac{3}{16}\rho gh.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω η τυχαία θέση με απομάκρυνση x του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Στη θέση αυτή ισχύει:

$$\Sigma F_2 = -D_2 x \text{ ή } F = -m_2\omega^2 x \text{ (1).}$$

Η επαφή των δύο σωμάτων χάνεται, όταν γίνει $F = 0$. Συνεπώς, από τη σχέση (1) για $F = 0$ προκύπτει ότι $x = 0$. Δηλαδή η επαφή των δύο σωμάτων χάνεται στη θέση ισορροπίας τους που είναι η θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος.

Γ2. Το πλάτος A_1 της ταλάντωσης του συστήματος των σωμάτων Σ1 και Σ2 πριν από την απώλεια της επαφής τους είναι ίσο με $A_1 = d = 0{,}8$ m. Συνεπώς, τη χρονική στιγμή που χάνεται η επαφή των δύο σωμάτων το μέτρο υ της ταχύτητας τους είναι ίσο με:

$$\upsilon = \upsilon_{max} \text{ ή } \upsilon = \omega_1 A_1 \text{ ή } \upsilon = \sqrt{\frac{k_1}{m_1+m_2}}A_1 \text{ ή } \upsilon = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την απώλεια της επαφής των δύο σωμάτων τα δύο σώματα εξακολουθούν να βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους έχοντας ταχύτητα μέτρου υ το καθένα. Έστω A_2 το πλάτος ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ1 μετά την απώλεια της επαφής του με το σώμα Σ2. Ισχύει:

$$\upsilon = \upsilon'_{max} \text{ ή } \upsilon = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}A_2 \text{ ή } A_2 = 0{,}4 \text{ m}.$$

Το σώμα Σ1 τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την απώλεια της επαφής με το σώμα Σ2 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του κινούμενο με θετική ταχύτητα. Επομένως, η αρχική φάση της ταλάντωσής του είναι $\varphi_0 = 0$.

Η ζητούμενη χρονική εξίσωση είναι $x = A_2 \eta\mu\omega_2 t$ με $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$.

Άρα:

$$x = 0{,}4\eta\mu 10t\ (S.I.).$$

Γ3. Έστω t_1 η χρονική στιγμή που το σώμα Σ2 εισέρχεται στην περιοχή όπου το οριζόντιο δάπεδο είναι τραχύ. Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ2 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Ισχύει:

$$\ell = \upsilon t_1 \text{ ή } t_1 = \frac{\ell}{\upsilon} \text{ ή } t_1 = \frac{\pi}{30}\ s.$$

Η απομάκρυνση x_1 του σώματος Σ1 από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με:

$$x_1 = 0{,}4\eta\mu\left(10\frac{\pi}{30}\right)\text{m} \text{ ή } x_1 = 0{,}4\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)\text{m} \text{ ή } x_1 = +0{,}2\sqrt{3}\text{ m}.$$

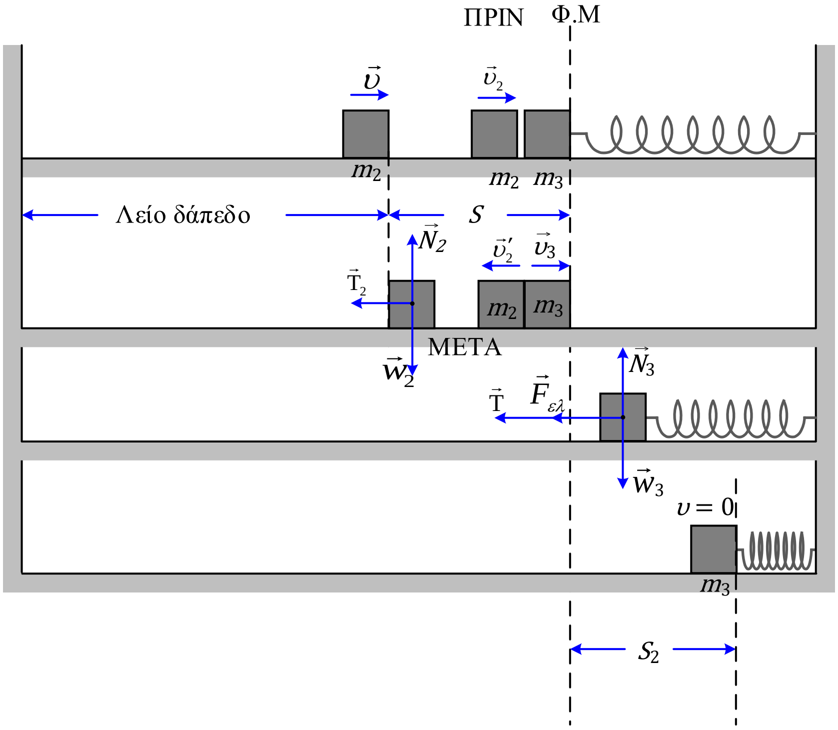
Η ταχύτητα υ_1 του σώματος Σ1 τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με:

$$\upsilon_1 = \omega_2 A_2 \sigma\upsilon\nu(\omega_2 t_1) \text{ ή } \upsilon_1 = 4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \text{ ή } \upsilon_1 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ1 τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \Sigma F \upsilon \text{ ή } \frac{dK}{dt} = -D x_1 \upsilon_1 \text{ ή } \frac{dK}{dt} = -40\sqrt{3}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}.$$

Γ4. Έστω υ_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ2 ελάχιστα πριν από την κρούση του με το σώμα Σ3.



Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ2 στο τραχύ δάπεδο από τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία εισέρχεται σε αυτό μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία συγκρούεται με το σώμα Σ3 έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{T_2} \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 = -T_2 S \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 = -\mu m_2 g S \text{ ή}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon^2 - 2\mu g S} \text{ ή } \upsilon_2 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Έστω υ_3 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ3 αμέσως μετά την κρούση.
Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει:

$$\upsilon_3 = \upsilon_2 \text{ ή } \upsilon_3 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Έστω S_2 το διάστημα που διανύει το σώμα Σ3 από τη χρονική στιγμή t_2 αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή t_3 στην οποία ακινητοποιείται.
Από το Θ.Μ.Κ.Ε για την κίνηση του σώματος Σ3 από τη χρονική στιγμή t_2 έως τη χρονική στιγμή t_3 έχουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_T + W_{F_{ελ}} \;\text{ ή }\; 0 - \frac{1}{2}m_3 υ_3^2 = -TS_2 + U_{ελ(αρχ)} - U_{ελ(τελ)} \;\text{ ή}$$

$$-\frac{1}{2}m_3 υ_3^2 = -μ m_3 g S_2 + 0 - \frac{1}{2}k_2 S_2^2 \;\text{ ή }\; \frac{1}{2}k_2 S_2^2 + μ m_3 g S_2 - \frac{1}{2}m_3 υ_3^2 = 0 \;\text{ ή}$$

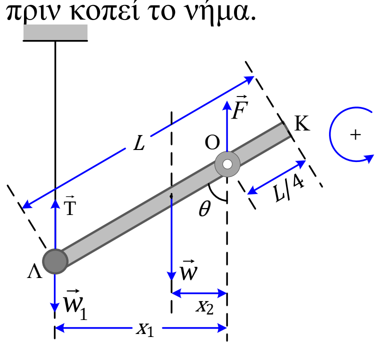
$$75S_2^2 + 15S_2 - 6 = 0 \;(S.I.)\;(2).$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (2) είναι οι $S_2 = 0{,}2$ m, $S_2 = -0{,}4$ m.

Δεκτή λύση είναι η $S_2 = 0{,}2$ m.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται το σύστημα της ράβδου και του σώματος $Σ_1$ πριν κοπεί το νήμα.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$Σ\vec{F} = \vec{0} \;\text{ ή }\; T + F = w + w_1 \;\text{ ή }\; T + F = Mg + m_1 g \;(1).$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$Στ_{(O)} = 0 \;\text{ ή }\; w_1 x_1 + w x_2 - T x_1 = 0 \;\text{ ή}$$

$$m_1 g \frac{3L}{4} ημθ + Mg\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right) ημθ = T\frac{3L}{4} ημθ \;\text{ ή}$$

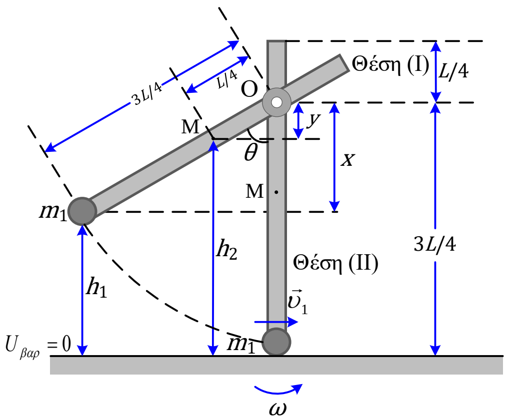
$$3T = 3m_1 g + Mg \;\text{ ή }\; T = 20 \text{ N}.$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $F = 20$ N.

Δ2. Η ροπή αδράνειας I του συστήματος ράβδος – σώμα $Σ_1$ είναι ίση με:

$$I = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right)^2 + m_1\left(\frac{3L}{4}\right)^2 \;\text{ ή }\; I = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{16}ML^2 + \frac{9}{16}m_1 L^2 \;\text{ ή}$$

$$I = \frac{4ML^2}{48} + \frac{3ML^2}{48} + \frac{27m_1L^2}{48} \;\text{ ή }\; I = \frac{7ML^2 + 27m_1L^2}{48} \;\text{ ή }\; I = 5{,}76 \text{ kgm}^2.$$



Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου τη χρονική στιγμή στην οποία γίνεται κατακόρυφη για πρώτη φορά.
Από την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ της αρχικής θέσης (Ι) και της τελικής θέσης (ΙΙ) της ράβδου έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)} \text{ ή}$$

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή}$$

$$m_1 g h_1 + M g h_2 = \frac{1}{2} I \omega^2 + M g \frac{L}{2} \text{ ή}$$

$$m_1 g \left(\frac{3L}{4} - x\right) + M g \left(\frac{3L}{4} - y\right) = \frac{1}{2} I \omega^2 + M g \frac{L}{2} \text{ ή}$$

$$m_1 g \left(\frac{3L}{4} - \frac{3L}{4} \sigma\upsilon\nu\theta\right) + M g \left(\frac{3L}{4} - \frac{L}{4} \sigma\upsilon\nu\theta\right) = \frac{1}{2} I \omega^2 + M g \frac{L}{2} \text{ ή}$$

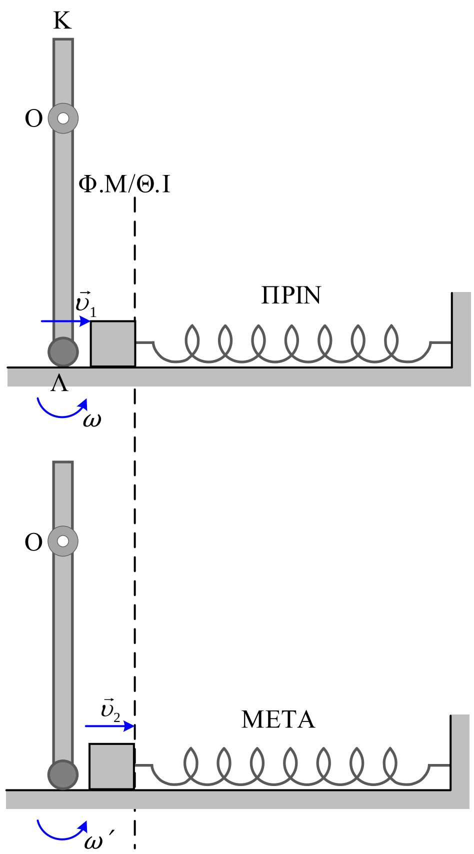
$$m_1 g \frac{3L}{8} + M g \frac{5L}{8} = \frac{1}{2} I \omega^2 + M g \frac{L}{2} \text{ ή}$$

$$\omega = 2{,}5 \, \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Η γραμμική ταχύτητα του σώματος Σ1 ελάχιστα πριν από την κρούση του με το σώμα Σ2 είναι ίση με:

$$\upsilon_1 = \omega \frac{3L}{4} \text{ ή } \upsilon_1 = 4{,}5 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ3. Έστω υ_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ2 αμέσως μετά την κρούση.



Επειδή το σώμα Σ2 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, ισχύει:

$$\upsilon_2 = \upsilon_{max} \text{ ή } \upsilon_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}A \text{ ή } \upsilon_2 = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \text{ ή } I\omega = I\omega' + m_2\upsilon_2\frac{3L}{4} \text{ ή } \omega' = 1{,}25\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος ακριβώς πριν από την κρούση είναι ίση με:

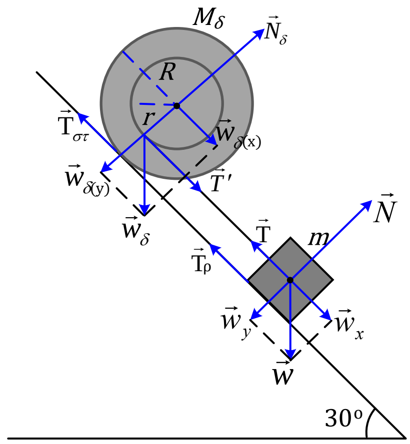
$$K_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)} = \frac{1}{2}I\omega^2 \text{ ή } K_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)} = 18 \text{ J}.$$

Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος αμέσως μετά την κρούση είναι ίση με:

$$K_{o\lambda(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} = \frac{1}{2}I\omega'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \text{ ή } K_{o\lambda(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} = 12{,}5 \text{ J}.$$

Αφού είναι $K_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)} > K_{o\lambda(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})}$, η κρούση είναι ανελαστική.

Δ4. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται το σύστημα δίσκος – σώμα Σ κατά τη διάρκεια της κίνησής του.



Έστω $\vec{\alpha}_{cm}$ η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου. Αφού ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει ότι $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R$.

Έστω α το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ. Αφού το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής, ισχύει:

$$\alpha = \alpha_{cm} - \alpha_\varepsilon \text{ ή } \alpha = \alpha_{cm} - \alpha_{\gamma\omega\nu}\frac{R}{2} \text{ ή } \alpha = \frac{\alpha_{cm}}{2}.$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του σώματος Σ έχουμε:

$$\Sigma F_x = m\alpha \text{ ή } w_x - T - T_\rho = m\alpha \text{ ή } mg\eta\mu\varphi - T - \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{m\alpha_{cm}}{2} \text{ (2).}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του δίσκου έχουμε:

$$\Sigma F_x = M_\delta\alpha_{cm} \text{ ή } T' + w_{\delta(x)} - T_{\sigma\tau} = M_\delta\alpha_{cm} \text{ ή}$$

$$T + M_\delta g\eta\mu\varphi - T_{\sigma\tau} = M_\delta\alpha_{cm} \text{ (3).}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για τον δίσκο έχουμε:

$$\Sigma\tau = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } T_{\sigma\tau}R - T'\frac{R}{2} = \frac{1}{2}M_\delta R^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } T_{\sigma\tau} - \frac{T}{2} = \frac{1}{2}M_\delta\alpha_{cm} \text{ (4).}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (3) και (4) προκύπτει:

$$\frac{T}{2} + M_\delta g\eta\mu\varphi = \frac{3}{2}M_\delta\alpha_{cm} \text{ ή } T = 3M_\delta\alpha_{cm} - 2M_\delta g\eta\mu\varphi \text{ (5).}$$

Από τη σχέση (2), λόγω της σχέσης (5), έχουμε:

$$mg\eta\mu\varphi - 3M_\delta\alpha_{cm} + 2M_\delta g\eta\mu\varphi - \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{m\alpha_{cm}}{2} \text{ ή}$$

$$mg\eta\mu\varphi + 2M_\delta g\eta\mu\varphi - \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi = \left(3M_\delta + \frac{m}{2}\right)\alpha_{cm} \text{ ή}$$

$$\alpha_{cm} = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Συνεπώς, είναι:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{cm}}{R} \text{ ή } \alpha_{\gamma\omega\nu} = 8\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}.$$

Ο ζητούμενος ρυθμός είναι ίσος με:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau \text{ ή } \frac{dL}{dt} = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2}M_\delta R^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } \frac{dL}{dt} = 2\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}^2}.$$

Δ5. Έστω t η χρονική στιγμή στην οποία το μήκος νήματος που έχει τυλιχθεί στην περιφέρεια της κυκλικής εγκοπής είναι ίσο με $\ell = 4$ m. Ισχύει:

$$\ell = \frac{R}{2}\theta \text{ ή } \ell = \frac{1}{2}R\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2 \text{ ή } t = \sqrt{\frac{4\ell}{R\alpha_{\gamma\omega\nu}}} \text{ ή } t = 2\text{ s}.$$

Το μέτρο υ_{cm} της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t είναι ίσο με:

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}t \text{ ή } \upsilon_{cm} = 8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Το μέτρο ω της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου την ίδια χρονική στιγμή είναι ίσο με:

$$\omega_\delta = \frac{\upsilon_{cm}}{R} \text{ ή } \omega_\delta = 16\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}.$$

Ο ζητούμενος ρυθμός είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \left(\frac{dK}{dt}\right)_{\mu\varepsilon\tau} + \left(\frac{dK}{dt}\right)_{\pi\varepsilon\rho} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \Sigma F\upsilon_{cm} + \Sigma\tau\omega_\delta \text{ ή}$$

$$\frac{dK}{dt} = M_\delta\alpha_{cm}\upsilon_{cm} + I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu}\omega_\delta \text{ ή}$$

$$\frac{dK}{dt} = M_\delta\alpha_{cm}\upsilon_{cm} + \frac{1}{2}M_\delta R^2\alpha_{\gamma\omega\nu}\omega_\delta \text{ ή}$$

$$\frac{dK}{dt} = 96\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}.$$