

1^ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

A1. α, A2. γ, A3. δ, A4. β

A5. α, Λ, β, Σ, γ, Λ, δ, Λ, ε, Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Η συχνότητα του κατωφλίου του μετάλλου της καθόδου δίνεται από τη σχέση:

$$f_0 = \frac{\phi}{h} \quad (1)$$

$$\text{ή } \phi = hf_0$$

όπου ϕ το έργο εξαγωγής της καθόδου. Έστω K η μέγιστη κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων που εξέρχονται από τη κάθοδο του μετάλλου όταν προσπίπτει σε αυτή μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας $f = 1,25f_0$. Σύμφωνα με τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein, έχουμε:

$$K = hf - \phi$$

$$\text{ή } K = 1,25hf_0 - \phi$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$K = 1,25hf_0 - \phi$$

$$\text{ή } K = 1,25hf_0 - hf_0$$

$$\text{ή } K = 0,25hf_0 \quad (2)$$

Έστω f' η νέα συχνότητα της ακτινοβολίας που προσπίπτει στην κάθοδο. Έχουμε:

$$f' = f + \frac{20}{100}f$$

$$\text{ή } f' = 1,2f$$

$$\text{ή } f' = 1,5f_0$$

Έστω K' η μέγιστη κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων που εξέρχονται από την κάθοδο, όταν προσπίπτει σε αυτή ακτινοβολία με συχνότητα f' . Έχουμε:

$$K' = hf' - \phi$$

$$\text{ή } K' = 1,5hf_0 - hf_0$$

$$\text{ή } K' = 0,5hf_0 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι η μέγιστη κινητική ενέργεια των εξερχόμενων ηλεκτρονίων αυξήθηκε. Το ποσοστό αύξησης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{K' - K}{K} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{0,5hf_0 - 0,25hf_0}{0,25hf_0} \cdot 100\%$$

$$\pi = 100\%$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Έστω h το ύψος στο οποίο ανυψώνουμε τη σφαίρα Σ_1 πάνω από την αρχική θέση ισορροπίας της, πριν την αφήσουμε ελεύθερη να κινηθεί. Από το παρακάτω σχήμα προκύπτει ότι:

$$\sin 60^\circ = \frac{x}{\ell}$$

$$\text{ή } \sin 60^\circ = \frac{h - \ell_1}{\ell_1}$$

$$\text{ή } h = \ell_1 (1 - \sin 60^\circ)$$

$$\text{ή } h = \frac{\ell_1}{2} \quad (1)$$

Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας Σ_1 ελάχιστα πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ των σχέσεων (Α) και (Γ) που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, έχουμε:

$$E_{\text{μηχ}}(A) = E_{\text{μηχ}}(Γ)$$

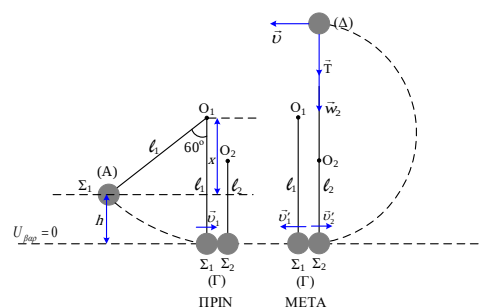
$$\text{ή } K_A + U_A = K_Γ + U_Γ$$

$$\text{ή } 0 + m_1gh = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + 0$$

$$\text{ή } v_1 = \sqrt{2gh}$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$v_1 = \sqrt{g\ell_1} \quad (2)$$



Έστω v'_2 το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Ισχύει:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

ή λόγω της σχέσης (2):

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{g\ell_1} \quad (3)$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 στο ανώτερο σημείο της

κυκλικής τροχιάς που διαγράφει μετά την κρούση. Στο σημείο Δ ισχύει:

$$\Sigma F_{\text{ακτίνα}} = F_K$$

$$\text{ή } T + w_2 = \frac{m_2 v^2}{\ell_2}$$

$$\text{ή } T = \frac{m_2 v^2}{\ell_2} - m_2 g \quad (4)$$

Για να εκτελέσει το σώμα Σ₂ ανακύκλωση θα πρέπει να φτάσει στη θέση (Δ) με το νήμα τεντωμένο. Συνεπώς, στη θέση (Δ) ισχύει: $T \geq 0$, ή λόγω της σχέσης (4):

$$\frac{m_2 v^2}{\ell_2} - m_2 g \geq 0$$

$$\text{ή } v \geq \sqrt{g \ell_2}$$

Αφού, το σώμα Σ₂ μόλις που εκτελεί ανακύκλωση, το μέτρο της ταχύτητας του στη θέση Δ είναι ίσο με $v = \sqrt{g \ell_2}$ (5).

Από την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ των θέσεων (Γ) και (Δ) της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το σώμα Σ₂ μετά την κρούση, έχουμε:

$$K_\Gamma + U_\Gamma = K_\Delta + U_\Delta$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + 0 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + m_2 g 2 \ell_2$$

$$\text{ή } v_2'^2 = v^2 + 4g \ell_2$$

ή λόγω της σχέσης (5):

$$v_2' = \sqrt{5g \ell_2} \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (3) και (6) προκύπτει:

$$\sqrt{5g \ell_2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{g \ell_1}$$

$$\text{ή } \sqrt{5g \frac{5\ell_1}{9}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{g \ell_1}$$

$$\text{ή } \frac{5}{3} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$$

$$\text{ή } m_1 = 5m_2$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η α.

Έστω r_1' και r_2' οι αποστάσεις του σημείου Δ από τις πηγές Π₁ και Π₂ αντίστοιχα. Το σημείο Δ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής, οπότε ισχύει:

$$r_1' - r_2' = N\lambda$$

$$\text{ή } \left(\frac{d}{2} + x \right) - \left(\frac{d}{2} - x \right) = N\lambda$$

$$\text{ή } 2x = N\lambda$$

$$\text{ή } N = 4$$

Επειδή το σημείο Σ ανήκει στην ίδια υπερβολή ενισχυτικής συμβολής με το σημείο Δ, ισχύει:

$$r_1 - r_2 = N\lambda$$

$$\text{ή } r_2 = r_1 - N\lambda$$

$$\text{ή } r_2 = 6\lambda$$

Η απόσταση d μεταξύ των δύο πηγών υπολογίζεται από τη σχέση:

$$d^2 + r_2^2 = r_1^2$$

$$\text{ή } d = \sqrt{r_1^2 - r_2^2}$$

$$\text{ή } d = 8\lambda$$

Έστω ένα τυχαίο σημείο Z αποσβετικής συμβολής που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και απέχει αποστάσεις r_1'' και r_2'' από τις πηγές Π₁ και Π₂ αντίστοιχα. Για το σημείο Z, ισχύουν:

$$r_1'' - r_2'' = (2N' + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

και

$$r_1'' + r_2'' = d \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2), έχουμε:

$$2r_1'' = (2N' + 1) \frac{\lambda}{2} + d$$

$$\text{ή } r_1'' = (2N' + 1) \frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2}$$

Για να βρούμε τον αριθμό των σημείων αποσβετικής συμβολής που βρίσκονται στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ, λύνουμε την ανίσωση:

$$0 \leq r_1'' \leq d$$

$$\text{ή } 0 \leq (2N' + 1) \frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \leq d$$

$$\text{ή } -\frac{2d}{\lambda} - 1 \leq 2N' \leq \frac{2d}{\lambda} - 1$$

$$\text{ή } -8,5 \leq N' \leq 7,5$$

$$\text{ή } N' = -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7$$

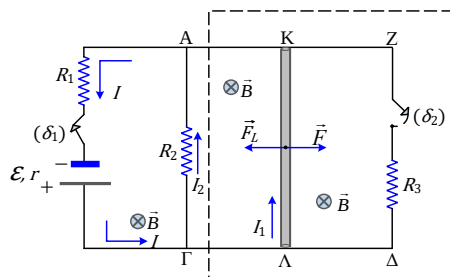
Οι υπερβολές αποσβετικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΣΛ είναι αυτές με $N = 4, 5, 6, 7$. Επομένως, ο αριθμός των σημείων αποσβετικής συμβολής που βρίσκονται στο ευθύγραμμο τμήμα ΣΛ, είναι ίσος με 4.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα ρεύματα που διαρρέουν τα κύκλωμα όταν ο διακόπτης (δ₁) είναι κλειστός και ο

διακόπτης (δ₂) είναι ανοικτός. Για να ισορροπεί ο αγωγός ΚΛ θα πρέπει η δύναμη Laplace $\vec{F}_L$ που δέχεται να είναι

αντίθετη από την εξωτερική δύναμη $\vec{F}$. Επομένως, σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού οι μαγνητικές γραμμές του ομογενούς μαγνητικού πεδίου μέσα στο οποίο βρίσκεται ο αγωγός ΚΛ είναι κάθετες στη σελίδα με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.



Έστω R' η ισοδύναμη αντίσταση του αγωγού ΚΛ και του αντιστάτη R_2 . Ισχύει:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_{\text{ΚΛ}}} + \frac{1}{R_2}$$

$$\text{ή } R' = \frac{R_{\text{ΚΛ}} \cdot R_2}{R_{\text{ΚΛ}} + R_2}$$

$$\text{ή } R' = 0,6 \, \Omega$$

Έστω $R_{\text{εξ}}$ η ισοδύναμη αντίσταση του εξωτερικού τμήματος του κυκλώματος. Ισχύει:

$$R_{\text{εξ}} = R_1 + R'$$

$$\text{ή } R_{\text{εξ}} = 1 \, \Omega$$

Έστω I η ένταση του ρεύματος που διαρρέει την πηγή. Ισχύει:

$$I = \frac{E}{R_{\text{εξ}} + r}$$

$$\text{ή } I = 4 \, \text{A}$$

Η τάση $V_{\text{ΚΛ}}$ στα άκρα του αγωγού ΚΛ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$V_{\text{ΚΛ}} = IR'$$

$$\text{ή } V_{\text{ΚΛ}} = 2,4 \, \text{V}$$

Συνεπώς, η ένταση I_1 του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ είναι ίση με:

$$I_1 = \frac{V_{\text{ΚΛ}}}{R_{\text{ΚΛ}}}$$

$$\text{ή } I_1 = 2,4 \, \text{A}$$

Αφού ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

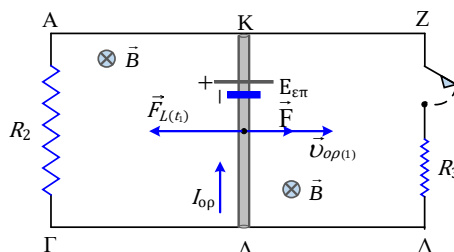
$$\text{ή } F = F_L$$

$$\text{ή } F = BI_1 \ell$$

$$\text{ή } F = 2,4 \, \text{N}$$

Γ2. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται πως διαμορφώνεται το κύκλωμα, τη χρονική

στιγμή t_1 την οποία ο αγωγός ΚΛ αποκτά την οριακή του ταχύτητα $\vec{v}_{\text{ορ}(1)}$.



Αφού ο αγωγός κινείται με την οριακή του ταχύτητα, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } F = F_L(t_1)$$

$$\text{ή } F = BI_{\text{ορ}} \ell$$

$$\text{ή } F = B \frac{E_{\text{επ}}}{R_2 + R_{\text{ΚΛ}}} \ell$$

$$\text{ή } F = B \frac{Bv_{\text{ορ}(1)} \ell}{R_2 + R_{\text{ΚΛ}}} \ell$$

$$\text{ή } F = \frac{B^2 \ell^2 v_{\text{ορ}(1)}}{R_2 + R_{\text{ΚΛ}}}$$

$$\text{ή } v_{\text{ορ}(1)} = \frac{F(R_2 + R_{\text{ΚΛ}})}{B^2 \ell^2}$$

$$\text{ή } v_{\text{ορ}(1)} = 6 \, \text{m/s}$$

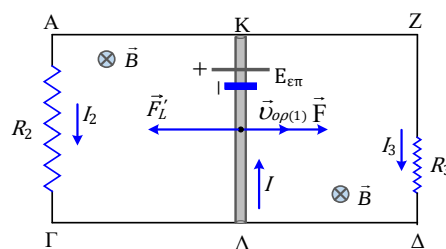
Γ3. Έστω $Q_{R_{\text{ολ}}}$ η θερμότητα Joule που αποδίδεται από ολόκληρο το κύκλωμα προς το περιβάλλον από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + 10 \, \text{s}$. Έχουμε:

$$Q_{R_{\text{ολ}}} = I_{\text{ορ}}^2 R_{\text{ολ}} \Delta t$$

$$\text{ή } Q_{R_{\text{ολ}}} = \left(\frac{Bv_{\text{ορ}(1)} \ell}{R_2 + R_{\text{ΚΛ}}} \right)^2 (R_2 + R_{\text{ΚΛ}})(t_2 - t_1)$$

$$\text{ή } Q_{R_{\text{ολ}}} = 144 \, \text{J}$$

Γ4. Τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία κλείνουμε το διακόπτη (δ_2) το κύκλωμα διαμορφώνεται, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω $R_{2,3}$ η ισοδύναμη αντίσταση των αντιστατών R_2 και R_3 . Ισχύει ότι:

$$R_{2,3} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

$$\text{ή } R_{2,3} = 0,5 \, \Omega$$

Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{ολ}$ ολόκληρου του κυκλώματος, είναι ίση με:

$$R_{ολ} = R_{2,3} + R_{ΚΛ}$$

$$\text{ή } R_{ολ} = 1,5 \, \Omega$$

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ τη χρονική στιγμή t_2 αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ_2) υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I = \frac{E_{επ}}{R_{ολ}}$$

$$\text{ή } I = \frac{Bv_{op(1)}\ell}{R_{ολ}}$$

$$\text{ή } I = 4 \, A$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace $\vec{F}'_L$ που δέχεται ο αγωγός ΚΛ τη χρονική στιγμή t_2 αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ_2) υπολογίζεται από τον τύπο:

$$F'_L = BIl$$

$$\text{ή } F'_L = 4 \, N$$

Αφού $F < F'_L$ ο αγωγός από τη χρονική στιγμή t_2 και μετά αρχίζει να επιβραδύνεται. Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται ο αγωγός από τη χρονική στιγμή t_2 και μετά υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Sigma F = F'_L - F$$

$$\text{ή } \Sigma F = BIl - F$$

$$\text{ή } \Sigma F = B \frac{E_{επ}}{R_{ολ}} \ell - F$$

$$\text{ή } \Sigma F = B \frac{Bv\ell}{R_{ολ}} - F$$

$$\text{ή } \Sigma F = \frac{B^2 \ell^2 v}{R_{ολ}} - F \quad (1)$$

Αφού το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού ΚΛ μειώνεται, τότε σύμφωνα με τη σχέση (1) το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται μειώνεται, μέχρι κάποια στιγμή να μηδενιστεί, οπότε αποκτά οριακή ταχύτητα $v_{op(2)}$. Επομένως η κίνηση που εκτελεί ο αγωγός ΚΛ από τη χρονική t_2 και μετά είναι επιβραδυνόμενη με επιβράδυνση που μειώνεται κατά μέτρο

$$\left(\alpha = \frac{\Sigma F}{m} \right) \text{ μέχρι να αποκτήσει τη νέα}$$

οριακή του ταχύτητα $v_{op(2)}$ τη χρονική

στιγμή t_3 . Τη χρονική στιγμή t_3 ισχύει ότι: $\Sigma F = 0$, ή σύμφωνα με τη σχέση (1):

$$\frac{B^2 \ell^2 v_{op(2)}}{R_{ολ}} = F$$

$$\text{ή } v_{op(2)} = \frac{FR_{ολ}}{B^2 \ell^2}$$

$$\text{ή } v_{op(2)} = 3,6 \, m/s$$

Γ5. Η ένταση $I_{op(2)}$ του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ τη χρονική στιγμή t_3 είναι ίση με:

$$I_{op(2)} = \frac{E_{επ}}{R_{ολ}}$$

$$\text{ή } I_{op(2)} = \frac{Bv_{op(2)}\ell}{R_{ολ}}$$

$$\text{ή } I_{op(2)} = 2,4 \, A$$

Η τάση $V'_{ΚΛ}$ στα άκρα του αγωγού ΚΛ τη χρονική στιγμή t_2 , είναι ίση με:

$$V'_{ΚΛ} = I_{op(2)} R_{2,3}$$

$$\text{ή } V'_{ΚΛ} = 1,2 \, V$$

Η ένταση I_2 του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_2 τη χρονική στιγμή t_3 είναι ίση με:

$$I_2 = \frac{V'_{ΚΛ}}{R_2}$$

$$\text{ή } I_2 = 0,8 \, A$$

Ο ζητούμενος ρυθμός υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dQ_{R_2}}{dt} = I_2^2 R_2$$

$$\text{ή } \frac{dQ_{R_2}}{dt} = 0,96 \, W$$

Η ένταση I_3 του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_3 από τη χρονική στιγμή t_3 και μετά είναι ίση με:

$$I_3 = \frac{V'_{ΚΛ}}{R_3}$$

$$\text{ή } I_3 = 1,6 \, A$$

Το επαγωγικό φορτίο που περνά από μια διατομή του αντιστάτη R_3 από τη χρονική στιγμή t_3 έως τη χρονική στιγμή t_4 είναι:

$$q_{επ} = I_3(t_4 - t_3)$$

$$\text{ή } q_{επ} = 8 \, C$$

ΘΕΜΑ Δ

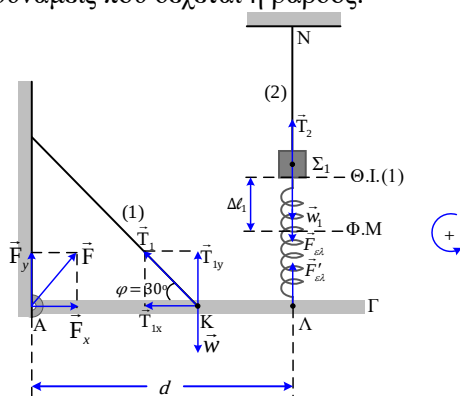
Δ1. Επειδή το μέτρο T_2 της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ_1 από το νήμα (2) είναι μεγαλύτερο από το βάρος του $w_1 = m_1g$, το σώμα Σ_1 ισορροπεί με το ελατήριο επιμηκνόμενο σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του (Θ.Ι.(1)). Στη Θ.Ι.(1) του σώματος Σ_1 , ισχύει:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } w_1 + F_{\varepsilon\lambda} = T_2$$

$$\text{ή } \Delta\ell_1 = 0,1 \text{ m}$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος.



Ισχύει:

$$\vec{F}'_{\varepsilon\lambda} = -\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$$

$$\text{ή } F'_{\varepsilon\lambda} = F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta\ell_1$$

$$\text{ή } F'_{\varepsilon\lambda} = 10 \text{ N}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0$$

$$\text{ή } \tau_F + \tau_w + \tau_{T_1} + \tau_{F'_{\varepsilon\lambda}} = 0$$

$$\text{ή } 0 - w \frac{L}{2} + T_1 y \frac{L}{2} + F'_{\varepsilon\lambda} d = 0$$

$$\text{ή } T_1 \eta \mu \varphi \frac{L}{2} + F'_{\varepsilon\lambda} \frac{3L}{4} = M \rho g \frac{L}{2}$$

$$\text{ή } T_1 = 20 \text{ N}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } \Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \quad (1)$$

και

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \quad (2)$$

Από τη σχέση (1), έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\text{ή } F_x = T_1 x$$

$$\text{ή } F_x = T \sin 30^\circ$$

$$\text{ή } F_x = 10\sqrt{3}$$

Από τη σχέση (2), έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\text{ή } F_y + T_1 y + F'_{\varepsilon\lambda} = w$$

$$\text{ή } F_y = T_1 \eta \mu \varphi + F'_{\varepsilon\lambda} = M \rho g$$

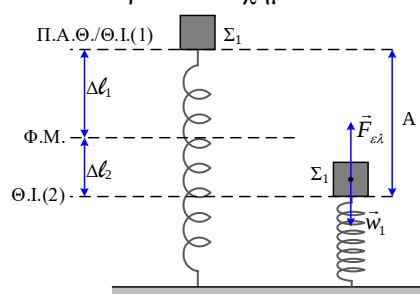
$$\text{ή } F_y = 5 \text{ N}$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση υπολογίζεται από τον τύπο:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\text{ή } F = \sqrt{325} \text{ N}$$

Δ2. Μετά το κόψιμο του νήματος το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη νέα θέση ισορροπίας (Θ.Ι.(2)) που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω $\Delta\ell_2$ η συμπίεση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(2). Ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } w_1 = F_{\varepsilon\lambda}$$

$$\text{ή } m_1 g = k \Delta\ell_1$$

$$\text{ή } \Delta\ell_1 = 0,1 \text{ m}$$

Όπως φαίνεται από το σχήμα το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με:

$$A = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2$$

$$\text{ή } A = 0,2 \text{ m}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη Θ.Ι.(2) είναι ίση με $x = +A = +0,2 \text{ m}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 από τη Θ.Ι.(2) δίνεται από τη σχέση: $x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$ (3).

Από τη σχέση (3) για $t = 0$ και $x = +A$ έχουμε:

$$A = A \eta \mu \varphi_0$$

$$\text{ή } \eta \mu \varphi_0 = 1$$

$$\text{ή } \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

Επειδή ισχύει ότι: $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη

σχέση (4) προκύπτει ότι $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Η

γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$D = m_1 \omega^2$$

$$\text{ή } k = m_1 \omega^2$$

$$\text{ή } \omega = 10 \text{ rad/s}$$

Συνεπώς, η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος Σ_1 είναι η:

$$\alpha = -\omega^2 A \eta \mu(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή } \alpha = -20 \eta \mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

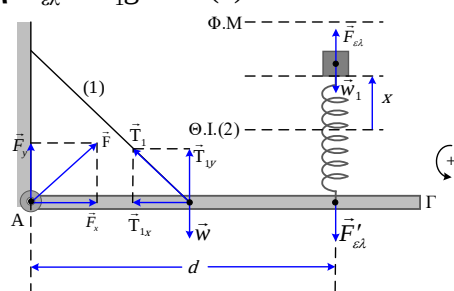
Δ3. Έστω ότι το σώμα Σ_1 βρίσκεται σε μία τυχαία θέση πάνω από τη Θ.Ι.(2) (στον θετικό ημιάξονα) με απομάκρυνση x . Έστω $F_{ελ}$ το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ_1 από το ελατήριο στη θέση αυτή. Ισχύει:

$$\Sigma F = -Dx$$

$$\text{ή } \Sigma F = -kx$$

$$\text{ή } F_{ελ} - w_1 = -kx$$

$$\text{ή } F_{ελ} = m_1 g - kx \quad (5)$$



Επειδή η ράβδος ΑΓ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0$$

$$\text{ή } T_{1y} \frac{L}{2} - w \frac{L}{2} - F'_{ελ} \frac{3L}{4} = 0$$

$$\text{ή } \frac{T_1 \eta \mu \phi}{2} = \frac{M \rho g}{2} + \frac{3 F_{ελ}}{4}$$

$$\text{ή } \frac{T_1}{4} = \frac{M \rho g}{2} + \frac{3 F_{ελ}}{4}$$

$$\text{ή } T_1 = 2M \rho g + 3F_{ελ}$$

ή λόγω της σχέσης (5):

$$T_1 = 2M \rho g + 3(m_1 g - kx)$$

$$\text{ή } T_1 = 2M \rho g + 3m_1 g - 3kx$$

$$\text{ή } T_1 = 80 - 300x \text{ (S.I.)}$$

$$\text{με } -0,2 \text{ m} \leq x \leq 0,2 \text{ m}$$

Δ4. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 και v_1 το μέτρο της ταχύτητας του ελάχιστα πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } E = 3U + U$$

$$\text{ή } E = 4U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D A^2 = 4 \frac{1}{2} D x_1^2$$

$$\text{ή } x_1 = \pm \frac{A}{2}$$

$$\text{ή } x_1 = 0,1 \text{ m}$$

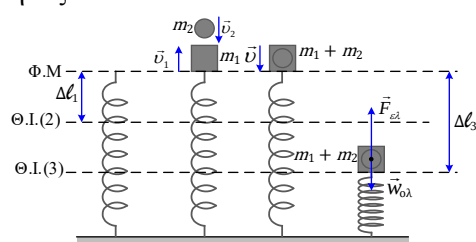
Συνεπώς, είναι:

$$K = 3U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m v_1^2 = 3 \frac{1}{2} k x_1^2$$

$$\text{ή } v_1 = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

Αφού $x_1 = \Delta \ell_2$ η κρούση γίνεται στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.



Έστω v το μέτρο της ταχύτητας συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο κατά την κρούση, έχουμε:

$$\vec{P}_{\text{πριν}} = \vec{P}_{\text{μετά}}$$

$$\text{ή } m_1 v_1 - m_2 v_2 = -(m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή } v = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$$

Η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του (Θ.Ι.(3)) αμέσως μετά την κρούση, είναι ίση με $x = \Delta \ell_3$, όπου $\Delta \ell_3$ η συμπίεση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος. Στη Θ.Ι.(3) ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } (m_1 + m_2) g = k \Delta \ell_3$$

$$\text{ή } \Delta \ell_3 = 0,4 \text{ m}$$

Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του συσσωματώματος έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k A'^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k \Delta \ell_3^2$$

$$\text{ή } A' = 0,8 \text{ m}$$

Η μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που δέχεται το συσσωμάτωμα από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του είναι ίση με:

$$F_{ελ(max)} = k(\Delta\ell_3 + A)$$

$$\text{ή } F_{ελ(max)} = 120 \text{ N}$$

(στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης).
Αφού $A' > \Delta\ell_3$, η ελάχιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που δέχεται το συσσωμάτωμα από το ελατήριο, είναι ίση με: $F_{ελ(min)} = 0$ (στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος).

Δ5. Όπως φαίνεται από τη σχέση (6) το πλάτος A' της ταλάντωσης του συσσωματώματος μειώνεται όσο μειώνεται

το μέτρο v της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Συνεπώς, το ελάχιστο πλάτος A'_{min} επιτυγχάνεται όταν $v = 0$. Τότε, σύμφωνα με τη σχέση (6) είναι:

$$A'_{min} = \Delta\ell_3 = 0,4 \text{ m}$$

Όταν $v = 0$, από την Α.Δ.Ο προκύπτει ότι:

$$m_1 v_1 = m_2 v'_2$$

$$\text{ή } v'_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m/s}$$

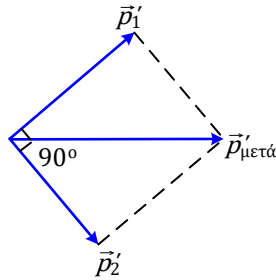
2^ο Κριτήριο Αξιολόγησης
ΘΕΜΑ Α

A1. γ, A2. δ, A3. β, A4. γ
A5. α. Σ, β. Λ, γ. Σ, δ. Σ, ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Οι ορμές $\vec{p}'_1$ και $\vec{p}'_2$ των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση και η ορμή $\vec{p}_1$ της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Από την Α.Δ.Ο κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}}$$

$$\text{ή } |\vec{p}_{\text{πριν}}| = |\vec{p}_{\text{μετά}}|$$

$$\text{ή } p_1 = \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2'\cos\varphi}$$

$$\text{ή } m_1v_1 = \sqrt{(m_1v_1')^2 + (m_2v_2')^2 + 2m_1v_1'm_2v_2'\cos 90^\circ}$$

$$\text{ή } m_1v_1 = \sqrt{m_1^2v_1'^2 + m_2^2v_2'^2}$$

$$\text{ή } m_1^2v_1^2 = m_1^2v_1'^2 + m_2^2v_2'^2$$

$$\text{ή } m_1^2(v_1^2 - v_1'^2) = m_2^2v_2'^2 \quad (1)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική, ισχύει ότι:

$$K_{\text{ολ(πριν)}} = K_{\text{ολ(μετά)}}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

$$\text{ή } m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2v_2'^2 \quad (2)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2), έχουμε: $m_1 = m_2$.

Έστω v_1'' και v_2'' τα μέτρα των ταχυτήτων των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα στην περίπτωση που η μεταξύ τους κρούση είναι μετωπική και ελαστική. Αφού $m_1 = m_2$, τότε ισχύει: $v_1'' = 0$ και $v_2'' = v_1''$. Συνεπώς, το ζητούμενο ποσοστό, είναι ίσο με:

$$\pi = \frac{\Delta K_2}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2}m_2v_2'^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 100\%$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β.

Έχουμε:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot 100\% = 100\%$$

$$\text{ή } \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1$$

$$\text{ή } \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = 1$$

$$\text{ή } \lambda' = 2\lambda$$

Από την εξίσωση Compton έχουμε:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\varphi)$$

$$\text{ή } \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\varphi) \quad (1)$$

Έχουμε:

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\text{ή } \lambda = \frac{hc}{E}$$

$$\text{ή } \lambda = \frac{hc}{2m_e c} \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) λόγω της σχέσης (2) προκύπτει:

$$\frac{1}{2} = 1 - \cos\varphi$$

$$\text{ή } \cos\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\text{ή } \varphi = 60^\circ$$

Η ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου είναι:

$$E' = \frac{hc}{\lambda'}$$

$$\text{ή } E' = \frac{hc}{2\lambda}$$

$$\text{ή } E' = \frac{E}{2}$$

Η κινητική ενέργεια του ανακρουόμενου ηλεκτρονίου είναι:

$$K = E - E'$$

$$\text{ή } K = \frac{E}{2}$$

$$\text{ή } K = m_e c^2$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η α.

Έστω I η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ για όσο χρόνο ο διακόπτης (δ) είναι κλειστός. Ισχύει:

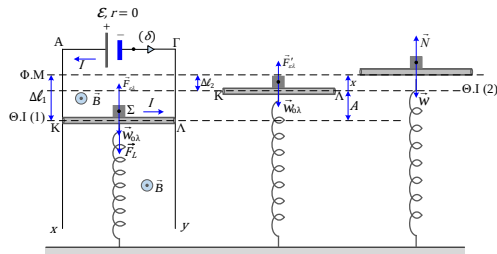
$$I = \frac{E}{R_{\text{ΚΛ}}}$$

$$\text{ή } I = \frac{E}{R} \quad (1)$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace $\vec{F}_L$ που δέχεται ο αγωγός ΚΛ υπολογίζεται από τη σχέση: $F_L = BI\ell$, ή λόγω της σχέσης (1):

$$F_L = \frac{BE\ell}{R} \quad (2). \text{ Στο παρακάτω σχήμα έχουν}$$

σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται το σύστημα αγωγός ΚΛ – σώμα Σ στην αρχική θέση ισορροπίας του (Θ.Ι.(1)).



Αφού το σύστημα ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } w_{\text{ολ}} + F_L = F_{\text{ελ}}$$

$$\text{ή } (M + m)g + \frac{BE\ell}{R} = k\Delta\ell_1$$

$$\text{ή } \Delta\ell_1 = \frac{(M + m)g}{k} + \frac{BE\ell}{kR} \quad (3)$$

Αν ανοίξουμε το διακόπτη η θέση ισορροπίας του συστήματος αγωγός ΚΛ – σώμα Σ θα αλλάξει (Θ.Ι.(2)).

Έστω $\Delta\ell_2$ η συμπίεση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(2). Ισχύει:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } (M + m)g = k\Delta\ell_2$$

$$\text{ή } \Delta\ell_2 = \frac{(M + m)g}{k} \quad (4)$$

Το πλάτος A της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα αγωγός ΚΛ – σώμα Σ μετά το άνοιγμα του διακόπτη (δ) είναι ίσο με:

$$A = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2$$

ή λόγω των σχέσεων (3) και (4):

$$A = \frac{BE\ell}{kR} \quad (5)$$

Έστω η τυχαία θέση με απομάκρυνση x από τη Θ.Ι.(2) του συστήματος αγωγός ΚΛ – σώμα Σ που φαίνεται στο σχήμα (θεωρούμε ως θετική φορά για την ταλάντωση του συστήματος τη φορά προς τα πάνω). Αφού το σώμα Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ισχύει:

$$\Sigma F_{\text{σώμα Σ}} = -D_{\Sigma} \cdot x$$

$$\text{ή } N - w = -m\omega^2 x$$

$$\text{ή } N - mg = -m \frac{k}{M + m} x$$

$$\text{ή } N = mg - \frac{km}{M + m} x \quad (6)$$

Η επαφή ανάμεσα στον αγωγό ΚΛ και το σώμα Σ χάνεται όταν $N = 0$. Από τη σχέση (6) προκύπτει ότι η επαφή μπορεί να χαθεί σε μία θέση με απομάκρυνση x_1 ($x_1 > 0$) πάνω από τη Θ.Ι.(2). Συνεπώς, από τη σχέση (6) για $N = 0$ προκύπτει ότι:

$$mg = \frac{km}{M + m} x_1$$

$$\text{ή } x_1 = \frac{(M + m)g}{k} \quad (7)$$

Για να μην χάνεται η επαφή ανάμεσα στο σώμα Σ και τον αγωγό ΚΛ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συστήματος του θα πρέπει να ισχύει:

$$x_1 > A$$

ή λόγω των σχέσεων (5) και (7):

$$\frac{(M + m)g}{k} > \frac{BE\ell}{kR}$$

$$\text{ή } (M + m)gR > BE\ell$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τη δοθείσα εξίσωση προκύπτει ότι το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης στα άκρα του πλαισίου είναι ίσο με $V_{\pi} = 12 \text{ V}$ και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του πλαισίου είναι ίση με $\omega = 18 \text{ rad/s}$.

Έστω I το πλάτος της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο. Ισχύει:

$$V_{\pi} = IR_1$$

$$\text{ή } I = 6 \text{ A}$$

Όμως, είναι:

$$I = \frac{E_{\text{επ(max)}}}{R_{\text{ολ}}}$$

$$\text{ή } I = \frac{N\omega BA}{R_{\pi} + R_1}$$

$$\text{ή } B = \frac{I(R_\pi + R_1)}{N\omega\alpha^2}$$

$$\text{ή } B = 1 \text{ T}$$

Γ2. Η χρονική εξίσωση της στιγμιαίας ισχύος που καταναλώνει ο αντιστάτης R_1 είναι η:

$$p = i v_{R_1}$$

$$\text{ή } p = i v$$

$$\text{ή } p = IV \eta \mu^2 \omega t \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$p_{\max} = IV$$

Συνεπώς το ζητούμενο πηλίκο, είναι ίσο με:

$$\frac{p_{\max}}{P} = \frac{IV}{I_{\text{ev}} V_{\text{ev}}} = \frac{IV}{\frac{IV}{\sqrt{2}\sqrt{2}}} = 2$$

Γ3. Το χρονικό διάστημα κατά το οποίο πραγματοποιούνται τρεις διαδοχικοί μηδενισμοί της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος, είναι ίσο με $\Delta t = T$, όπου T η περίοδος του εναλλασσόμενου ρεύματος. Η θερμότητα Joule που αποδίδεται από το κύκλωμα στο χρόνο Δt , είναι ίση με:

$$Q = I_{\text{ev}}^2 R_{\text{ολ}} \Delta t$$

$$\text{ή } Q = \left(\frac{I}{\sqrt{2}} \right)^2 (R_\pi + R_1) T$$

$$\text{ή } Q = \frac{1}{2} I^2 (R_\pi + R_1) \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{ή } Q = 18,84 \text{ J}$$

Γ4. Έστω i η ένταση του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η τάση στα άκρα του πλαισίου είναι ίση με $v = +6 \text{ V}$.

Ισχύει:

$$v = iR$$

$$\text{ή } i = 3 \text{ A}$$

Όμως, είναι:

$$i = \frac{E_{\text{επ}}}{R_\pi + R_1}$$

$$\text{ή } E_{\text{επ}} = i(R_\pi + R_1)$$

$$\text{ή } N \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = i(R_\pi + R_1)$$

$$\text{ή } \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{i(R_\pi + R_1)}{N}$$

$$\text{ή } \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = 0,09 \text{ Wb/s}$$

Γ5. Έστω R_Σ η ωμική αντίσταση της θερμικής συσκευής. Ισχύει:

$$R_\Sigma = \frac{V_K^2}{P_K}$$

$$\text{ή } R_\Sigma = \frac{2}{3} \Omega$$

Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{\text{εξ}}$ του εξωτερικού τμήματος του κυκλώματος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{1}{R_{\text{εξ}}} = \frac{1}{R_\Sigma} + \frac{1}{R_1}$$

$$\text{ή } R_{\text{εξ}} = \frac{R_\Sigma R_1}{R_\Sigma + R_1}$$

$$\text{ή } R_{\text{εξ}} = 0,5 \Omega$$

Το πλάτος I' της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I' = \frac{E_{\text{επ(max)}}}{R_{\text{εξ}} + R_\pi}$$

$$\text{ή } I' = \frac{N\omega BA}{R_{\text{εξ}} + R_\pi}$$

$$\text{ή } I' = 12 \text{ A}$$

Το πλάτος V'_π της εναλλασσόμενης τάσης στα άκρα του πλαισίου υπολογίζεται από τον τύπο:

$$V'_\pi = I' R_{\text{εξ}}$$

$$\text{ή } V'_\pi = 6 \text{ V}$$

Το πλάτος της τάσης V_Σ στα άκρα της συσκευής είναι ίσο με το πλάτος της τάσης στα άκρα του πλαισίου. Συνεπώς, ισχύει: $V_\Sigma = V'_\pi = 6 \text{ V}$. Η ενεργός τιμή $V_{\text{ev}(\Sigma)}$ της εναλλασσόμενης τάσης στα άκρα της συσκευής είναι ίση με:

$$V_{\text{ev}(\Sigma)} = \frac{V_\Sigma}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ή } V_{\text{ev}(\Sigma)} = 3\sqrt{2} \text{ V}$$

Αφού είναι $V_{\text{ev}(\Sigma)} \neq V_K$ η θερμική συσκευή δεν λειτουργεί κανονικά. Η μέση ισχύς $\bar{P}_\Sigma$ που καταναλώνει η θερμική συσκευή υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\bar{P}_\Sigma = \frac{V_{\text{ev}(\Sigma)}^2}{R_\Sigma}$$

$$\text{ή } \bar{P}_\Sigma = 27 \text{ W}$$

ΘΕΜΑ Δ (νέο)

Δ1. Από τις δοθείσες εξισώσεις των φάσεων της ταλάντωσης των υλικών σημείων K και Λ προκύπτει ότι κάθε χρονική στιγμή μετά την έναρξη της

ταλάντωσης των σημείων αυτών είναι $\varphi_\Lambda > \varphi_K$. Επομένως, το υλικό σημείο Λ αρχίζει να ταλαντώνεται πριν από το υλικό σημείο K . Δηλαδή, το κύμα διαδίδεται από το

υλικό σημείο Λ προς το υλικό σημείο Κ. Αφού είναι: $x_{\Lambda} < 0$ και $x_K > 0$ το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'Ox$. Η χρονική εξίσωση της φάσης του υλικού σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_{\Lambda} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\Lambda}}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } \varphi_{\Lambda} = 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{2}{\lambda} \right) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή } \varphi_{\Lambda} = \frac{2\pi t}{T} + \frac{4\pi}{\lambda} \text{ (S.I.)}$$

Από τη σύγκριση της εξίσωσης (1) με τη δοθείσα χρονική εξίσωση της φάσης του σημείου Λ προκύπτει:

$$\frac{2\pi}{T} = 5\pi \text{ s}^{-1}$$

$$\text{ή } T = 0,4 \text{ s}$$

και

$$\frac{4\pi}{\lambda} = 2\pi \text{ m}^{-1}$$

$$\text{ή } \lambda = 2 \text{ m}$$

Έστω Α το πλάτος του κύματος. Έχουμε:

$$v_0 = v_{\max}$$

$$\text{ή } v_0 = \omega A$$

$$\text{ή } v_0 = \frac{2\pi}{T} A$$

$$\text{ή } A = 0,2 \text{ m}$$

Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = 0,2 \eta \mu 2\pi \left(2,5t - \frac{x}{2} \right) \text{ (S.I.)}$$

Δ2. Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_K = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } \varphi_K = 2\pi \left(2,5t - \frac{x_K}{2} \right) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή } \varphi_K = 5\pi t - \pi x_K \text{ (S.I.)}$$

Από τη σύγκριση της εξίσωσης (2) με τη δοθείσα χρονική εξίσωση της φάσης του σημείου Κ προκύπτει:

$$\pi x_K = 3\pi$$

$$\text{ή } x_K = 3 \text{ m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_{\delta} = \lambda f$$

$$\text{ή } v_{\delta} = 5 \text{ m/s}$$

Η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει το σημείο Κ να ταλαντώνεται είναι:

$$t_K = \frac{x_K}{v_{\delta}}$$

$$\text{ή } t_K = 0,6 \text{ s}$$

Δ3. Το διάστημα που διανύει το σημείο Κ σε κάθε περίοδο της ταλάντωσης του είναι ίσο με:

$$s = 4A$$

$$\text{ή } s = 0,8 \text{ m}$$

Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 το υλικό σημείο Κ έχει ολοκληρώσει μια πλήρη ταλάντωση από τη χρονική στιγμή t_K στην οποία άρχισε να ταλαντώνεται. Επομένως, έχουμε:

$$t_1 = t_K + T$$

$$\text{ή } t_1 = 1 \text{ s}$$

Η απόσταση από την αρχή Ο ($x = 0$) στην οποία έχει διαδοθεί το κύμα τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με:

$$x = v_{\delta} t_1$$

$$\text{ή } x = 5 \text{ m}$$

Χωρίζουμε την απόσταση x σε N τμήματα

$$\text{μήκους } \frac{\lambda}{4} \text{ το καθένα:}$$

$$N = \frac{x}{\frac{\lambda}{4}}$$

$$\text{ή } N = \frac{4x}{\lambda}$$

$$\text{ή } N = 10$$

Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Ο τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$y_O = A \eta \mu \left(\frac{2\pi t_1}{T} \right)$$

$$\text{ή } y_O = 0,02 \eta \mu(5\pi) \text{ m}$$

$$\text{ή } y_O = 0$$

Η απομάκρυνση του υλικού σημείου που βρίσκεται στη θέση $x_1 = +\frac{\lambda}{4} = +0,5 \text{ m}$

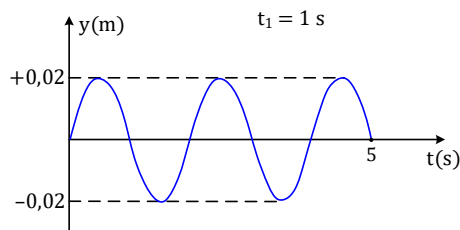
τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = 0,02 \eta \mu(4,5\pi)$$

$$\text{ή } y = +0,02 \text{ m}$$

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 .



Δ4. Η απόσταση μεταξύ των θέσεων ισορροπίας δύο σημείων του ελαστικού μέσου τα οποία έχουν κάθε χρονική στιγμή αντίθετη απομάκρυνση και αντίθετη ταχύτητα είναι:

$$\Delta x = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (3), \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Έστω το τυχαίο σημείο που βρίσκεται στη θέση x και έχει κάθε χρονική στιγμή αντίθετη απομάκρυνση και αντίθετη ταχύτητα με το σημείο O ($x = 0$). Από τη σχέση (3), έχουμε:

$$x - 0 = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή } x = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (4), \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Ο αριθμός των σημείων που βρίσκονται ανάμεσα στα σημεία K και Λ και είναι σε αντίθεση φάσης με το σημείο O προσδιορίζεται λύνοντας την ανίσωση:

$x_\Lambda < x < x_K$, ή λόγω της σχέσης (4):

$$x_\Lambda < (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{2} < x_K$$

$$\text{ή } -2 < 2\kappa + 1 < 3$$

$$\text{ή } -1,5 < \kappa < 1$$

$$\text{ή } \kappa = -1, 0$$

Επομένως, υπάρχουν δύο σημεία. Για $\kappa = -1$ από τη σχέση (4) προκύπτει: $x = -1 \text{ m}$, ενώ για $\kappa = 0$ από τη σχέση (4) προκύπτει: $x = +1 \text{ m}$.

Δ5. Η διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων των σημείων K και Λ είναι:

$$\Delta\phi = \phi_\Lambda - \phi_K$$

$$\text{ή } \Delta\phi = 5\pi \text{ rad}$$

Έστω y_Λ η απομάκρυνση του σημείου Λ τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της ταχύτητας του είναι $v_\Lambda = 0,5\pi\sqrt{2} \text{ m/s}$.

Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση του υλικού σημείου Λ , έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m v_\Lambda^2 + \frac{1}{2} D y_\Lambda^2$$

$$\text{ή } m \omega^2 A^2 = m v_\Lambda^2 + m \omega^2 y_\Lambda^2$$

$$\text{ή } y_\Lambda = + \sqrt{A^2 - \left(\frac{v_\Lambda}{\omega} \right)^2}$$

$$\text{ή } y_\Lambda = +0,1\sqrt{2} \text{ m}$$

Αφού η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων K και Λ είναι $\Delta\phi = 5\pi \text{ rad}$, η απομάκρυνση του υλικού σημείου K τη χρονική στιγμή t_2 είναι $y_K = -0,1\sqrt{2} \text{ m}$ και η επιτάχυνση του είναι:

$$a_K = -\omega^2 y_K$$

$$\text{ή } a_K = +25\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

3^ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

A1. α, A2. δ, A3. β, A4. γ

A5. α. Σ, β. Λ, γ. Λ, δ. Λ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Έστω T η περίοδος των δύο τρέχοντων κυμάτων που συμβάλλοντας δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή. Έχουμε:

$$\frac{T}{2} = 0,2 \text{ s}$$

$$\text{ή } T = 0,4 \text{ s}$$

Επομένως, είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{ή } \omega = 5\pi \text{ rad/s}$$

Από το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή t_1 προκύπτει ότι $\lambda = 0,5 \text{ m}$ και $y_0 = +0,1\sqrt{2} \text{ m}$.

Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση που εκτελεί το υλικό σημείο O τη χρονική στιγμή t_1 , έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } E = 2U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}DA_0^2 = 2 \frac{1}{2}Dy_0^2$$

$$\text{ή } |A_0| = \sqrt{2}y_0$$

$$\text{ή } |A_0| = 0,2 \text{ m}$$

$$\text{ή } 2A = 0,2 \text{ m}$$

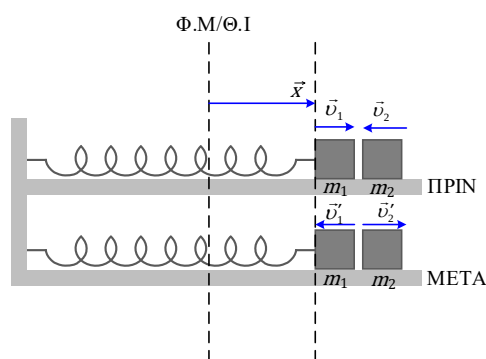
Η εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta \mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y = 0,2 \sin(4\pi x) \eta \mu 5\pi t \text{ (S.I.)}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Έστω $\vec{x}$ η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας του και $\vec{v}_1$ η ταχύτητα ελάχιστα πριν από την κρούση.



Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } E = 4U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}kA_1^2 = 4 \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{ή } x = \pm \frac{A_1}{2}$$

$$\text{ή } |x| = \frac{A_1}{2} \text{ (1)}$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική και οι μάζες τους είναι ίσες, τα σώματα κατά τη διάρκεια της κρούσης ανταλλάσσουν ταχύτητες. Συνεπώς, ισχύει:

$$v'_1 = v_2$$

$$\text{ή } v'_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} A_1 \text{ (2)}$$

Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση. Από τη Α.Δ.Ε έχουμε:

$$E = K + U$$

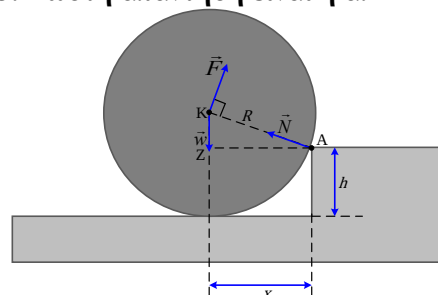
$$\text{ή } \frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{ή } A_2^2 = \frac{m}{k}v_1'^2 + x^2,$$

ή λόγω των σχέσεων (1) και (2):

$$A_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_1$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η α.



Για να υπερπηδήσει ο τροχός το εμπόδιο θα πρέπει το μέτρο της ροπής της δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο K να είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της ροπής του βάρους $\vec{w}$. Συνεπώς ισχύει:

$$|\tau_F| > |\tau_w|$$

$$\text{ή } FR > wx \text{ (1)}$$

Από το τρίγωνο KZA του παραπάνω σχήματος προκύπτει:

$$R^2 = x^2 + (R - h)^2$$

$$\text{ή } x = \frac{\sqrt{3}}{2} R \text{ (2)}$$

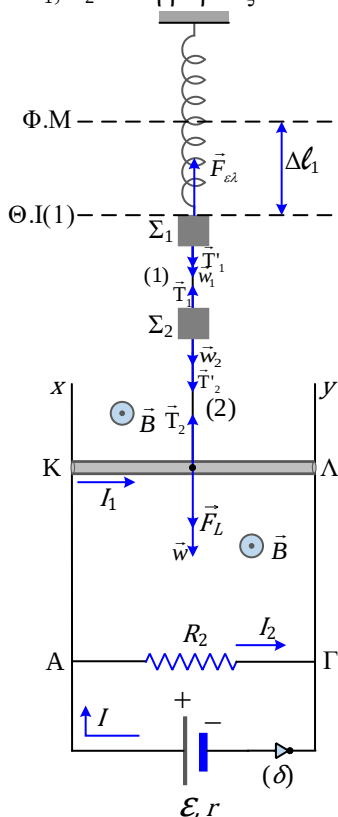
Συνεπώς από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$FR > w \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

$$\text{ή } F > \frac{\sqrt{3}}{2} w$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα ρεύματα που διαρρέουν το κύκλωμα καθώς και οι δυνάμεις που δέχονται τα σώματα Σ_1 , Σ_2 και η ράβδος ΚΛ.



Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{1,2}$ του εξωτερικού τμήματος του κυκλώματος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\text{ή } R_{1,2} = 4 \Omega$$

Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{o\lambda}$ ολόκληρου του κυκλώματος είναι ίση με:

$$R_{o\lambda} = R_{1,2} + r$$

$$\text{ή } R_{o\lambda} = 5 \Omega$$

Η ένταση I του ρεύματος που διαρρέει την πηγή υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{o\lambda}}$$

$$\text{ή } I = 6$$

Η τάση $V_{K\Lambda}$ στα άκρα του αγωγού ΚΛ είναι ίση με:

$$V_{K\Lambda} = IR_{1,2}$$

$$\text{ή } V_{K\Lambda} = 24 \text{ V}$$

Η ένταση I_1 του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ είναι:

$$I_1 = \frac{V_{K\Lambda}}{R_1}$$

$$\text{ή } I_1 = 4 \text{ A}$$

Επομένως το μέτρο της δύναμης Laplace $\vec{F}_L$ που δέχεται ο αγωγός ΚΛ είναι ίσο με:

$$F_L = BI_1 \ell$$

$$\text{ή } F_L = 8 \text{ N}$$

Αφού ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } T_2 = F_L + w$$

$$\text{ή } T_2 = mg + F_L$$

$$\text{ή } T_2 = 10 \text{ N}$$

Έστω $\Delta \ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 . Ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } w_1 + w_2 + T'_2 = F_{\varepsilon \lambda}$$

$$\text{ή } m_1 g + m_2 g + T_2 = k \Delta \ell_1$$

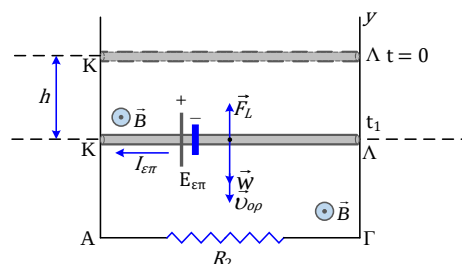
$$\text{ή } \Delta \ell_1 = 0,5 \text{ m}$$

Η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο υπολογίζεται από τον τύπο:

$$U_{\varepsilon \lambda} = \frac{1}{2} k \Delta \ell_1^2$$

$$\text{ή } U_{\varepsilon \lambda} = 12,5 \text{ J}$$

Γ2. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί η φορά του ρεύματος που διαρρέει τη ράβδο τη χρονική στιγμή t_1 καθώς και οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος την ίδια χρονική στιγμή.



Το μέτρο της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο κύκλωμα, υπολογίζεται από τον τύπο: $E_{\varepsilon \pi} = Bv\ell$ (1). Τη χρονική στιγμή t_1 που η ράβδος ΚΛ αποκτά την οριακή της ταχύτητα, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } w = F_L$$

$$\text{ή } mg = BI_{\varepsilon \pi} \ell$$

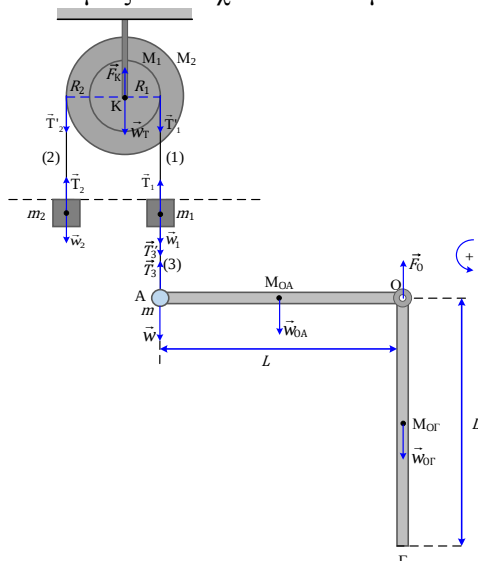
$$\text{ή } mg = B \frac{E_{\varepsilon \pi}}{R_1 + R_2} \ell,$$

$$\text{ή λόγω της σχέσης (1):}$$

$$mg = \frac{B^2 \ell^2 v_{o\rho}}{R_1 + R_2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχονται τα σώματα.



Επειδή το σύστημα των δύο ράβδων και του σώματος Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(0)} = 0$$

$$\text{ή } \tau_{F_3} = \tau_w + \tau_{w_{OA}} + \tau_{F_0} + \tau_{w_{OG}} = 0$$

$$\text{ή } -T_3 L + wL + w_{OA} \frac{L}{2} + 0 + 0 = 0$$

$$\text{ή } T_3 = mg + \frac{M_{OA}g}{2}$$

$$\text{ή } T_3 = 20 \text{ N}$$

Επειδή το σώμα Σ₁ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } T_1 = w_1 + T_3$$

$$\text{ή } T_1 = 40 \text{ N}$$

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί ισχύει:

$$\Sigma \tau = 0$$

$$\text{ή } \tau_{T'_1} + \tau_{T'_2} + \tau_{w_T} + \tau_{F_K} = 0$$

$$\text{ή } -T'_1 R_1 + T'_2 R_2 + 0 + 0 = 0$$

$$\text{ή } T_1 R_1 = T_2 R_2$$

$$\text{ή } T_2 = 20 \text{ N}$$

Επειδή το σώμα Σ₂ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_2 = \vec{0}$$

$$\text{ή } T_2 = w_2$$

$$\text{ή } T_2 = m_2 g$$

$$\text{ή } m_2 = 2 \text{ kg}$$

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\text{ή } F_K = T'_1 + T'_2 + (M_1 + M_2)g$$

$$\text{ή } F_K = 140 \text{ N}$$

Δ2. Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας και v_1, v_2 τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων Σ₁ και Σ₂ αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t_1 . Επειδή τα

νήματα δεν ολισθαίνουν στις περιφέρειες των δύο κυλίνδρων, ισχύουν:

$$v_1 = v_\Lambda$$

$$\text{ή } v_1 = \omega R_1 \quad (1)$$

και

$$v_2 = v_Z$$

$$\text{ή } v_2 = \omega R_2 \quad (2)$$

Έστω a_1 το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ₁. Παραγωγίζοντας τη σχέση (1), έχουμε:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R_1$$

$$\text{ή } a_1 = a_{\gamma\omega\Lambda} R_1$$

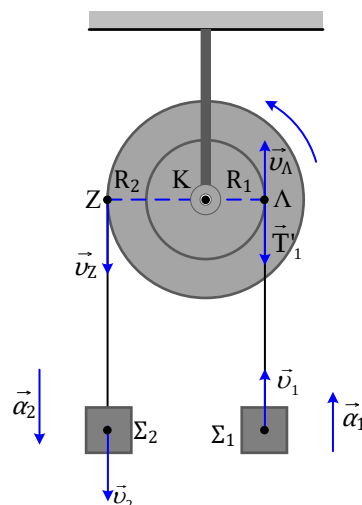
$$\text{ή } a_1 = 1 \text{ m/s}^2$$

Έστω a_2 το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ₂. Παραγωγίζοντας τη σχέση (2), έχουμε:

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R_2$$

$$\text{ή } a_2 = a_{\gamma\omega\Lambda} R_2$$

$$\text{ή } a_2 = 2 \text{ m/s}^2$$



Έστω h_1 και h_2 οι κατακόρυφες μετατοπίσεις των σωμάτων Σ₁ και Σ₂ αντίστοιχα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία τα σώματα απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 6 \text{ m}$. Αφού τη χρονική στιγμή $t = 0$ τα σώματα Σ₁ και Σ₂ βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, ισχύει:

$$d = h_1 + h_2$$

$$\text{ή } d = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + \frac{1}{2} a_2 t_1^2$$

$$\text{ή } t_1 = 2 \text{ s}$$

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1 , είναι ίσο με:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\gamma} t_1$$

$$\text{ή } \omega = 2 \text{ rad/s}$$

Επομένως, από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$v_2 = 4 \text{ m/s}$$

Δ3. Κάθε σημείο της περιφέρειας του κυλίνδρου K_2 έχει δύο επιταχύνσεις: τη κεντρομόλο επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\kappa$ και την επιτρόχιο επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\epsilon$.

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha_\kappa = \omega^2 R_2$$

$$\text{ή } \alpha_\kappa = 8 \text{ m/s}^2$$

Το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha_\epsilon = \alpha_{\gamma\omega\gamma} R_2$$

$$\text{ή } \alpha_\epsilon = 2 \text{ m/s}^2$$

Επειδή τα διανύσματα $\vec{\alpha}_\epsilon$ και $\vec{\alpha}_\kappa$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο της συνολικής επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ ενός σημείου της περιφέρειας του κυλίνδρου K_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha = \sqrt{\alpha_\kappa^2 + \alpha_\epsilon^2}$$

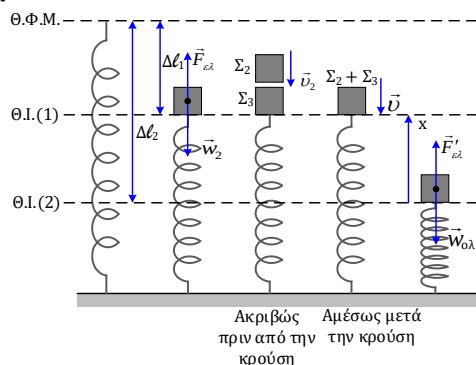
$$\text{ή } \alpha = \sqrt{68} \text{ m/s}^2$$

Δ4. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 κατά την κρούση, έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$$

$$\text{ή } m_2 v_2 = (m_2 + m_3) v$$

$$\text{ή } v = 2 \text{ m/s}$$



Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 [Θ.Ι.(1)] ισχύει:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } m_2 g = k \Delta \ell_1$$

$$\text{ή } \Delta \ell_1 = 0,1 \text{ m}$$

Στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος, ισχύει:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } (m_2 + m_3) g = k \Delta \ell_2$$

$$\text{ή } \Delta \ell_2 = 0,2 \text{ m}$$

Το μέτρο της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$|x| = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1 = 0,1 \text{ m}$$

Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση που εκτελεί το συσσωμάτωμα, έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_2 + m_3) v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{ή } A = 0,3 \text{ m}$$

Δ5. Έστω $\Delta \ell$ η παραμόρφωση του ελατηρίου εκείνη τη χρονική στιγμή t_2 . Έχουμε:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2} k \Delta \ell^2$$

$$\text{ή } \Delta \ell = 0,1 \text{ m}$$

Έστω ότι το ελατήριο είναι συσπειρωμένο σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Επειδή είναι: $\Delta \ell = \Delta \ell_1$, το συσσωμάτωμα θα βρίσκεται στη θέση όπου έγινε η κρούση. Από αυτή τη θέση διέρχεται για πρώτη φορά μετά την κρούση κινούμενο προς τα πάνω. Έστω ότι το ελατήριο είναι επιμηκυμένο σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Τότε το μέτρο της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του είναι:

$$|x_1| = \Delta \ell + \Delta \ell_2$$

$$\text{ή } |x_1| = 0,3 \text{ m} = A$$

Επομένως το συσσωμάτωμα βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης του. Επομένως, για δεύτερη φορά μετά την κρούση θα είναι $U_{ελ} = 1 \text{ J}$, τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία το συσσωμάτωμα θα βρεθεί για πρώτη φορά μετά την κρούση στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης του. Ο ζητούμενος ρυθμός είναι:

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = \omega^2 |x_1|$$

$$\text{ή } \left| \frac{dv}{dt} \right| = \frac{k}{m_1 + m_2} |x_1|$$

$$\dot{\eta} \left| \frac{dv}{dt} \right| = 15 \text{ m/s}^2$$

4^ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

A1. α, A2. δ, A3. γ, A4. α

A5. α. Λ, β. Σ, γ. Λ, δ. Λ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. (νέο) Σωστή απάντηση είναι η γ.

Η εξίσωση του κύματος (1) είναι της μορφής:

$$y_1 = A_1 \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1} \right) \quad (1)$$

Η δοθείσα εξίσωση του κύματος (1) γράφεται:

$$y_1 = 0,1 \eta \mu 2\pi (2,5t - x) \quad (\text{S.I.}) \quad (2)$$

Από τη σύγκριση της εξίσωσης (2) με την εξίσωση (1) προκύπτει:

$$A_1 = 0,1 \text{ m}, \quad \frac{1}{T_1} = 2,5 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{ή } f_1 = 2,5 \text{ Hz}$$

και

$$\frac{1}{\lambda_1} = 1 \text{ m}^{-1}$$

$$\text{ή } \lambda_1 = 1 \text{ m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος (1) στο ελαστικό μέσο είναι:

$$v_1 = \lambda_1 f_1$$

$$\text{ή } v_1 = 2,5 \text{ m/s}$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση είναι:

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2}$$

$$\text{ή } \lambda_2 = 0,5 \text{ m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος (2) στο ελαστικό μέσο είναι:

$$v_2 = v_1$$

$$\text{ή } v_2 = 2,5 \text{ m/s}$$

Έστω f_2 η συχνότητα του κύματος (2).

Έχουμε:

$$v_2 = \lambda_2 f_2$$

$$\text{ή } f_2 = 5 \text{ Hz}$$

Έστω A_2 το πλάτος του κύματος (2). Για τις ενέργειες ταλάντωσης του υλικού σημείου K, ισχύει:

$$E_2 = 4E_1$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D_2 A_2^2 = 4 \frac{1}{2} D_1 A_1^2$$

$$\text{ή } \Delta m \omega_2^2 A_2^2 = 4 \Delta m \omega_1^2 A_1^2$$

$$\text{ή } (2\pi f_2)^2 A_2^2 = 4(2\pi f_1)^2 A_1^2$$

$$\text{ή } f_2^2 A_2^2 = 4f_1^2 A_1^2$$

$$\text{ή } A_2 = A_1$$

$$\text{ή } A_2 = 0,1 \text{ m}$$

Επομένως η εξίσωση του κύματος (2) στο ελαστικό μέσο, είναι:

$$y_2 = A_2 \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T_2} - \frac{x}{\lambda_2} \right)$$

$$\text{ή } y_2 = A_2 \eta \mu \left(2\pi f_2 t - \frac{2\pi x}{\lambda_2} \right)$$

$$\text{ή } y_2 = 0,1 \eta \mu (10\pi t - 4\pi x) \quad (\text{S.I.})$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Έστω T_{01} η ιδιοπερίοδος της ταλάντωσης του συστήματος (k_1, m_1) και T_{02} η ιδιοπερίοδος της ταλάντωσης του συστήματος (k_2, m_2) . Ισχύει:

$$\frac{T_{01}}{2} = 2 \frac{T_{02}}{2}$$

$$\text{ή } T_{01} = 2T_{02}$$

$$\text{ή } f_{02} = 2f_{01}$$

$$\text{ή } f_{02} = 2 \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

$$\text{ή } f_{02} = \frac{10}{\pi} \text{ Hz}$$

Αρχικά, ισχύει ότι:

$$f > f_{01} \text{ και } f = f_{02}$$

Επομένως, αρχικά το σύστημα (k_2, m_2) βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού και το πλάτος της εξαναγκασμένης

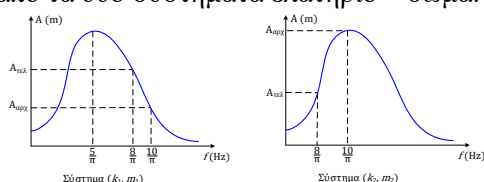
ταλάντωσης που εκτελεί είναι το μέγιστο δυνατό. Αν μειώσουμε τη συχνότητα της σανίδας κατά 20%, τότε η συχνότητα f' της εξαναγκασμένης ταλάντωσης που εκτελούν τα δύο συστήματα θα γίνει ίση με:

$$f' = f - \frac{20}{100}f$$

$$\text{ή } f' = 0,8f$$

$$\text{ή } f' = \frac{8}{\pi} \text{ Hz}$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις του πλάτους σε συνάρτηση με τη συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης για κάθε ένα από τα δύο συστήματα ελατήριο – σώμα.



Όπως φαίνεται από τα παραπάνω διαγράμματα, αν η συχνότητα του διεγέρτη (σανίδα) μειωθεί από την τιμή $f = \frac{10}{\pi} \text{ Hz}$ στην τιμή $f' = \frac{8}{\pi} \text{ Hz}$, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του συστήματος (k_1, m_1) θα αυξηθεί, ενώ το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του συστήματος (k_2, m_2) θα μειωθεί.

B3. Σωστή απάντηση είναι η β.

Έστω ω_1 το μέτρο της αρχικής γωνιακής ταχύτητας με την οποία περιστρέφεται το πλαίσιο. Το πλάτος I_1 της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο είναι ίσο με:

$$I_1 = \frac{E_{\pi(\max)}}{R_{\text{ολ}}}$$

$$\text{ή } I_1 = \frac{N\omega_1 BA}{R} \quad (1)$$

Η θερμότητα Joule Q_1 που αποδίδει ο αντιστάτης στο περιβάλλον σε χρόνο $\Delta t_1 = 10T_1$, όπου T_1 η περίοδος περιστροφής του πλαισίου, είναι ίση με:

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος ακριβώς πριν από την κρούση.

$$Q_1 = I_{\text{εν}}^2 R \Delta t_1$$

$$\text{ή } Q_1 = \left(\frac{I_1}{\sqrt{2}}\right)^2 R 10T_1$$

$$\text{ή } Q_1 = 5I_1^2 R T_1$$

$$\text{ή } Q_1 = 5I_1^2 R \frac{2\pi}{\omega_1}$$

$$\text{ή } Q_1 = 10\pi \frac{I_1^2 R}{\omega_1},$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$Q_1 = 10\pi \frac{N^2 \omega_1^2 B^2 A^2}{R^2} R$$

$$\text{ή } Q_1 = 10\pi \frac{N^2 B^2 A^2 \omega_1}{R} \quad (2)$$

Έστω ω_2 το μέτρο της νέας γωνιακής ταχύτητας του πλαισίου. Το πλάτος I_2 της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο, είναι ίσο με:

$$I_2 = \frac{E'_{\pi(\max)}}{R}$$

$$\text{ή } I_2 = \frac{N\omega_2 BA}{R} \quad (3)$$

Η θερμότητα Joule Q_2 που αποδίδει ο αντιστάτης στο περιβάλλον σε χρόνο $\Delta t_2 = 10T_2$, όπου T_2 η νέα περίοδος περιστροφής του πλαισίου, είναι ίση με:

$$Q_2 = I_{\text{εν}}^2 R \Delta t_2$$

$$\text{ή } Q_2 = \left(\frac{I_2}{\sqrt{2}}\right)^2 R 10T_2$$

$$\text{ή } Q_2 = 5I_2^2 R T_2$$

$$\text{ή } Q_2 = 5I_2^2 R \frac{2\pi}{\omega_2}$$

$$\text{ή } Q_2 = 10\pi \frac{I_2^2 R}{\omega_2},$$

ή λόγω της σχέσης (3):

$$Q_2 = 10\pi \frac{N^2 B^2 A^2 \omega_2}{R} \quad (4)$$

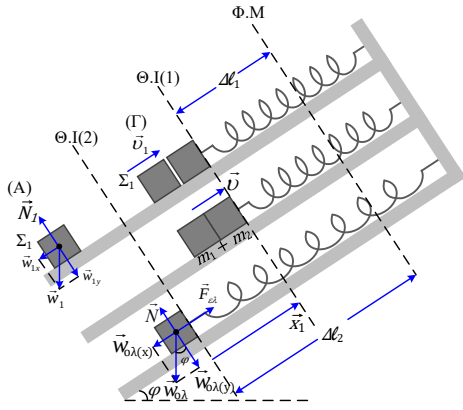
Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (2) και (4), προκύπτει:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

$$\text{ή } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ή } Q_2 = 2Q_1$$

$$\text{ή } Q_2 = 2Q$$



Από το Θ.Μ.Κ.Ε για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση μεταξύ των θέσεων (Α) και (Γ) που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα, έχουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -m_1 g \eta \mu \phi S$$

$$\text{ή } v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2g\eta\mu\phi S}$$

$$\text{ή } v_1 = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$$

$$\text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή } v = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m/s}$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\pi = \frac{Q_K}{K_{ολ(πριν)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 75\%$$

Γ2. Στη Θ.Ι.(2) του συσσωματώματος ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_2 = \vec{0}$$

$$\text{ή } (m_1 + m_2) g \eta \mu \phi = k \Delta \ell_2 \quad (1)$$

Σε μία τυχαία θέση με απομάκρυνση $\vec{x}$ κάτω από τη Θ.Ι.(2), ισχύει:

$$\Sigma F = W_{ολ(x)} - F_{ελ}$$

$$\text{ή } \Sigma F = (m_1 + m_2) g \eta \mu \phi - k(\Delta \ell_2 + x)$$

$$\text{ή } \Sigma F = (m_1 + m_2) g \eta \mu \phi - k \Delta \ell_2 - kx,$$

$$\text{ή λόγω της σχέσης (1): } \Sigma F = -kx$$

Επομένως, το συσσωμάτωμα εκτελεί μετά την κρούση απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

Γ3. Στη Θ.Ι.(1) ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } m_2 g \eta \mu \phi = k \Delta \ell_1$$

$$\text{ή } \Delta \ell_1 = 0,15 \text{ m}$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $\Delta \ell_2 = 0,2 \text{ m}$. Έστω x_1 η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του (Θ.Ι.(2)) αμέσως μετά την κρούση.

Ισχύει:

$$|x_1| = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1$$

$$\text{ή } |x_1| = 0,05 \text{ m}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση του συσσωματώματος, έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k x_1^2$$

$$\text{ή } A = 0,1 \text{ m}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

$$\text{ή } \omega = 5 \text{ rad/s}$$

Έχουμε:

$$a_{\max} = \omega^2 A$$

$$\text{ή } a_{\max} = 2,5 \text{ m/s}^2$$

Γ4. Έστω x_2 η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη Θ.Ι.(2) τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του συσσωματώματος, έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } E = 3U + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D A^2 = 4 \frac{1}{2} D x_2^2$$

$$\text{ή } x_2 = \pm \frac{A}{2}$$

$$\text{ή } x_2 = -\frac{A}{2}$$

$$\text{ή } x_2 = -0,05 \text{ m}$$

Η ταχύτητα v_2 του συσσωματώματος εκείνη τη χρονική στιγμή είναι αρνητική.

Ισχύει:

$$K = 3U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_2^2 = 3 \frac{1}{2} D x_2^2$$

$$\text{ή } v_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m/s}$$

Ο ζητούμενος ρυθμός υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F v$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = -D x_2 v_2$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = -1,25\sqrt{3} \text{ J/s}$$

Γ5. Έστω x_3 η απομάκρυνση του συσσωματώματος τη συγκεκριμένη

χρονική στιγμή και $\Delta\ell_3$ η παραμόρφωση του ελατηρίου (επιμήκυνση ή συμπίεση) σε σχέση με το φυσικό του μήκος την ίδια χρονική στιγμή. Ισχύει:

$$U = U_{ελ}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}Dx_3^2 = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_3)^2$$

$$\text{ή } |x_3| = \Delta\ell_3 \quad (4)$$

Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι το συσσωμάτωμα δεν μπορεί να βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, γιατί τότε είναι: $0 = 0,2 \text{ m}$ (άτοπο).

Έστω ότι η θέση που ψάχνουμε είναι κάτω από τη Θ.Ι.(2). Τότε από τη σχέση (4) προκύπτει:

$$|x_3| = \Delta\ell_2 + |x_3|$$

$$\text{ή } 0 = 0,2 \text{ m} \text{ άτοπο.}$$

Αφού είναι $A < \Delta\ell_2$, το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του

συσσωματώματος είναι συνεχώς επιμηκυνόμενο σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Έστω ότι η θέση που ψάχνουμε είναι πάνω από τη Θ.Ι.(2). Από τη σχέση (4) προκύπτει:

$$|x_3| = \Delta\ell_2 - |x_3|$$

$$\text{ή } 2|x_3| = \Delta\ell_2$$

$$\text{ή } |x_3| = \frac{\Delta\ell_2}{2}$$

$$\text{ή } |x_3| = 0,1 \text{ m}$$

Το έργο της δύναμης επαναφοράς υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W_{\Sigma F} = \Delta K$$

$$\text{ή } W_{\Sigma F} = -\Delta U$$

$$\text{ή } W_{\Sigma F} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_3^2$$

$$\text{ή } W_{\Sigma F} = -0,375 \text{ J}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α. Η Η.Ε.Δ. από επαγωγή που αναπτύσσεται στη ράβδο δίνεται από τη σχέση $E_{επ} = Bv\ell$.

Η ισοδύναμη αντίσταση του συστήματος των αντιστάτων R_1 και R_2 είναι:

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\text{ή } R_{1,2} = 2 \Omega$$

Η ισοδύναμη αντίσταση όλου του κυκλώματος είναι:

$$R_{ολ} = R_{1,2} + R_{ΚΛ}$$

$$\text{ή } R_{ολ} = 4 \Omega$$

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τη ράβδο ΚΛ από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά είναι:

$$I = \frac{E_{επ}}{R_{ολ}}$$

$$\text{ή } I = \frac{Bv\ell}{R_{ολ}}$$

Αφού ο αγωγός ΚΛ κινείται με σταθερή ταχύτητα, ισχύει:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } F = BI\ell$$

$$\text{ή } F = \frac{B^2 \ell^2 v}{R_{ολ}}$$

$$\text{ή } v = 12 \text{ m/s}$$

β. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ) το πηνίο δεν διαρρέεται από ρεύμα. Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

$$i = \frac{E_{επ}}{R_2 + R_{ΚΛ}}$$

$$\text{ή } i = \frac{Bv\ell}{R_2 + R_{ΚΛ}}$$

$$\text{ή } i = 1,5 \text{ A}$$

Η τάση στα άκρα του πηνίου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι ίση με το μέτρο της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα του και ίση με την τάση στα άκρα του αντιστάτη R_2 . Έχουμε:

$$|E_{αυτ}| = V_{R_2}$$

$$\text{ή } |E_{αυτ}| = iR_2$$

$$\text{ή } L \left| \frac{di}{dt} \right| = iR_2$$

$$\text{ή } \left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{iR_2}{L}$$

$$\text{ή } \left| \frac{di}{dt} \right| = 45 \text{ A/s}$$

$$\text{ή } \frac{di}{dt} = +45 \text{ A/s}$$

Δ2. Η τάση $V_{ΚΛ}$ στα άκρα του αγωγού ΚΛ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$V_{ΚΛ} = E_{επ} - IR_{ΚΛ}$$

$$\text{ή } V_{ΚΛ} = Bv\ell - \frac{Bv\ell}{R_{ολ}} R_{ΚΛ}$$

$$\text{ή } V_{ΚΛ} = 6 \text{ V}$$

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο είναι:

$$I_1 = \frac{V_{\kappa\lambda}}{R_1}$$

$$\text{ή } I_1 = 2 \text{ A}$$

Έστω B' το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο εσωτερικό του πηνίου. Έχουμε

$$B' = \mu_0 I_1 \frac{N}{\ell'} \quad (1), \text{ όπου } \ell' \text{ το μήκος του}$$

πηνίου.

Η μαγνητική ροή που διέρχεται από μια σπείρα εμβαδού A του πηνίου δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi = B'A$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$\Phi = \mu_0 I_1 \frac{N^2}{\ell'} A \quad (2)$$

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου δίνεται από τη σχέση:

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell'} A \quad (3)$$

Η σχέση (2) λόγω της σχέσης (3) γίνεται:

$$\Phi = \frac{L}{N} I_1$$

$$\text{ή } \Phi = 8 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$U_{t_1} = \frac{1}{2} L I_1^2$$

$$\text{ή } U_{t_1} = 0,4 \text{ J}$$

Δ3. Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_2 είναι:

$$I_2 = \frac{V_{\kappa\lambda}}{R_2}$$

$$\text{ή } I_2 = 1 \text{ A}$$

Το φορτίο που διέρχεται από μια διατομή του αντιστάτη R_2 σε χρόνο Δt δίνεται από τη σχέση:

$$q = I_2 \Delta t$$

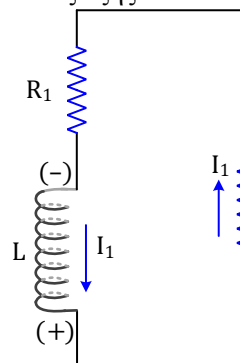
$$\text{ή } \Delta t = 2 \text{ s}$$

Η θερμότητα Joule που εκλύεται από τον αντιστάτη R_2 στο χρονικό διάστημα Δt υπολογίζεται από τον τύπο:

$$Q_{R_2} = I_2^2 R_2 \Delta t$$

$$\text{ή } Q_{R_2} = 12 \text{ J}$$

Δ4. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη (δ) το κύκλωμα διαμορφώνεται ως εξής:



Έχουμε:

$$I_1 = \frac{|E_{\text{αυτ}}|}{R_1 + R_2}$$

$$\text{ή } |E_{\text{αυτ}}| = I_1(R_1 + R_2)$$

$$\text{ή } L \left| \frac{di}{dt} \right| = I_1(R_1 + R_2)$$

$$\text{ή } \left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{I_1(R_1 + R_2)}{L}$$

$$\text{ή } \left| \frac{di}{dt} \right| = 90 \text{ A/s}$$

Επειδή η ένταση του ρεύματος μειώνεται είναι:

$$\frac{di}{dt} = -90 \text{ A/s}$$

Δ5. Έστω $Q_{R_{\text{ολ}}}$ η θερμότητα Joule που εκλύεται από τους αντιστάτες R_1 και R_2 .

Έχουμε:

$$Q_{R_{\text{ολ}}} = U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}}$$

$$\text{ή } Q_{R_{\text{ολ}}} = U_{\text{αρχ}} - 0$$

$$\text{ή } Q_{R_1} + Q_{R_2} = 0,4 \text{ J}$$

Επειδή οι αντιστάτες διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα ισχύει:

$$\frac{dQ_{R_1}}{dQ_{R_2}} = \frac{i^2 R_1 dt}{i^2 R_2 dt}$$

$$\text{ή } \frac{dQ_{R_1}}{dQ_{R_2}} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\text{ή } \frac{dQ_{R_1}}{dQ_{R_2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ή } Q_{R_2} = 2Q_{R_1}$$

Επομένως, έχουμε:

$$3Q_{R_1} = 0,4 \text{ J}$$

$$\dot{\eta} \quad Q_{R_1} = \frac{0,4}{3} \text{ J}$$

5^ο Κριτήριο Αξιολόγησης
ΘΕΜΑ Α

A1. δ, A2. β, A3. β, A4. γ
A5. α. Λ, β. Λ, γ. Λ, δ. Σ, ε. Σ

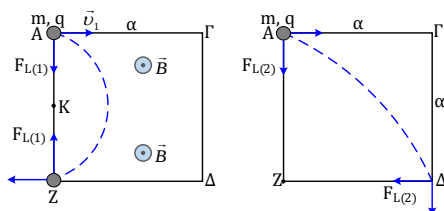
ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η α.

Όταν το σωματίδιο εισέρχεται από την κορυφή Α του τετραγώνου με ταχύτητα $\vec{v}_1$ και εξέρχεται από τη κορυφή Ζ, διαγράφει ημικύκλιο με κέντρο το μέσον Κ της πλευράς ΑΖ και ακτίνα $R_1 = \frac{\alpha}{2}$. Έχουμε:

$$R_1 = \frac{mv_1}{B|q|}$$

ή $v_1 = \frac{R_1 B |q|}{m} \quad (1)$



Όταν το σωματίδιο εισέρχεται από την κορυφή Α με ταχύτητα μέτρου v_2 και εξέρχεται από την κορυφή Δ, διαγράφει τεταρτοκύκλιο με κέντρο την κορυφή Ζ και ακτίνα $R_2 = \alpha$. Έχουμε:

$$R_2 = \frac{mv_2}{B|q|}$$

ή $v_2 = \frac{R_2 B |q|}{m} \quad (2)$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

ή $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\alpha}{\alpha}$

ή $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2}$

ή $v_2 = 2v_1$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β.

Έχουμε:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi)$$

ή $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}$

ή $\lambda' = 3 \frac{h}{m_e c}$

Η κινητική ενέργεια του ανακρουόμενου ηλεκτρονίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$K = E - E'$$

ή $K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}$

ή $K = \frac{hc}{2h} - \frac{hc}{3 \frac{h}{m_e c}}$

ή $K = \frac{m_e c^2}{2} - \frac{m_e c^2}{3}$

ή $K = \frac{1}{6} m_e c^2$

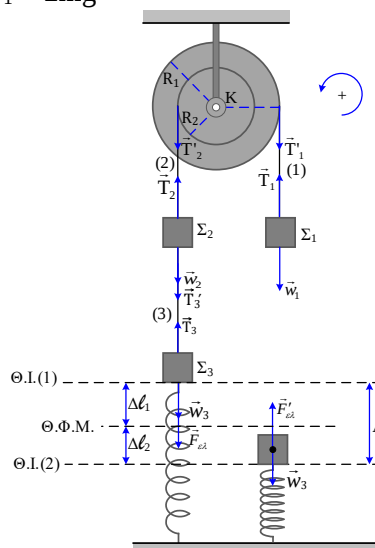
B3. Σωστή απάντηση είναι η γ

Επειδή, αρχικά, το σώμα Σ₁ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F = 0$$

ή $T_1 = w_1$

ή $T_1 = 2mg$



Επειδή, αρχικά, η διπλή τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0$$

ή $-T'_1 R_1 + T'_2 R_2 = 0$

ή $T_2 R_2 = T_1 R_1$

ή $T_2 = 2T_1$

$$\text{ή } T_2 = 4mg$$

Επειδή, αρχικά, το σώμα Σ_2 ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } T_2 = w_2 + T_3$$

$$\text{ή } T_3 = T_2 - m_2 g$$

$$\text{ή } T_3 = 2mg$$

Επειδή είναι $T_3 > w_3 = mg$, το σώμα Σ_3 , αρχικά, ισορροπεί με το ελατήριο επιμηκνόμενο. Έστω $\Delta \ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_3 (Θ.Ι.(1)).

Έχουμε:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } T_3 = w_3 + F_{ελ}$$

$$\text{ή } 2mg = mg + k\Delta \ell_1$$

$$\text{ή } \Delta \ell_1 = \frac{mg}{k}$$

Το σώμα Σ_3 εκτελεί ταλάντωση γύρω από τη Θ.Ι.(2). Έστω $\Delta \ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(2). Έχουμε:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } w_3 = F'_{ελ}$$

$$\text{ή } mg = k\Delta \ell_2$$

$$\text{ή } \Delta \ell_2 = \frac{mg}{k}$$

Το πλάτος A της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_3 , είναι ίσο με:

$$A = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2$$

$$\text{ή } A = \frac{2mg}{k}$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_3 είναι ίση με:

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\text{ή } E = \frac{1}{2} k \left(\frac{2mg}{k} \right)^2$$

$$\text{ή } E = \frac{2m^2 g^2}{k}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 προκύπτει ότι:

$$1,5\lambda = 0,6$$

$$\text{ή } \lambda = 0,4 \text{ m}$$

Από το διάγραμμα (β) προκύπτει ότι:

$$2T = 0,4 \text{ s}$$

$$\text{ή } T = 0,2 \text{ s}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \lambda f$$

$$\text{ή } v_\delta = \frac{\lambda}{T}$$

$$\text{ή } v_\delta = 2 \text{ m/s}$$

Γ2. Από τα διαγράμματα (α) και (β) προκύπτει ότι το πλάτος του κύματος είναι $A = 0,05 \text{ m}$. Όπως προκύπτει από το διάγραμμα (α) τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα θέτει σε ταλάντωση το σημείο που βρίσκεται στη θέση $x = 2\lambda$ ή $x = 0,8 \text{ m}$. Από τον ορισμό της ταχύτητας διάδοσης του κύματος, έχουμε:

$$v_\delta = \frac{x}{t_1}$$

$$\text{ή } t_1 = \frac{x}{v_\delta}$$

$$\text{ή } t_1 = 0,4 \text{ s}$$

Η εξίσωση του στιγμιότυπου του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = 0,05 \eta \mu 2\pi (2 - 2,5x) \text{ (S.I.)}$$

Γ3. Όπως προκύπτει από το διάγραμμα (β) το σημείο K αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_K = 2 \text{ s}$. Η χρονική στιγμή t_2 στην οποία το σημείο K φτάνει για πρώτη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσης του στην ακραία θετική του θέση είναι ίση με:

$$t_2 = t_K + \frac{T}{4}$$

$$\text{ή } t_2 = 2,05 \text{ s}$$

Η θέση x_K του υλικού σημείου K στον άξονα $x'Ox$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \frac{x_K}{t_K}$$

$$\text{ή } x_K = v_\delta t_K$$

$$\text{ή } x_K = +4 \text{ m}$$

Η θέση x_Λ του υλικού σημείου Λ στον άξονα $x'Ox$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \frac{x_\Lambda}{t_2}$$

$$\text{ή } x_\Lambda = v_\delta t_2$$

$$\text{ή } x_{\Lambda} = +4,1 \text{ m}$$

Οι φάσεις των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ μια τυχαία χρονική στιγμή t στην οποία ταλαντώνονται και τα δύο σημεία δίνονται από τις σχέσεις:

$$\varphi_K = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) \quad (1)$$

και

$$\varphi_{\Lambda} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\Lambda}}{\lambda} \right) \quad (2) \text{ αντίστοιχα.}$$

Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι:

$\Delta\varphi = \varphi_K - \varphi_{\Lambda}$, ή λόγω των σχέσεων (1) και (2):

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{x_{\Lambda} - x_K}{\lambda}$$

$$\text{ή } \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Γ4. Έστω y_K η απομάκρυνση του υλικού σημείου Κ τις χρονικές στιγμές στις οποίες η επιτάχυνση του είναι $\alpha_K = -50 \text{ m/s}^2$.

Έχουμε:

$$\alpha_K = -\omega^2 y_K$$

$$\text{ή } \alpha_K = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y_K$$

$$\text{ή } y_K = +0,05 \text{ m}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$y_K = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y_K = 0,05 \eta \mu \varphi_K \quad (3)$$

Από τη σχέση (3) για $y_K = +0,05 \text{ m}$, προκύπτει:

$$\eta \mu \varphi_K = 1$$

$$\text{ή } \eta \mu \varphi_K = \eta \mu \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{ή } \varphi_K = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Έχουμε:

$$\Delta\varphi = \varphi_K - \varphi_{\Lambda}$$

$$\text{ή } \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi_{\Lambda}$$

$$\text{ή } \varphi_{\Lambda} = 2\kappa\pi, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Η ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$v_{\Lambda} = \omega A \sigma \nu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\Lambda}}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v_{\Lambda} = \frac{2\pi}{T} A \sigma \nu \varphi_{\Lambda}$$

$$\text{ή } v_{\Lambda} = \frac{2\pi}{T} A \sigma \nu 2\kappa\pi$$

$$\text{ή } v_{\Lambda} = +\frac{2\pi}{T} A$$

$$\text{ή } v_{\Lambda} = +0,5\pi \text{ m/s}$$

Γ5. Έστω y η απομάκρυνση των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου τα οποία τη χρονική στιγμή t_3 έχουν ταχύτητες μέτρου $v = 0,3\pi \text{ m/s}$. Από την Α.Δ.Ε. της ταλάντωσης για ένα από τα σημεία αυτά, έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D y^2$$

$$\text{ή } m \omega^2 A^2 = m v^2 + m \omega^2 y^2$$

$$\text{ή } y = \pm \sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}}$$

$$\text{ή } y = \pm 0,04 \text{ m}$$

Έστω x η απόσταση στην οποία έχει διαδοθεί το κύμα από την αρχή Ο ($x = 0$) του άξονα $x'Ox$ τη χρονική στιγμή $t_3 = 0,6 \text{ s}$. Έχουμε:

$$x = v \delta t_3$$

$$\text{ή } x = 1,2 \text{ m}$$

Χωρίζουμε την απόσταση x σε N τμήματα

$$\text{μήκους } \frac{\lambda}{4} \text{ το καθένα:}$$

$$N = \frac{x}{\frac{\lambda}{4}}$$

$$\text{ή } N = \frac{4x}{\lambda}$$

$$\text{ή } N = 12$$

Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Ο τη χρονική στιγμή t_3 είναι:

$$y_O = A \eta \mu \frac{2\pi t_3}{T}$$

$$\text{ή } y_O = 0,05 \eta \mu 6\pi \text{ m}$$

$$\text{ή } y_O = 0$$

Η απομάκρυνση του υλικού σημείου που βρίσκεται στη θέση $x = +\frac{\lambda}{4} = +0,1 \text{ m}$ τη

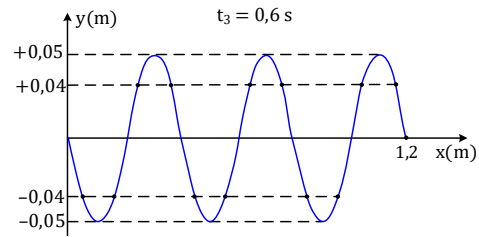
χρονική στιγμή t_3 δίνεται από τη σχέση:

$$y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t_3}{T} - \frac{4}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = 0,05\eta\mu(5,5\pi) \text{ m}$$

$$\text{ή } y = -0,05 \text{ m}$$

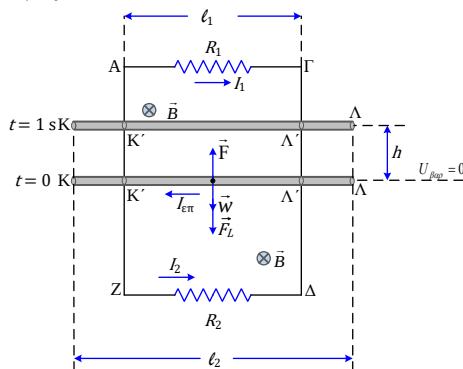
Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του σχήματος τη χρονική στιγμή t_3 .



Όπως φαίνεται από το προηγούμενο στιγμιότυπο, ο αριθμός των υλικών σημείων τη χρονική στιγμή t_3 έχουν απομάκρυνση $y = \pm 0,04 \text{ m}$ είναι ίσο με 12.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα επαγωγικά ρεύματα που διαρρέουν το κύκλωμα και οι δυνάμεις που δέχεται ο αγωγός ΚΛ.



Έστω $R_{K'\Lambda'}$ η ωμική αντίσταση του $K'\Lambda'$ του αγωγού ΚΛ. Ισχύει:

$$R_{K\Lambda} = \rho \frac{\ell_2}{A} \quad (1) \text{ και } R_{K'\Lambda'} = \rho \frac{\ell_1}{A} \quad (2),$$

όπου A το εμβαδόν διατομής του αγωγού ΚΛ. Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{R_{K\Lambda}}{R_{K'\Lambda'}} = \frac{\ell_2}{\ell_1}$$

$$\text{ή } R_{K'\Lambda'} = \frac{\ell_1}{\ell_2} R_{K\Lambda}$$

$$\text{ή } R_{K'\Lambda'} = 2 \, \Omega$$

Το μέτρο της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο κύκλωμα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{|d\Phi|}{dt}$$

$$\text{ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{BdS}{dt}$$

$$\text{ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{Bdx\ell_1}{dt}$$

$$\text{ή } E_{\varepsilon\pi} = Bv\ell_1 \quad (3)$$

Επειδή ο αγωγός ΚΛ εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα με επιτάχυνση μέτρου α , η χρονική εξίσωση του μέτρου v της ταχύτητας του δίνεται από τη σχέση:

$$v = at \quad (4)$$

Η σχέση (3), λόγω της σχέσης (4), γίνεται:

$$E_{\varepsilon\pi} = B\ell_1 at \quad (5)$$

Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{1,2}$ του συστήματος των αντιστάτων R_1 και R_2 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{1}{R_{1,2}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\text{ή } R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\text{ή } R_{1,2} = 2 \, \Omega$$

Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{o\lambda}}$$

$$\text{ή } I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{1,2} + R_{K'\Lambda'}},$$

ή λόγω της σχέσης (5):

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{B\ell_1 \alpha}{R_{1,2} + R_{K'\Lambda'}} t$$

$$\text{ή } I_{\varepsilon\pi} = 3t \text{ (S.I.)} \quad (6)$$

Δ2. Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του αγωγού ΚΛ, έχουμε:

$$\Sigma F = m\alpha$$

$$\text{ή } F - w - F_L = m\alpha$$

$$\text{ή } F = mg + BI_{\varepsilon\pi}\ell_1 + m\alpha,$$

ή λόγω της σχέσης (6):

$$F = 16 + 6t \text{ (S.I.)} \quad (7)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (7) για $t = 1 \text{ s}$ το μέτρο της δύναμης F είναι ίσο με: $F = 22 \text{ N}$. Σύμφωνα με τη σχέση (4), το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού ΚΛ τη χρονική στιγμή $t = 1 \text{ s}$, είναι ίσο με $v = 6 \text{ m/s}$. Η ισχύς της δύναμης F τη χρονική στιγμή $t = 1 \text{ s}$ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$P_F = F \cdot v$$

$$\text{ή } P_F = 132 \text{ W}$$

Δ3. Η χρονική εξίσωση της τάσης $V_{K\Lambda}$ στα άκρα του αγωγού ΚΛ προκύπτει από τη σχέση: $V_{K\Lambda} = I_{\varepsilon\pi} R_{1,2}$, ή λόγω της σχέσης (6): $V_{K\Lambda} = 6t$ (S.I.) (8)

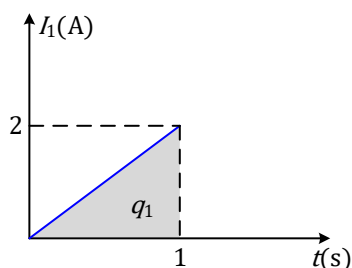
Η χρονική εξίσωση της έντασης I_1 του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_1 προκύπτει από τη σχέση:

$$I_1 = \frac{V_{K\Lambda}}{R_1},$$

ή λόγω της σχέσης (8):

$$I_1 = 2t \text{ (S.I.)}$$

Στο διάγραμμα του παρακάτω σχήματος φαίνεται η γραφική παράσταση της έντασης I_1 του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 1$ s.



Το επαγωγικό φορτίο q_1 που περνά από μία διατομή του αντιστάτη R_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 έχει μέτρο αριθμητικά ίσο με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν που φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα. Συνεπώς είναι: $q_1 = 1$ C.

Δ4. Έστω $Q_{R_{o\lambda}}$ η θερμότητα Joule που αποδίδεται από το κύκλωμα προς το περιβάλλον από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 1$ s.

Από την Α.Δ.Ε για το κύκλωμα έχουμε:

$$E_{\alpha\rho\chi} + E_{\pi\rho\sigma\phi} = E_{\tau\epsilon\lambda} + E_{\alpha\pi\omega\lambda}$$

$$\text{ή } K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} + W_F = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} + Q_{R_{o\lambda}} \quad (9)$$

Αν θεωρήσουμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που βρίσκεται ο αγωγός ΚΛ τη χρονική στιγμή $t = 0$, η σχέση (9) γίνεται:

$$0 + 0 + W_F = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + Q_{R_{o\lambda}} \quad (10)$$

Η μετατόπιση h του αγωγού ΚΛ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 1$ s, υπολογίζεται από τον τύπο:

$$h = \frac{1}{2}at^2$$

$$\text{ή } h = 3 \text{ m}$$

Έστω dQ_{R_1} και dQ_{R_2} τα στοιχειώδη ποσά θερμότητας που εκλύουν οι αντιστάτες R_1

και R_2 αντίστοιχα, λόγω φαινομένου Joule, στο στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt .

Ισχύει:

$$dQ_1 = I_1^2 R_1 dt \quad (11)$$

και

$$dQ_2 = I_2^2 R_2 dt \quad (12)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (11)

και (12) έχουμε:

$$\frac{dQ_1}{dQ_2} = \left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2 \frac{R_1}{R_2}$$

$$\text{ή } \frac{dQ_1}{dQ_2} = \left(\frac{\frac{V_{K\Lambda}}{R_1}}{\frac{V_{K\Lambda}}{R_2}}\right)^2 \frac{R_1}{R_2}$$

$$\text{ή } \frac{dQ_1}{dQ_2} = \frac{R_2}{R_1} \text{ ή } \frac{dQ_1}{dQ_2} = 2 \quad (13)$$

Από τη σχέση (13) προκύπτει ότι οι θερμότητες Joule Q_1 και Q_2 που αποδίδονται από τους αντιστάτες R_1 και R_2 αντίστοιχα προς το περιβάλλον, από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 1$ s συνδέονται με τη σχέση:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = 2$$

$$\text{ή } Q_1 = 2Q_2$$

$$\text{ή } Q_1 = 4 \text{ J}$$

Έστω $dQ_{R_{K'\Lambda'}}$ η στοιχειώδης θερμότητα Joule που εκλύεται από το τμήμα $K'\Lambda'$ του αγωγού ΚΛ σε χρόνο dt . Είναι:

$$dQ_{R_{K'\Lambda'}} = I_{\varepsilon\pi}^2 R_{K'\Lambda'} dt \quad (14)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (12) και (14), έχουμε:

$$\frac{dQ_2}{dQ_{R_{K'\Lambda'}}} = \frac{I_2^2 R_2 dt}{I_{\varepsilon\pi}^2 R_{K'\Lambda'} dt}$$

$$\text{ή } \frac{dQ_2}{dQ_{R_{K'\Lambda'}}} = \left(\frac{I_2}{I_{\varepsilon\pi}}\right)^2 \frac{R_2}{R_{K'\Lambda'}}$$

$$\text{ή } \frac{dQ_2}{dQ_{R_{K'\Lambda'}}} = \frac{\left(\frac{V_{K\Lambda}}{R_2}\right)^2 R_2}{\left(\frac{V_{K\Lambda}}{R_{1,2}}\right)^2 R_{K'\Lambda'}}$$

$$\text{ή } \frac{dQ_2}{dQ_{R_{K'\Lambda'}}} = \frac{R_{1,2}^2}{R_2 \cdot R_{K'\Lambda'}}$$

$$\text{ή } \frac{dQ_2}{dQ_{R_{K'\Lambda'}}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ή } dQ_{R_{K'\Lambda'}} = 3dQ_2 \quad (15)$$

Από τη σχέση (15) προκύπτει ότι η σχέση που συνδέει τις θερμότητες Joule $Q_{R_{K'\Lambda'}}$ και Q_2 είναι:

$$Q_{R_{K'\Lambda'}} = 3Q_2$$

$$\text{ή } Q_{R_{K'\Lambda'}} = 6 \text{ J}$$

Επομένως η συνολική θερμότητα Joule $Q_{R_{o\lambda}}$ που εκλύεται από το κύκλωμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 1$ s είναι ίση με:

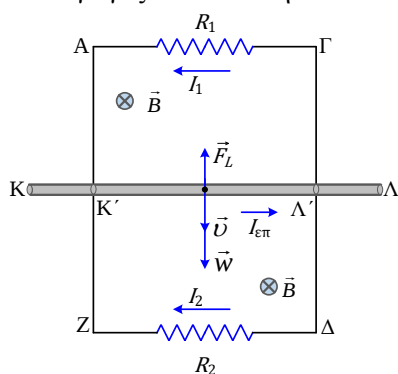
$$Q_{R_{o\lambda}} = Q_1 + Q_2 + Q_{R_{K'\Lambda'}}$$

$$\text{ή } Q_{R_{o\lambda}} = 12 \text{ J}$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (10) προκύπτει ότι:

$$W_F = 60 \text{ J}$$

Δ5. Μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ ο αγωγός ΚΛ συνεχίζει για λίγο την κίνηση του προς τα πάνω μέχρι να σταματήσει στιγμιαία και αμέσως μετά αρχίζει να κινείται προς τα κάτω. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα ρεύματα που διαρρέουν το κύκλωμα και οι δυνάμεις που δέχεται ο αγωγός ΚΛ κατά την κάθοδο του.



Ο αγωγός ΚΛ αποκτά την οριακή του ταχύτητα $\vec{v}_{o\rho}$ κατά την πτώση του, τη χρονική στιγμή κατά την οποία η συνισταμένη δύναμη που δέχεται γίνεται ίση με το μηδέν. Συνεπώς, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } w = F_L$$

$$\text{ή } mg = BI_{\epsilon\pi}\ell_1$$

$$\text{ή } mg = B \frac{Bv_{o\rho}\ell_1}{R_{1,2}+R_{K'\Lambda'}}\ell_1$$

$$\text{ή } mg = \frac{B^2\ell_1^2}{R_{1,2}+R_{K'\Lambda'}}v_{o\rho}$$

$$\text{ή } v_{o\rho} = \frac{mg(R_{1,2}+R_{K'\Lambda'})}{B^2\ell_1^2}$$

$$\text{ή } v_{o\rho} = 10 \text{ m/s}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του αγωγού τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το μέτρο της ταχύτητας του είναι ίσο με $v = \frac{v_{o\rho}}{2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ υπολογίζεται

από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt}$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt}$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = \Sigma Fv \quad (16)$$

Υπάρχουν δύο χρονικές στιγμές μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ στις οποίες ο αγωγός έχει ταχύτητα μέτρου $v = 5 \text{ m/s}$. Η πρώτη χρονική στιγμή t_1 είναι κατά την άνοδο του πριν ακινητοποιηθεί στιγμιαία.

Τη χρονική στιγμή t_1 από τη σχέση (16) προκύπτει:

$$\frac{dK}{dt} = -(mg + F_L)v$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = -75 \text{ J/s}$$

Η δεύτερη χρονική στιγμή t_2 είναι κατά την κάθοδο του. Τη χρονική στιγμή t_2 από τη σχέση (16) προκύπτει:

$$\frac{dK}{dt} = (mg - F_L)v$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = \left(mg - \frac{B^2\ell_1^2}{R_{1,2}+R_{K'\Lambda'}}v \right)v$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = 25 \text{ J/s}$$

6^ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

A1. δ, A2. α, A3. δ, A4. β

A5. α. Σ, β. Σ, γ. Σ, δ. Σ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η α.

Έστω I η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το σωληνοειδές (Α). Ισχύει: $I = \frac{V}{R}$ (1), όπου R η ωμική αντίσταση του σωληνοειδούς (Α). Το μέτρο B της έντασης του ομογενούς μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο εσωτερικό του σωληνοειδούς (Α) υπολογίζεται από τον τύπο: $B = \mu_0 \frac{IN}{\ell}$, ή λόγω της σχέσης (1):

$B = \mu_0 \frac{VN}{R\ell}$ (2). Η μαγνητική ροή Φ που διέρχεται από μία σπείρα που βρίσκεται στο κέντρο του σωληνοειδούς (Α) υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Phi = BA$$

$$\text{ή } \Phi = B\pi\alpha^2,$$

ή λόγω της σχέσης (2):

$$\Phi = k_\mu \frac{\pi VN\alpha^2}{R\ell} \quad (3)$$

Η ωμική αντίσταση R του σωληνοειδούς δίνεται από τη σχέση: $R = \rho \frac{L}{S_{\text{συρμ}}}$ (4),

όπου ρ η ειδική αντίσταση, L το μήκος και $S_{\text{συρμ}}$ το εμβαδόν διατομής του σύρματος από το οποίο είναι φτιαγμένο το σωληνοειδές (Α). Η ωμική αντίσταση R' του σωληνοειδούς (Γ) δίνεται από τη σχέση: $R' = \rho \frac{L}{S_{\text{συρμ}}}$ (5). Συνεπώς: $R' = R$ (6).

Έστω I' η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το σωληνοειδές (Γ). Ισχύει:

$$I' = \frac{V}{R'},$$

ή λόγω της σχέσης (6):

$$I' = \frac{V}{R} \quad (7)$$

Το μήκος L του σύρματος από το οποίο είναι φτιαγμένο το σωληνοειδές (Α), ο αριθμός N των σπειρών του και η ακτίνα α μίας σπείρας του συνδέονται με τη σχέση: $L = N2\pi\alpha$ (8). Στο σωληνοειδές (Γ) ισχύει ότι: $L = N'2\pi\alpha'$ (9). Από τις σχέσεις (8) και (9) προκύπτει ότι:

$$N'\alpha' = N\alpha$$

$$\text{ή } N' = 2N \quad (10)$$

Το μέτρο B' της έντασης του ομογενούς μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο

εσωτερικό του σωληνοειδούς (Γ) είναι ίσο με:

$$B' = \mu_0 \frac{I'N'}{\ell'},$$

ή λόγω της σχέσης (7)

$$B' = \mu_0 \frac{VN'}{R\ell'} \quad (11)$$

Η μαγνητική ροή Φ' που διέρχεται από μία σπείρα που βρίσκεται στο κέντρο του σωληνοειδούς (Γ) είναι ίση με:

$$\Phi' = B'A'$$

$$\text{ή } \Phi' = B'\pi\alpha'^2,$$

ή λόγω της σχέσης (11):

$$\Phi' = \mu_0 \frac{\pi VN'\alpha'^2}{R\ell'} \quad (12)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (12) και (3) προκύπτει:

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{N'\alpha'^2\ell}{N\alpha^2\ell'},$$

ή λόγω της σχέσης (10):

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{2N\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\ell}{N\alpha^2\frac{\ell}{2}}$$

$$\text{ή } \frac{\Phi'}{\Phi} = 1$$

$$\text{ή } \Phi' = \Phi$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Για $x = x_1 = 0,25\lambda$, έχουμε:

$$2d + 2x_1 + \pi R - (2d + \pi R) = (2N_1 + 1) \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή } 2x_1 = (2N_1 + 1) \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή } N_1 = 0$$

Για $x = x_2 = 2,25\lambda$, έχουμε:

$$2d + 2x_2 + \pi R - (2d + \pi R) = (2N_2 + 1) \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή } 2x_2 = (2N_2 + 1) \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή } N_2 = 4$$

Από την εικόνα της συμβολής προκύπτει ότι τα μέγιστα της έντασης του ήχου προκύπτουν για $N = 1, 2, 3, 4$.

Επομένως ο ανιχνευτής μετρά 4 μέγιστα της έντασης του ήχου.

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Έστω λ_1 και λ_2 τα μήκη κύματος των φωτονίων που αντιστοιχούν στις συχνότητες f_1 και f_2 . Έχουμε:

$$c = \lambda_1 f_1$$

$$\text{ή } \lambda_1 = \frac{c}{f_1} \quad (1)$$

και

$$c = \lambda_2 f_2$$

$$\text{ή } \lambda_2 = \frac{c}{f_2} \quad (2)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{f_2}{f_1} > 1$$

$$\text{ή } \lambda_1 > \lambda_2$$

Έστω λ'_1 και λ'_2 τα μήκη κύματος των φωτονίων μετά τη σκέδαση τους. Έχουμε:

$$\lambda'_1 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi)$$

$$\text{ή } \lambda'_1 = \lambda_1 + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi) \quad (3)$$

και

$$\lambda'_2 - \lambda_2 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi)$$

$$\text{ή } \lambda'_2 = \lambda_2 + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi) \quad (4)$$

Επειδή είναι $\lambda_1 > \lambda_2$ και οι γωνίες σκέδασης των δύο φωτονίων είναι οι ίδιες, από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι: $\lambda'_1 > \lambda'_2$.

Οι ενέργειες E_1 και E_2 των φωτονίων πριν από τη σκέδαση δίνονται από τις σχέσεις:

$$E_1 = hf_1$$

$$\text{ή } E_1 = \frac{hc}{\lambda_1}$$

$$\text{ή } \lambda_1 = \frac{hc}{E_1} \quad (5)$$

και

$$E_2 = hf_2$$

$$\text{ή } E_2 = \frac{hc}{\lambda_2}$$

$$\text{ή } \lambda_2 = \frac{hc}{E_2} \quad (6)$$

Για τις ενέργειες E'_1 και E'_2 των φωτονίων μετά τη σκέδαση, ισχύει:

$$E'_1 = \frac{hc}{\lambda'_1}$$

$$\text{ή } \lambda'_1 = \frac{hc}{E'_1} \quad (7)$$

και

$$E'_2 = \frac{hc}{\lambda'_2}$$

$$\text{ή } \lambda'_2 = \frac{hc}{E'_2} \quad (8)$$

Η κινητική ενέργεια K_1 του ανακρουόμενου ηλεκτρονίου (1) μετά τη σκέδαση δίνεται από τη σχέση: $K_1 = E_1 - E'_1$ (9).

Από τη σχέση (3), λόγω των σχέσεων (5) και (7) έχουμε:

$$\frac{hc}{E'_1} = \frac{hc}{E_1} + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi)$$

$$\text{ή } \frac{1}{E'_1} - \frac{1}{E_1} = \frac{1 - \cos \varphi}{m_e c^2}$$

$$\text{ή } \frac{E_1 - E'_1}{E'_1 E_1} = \frac{1 - \cos \varphi}{m_e c^2} \quad \text{ή λόγω της σχέσης}$$

$$(9): \frac{K_1}{E'_1 E_1} = \frac{1 - \cos \varphi}{m_e c^2} \quad (10).$$

Η κινητική ενέργεια K_2 του ανακρουόμενου ηλεκτρονίου (2) δίνεται από τη σχέση:

$$K_2 = E_2 - E'_2 \quad (11)$$

Από τη σχέση (4), λόγω των σχέσεων (6) και (8) έχουμε:

$$\frac{hc}{E'_2} = \frac{hc}{E_2} + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi)$$

$$\text{ή } \frac{1}{E'_2} - \frac{1}{E_2} = \frac{1 - \cos \varphi}{m_e c^2}$$

$$\text{ή } \frac{E_2 - E'_2}{E'_2 E_2} = \frac{1 - \cos \varphi}{m_e c^2} \quad \text{ή λόγω της σχέσης}$$

$$(11): \frac{K_2}{E'_2 E_2} = \frac{1 - \cos \varphi}{m_e c^2} \quad (12).$$

Από τις σχέσεις (10) και (12) προκύπτει:

$$\frac{K_1}{E'_1 E_1} = \frac{K_2}{E'_2 E_2}$$

$$\text{ή } \frac{K_1}{K_2} = \frac{E'_1 E_1}{E'_2 E_2}$$

$$\text{ή } \frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{hc}{\lambda'_1} \frac{hc}{\lambda_1}}{\frac{hc}{\lambda'_2} \frac{hc}{\lambda_2}}$$

$$\text{ή } \frac{K_1}{K_2} = \frac{\lambda'_2 \lambda_2}{\lambda'_1 \lambda_1} \quad (13)$$

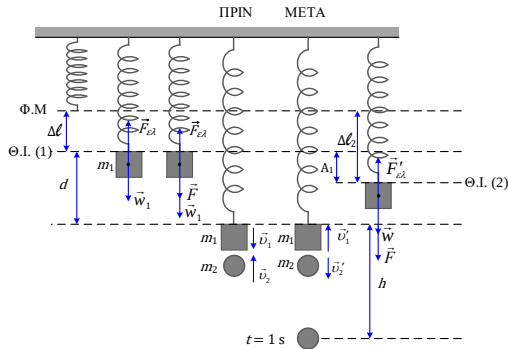
Επειδή είναι $\lambda_1 > \lambda_2$ και $\lambda'_1 > \lambda'_2$, από τη σχέση (13) προκύπτει ότι:

$$\frac{K_1}{K_2} < 1$$

$$\text{ή } K_1 < K_2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Έστω v'_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω με επιτάχυνση ίσου μέτρου με την επιτάχυνση της βαρύτητας g . Συνεπώς, ισχύει ότι:

$$h = v'_2 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$\text{ή } v'_2 = 1 \text{ m/s}$$

Γ2. Επειδή η κρούση είναι ελαστική και τα σώματα έχουν ίσες μάζες, ανταλλάσσουν ταχύτητες κατά την κρούση. Έστω u_1 και u'_1 τα μέτρα των ταχυτήτων του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν και αμέσως μετά την κρούση αντίστοιχα. Ισχύει:

$$u_1 = v'_2$$

$$\text{ή } u_1 = 1 \text{ m/s}$$

και

$$u'_1 = v_2$$

$$\text{ή } u'_1 = 1 \text{ m/s}$$

Γ3. Μετά την κρούση το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας τη Θ.Ι. (1) που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Το πλάτος A_2 της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση υπολογίζεται από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση του σώματος Σ_1 μετά την κρούση. Έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k A_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} k d^2$$

$$\text{ή } A_2 = \sqrt{\frac{m_1}{k} v_1'^2 + d^2}$$

$$\text{ή } A_2 = 0,1\sqrt{2} \text{ m}$$

Γ4. Έστω $\Delta \ell_1$ η παραμόρφωση του ελατηρίου τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία η δυναμική του ενέργεια είναι ίση με $U_{ελ} = 2 \text{ J}$ για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$. Ισχύει:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell_1)^2$$

$$\text{ή } \Delta \ell_1 = 0,2 \text{ m}$$

Έστω ότι το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_1 είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta \ell_1$ σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Συνεπώς, το μέτρο της απομάκρυνσης x_1 του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t_1 , είναι ίσο με $|x_1| = \Delta \ell + \Delta \ell_1$ (4), όπου $\Delta \ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 . Από τη συνθήκη ισορροπίας, έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } m_1 g = F_{ελ}$$

$$\text{ή } m_1 g = k \Delta \ell$$

$$\text{ή } \Delta \ell = 0,1 \text{ m}$$

Επομένως, από τη σχέση (4) προκύπτει ότι: $|x_1| = 0,3 \text{ m}$ που είναι άτοπο γιατί:

$$|x_1| > A$$

Έστω ότι το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_1 είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta \ell_1 = 0,2 \text{ m}$ σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Επειδή είναι $\Delta \ell_1 > \Delta \ell$, το σώμα θα βρίσκεται τη χρονική στιγμή t_1 σε μία θέση κάτω από τη θέση ισορροπίας του και έστω ότι η απομάκρυνση του σε αυτή τη θέση είναι ίση με x_2 . Ισχύει ότι:

$$|x_2| = \Delta \ell_1 - \Delta \ell$$

$$\text{ή } |x_2| = 0,1 \text{ m}$$

$$\text{ή } x_2 = +0,1 \text{ m}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_1 κινείται προς τα κάτω επομένως είναι $v > 0$. Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του σώματος Σ_1 μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} k x_2^2$$

$$\text{ή } v = + \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x_2^2)}$$

$$\text{ή } v = +1 \text{ m/s}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt}$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F dx}{dt}$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = \Sigma F v$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = -D x_2 v$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = -10 \text{ J/s}$$

Γ5. Από το Θ.Μ.Κ.Ε για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή που ξεκίνησε να κινείται μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε:

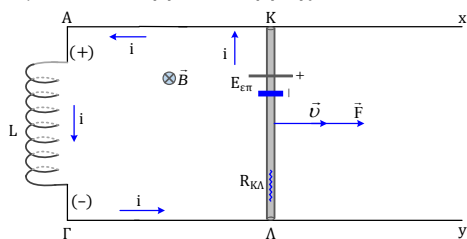
$$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_F + W_w + W_{F_{\epsilon\lambda}}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = Fd + m_1 g d + U_{\epsilon\lambda(\alpha\rho\chi)} - U_{\epsilon\lambda(\tau\epsilon\lambda)}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = Fd + m_1 g d + \frac{1}{2} k(\Delta\ell)^2 - \frac{1}{2} k(\Delta\ell + d)^2$$

ΘΕΜΑ Δ (νέο)

Δ1. α. Η πολικότητα της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα του αγωγού ΚΛ προσδιορίζεται με βάση τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού και φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Με βάση την πολικότητα σχεδιάζουμε το επαγωγικό ρεύμα που διαρρέει το βρόχο ΚΑΓΛΚ.



Αφού η ένταση του ρεύματος στο βρόχο ΚΑΓΛΚ αυξάνεται στο πηνίο εμφανίζεται ΗΕΔ από αυτεπαγωγή, η οποία έχει τέτοια πολικότητα, ώστε να αντιτίθεται στην αύξηση της έντασης του ρεύματος, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

β. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της έντασης του ρεύματος προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος είναι: $\frac{di}{dt} = +2 \text{ A/s}$.

Επομένως, το μέτρο της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου, είναι:

$$|E_{\text{αυτ}}| = L \left| \frac{di}{dt} \right|$$

$$\text{ή } E_{\text{αυτ}} = 2 \text{ V}$$

$$\text{ή } F = 10 \text{ N}$$

Πριν από την κρούση το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας τη Θ.Ι.(2) που φαίνεται στο σχήμα του ερωτήματος Γ1. Στη [Θ.Ι.(2)] έχουμε:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } F + w = F'_{\epsilon\lambda}$$

$$\text{ή } F + m_1 g = k \Delta\ell_2$$

$$\text{ή } \Delta\ell_2 = 0,2 \text{ m}$$

Όπως προκύπτει από το σχήμα του ερωτήματος Γ1 το πλάτος A_1 της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι:

$$A_1 = \Delta\ell_2 - \Delta\ell$$

$$\text{ή } A_1 = 0,1 \text{ m}$$

Δ2. Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα δίνεται από τη σχέση:

$$i = \frac{E_{\epsilon\pi} - |E_{\text{αυτ}}|}{R_{\text{ολ}}}$$

$$\text{ή } i = \frac{B v \ell - |E_{\text{αυτ}}|}{R_{\text{ΚΛ}} + R_{\pi}}$$

$$\text{ή } v = \frac{i(R_{\text{ΚΛ}} + R_{\pi}) + |E_{\text{αυτ}}|}{B \ell}$$

$$\text{ή } v = 10 + 8t \text{ (S.I.) (1)}$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $v_0 = 10$

$$\text{m/s και } \frac{dv}{dt} = \alpha = 8 \text{ m/s}^2$$

Δ3. Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε:

$$\Sigma F = m a$$

$$\text{ή } F - F_L = m a$$

$$\text{ή } F = B i \ell + m a$$

$$\text{ή } F = 6 + 2t \text{ (S.I.) (2)}$$

Από τη σχέση (1) για $t = t_1 = 1 \text{ s}$ προκύπτει $v_1 = 18 \text{ m/s}$, ενώ από τη σχέση (2) για $t = t_1 = 1 \text{ s}$ προκύπτει: $F = 8 \text{ N}$.

Ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη $\vec{F}$ προσφέρει ενέργεια στον αγωγό ΚΛ τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\frac{dW_F}{dt} = P_F = F v$$

$$\text{ή } \frac{dW_F}{dt} = 144 \text{ J/s}$$

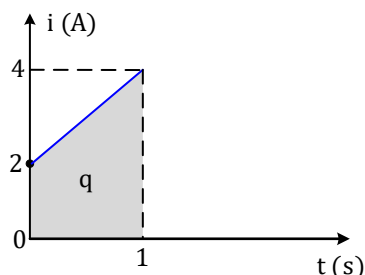
Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της έντασης του ρεύματος για $t = t_1 = 1 \text{ s}$ προκύπτει $i_1 = 4 \text{ A}$.

Ο ρυθμός με τον οποίο αποθηκεύεται ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$P_{\pi\eta\nu} = |E_{\alpha\upsilon\tau}| i_1$$

$$\text{ή } P_{\pi\eta\nu} = 8 \text{ J/s}$$

Δ4. Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται η γραφική παράσταση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$.



Το ζητούμενο φορτίο είναι ίσο με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν του τραπεζιού που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Είναι:

$$q = \frac{2+4}{2} \cdot 1 \text{ C}$$

$$\text{ή } q = 3 \text{ C}$$

Δ5. α. Τη χρονική στιγμή t_2 αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη δ_2 η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο είναι $i_1 = 4 \text{ A}$. Έχουμε:

$$i_1 = \frac{|E_{\alpha\upsilon\tau}|}{R_1 + R_\pi}$$

$$\text{ή } |E_{\alpha\upsilon\tau}| = i_1(R_1 + R_\pi)$$

$$\text{ή } |E_{\alpha\upsilon\tau}| = 12 \text{ V}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο τη χρονική στιγμή t_2 αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη δ_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

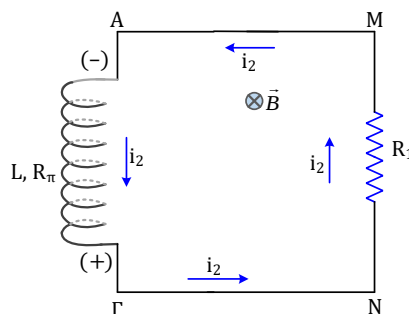
$$|E_{\alpha\upsilon\tau}| = L \left| \frac{di}{dt} \right|$$

$$\text{ή } \left| \frac{di}{dt} \right| = 12 \text{ A/s}$$

$$\text{ή } \frac{di}{dt} = -12 \text{ A/s}$$

.

β. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται πως διαμορφώνεται το κύκλωμα τη χρονική στιγμή t_2 .



Τη χρονική στιγμή t_2 η ένταση του ρεύματος μειώνεται, οπότε η πολικότητα της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου είναι τέτοια, ώστε να αντιστέκεται στη μείωση της έντασης του ρεύματος. Επομένως στο άκρο Γ του πηνίου εμφανίζεται θετικός πόλος (+), ενώ στο άκρο του Α εμφανίζεται αρνητικός πόλος. Η τάση V_π στα άκρα του πηνίου τη χρονική στιγμή t_2 είναι ίση με την τάση στα άκρα του αντιστάτη R_1 . Επομένως, έχουμε:

$$V_\pi = i_2 R_1$$

$$\text{ή } i_2 = 2 \text{ A}$$

Η συνολική θερμότητα Joule που εκλύεται από το κύκλωμα από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q_{R_{\text{ολ}}} = U_{t_1} - U_{t_2}$$

$$\text{ή } Q_{R_{\text{ολ}}} = \frac{1}{2} Li_1^2 - \frac{1}{2} Li_2^2$$

$$\text{ή } Q_{R_{\text{ολ}}} = 6 \text{ J}$$

Έχουμε:

$$Q_{R_{\text{ολ}}} = Q_{R_1} + Q_{R_2} \quad (2)$$

Όμως:

$$\frac{Q_{R_1}}{Q_{R_\pi}} = \frac{R_1}{R_\pi}$$

$$\text{ή } \frac{Q_{R_1}}{Q_{R_\pi}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ή } Q_{R_\pi} = 2Q_{R_1} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει:

$$Q_{R_1} = 2 \text{ J}$$

7^ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

A1. β, A2. α, A3. β, A4. δ

A5. α. Σ, β. Λ, γ. Σ, δ. Σ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β.

Όταν το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι λ_1 η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων είναι ίση με K . Σύμφωνα με τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein, ισχύει:

$$K = \frac{hc}{\lambda_1} - \phi$$

$$\text{ή } \frac{hc}{\lambda_1} = K + \phi \quad (1)$$

Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας με την οποία εισέρχονται στο ομογενές μαγνητικό πεδίο τα φωτοηλεκτρόνια που έχουν κινητική ενέργεια K . Έχουμε:

$$K = \frac{1}{2} m_e v_1^2$$

$$\text{ή } v_1 = \sqrt{\frac{2K}{m_e}} \quad (2)$$

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που διαγράφουν δίνεται από τη σχέση:

$$R_1 = \frac{m_e v_1}{B |q_e|} \quad \text{ή λόγω της σχέσης (2):}$$

$$R_1 = \frac{m_e \sqrt{\frac{2K}{m_e}}}{B |q_e|}$$

$$\text{ή } R_1 = \frac{\sqrt{2m_e K}}{B |q_e|} \quad (3)$$

Έστω λ_2 το μήκος κύματος της νέας ακτινοβολίας. Έχουμε:

$$\lambda_2 = \lambda_1 - \frac{50}{100} \lambda_1$$

$$\text{ή } \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2}$$

Έστω K' η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων που εξέρχονται από την κάθοδο του μετάλλου, όταν η προσπίπτουσα ακτινοβολία έχει μήκος κύματος λ_2 . Έχουμε:

$$K' = \frac{hc}{\lambda_2} - \phi$$

$$\text{ή } K' = \frac{hc}{\frac{\lambda_1}{2}} - \phi$$

$$\text{ή } K' = \frac{2hc}{\lambda_1} - \phi \quad \text{ή λόγω της σχέσης (1):}$$

$$K' = 2K + 2\phi - \phi$$

$$\text{ή } \phi = K' - 2K \quad (4)$$

Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας με την οποία εισέρχονται στο ομογενές μαγνητικό τα φωτοηλεκτρόνια που έχουν κινητική ενέργεια K' . Έχουμε:

$$K' = \frac{1}{2} m_e v_2^2$$

$$\text{ή } v_2 = \sqrt{\frac{2K'}{m_e}} \quad (5)$$

Η ακτίνα R_2 της κυκλικής τροχιάς που διαγράφουν τα φωτοηλεκτρόνια με κινητική ενέργεια K' δίνεται από τη σχέση:

$$R_2 = \frac{m_e v_2}{B |q_e|} \quad \text{ή λόγω της σχέσης (5):}$$

$$R_2 = \frac{\sqrt{2m_e K'}}{B |q_e|} \quad (6)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (5) και (6) προκύπτει:

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{K}{K'}}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{K}{K'}}$$

$$\text{ή } K' = 4K \quad (7)$$

Επομένως, από τη σχέση (4) λόγω της σχέσης (7) προκύπτει: $\phi = 2K$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β.

Έστω v_1 και v_2 τα μέτρα των γραμμικών ταχυτήτων των υλικών σημείων Σ_1 και Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση. Η στροφορμή του συστήματος ράβδος – υλικά σημεία Σ_1 και Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{L}_{\text{πριν}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_{\text{ράβδου}}$$

$$\text{ή } L_{\text{πριν}} = m v_1 \frac{\ell}{2} + m v_2 \frac{\ell}{2} + 0$$

$$\text{ή } L_{\text{πριν}} = m \omega \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + m \omega \left(\frac{\ell}{2} \right)^2$$

$$\text{ή } L_{\text{πριν}} = \frac{1}{2} m \omega \ell^2 \quad (1)$$

Έστω ω' το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου και των υλικών σημείων Σ_1 , Σ_2 και Σ_3 αμέσως μετά την κρούση. Έχουμε:

$$\vec{L}_{\text{μετά}} = \vec{L}'_1 + \vec{L}'_2 + \vec{L}'_{\text{ράβδου}}$$

$$\text{ή } L_{\text{μετά}} = 3m v'_1 \frac{\ell}{2} + m v'_2 \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή } L_{\text{μετά}} = 3m \omega' \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + m \omega' \left(\frac{\ell}{2} \right)^2$$

$$\text{ή } L_{\text{μετά}} = m \omega' \ell^2 \quad (2)$$

Η στροφορμή του συστήματος της ράβδου και των υλικών σημείων Σ_1 , Σ_2 και Σ_3 διατηρείται σταθερή κατά την κρούση. Έχουμε:

$$L_{\text{πριν}} = L_{\text{μετά}} \text{ ή λόγω των σχέσεων (1) και (2):}$$

$$\frac{1}{2} m \omega \ell^2 = m \omega' \ell^2$$

$$\text{ή } \omega' = \frac{\omega}{2}$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{K_{\text{πριν}} - K_{\text{μετά}}}{K_{\text{πριν}}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left(1 - \frac{K_{\text{μετά}}}{K_{\text{πριν}}} \right) \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left(1 - \frac{\frac{1}{2} 3m v_1'^2 + \frac{1}{2} m v_2'^2}{\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2} \right) \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left(1 - \frac{3 \left(\omega' \frac{\ell}{2} \right)^2 + \left(\omega' \frac{\ell}{2} \right)^2}{\left(\omega \frac{\ell}{2} \right)^2 + \left(\omega \frac{\ell}{2} \right)^2} \right) \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left(1 - \frac{4\omega'^2}{2\omega^2} \right) \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left[1 - \frac{2 \left(\frac{\omega}{2} \right)^2}{\omega^2} \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 50\%$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Έστω $\Delta \ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } mg = k \Delta \ell$$

$$\text{ή } \Delta \ell = \frac{mg}{k}$$

Το αρχικό πλάτος A_0 της φθίνουσας ταλάντωσης, είναι ίσο με:

$$A_0 = \Delta \ell$$

$$\text{ή } A_0 = \frac{mg}{k}$$

Το πλάτος A_1 της φθίνουσας ταλάντωσης στο τέλος της πρώτης περιόδου είναι ίσο με:

$$A_1 = \frac{A_0}{2}$$

$$\text{ή } A_1 = \frac{mg}{2k}$$

Έστω A_2 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης στο τέλος της δεύτερης περιόδου. Ισχύει:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2}$$

$$\text{ή } A_1^2 = A_0 A_2$$

$$\text{ή } \frac{m^2 g^2}{4k^2} = \frac{mg}{k} A_2$$

$$\text{ή } A_2 = \frac{mg}{4k}$$

Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο στο τέλος της δεύτερης περιόδου, είναι ίσο με:

$$F_{\text{ελ}} = k(\Delta \ell - A_2)$$

$$\text{ή } F_{\text{ελ}} = k \left(\frac{mg}{k} - \frac{mg}{4k} \right)$$

$$\text{ή } F_{\text{ελ}} = \frac{3mg}{4}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Οι θέσεις των δεσμών στη χορδή δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\delta} = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4}, \text{ με } \kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots (1)$$

Η θέση του πρώτου δεσμού στον θετικό ημιάξονα Ox προκύπτει από τη σχέση (1) για $\kappa = 0$. Έχουμε:

$$x_{\delta(1)} = \frac{\lambda}{4}$$

Η θέση του έβδομου δεσμού στον θετικό ημιάξονα Ox προκύπτει από τη σχέση (1) για $\kappa = 6$. Έχουμε:

$$x_{\delta(6)} = 13 \frac{\lambda}{4}$$

Η απόσταση Δx μεταξύ του πρώτου και του έβδομου δεσμού στον θετικό ημιάξονα, είναι ίση με:

$$\Delta x = x_{\delta(6)} - x_{\delta(1)}$$

$$\text{ή } \Delta x = 3\lambda$$

$$\text{ή } \lambda = \frac{\Delta x}{3}$$

$$\text{ή } \lambda = 0,6 \text{ m}$$

Ο χρόνος Δt μεταξύ δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων της ελαστικής δυναμικής ενέργειας της χορδής είναι ίσος με:

$$\Delta t = \frac{T}{2}$$

$$\text{ή } T = 2\Delta t$$

$$\text{ή } T = 0,4 \text{ s}$$

Έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{ή } \omega = 5\pi \text{ rad/s}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου K δίνεται από τη σχέση:

$$|A_K| = 2A \sin\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } |A_K| = 2A \left| \sin \frac{4\pi}{3} \right|$$

$$\text{ή } |A_K| = A$$

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου K είναι ίση με:

$$v_{\max(K)} = \omega |A_K|$$

$$\text{ή } v_{\max(K)} = \omega A$$

$$\text{ή } A = 0,2 \text{ m}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται στη χορδή δίνεται από τη σχέση:

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta \mu \omega t$$

$$\text{ή } y = 0,4 \sin\left(\frac{10\pi x}{3}\right) \eta \mu(5\pi t) \text{ (S.I.) (1)}$$

Γ2. Έχουμε:

$$A_\Lambda = 2A \sin\left(\frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } A_\Lambda = 0,4 \sin(6\pi) \text{ m}$$

$$\text{ή } A_\Lambda = 0,4 \text{ m}$$

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$a_\Lambda = -\omega^2 A_\Lambda \eta \mu \omega t$$

$$\text{ή } a_\Lambda = -100 \eta \mu(5\pi t) \text{ (S.I.)}$$

Γ3. Έχουμε:

$$x_K < x_\delta < x_\Lambda$$

$$\text{ή } 0,4 \text{ m} < (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4} < 1,8 \text{ m}$$

$$\text{ή } 0,4 < (2\kappa + 1) 0,15 < 1,8$$

$$\text{ή } 2,66 < 2\kappa + 1 < 12$$

$$\text{ή } 1,66 < 2\kappa < 11$$

$$\text{ή } 0,83 < \kappa < 5,5$$

$$\text{ή } \kappa = 1, 2, 3, 4, 5$$

Επομένως, ανάμεσα στο σημείο K και στο σημείο Λ σχηματίζονται 5 δεσμοί.

Γ4. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου K δίνεται από τη σχέση:

$$y_K = A_K \eta \mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y_K = -A \eta \mu \omega t$$

$$\text{ή } y_K = -0,2 \eta \mu 5\pi t$$

$$\text{ή } y_K = 0,2 \eta \mu(5\pi t + \pi) \text{ (S.I.) (2)}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$y_\Lambda = A_\Lambda \eta \mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y_\Lambda = 0,4 \eta \mu(5\pi t) \text{ (S.I.) (3)}$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι η διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων των σημείων K και Λ είναι: $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$.

Επομένως, η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση των σημείων K και Λ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης τους, είναι ίση με:

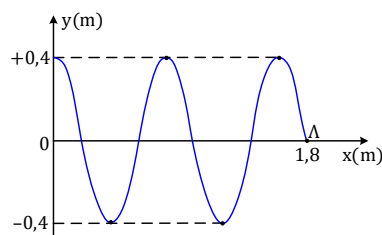
$$\Delta y_{\max} = |A_K| + |A_\Lambda|$$

$$\text{ή } \Delta y_{\max} = 0,6 \text{ m}$$

Γ5. Έστω f' η νέα συχνότητα και λ' το νέο μήκος κύματος των τρέχοντων κυμάτων. Όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο που απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα, ισχύει:

$$9 \frac{\lambda'}{4} = 1,8 \text{ m}$$

$$\text{ή } \lambda' = 0,8 \text{ m}$$



Η ταχύτητα διάδοσης των τρέχοντων κυμάτων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \lambda f$$

$$\text{ή } v_\delta = \frac{\lambda}{T}$$

$$\text{ή } v_\delta = 1,5 \text{ m/s}$$

Αφού τα κύματα διαδίδονται στο ίδιο ελαστικό μέσο, η ταχύτητα διάδοσης δεν μεταβάλλεται. Επομένως, έχουμε:

$$v_\delta = \lambda' f'$$

$$\text{ή } f' = \frac{15}{8} \text{ Hz}$$

Έχουμε:

$$\omega' = 2\pi f'$$

$$\text{ή } \omega' = 3,75\pi \text{ rad/s}$$

Το νέο πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Κ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$|A'_K| = 2A \left| \sin \left(\frac{2\pi x_K}{\lambda'} \right) \right|$$

$$\text{ή } |A'_K| = 0,4 |\sin \pi|$$

$$\text{ή } A'_K = 0,4 \text{ m}$$

Η επί τοις εκατό μεταβολή της ενέργειας της ταλάντωσης του σημείου Κ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{E'_K - E_K}{E_K} \cdot 100\%$$

ή

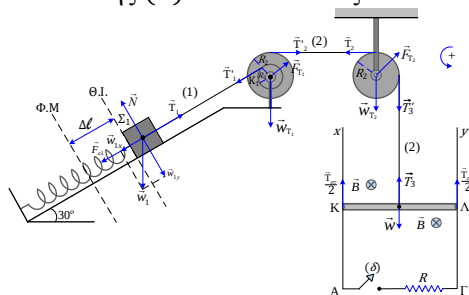
$$\pi = \frac{\frac{1}{2} m (\omega')^2 (A'_K)^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 A_K^2}{\frac{1}{2} m \omega^2 A_K^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left[\left(\frac{\omega' A'_K}{\omega A_K} \right)^2 - 1 \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 125\%$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχονται τα σώματα, όταν ο διακόπτης (δ) είναι ανοικτός.



Επειδή το σώμα Σ1 ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$$

$$\text{ή } w_{1x} + F_{ελ} = T_1$$

$$\text{ή } m_1 g \eta_{\mu\phi} + k \Delta \ell = T_1$$

$$\text{ή } T_1 = 70 \text{ N}$$

Επειδή η τροχαλία T1 ισορροπεί ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K_1)} = 0$$

$$\text{ή } T'_1 R_1 - T_2 R_2 = 0$$

$$\text{ή } T_1 R_1 = T_2 R_2$$

$$\text{ή } T_2 = 35 \text{ N}$$

Επειδή η τροχαλία T2 ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K_2)} = 0$$

$$\text{ή } +T_2 R_2 - T'_3 R_2 = 0$$

$$\text{ή } T_2 = T'_3$$

$$\text{ή } T_3 = 35 \text{ N}$$

Επειδή το μέτρο του βάρους $\vec{w}$ του αγωγού ΚΛ είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της τάσης $\vec{T}_3$ του νήματος που δέχεται, η συνολική οριακή στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau(ο\rho)}$

που δέχεται ο αγωγός ΚΛ έχει φορά προς τα πάνω.

Επειδή ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί, ισχύει:

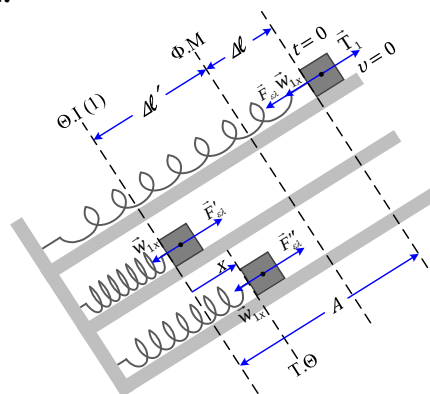
$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } w = T_3 + T_{\sigma\tau(ο\rho)}$$

$$\text{ή } mg = T_3 + T_{\sigma\tau(ο\rho)}$$

$$\text{ή } T_{\sigma\tau(ο\rho)} = 5 \text{ N}$$

Δ2.



Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ1 (Θ.I(1)) ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$$

$$\text{ή } w_{1x} = F'_{ελ}$$

$$\text{ή } m_1 g \eta_{\mu\phi} = k \Delta \ell' \quad (1)$$

Στη τυχαία θέση που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, ισχύει:

$$\Sigma F_x = F''_{ελ} - w_{1x}$$

$$\text{ή } \Sigma F_x = k(\Delta \ell' - x) - m_1 g \eta_{\mu\phi}$$

$$\text{ή } \Sigma F_x = k \Delta \ell' - kx - m_1 g \eta_{\mu\phi},$$

$$\text{ή λόγω της σχέσης (1):}$$

$$\Sigma F_x = -kx$$

Επομένως η κίνηση του σώματος Σ_1 είναι απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$.

Ισχύει ότι:

$$D = m_1 \omega^2$$

$$\text{ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$$

$$\text{ή } \omega = 5\sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Όπως φαίνεται από το σχήμα το πλάτος A της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 είναι ίσο με: $A = \Delta\ell + \Delta\ell'$. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $\Delta\ell' = 0,1 \text{ m}$. Συνεπώς είναι: $A = 0,7 \text{ m}$.

Για $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας του είναι ίση με $x = +A = +0,7 \text{ m}$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας του είναι η: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (2). Από τη σχέση(2) για $t = 0$ και $x = +A$, προκύπτει:

$$\eta\mu\varphi_0 = 1$$

$$\text{ή } \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2} (3)$$

Αφού $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, η λύση της εξίσωσης (3) είναι η $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος Σ_1 είναι η:

$$v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή } v = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή } v = 3,5\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu\left(5\sqrt{2}t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$$

Δ3. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι: $w > T_{\sigma\tau(\text{op})}$, οπότε ο αγωγός ΚΛ αρχίζει να κινείται προς τα κάτω. Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,6 \text{ s}$ ο αγωγός ΚΛ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση α . Είναι:

$$\Sigma F = m\alpha$$

$$\text{ή } w - T = m\alpha$$

$$\text{ή } mg - T = m\alpha$$

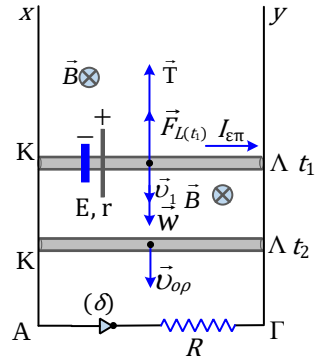
$$\text{ή } \alpha = 8,75 \text{ m/s}^2$$

Το μέτρο v_1 της ταχύτητας του αγωγού ΚΛ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$v_1 = \alpha t_1$$

$$\text{ή } v_1 = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται ο αγωγός ΚΛ τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ).



Το μέτρο της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο κύκλωμα δίνεται από τη σχέση: $E_{\varepsilon\pi} = Bv\ell$. Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα δίνεται από τη σχέση:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{K\Lambda}}$$

$$\text{ή } I_{\varepsilon\pi} = \frac{Bv\ell}{R + R_{K\Lambda}}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που δέχεται ο αγωγός ΚΛ δίνεται από τη σχέση:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi}\ell$$

$$\text{ή } F_L = \frac{B^2\ell^2v}{R + R_{K\Lambda}}$$

Επομένως τη χρονική στιγμή t_1 , το μέτρο της δύναμης Laplace που δέχεται ο αγωγός ΚΛ είναι ίσο με:

$$F_{L(t_1)} = \frac{B^2\ell^2v_1}{R + R_{K\Lambda}}$$

$$\text{ή } F_{L(t_1)} = 70 \text{ N}$$

Αφού είναι $F_{L(t_1)} + T > w$, ο αγωγός ΚΛ αρχίζει να επιβραδύνεται. Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται ο αγωγός ΚΛ από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά, είναι ίσο με:

$$\Sigma F = F_L + T - mg$$

$$\text{ή } \Sigma F = \frac{B^2\ell^2v}{R + R_{K\Lambda}} + T - mg (4)$$

Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι, καθώς ο αγωγός ΚΛ επιβραδύνεται και το μέτρο v της ταχύτητας του μειώνεται, το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται μειώνεται, μέχρι να μηδενιστεί τη χρονική στιγμή t_2 . Αφού ισχύει $\alpha = \frac{\Sigma F}{m}$ το μέτρο της επιβράδυνσης του αγωγού ΚΛ μειώνεται συνεχώς μέχρι να μηδενιστεί τη χρονική στιγμή t_2 κατά την οποία αποκτά την οριακή του ταχύτητα. Συνεπώς, η κίνηση του αγωγού ΚΛ από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι επιβραδυνόμενη με επιβράδυνση που μειώνεται κατά μέτρο.

Δ4. Τη χρονική στιγμή t_2 κατά την οποία ο αγωγός ΚΛ αποκτά την οριακή του ταχύτητα $\vec{v}_{op}$, ισχύει: $\Sigma F = 0$, ή λόγω της σχέσης (4):

$$\frac{B^2 \ell^2 v_{op}}{R + R_{KL}} + T - mg = 0$$

$$\text{ή } v_{op} = \frac{(mg - T)(R + R_{KL})}{B^2 \ell^2}$$

$$\text{ή } v_{op} = 7 \text{ m/s}$$

Το επαγωγικό ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα από τη χρονική στιγμή t_2 έως τη χρονική στιγμή t_3 δίνεται από τη σχέση:

$$I_{op} = \frac{B v_{op} \ell}{R + R_{KL}}$$

$$\text{ή } I_{op} = 35 \text{ A}$$

Το επαγωγικό φορτίο που διήλθε από μια διατομή του αγωγού ΚΛ από τη χρονική στιγμή t_2 έως τη χρονική στιγμή t_3 δίνεται από τη σχέση:

$$q_{\varepsilon\pi} = I_{op} (t_3 - t_2)$$

$$\text{ή } t_3 - t_2 = 0,2 \text{ s}$$

Έστω h η μετατόπιση του αγωγού από τη χρονική στιγμή t_2 έως τη χρονική στιγμή t_3 .

Έχουμε:

$$h = v_{op} (t_3 - t_2)$$

$$\text{ή } h = 1,4 \text{ m}$$

Έστω $Q_{R_{o\lambda}}$ το ποσό θερμότητας που εκλύεται από τους αντιστάτες του κυκλώματος, λόγω φαινομένου Joule και Q_T το ποσό θερμότητας που εκλύεται λόγω της τριβής ολίσθησης.

Από την Α.Δ.Ε. μεταξύ της θέσης του αγωγού ΚΛ τη χρονική στιγμή t_2 και της θέσης του τη χρονική στιγμή t_3 , θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση του τη χρονική στιγμή t_3 , έχουμε:

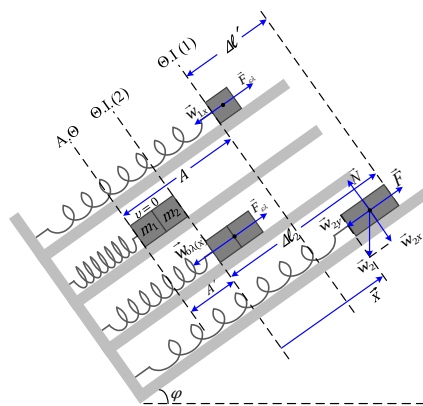
$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} - E_{\mu\eta\chi(\tau\epsilon\lambda)} = Q_{R_{o\lambda}} + Q_T$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m v_{op}^2 + mgh - \frac{1}{2} m v_{op}^2 = Q_{R_{o\lambda}} + Q_T$$

$$\text{ή } Q_{R_{o\lambda}} = mgh$$

$$\text{ή } Q_{R_{o\lambda}} = 56 \text{ J.}$$

Δ5.



Έστω $\Delta\ell_2$ η συμπίεση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας των δύο σωμάτων. Ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$$

$$\text{ή } (m_1 + m_2)g\eta\mu\phi = k\Delta\ell_2$$

$$\text{ή } \Delta\ell_2 = 0,2 \text{ m}$$

Όπως φαίνεται από το σχήμα το πλάτος A' της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 , είναι ίσο με:

$$A' = \Delta\ell' + A - \Delta\ell_2$$

$$\text{ή } A' = 0,6 \text{ m}$$

Έστω η τυχαία θέση πάνω από τη θέση ισορροπίας (2) που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Στη θέση αυτή η αλγεβρική τιμή της δύναμης $\vec{F}$ που δέχεται το σώμα Σ_2 από το σώμα Σ_1 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Sigma F_2 = -D_2 x$$

$$\text{ή } F - m_2 g\eta\mu\phi = -m_2 \omega'^2 x$$

$$\text{ή } F = m_2 g\eta\mu\phi - m_2 \frac{k}{m_1 + m_2} x \quad (5)$$

Για να χαθεί η επαφή μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 θα πρέπει να γίνει $F = 0$. Συνεπώς από τη σχέση (5) έχουμε:

$$x = \frac{(m_1 + m_2)g\eta\mu\phi}{k}$$

$$\text{ή } x = 0,2 \text{ m}$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας των σωμάτων τη στιγμή που χάνεται η επαφή τους. Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του συστήματος των δύο σωμάτων έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k A'^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{ή } v = 2\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Αμέσως μετά το χάσιμο της επαφής των δύο σωμάτων, το σώμα Σ_1 συνεχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας 1 (Θ.Ι.(1)) με ολική ενέργεια E' . Από την Α.Δ.Ε για την νέα ταλάντωση του σώματος Σ_1 , έχουμε:

$$E' = K + U$$

$$\text{ή } E' = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} k (\Delta\ell')^2$$

$$\text{ή } E' = 8,5 \text{ J}$$

8^ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

A1. β, A2. γ, A3. γ, A4. α

A5. α, Λ, β, Λ, γ, Σ, δ, Σ, ε, Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β.

Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία σταθεροποιούνται τα ρεύματα στο κύκλωμα ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από ρεύμα έντασης:

$$I = \frac{Bv\ell}{R_{\text{ολ}}}, \text{ όπου } R_{\text{ολ}} = R_{1,2} + R_{\text{ΚΛ}}$$

$$\text{ή } R_{\text{ολ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_{\text{ΚΛ}}$$

$$\text{ή } R_{\text{ολ}} = R$$

$$\text{Επομένως } I = \frac{Bv\ell}{R}$$

Η τάση $V_{\text{ΚΛ}}$ στα άκρα του αγωγού ΚΛ τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με:

$$V_{\text{ΚΛ}} = E_{\text{επ}} - IR_{\text{ΚΛ}}$$

$$\text{ή } V_{\text{ΚΛ}} = Bv\ell - \frac{Bv\ell}{2}$$

$$\text{ή } V_{\text{ΚΛ}} = \frac{Bv\ell}{2}$$

Επομένως, η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$I_1 = \frac{V_{\text{ΚΛ}}}{R_1}$$

$$\text{ή } I_1 = \frac{Bv\ell}{2R}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη (δ) η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο αρχίζει να μειώνεται μέχρι κάποια χρονική στιγμή να μηδενιστεί. Η ένταση του ρεύματος i που διαρρέει το πηνίο τη χρονική στιγμή t_2 δίνεται από τη σχέση:

$$i = \frac{|E_{\text{αυτ}}|}{R_1 + R_2}$$

$$\text{ή } i = \frac{L \left| \frac{di}{dt} \right|}{2R}$$

$$\text{ή } i = \frac{L Bv\ell}{2R}$$

$$\text{ή } i = \frac{Bv\ell}{4R}$$

Η συνολική θερμότητα Joule εκλύεται από τους αντιστάτες R_1 και R_2 από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q_{R_{\text{ολ}}} = U_{t_1} - U_{t_2}$$

$$\text{ή } Q_{R_{\text{ολ}}} = \frac{1}{2} L I_1^2 - \frac{1}{2} L i^2$$

$$\text{ή } Q_{R_{\text{ολ}}} = \frac{1}{2} L (I_1^2 - i^2)$$

$$\text{ή } Q_{R_{\text{ολ}}} = \frac{1}{2} L \left(\frac{B^2 v^2 \ell^2}{4R^2} - \frac{B^2 v^2 \ell^2}{16R^2} \right)$$

$$\text{ή } Q_{R_{\text{ολ}}} = \frac{3}{32} L \frac{B^2 v^2 \ell^2}{R^2}$$

Επειδή είναι $R_1 = R_2$, έχουμε $Q_{R_1} = Q_{R_2}$.

Επομένως, έχουμε:

$$Q_{R_{\text{ολ}}} = Q_{R_1} + Q_{R_2}$$

$$\text{ή } Q_{R_{\text{ολ}}} = 2Q_{R_2}$$

$$\text{ή } Q_{R_2} = \frac{Q_{R_{\text{ολ}}}}{2}$$

$$\text{ή } Q_{R_2} = \frac{3LB^2 v^2 \ell^2}{64R^2}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein για το μέταλλο (1) έχουμε:

$$K_1 = hf_1 - \phi_1$$

$$\text{ή } K_1 = h2f_{01} - \phi_1$$

$$\text{ή } K_1 = 2h \frac{\phi_1}{h} - \phi_1$$

$$\text{ή } K_1 = \phi_1 \quad (1)$$

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που εκτελούν τα φωτοηλεκτρόνια που εξέρχονται από το μέταλλο (1) δίνεται από

$$\text{τη σχέση: } R = \frac{mv_1}{B|q|} \quad (2)$$

Από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση για το μέταλλο (2) έχουμε:

$$K_2 = hf_1 - \phi_2$$

$$\text{ή } K_2 = 2\phi_1 - \phi_2 \quad (3)$$

Το βήμα της ελικοειδούς τροχιάς που εκτελούν τα φωτοηλεκτρόνια που εξέρχονται από το μέταλλο (2) δίνεται από τη σχέση:

$$\beta = v_x T$$

$$\text{ή } \beta = v_2 \sin \varphi \frac{2\pi m}{B|q|}$$

$$\text{ή } \beta = \frac{\pi m v_2}{B|q|} \quad (4)$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (2) και (4) κατά μέλη, προκύπτει:

$$\frac{R}{\beta} = \frac{v_1}{\pi v_2}$$

$$\text{ή } 2 = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\text{ή } v_1 = 2v_2 \quad (5)$$

Έχουμε:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_e v_1^2 \quad (6)$$

και

$$K_2 = \frac{1}{2} m_e v_2^2 \quad (7)$$

Από τη διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (6) και (7) προκύπτει:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} \quad \text{ή λόγω της σχέσης (5):}$$

$$\frac{K_1}{K_2} = 4$$

$$\text{ή } K_2 = \frac{K_1}{4} \quad \text{ή λόγω της σχέσης (1),}$$

$$K_2 = \frac{\varphi_1}{4} \quad (8)$$

Από τη σχέση (3) λόγω της σχέσης (8)

$$\text{προκύπτει: } \varphi_2 = \frac{7}{4} \varphi_1$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β.

Η φάση του αρμονικού κύματος (1) τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_1 = 2\pi \left(\frac{t_1}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1} \right)$$

$$\text{ή } \varphi_1 = 2\pi \left(f_1 t_1 - \frac{x}{\lambda_1} \right) \quad (1)$$

Η φάση του αρμονικού κύματος (2) τη χρονική στιγμή t_2 δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_2 = 2\pi \left(\frac{t_2}{T_2} - \frac{x}{\lambda_2} \right)$$

$$\text{ή } \varphi_2 = 2\pi \left(f_2 t_2 - \frac{x}{\lambda_2} \right) \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) για $x = 0$ προκύπτει:

$$\varphi_{01} = 2\pi f_1 t_1 \quad (3)$$

Από τη σχέση (2) για $x = 0$ προκύπτει:

$$\varphi_{01} = 2\pi f_2 t_2 \quad (4)$$

Όπως προκύπτει από το διάγραμμα, ισχύει:

$$\varphi_{01} = \varphi_{02}, \quad \text{ή λόγω των σχέσεων (3) και (4):}$$

$$2\pi f_1 t_1 = 2\pi f_2 t_2$$

$$\text{ή } f_1 t_1 = f_2 t_2 \quad (5)$$

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι για $x = x_1$ είναι $\varphi_1 = 0$.

Επομένως, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$0 = 2\pi \left(f_1 t_1 - \frac{x_1}{\lambda_1} \right)$$

$$\text{ή } \frac{x_1}{\lambda_1} = f_1 t_1 \quad (6)$$

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι για $x = x_2$ είναι $\varphi_2 = 0$.

Επομένως, από τη σχέση (2) έχουμε:

$$0 = 2\pi \left(f_2 t_2 - \frac{x_2}{\lambda_2} \right)$$

$$\text{ή } \frac{x_2}{\lambda_2} = f_2 t_2 \quad (7)$$

Από τις σχέσεις (6) και (7), λόγω της σχέσης (5), προκύπτει:

$$\frac{x_1}{\lambda_1} = \frac{x_2}{\lambda_2}$$

$$\text{ή } \frac{x_1}{x_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (8)$$

Όπως προκύπτει από το διάγραμμα είναι $x_2 > x_1$, οπότε από τη σχέση (8) προκύπτει ότι $\lambda_2 > \lambda_1$.

Η απόσταση των θέσεων ισορροπίας δύο διαδοχικών υλικών σημείων της χορδής που έχουν κάθε χρονική στιγμή αντίθετες απομακρύνσεις και αντίθετες ταχύτητες είναι ίση με μισό μήκος κύματος.

Επομένως, έχουμε:

$$\frac{\lambda_2}{2} > \frac{\lambda_1}{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε:

$$\frac{T_2}{2} = 0, 2\pi \text{ s}$$

$$\text{ή } T_2 = 0, 4\pi \text{ s}$$

Επομένως, είναι:

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{ή } \omega_2 = 5 \text{ rad/s}$$

Έστω x η απομάκρυνση του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Έχουμε:

$$|\alpha| = \omega_2^2 |x|$$

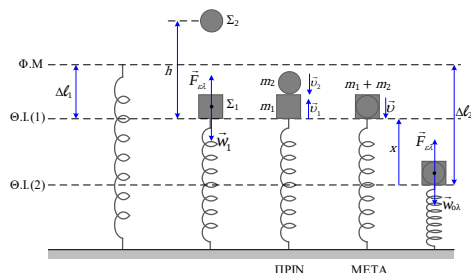
$$\text{ή } |x| = 0, 3 \text{ m}$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$. Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση που εκτελεί το συσσωμάτωμα έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$\text{ή } v = 1, 5 \text{ m/s}$$



Γ2. Από την αρχική Θ.Ι.(1) του σώματος Σ_1 έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } m_1 g = k \Delta \ell_1$$

$$\text{ή } \Delta \ell_1 = \frac{m_1 g}{k} \quad (2)$$

Από τη Θ.Ι.(2) του συσσωματώματος έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } (m_1 + m_2) g = k \Delta \ell_2$$

$$\text{ή } \Delta \ell_2 = \frac{(m_1 + m_2) g}{k} \quad (3)$$

Ισχύει:

$$|x| = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1,$$

ή λόγω των σχέσεων (2) και (3):

$$|x| = \frac{m_2 g}{k}$$

$$\text{ή } m_2 = \frac{xk}{g}$$

$$\text{ή } m_2 = 12 \text{ kg}$$

Ισχύει:

$$D = (m_1 + m_2) \omega_2^2$$

$$\text{ή } k = (m_1 + m_2) \omega_2^2 \quad (4),$$

όπου ω_2 η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Από τη σχέση (4), προκύπτει ότι:

$$m_1 + m_2 = \frac{k}{\omega_2^2}$$

$$\text{ή } m_1 = \frac{k}{\omega_2^2} - m_2$$

$$\text{ή } m_1 = 4 \text{ kg}$$

Γ3. Επειδή οι ταχύτητες των δύο σωμάτων πριν την κρούση είναι αντίθετες, ισχύει:

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$$

$$\text{ή } |v_1| = |v_2|$$

Από την Α.Δ.Ο. κατά την κρούση έχουμε:

$$m_2 |v_2| - m_1 |v_1| = (m_1 + m_2) |v|$$

$$\text{ή } |v_1| = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Από το Θ.Μ.Κ.Ε για την κίνηση του σώματος Σ_2 πριν από την κρούση, έχουμε:

$$W_{m_2 g} = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}}$$

$$\text{ή } m_2 g h = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\text{ή } h = \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\text{ή } h = 0, 45 \text{ m}$$

Γ4. Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση, έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k d^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0$$

$$\text{ή } d = \sqrt{\frac{m_1}{k}} |v_1|$$

$$\text{ή } d = 0, 3 \text{ m}$$

Η μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ_1 από το ελατήριο πριν από την κρούση, είναι ίση με:

$$F_{\text{ελ(max)}} = k(\Delta \ell_1 + d)$$

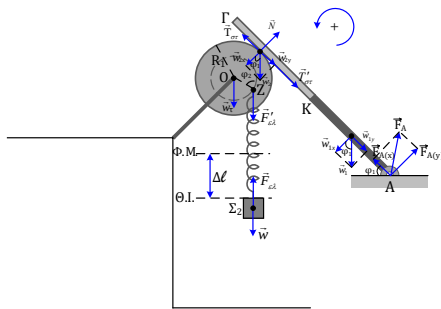
$$\text{ή } F_{\text{ελ(max)}} = k \left(\frac{m_1 g}{k} + d \right)$$

$$\text{ή } F_{\text{ελ(max)}} = m_1 g + k d$$

$$\text{ή } F_{\text{ελ(max)}} = 160 \text{ N}$$

ΘΕΜΑ Δ (νέο)

Δ1.



Στη Θ.Ι. του σώματος Σ₂, έχουμε:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } m_2 g = F_{ελ}$$

$$\text{ή } F_{ελ} = 30 \text{ N}$$

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0$$

$$\text{ή } -F'_{ελ} \eta \mu \phi_2 R_2 + T_{\sigma\tau} R_1 = 0$$

$$\text{ή } T_{\sigma\tau} = \frac{F_{ελ} R_2 \eta \mu \phi_2}{R_1}$$

$$\text{ή } T_{\sigma\tau} = 7,5 \text{ N}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0$$

$$\text{ή } -N \frac{3\ell}{4} + w_{2y} \frac{3\ell}{4} + w_{1y} \frac{\ell}{4} = 0$$

$$\text{ή } N = \frac{3M_2 g \sigma \nu \nu \phi_1 + M_1 g \sigma \nu \nu \phi_1}{3}$$

$$\text{ή } N = 30 \text{ N}$$

Το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την τροχαλία είναι:

$$F = \sqrt{T_{\sigma\tau}^2 + N^2}$$

$$\text{ή } F = 31 \text{ N}$$

Δ2. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ₁ ακριβώς πριν από την κρούση. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος πριν από την κρούση, έχουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -m_1 g h$$

$$\text{ή } v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

$$\text{ή } v_1 = 2 \text{ m/s}$$

Έστω v'_2 η ταχύτητα του σώματος Σ₂ αμέσως μετά την κρούση. Έχουμε:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή } v'_2 = 1 \text{ m/s}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v'_2 = v_{\max}$$

$$\text{ή } v'_2 = \omega A$$

$$\text{ή } v'_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} A$$

$$\text{ή } A = 0,2 \text{ m}$$

Δ3. Αφού για $t = 0$ το σώμα Σ₂ είναι στη Θ.Ι. του κινούμενου με θετική ταχύτητα η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι ίση με μηδέν ($\phi_0 = 0$).

Έστω μια τυχαία θέση πάνω από τη Θ.Ι. του σώματος Σ₂ με απομάκρυνση x ($x > 0$). Έχουμε:

$$\Sigma F_2 = -Dx$$

$$\text{ή } F_{ελ} - m_2 g = -kx$$

$$\text{ή } F_{ελ} = m_2 g - kx \quad (1)$$

$$\text{ή } F_{ελ} = m_2 g - kA \eta \mu \omega t$$

$$\text{ή } F_{ελ} = 30 - 15 \eta \mu 5t \text{ (S.I.)}$$

Δ4. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος Σ₂ από τη Θ.Ι. του τη χρονική στιγμή στην

οποία είναι $\left| \frac{dp}{dt} \right| = 15 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$. Έχουμε:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = D |x_1|$$

$$\text{ή } |x_1| = 0,2 \text{ m}$$

$$\text{ή } x_1 = +0,2 \text{ m}$$

Από τη σχέση (1) για $x = x_1 = +0,2 \text{ m}$ προκύπτει:

$$F_{ελ} = m_2 g - kx_1$$

$$\text{ή } F_{ελ} = 15 \text{ N}$$

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0$$

$$\text{ή } -F'_{ελ} \eta \mu \phi_2 R_2 + T_{\sigma\tau} R_1 = 0$$

$$\text{ή } T_{\sigma\tau} = \frac{F_{ελ} R_2 \eta \mu \phi_2}{R_1} \quad (2)$$

$$\text{ή } T_{\sigma\tau} = 3,75 \text{ N}$$

Δ5. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$T_{\sigma\tau} = \frac{(m_2 g - kx) R_2 \eta \mu \phi_2}{R_1}$$

$$\text{ή } T_{\sigma\tau} = 7,5 - 18,75x \text{ (S.I.)}$$

Από τη σχέση (3) για $x = -A$ προκύπτει:

$$T_{\sigma\tau(\max)} = 7,5 + 18,75 A \text{ (S.I.)}$$

Για να μην περιστρέφεται η τροχαλία πρέπει να ισχύει:

$$T_{\sigma\tau(\max)} \leq T_{op}$$

$$\text{ή } T_{\sigma\tau(\max)} \leq \mu_s N$$

$$\text{ή } 7,5 + 18,75A \leq 15$$

$$\text{ή } A \leq 0,4$$

$$\text{ή } A_{\max} = 0,4 \text{ m}$$

9^ο Κριτήριο Αξιολόγησης

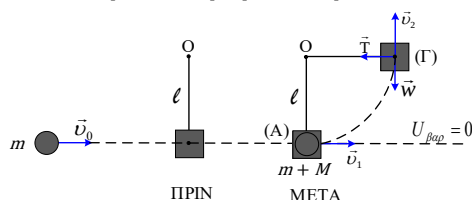
ΘΕΜΑ Α

A1. β, A2. α, A3. δ, A4. γ

A5. α. Λ, β. Λ, γ. Λ, δ. Λ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η α.



Από την Α.Δ.Ο. κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\piριν} = \vec{p}_{μετά}$$

$$\text{ή } mv_0 = (M+m)v_1$$

$$\text{ή } v_1 = \frac{\sqrt{44g\ell}}{4}$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε για τις θέσεις (Α) και (Γ) του συσσωματώματος που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, έχουμε:

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}(M+m)v_1^2 = \frac{1}{2}(M+m)v_2^2 + (M+m)g\ell$$

$$\text{ή } v_2^2 = v_1^2 - 2g\ell$$

$$\text{ή } v_2^2 = \frac{3}{4}g\ell$$

Ισχύει:

$$\Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = F_K$$

$$\text{ή } T = \frac{(M+m)v_2^2}{\ell}$$

$$\text{ή } T = 3\text{ mg}$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του του συσσωματώματος είναι ίσο με:

$$\left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right| = |\Sigma \vec{F}|$$

$$\text{ή } \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right| = \sqrt{T^2 + [(M+m)g]^2}$$

$$\text{ή } \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right| = 5\text{ mg}$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συσσωματώματος ως προς τον άξονα (p) είναι:

$$\left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = \tau_w$$

$$\text{ή } \left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = (M+m)g\ell$$

$$\text{ή } \left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = 4mg\ell$$

Το ζητούμενο πηλίκο είναι ίσο με:

$$\frac{\left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right|}{\left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right|} = \frac{5}{4\ell}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Το μέτρο της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο κύκλωμα όταν η ράβδος ΚΛ κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$, είναι ίσο με:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{|d\Phi|}{dt}$$

$$\text{ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{Bdx\ell}{dt}$$

$$\text{ή } E_{\varepsilon\pi} = Bv\ell$$

$$\text{ή } V = Bv\ell \quad (1)$$

Όταν ο διακόπτης (δ) είναι κλειστός το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I_{\varepsilon\pi}$. Ισχύει:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{\text{ολ}}}$$

$$\text{ή } I_{\varepsilon\pi} = \frac{Bv\ell}{R+R_{\text{ΚΛ}}}$$

$$\text{ή } I_{\varepsilon\pi} = \frac{Bv\ell}{3R} \quad (2)$$

Η τάση V' που αναπτύσσεται στα άκρα του αγωγού ΚΛ, όταν ο διακόπτης (δ) είναι κλειστός είναι ίση με:

$$V' = I_{\varepsilon\pi}R,$$

$$\text{ή λόγω της σχέσης (2):}$$

$$V' = \frac{Bv\ell}{3} \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (1) και (4) προκύπτει ότι:

$$V' = \frac{V}{3}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β.

Η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο τμήμα ΟΔ της ράβδου είναι ίση με:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{1}{2}B\omega(\text{ΟΔ})^2$$

$$\text{ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{1}{2}B\omega\ell^2$$

Έστω $R_{\text{ΟΔ}}$ η ωμική αντίσταση του τμήματος ΟΔ της ράβδου.

Έχουμε:

$$R_{\text{ΟΔ}} = \rho \frac{(\text{ΟΔ})}{s}$$

$$\text{ή } R_{\text{ΟΔ}} = \rho \frac{\ell}{s} \quad (1)$$

Η ωμική αντίσταση R_{AG} της ράβδου δίνεται από τη σχέση:

$$R_{AG} = \rho \frac{L}{s} \quad (2)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{R_{OA}}{R_{AG}} = \frac{\ell}{L}$$

$$\text{ή } \frac{R_{OA}}{R_{AG}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ή } R_{OA} = \frac{1}{2} R_{AG}$$

$$\text{ή } R_{OA} = R$$

Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα δίνεται από τη σχέση:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{OA}}$$

$$\text{ή } I_{\varepsilon\pi} = \frac{\frac{1}{2} B \omega \ell^2}{2R}$$

$$\text{ή } I_{\varepsilon\pi} = \frac{1}{4} \frac{B \omega \ell^2}{R}$$

Για να περιστρέφεται η ράβδος με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω πρέπει να ισχύει:

$$P_F = P_\theta$$

$$\text{ή } F v_\Gamma = I_{\varepsilon\pi}^2 R_{OA}$$

$$\text{ή } F \cdot \omega 2\ell = \frac{1}{16} \cdot \frac{B^2 \omega^2 \ell^4}{R^2} 2R$$

$$\text{ή } F = \frac{B^2 \omega \ell^3}{16R}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η γενική εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t) \quad (1)$$

Από τη σύγκριση της εξίσωσης (1) με τη δοθείσα εξίσωση προκύπτουν:

$$2A = 0,2 \text{ m}$$

$$\text{ή } A = 0,1 \text{ m}, \quad \frac{2\pi}{\lambda} = 2,5\pi \text{ m}^{-1}$$

$$\text{ή } \lambda = 0,8 \text{ m}$$

και

$$\omega = 10\pi \text{ rad/s}$$

Έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{ή } T = 0,2 \text{ s}$$

Οι εξισώσεις των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή, είναι:

$$y_1 = A \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y_1 = 0,1 \eta\mu 2\pi (5t - 1,25x) \text{ (S.I.)}$$

και

$$y_2 = A \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y_2 = 0,1 \eta\mu 2\pi (5t + 1,25x) \text{ (S.I.)}$$

Γ2. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των κοιλίων που σχηματίζονται στη χορδή λύνουμε την ανίσωση:

$$0 \leq x_{\text{κοιλ}} \leq L$$

$$\text{ή } 0 \leq \kappa \frac{\lambda}{2} \leq L$$

$$\text{ή } 0 \leq 0,4\kappa \leq 1,8$$

$$\text{ή } 0 \leq \kappa \leq 4,5$$

$$\text{ή } \kappa = 0, 1, 2, 3, 4$$

Επομένως, στη χορδή σχηματίζονται πέντε κοιλίες.

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των δεσμών που σχηματίζονται στη χορδή λύνουμε την ανίσωση:

$$0 \leq (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4} \leq L$$

$$\text{ή } 0 \leq (2\kappa + 1) 0,2 \leq 1,8$$

$$\text{ή } 0 \leq 2\kappa + 1 \leq 9$$

$$\text{ή } -\frac{1}{2} \leq \kappa \leq 4$$

$$\text{ή } \kappa = 0, 1, 2, 3, 4$$

Επομένως, στη χορδή σχηματίζονται πέντε δεσμοί.

Γ3. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Ο προκύπτει από τη δοθείσα εξίσωση για $x = 0$. Έχουμε:

$$y_O = 0,2\eta\mu(10\pi t) \quad (2)$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Κ προκύπτει από τη δοθείσα

εξίσωση για $x = +\frac{4}{15} \text{ m}$. Έχουμε:

$$y_K = 0,2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)\eta\mu(10\pi t)$$

$$\text{ή } y_K = -0,1\eta\mu(10\pi t)$$

$$\text{ή } y_K = 0,1\eta\mu(10\pi t + \pi) \quad (3)$$

Από τις εξισώσεις (2) και (3) προκύπτει ότι η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι ίση με $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$. Επομένως, όταν το σημείο Ο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, το σημείο Κ θα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με αρνητική ταχύτητα. Δηλαδή, είναι:

$$v_K = -v_{K(\max)}$$

$$\text{ή } v_K = -\omega A_K$$

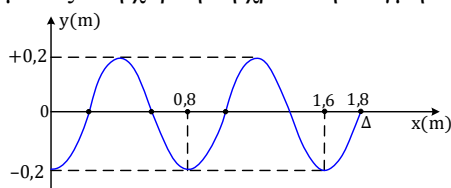
$$\text{ή } v_K = -\pi \text{ m/s}$$

Γ4. Η απομάκρυνση του σημείου Ο τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,15 \text{ s}$ προκύπτει από τη σχέση (2) για $t = t_1 = 0,15 \text{ s}$. Έχουμε:

$$y_O = 0,2\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) \text{ m}$$

$$\text{ή } y_O = -0,2 \text{ m}$$

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στη χορδή τη χρονική στιγμή t_1 .



Γ5. Η ταχύτητα διάδοσης των δύο τρέχοντων κυμάτων στη χορδή υπολογίζεται από τον τύπο:

$$v_\delta = \lambda f$$

$$\text{ή } v_\delta = \frac{\lambda}{T}$$

$$\text{ή } v_\delta = 4 \text{ m/s}$$

Για να δημιουργείται στάσιμο κύμα στη χορδή στην περίπτωση που και τα δύο άκρα της είναι ακλόνητα στερεωμένα, πρέπει να ισχύει:

$$L = \kappa \frac{\lambda'}{2} \quad (4)$$

$$\text{ή } L = \kappa \frac{v_\delta}{2f'}$$

$$\text{ή } f' = \frac{\kappa v_\delta}{2L}$$

$$\text{ή } f' = \frac{10}{9} \kappa, \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Έχουμε:

$$9 \text{ Hz} < f' < 11 \text{ Hz}$$

$$\text{ή } 9 < \frac{10}{9} \kappa < 11$$

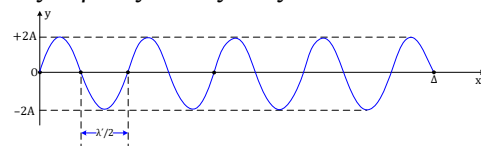
$$\text{ή } 8,1 < \kappa < 9,9$$

$$\text{ή } \kappa = 9$$

Επομένως, από τη σχέση (4) προκύπτει:

$$L = 9 \frac{\lambda'}{2}$$

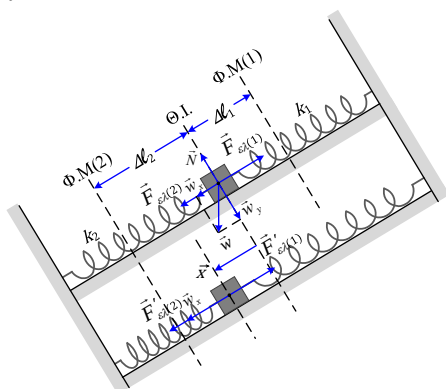
Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος στη χορδή μια χρονική στιγμή στην οποία τα σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται στις ακραίες θέσεις τους.



Όπως προκύπτει από το προηγούμενο στιγμιότυπο, στη χορδή σχηματίζονται 9 κοιλίες.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } w_x + F_{el(2)} = F_{el(1)}$$

$$\text{ή } mg \eta \mu \phi + k_2 \Delta l_2 = k_1 \Delta l_1 \quad (1)$$

Στην τυχαία θέση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ισχύει:

$$\Sigma F_x = F'_{el(2)} + w_x - F'_{el(1)}$$

$$\text{ή } \Sigma F_x = k_2(\Delta l_2 - x) + mg \eta \mu \phi - k_1(\Delta l_1 + x)$$

$$\text{ή } \Sigma F_x = k_2 \Delta l_2 - k_2 x + mg \eta \mu \phi - k_1 \Delta l_1 - k_1 x,$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$\Sigma F_x = -k_2 x - k_1 x$$

$$\text{ή } \Sigma F_x = -(k_1 + k_2)x$$

Επομένως το σώμα Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k_1 + k_2$.

Δ2. Ισχύει:

$$D = m\omega^2$$

$$\text{ή } \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

$$\text{ή } \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Το πλάτος A της ταλάντωσης είναι ίσο με $A = \Delta l_1$. Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$mg \eta \mu \phi + k_2 2 \Delta l_1 = k_1 \Delta l_1$$

$$\text{ή } \Delta l_1 = \frac{mg \eta \mu \phi}{k_1 - 2k_2}$$

$$\text{ή } \Delta l_1 = 0,2 \text{ m}$$

Συνεπώς είναι $A = 0,2 \text{ m}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ από τη θέση ισορροπίας του είναι η: $x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0)$ (2).

Επειδή για $t = 0$ είναι $x = +A$, από την εξίσωση (2) προκύπτει ότι:

$$\eta \mu \phi_0 = 1$$

$$\text{ή } \eta \mu \phi_0 = \eta \mu \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

Επειδή ισχύει: $0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από την εξίσωση (3) προκύπτει ότι $\phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Συνεπώς, είναι:

$$x = 0,2 \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) (S.I.)$$

Δ3. Ισχύει ότι $F_{el(1)}^{max} = k_1(\Delta l_1 + A)$ και

αφού $A < \Delta l_2$, είναι:

$$F_{el(2)}^{min} = k_2(\Delta l_2 - A)$$

Συνεπώς, είναι:

$$\frac{F_{el(1)}^{max}}{F_{el(2)}^{min}} = \frac{k_1(\Delta l_1 + A)}{k_2(\Delta l_2 - A)}$$

$$\frac{F_{el(1)}^{max}}{F_{el(2)}^{min}} = 6$$

$$\text{ή } \frac{F_{el(1)}^{max}}{F_{el(2)}^{min}} = 6$$

Δ4. Έστω Δl η επιμήκυνση του ελατηρίου (1) τη χρονική στιγμή t_1 . Ισχύει:

$$U_{el(1)} = \frac{1}{2} k_1 (\Delta l)^2$$

$$\text{ή } \Delta l = \sqrt{\frac{2U_{el(1)}}{k_1}}$$

$$\text{ή } \Delta l = 0,2 \text{ m}$$

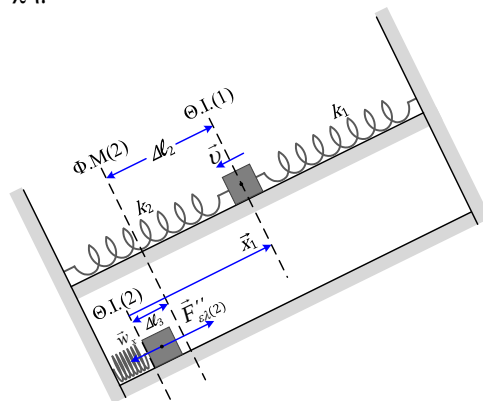
Αφού $\Delta l = \Delta l_1$, το σώμα Σ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του. Συνεπώς ισχύει ότι:

$$v = v_{max}$$

$$\text{ή } v = \omega A$$

$$\text{ή } v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Δ5. Αν αφαιρέσουμε τη χρονική στιγμή t_1 το ελατήριο (1), τότε το σώμα Σ θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D' = k_2$ και γωνιακή συχνότητα ω_2 γύρω από τη θέση ισορροπίας (2) που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω Δl_3 η συμπίεση του ελατηρίου (2) στη νέα θέση ισορροπίας του σώματος Σ.

Ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } w_x = F''_{el(2)}$$

$$\text{ή } mg \eta \mu \phi = k_2 \Delta l_3$$

$$\text{ή } \Delta l_3 = 0,2 \text{ m}$$

Η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης του σώματος Σ από τη νέα θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά την αφαίρεση του ελατηρίου (1), είναι ίση με:

$$|x_1| = \Delta \ell_2 + \Delta \ell_3$$

$$\text{ή } |x_1| = 0,6 \text{ m}$$

Έστω A_2 το πλάτος της νέας ταλάντωσης του σώματος Σ. Από την Α.Δ.Ε για την νέα ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ, έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}k_2A_2^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k_2x_1^2$$

$$\text{ή } A_2 = \sqrt{\frac{m}{k_2}v^2 + x_1^2}$$

$$\text{ή } A_2 = \sqrt{0,52} \text{ m}$$

10^ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

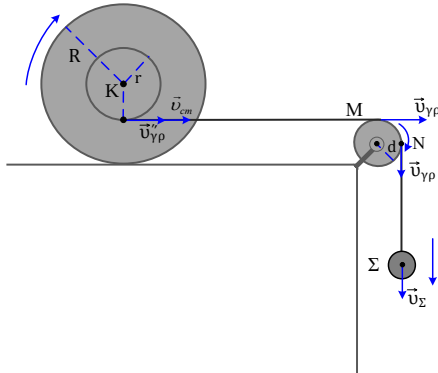
A1. γ, A2. α, A3. α, A4. β

A5. α. Σ, β. Σ, γ. Λ, δ. Σ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η α.

Έστω $\vec{v}_{cm}$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου και $\vec{\omega}$ η γωνιακή του ταχύτητα, $\vec{\omega}_\tau$ η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας και $\vec{v}_\Sigma$ η ταχύτητα του σώματος Σ μια τυχαία χρονική στιγμή t ($t > 0$).



Έχουμε:

$$\vec{v}_\Sigma = \vec{v}_N$$

$$\text{ή } v_\Sigma = v_{\gamma p}$$

$$\text{ή } v_\Sigma = \omega_\tau d \quad (1)$$

και

$$\vec{v}_A = \vec{v}_M$$

$$\text{ή } \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma p}'' = \vec{v}_{\gamma p}'$$

$$\text{ή } v_{cm} - v_{\gamma p}'' = v_{\gamma p}'$$

$$\text{ή } \omega R - \omega \frac{R}{2} = \omega_\tau d$$

$$\text{ή } \frac{\omega R}{2} = \omega_\tau d$$

$$\text{ή } \frac{v_{cm}}{2} = \omega_\tau d \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$v_\Sigma = \frac{v_{cm}}{2} \quad (3)$$

Έστω a_{cm} το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του δίσκου και a_Σ το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ. Παραγωγίζοντας τη σχέση (3), έχουμε:

$$\frac{dv_\Sigma}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv_{cm}}{dt}$$

$$\text{ή } a_\Sigma = \frac{a_{cm}}{2}$$

Η μετατόπιση του σώματος Σ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση: $h = \frac{1}{2} \alpha_\Sigma t_1^2 \quad (4)$.

Το μήκος του νήματος που τυλίγεται στο δίσκο από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$\ell = r \Delta \theta$$

$$\text{ή } \ell = \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\tau} t_1^2$$

$$\text{ή } \ell = \frac{1}{4} R \frac{\alpha_{cm}}{R} t_1^2$$

$$\text{ή } \ell = \frac{1}{4} \alpha_{cm} t_1^2 \quad (5)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (4) και (5), έχουμε:

$$\frac{h}{\ell} = \frac{2\alpha_\Sigma}{\alpha_{cm}}$$

$$\text{ή } \frac{h}{\ell} = 1$$

$$\text{ή } \ell = h$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Η μέγιστη τιμή του μέτρου της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πλαίσιο (1) δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\epsilon\pi(1)(\max)} = N\omega BA$$

Το πλάτος του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο (1) δίνεται από τη σχέση:

$$I_1 = \frac{N\omega BA}{2R} \quad (1)$$

Η μέση ισχύς που καταναλώνει ο αντιστάτης R_1 δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{P}_1 = I_{\epsilon\nu(1)}^2 R_1$$

$$\text{ή } \bar{P}_1 = \left(\frac{I_1}{\sqrt{2}}\right)^2 R_1$$

$$\text{ή } \bar{P}_1 = \frac{I_1^2 R}{2},$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$\bar{P}_1 = \frac{N^2 \omega^2 B^2 A^2}{8R} \quad (2)$$

Η μέγιστη τιμή του μέτρου της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πλαίσιο (2), είναι ίση με:

$$E_{\epsilon\pi(2)(\max)} = N\omega BA$$

Το πλάτος της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο (2) είναι ίσο με:

$$I_2 = \frac{N\omega BA}{R+R_2} \quad (3)$$

Η μέση ισχύς που καταναλώνει ο αντιστάτης R_2 , είναι ίση με:

$$\bar{P}_2 = I_{\varepsilon\nu(2)}^2 R_2$$

$$\text{ή } \bar{P}_2 = \left(\frac{I_2}{\sqrt{2}}\right)^2 R_2$$

$$\text{ή } \bar{P}_2 = \frac{I_2^2 R_2}{2},$$

ή λόγω της σχέσης (3):

$$\bar{P}_2 = \frac{N^2 \omega^2 B^2 A^2}{2(R+R_2)^2} R_2 \quad (4). \text{ Αφού είναι } \bar{P}_1 = \bar{P}_2,$$

από τις σχέσεις (2) και (4), έχουμε:

$$\frac{N^2 \omega^2 B^2 A^2}{8R} = \frac{N^2 \omega^2 B^2 A^2}{2(R+R_2)^2} R_2$$

$$\text{ή } 2(R+R_2)^2 = 8RR_2$$

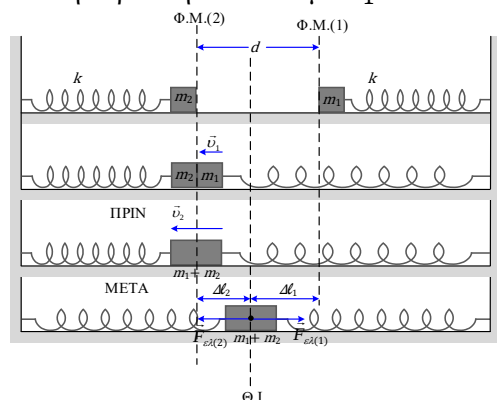
$$\text{ή } 2(R^2 + R_2^2 + 2RR_2) = 8RR_2$$

$$\text{ή } R^2 + R_2^2 - 2RR_2 = 0$$

$$\text{ή } (R - R_2)^2 = 0 \text{ ή } R_2 = R.$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β.

Το πλάτος A_1 της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι ίσο με $A_1 = 2d$.



Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ελάχιστα πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση, έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k A_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} k d^2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Κ δίνεται από τη

$$\text{σχέση: } \varphi_K = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) \quad (1)$$

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι για $t = 0$ είναι $\varphi_K = -2\pi \text{ rad}$.

$$\text{ή } \frac{1}{2} k (2d)^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} k d^2$$

$$\text{ή } v_1 = \sqrt{\frac{3k}{m_1}} d \quad (1)$$

Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}}$$

$$\text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$$

$$\text{ή } v_2 = \frac{v_1}{2},$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$v_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3k}{m_1}} d \quad (2)$$

Έστω $\Delta \ell_1$ και $\Delta \ell_2$ οι επιμηκύνσεις των ελατηρίων στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος. Ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } F_{\varepsilon\lambda(1)} = F_{\varepsilon\lambda(2)}$$

$$\text{ή } k \Delta \ell_1 = k \Delta \ell_2$$

$$\text{ή } \Delta \ell_1 = \Delta \ell_2$$

Όπως φαίνεται από το σχήμα, είναι:

$$d = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2$$

$$\text{ή } \Delta \ell_2 = \frac{d}{2}$$

Η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του αμέσως μετά την κρούση, είναι ίση με:

$$|x| = \Delta \ell_2$$

$$\text{ή } |x| = \frac{d}{2} \quad (3)$$

Έστω A_2 το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση του συσσωματώματος, έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} 2k A_2^2 = \frac{1}{2} 2m_1 v_2^2 + \frac{1}{2} 2k x^2$$

$$\text{ή } A_2^2 = \frac{m_1}{k} v_2^2 + x^2,$$

ή λόγω των σχέσεων (2) και (3):

$$A_2^2 = \frac{m_1}{k} \cdot \frac{1}{4} \frac{3k}{m_1} d^2 + \frac{d^2}{4}$$

$$\text{ή } A_2 = d$$

Επομένως, από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $\varphi_K = -2\pi \text{ rad}$, έχουμε:

$$-2\pi = -2\pi \frac{0,2}{\lambda}$$

$$\text{ή } \lambda = 0,2 \text{ m}$$

Από το διάγραμμα προκύπτει ακόμα ότι για $t = 0,2 \text{ s}$ είναι $\varphi_K = 0$.

Από τη σχέση (1) για $t = 0,2 \text{ s}$ και $\varphi_K = 0$, έχουμε:

$$0 = 2\pi \left(\frac{0,2}{T} - 1 \right)$$

$$\text{ή } \frac{0,2}{T} = 1 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{ή } T = 0,2 \text{ s}$$

Έστω A το πλάτος του κύματος. Έχουμε:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 A^2$$

$$\text{ή } A = 0,2 \text{ m}$$

Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = 0,2 \eta \mu 2\pi (5t - 5x) \text{ (S.I.)}$$

Γ2. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_\delta = \lambda f$$

$$\text{ή } v_\delta = 1 \text{ m/s}$$

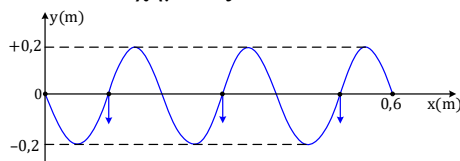
Η απόσταση x_1 στην οποία έχει διαδοθεί το κύμα από την αρχή $O(x = 0)$ του άξονα $x'Ox$ τη χρονική στιγμή t_1 , είναι ίση με: $x_1 = 0,6 \text{ m}$.

Χωρίζουμε την απόσταση x_1 σε N τμήματα μήκους $\lambda/4$ το καθένα:

$$N = \frac{x_1}{\frac{\lambda}{4}}$$

$$\text{ή } N = 12$$

Το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 απεικονίζεται στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος.



Όπως φαίνεται από το στιγμιότυπο 3 σημεία διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους με αρνητική ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_1 .

Γ3. Αφού το σημείο Λ ξεκινά να ταλαντώνεται νωρίτερα από το σημείο K είναι: $\varphi_\Lambda > \varphi_K$. Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των σημείων K και Λ είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_\Lambda - \varphi_K$$

$$\text{ή } \Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } x_K - x_\Lambda = \frac{\lambda \Delta\varphi}{2\pi}$$

$$\text{ή } x_\Lambda = x_K - \frac{\lambda \Delta\varphi}{2\pi}$$

$$\text{ή } x_\Lambda = +0,05 \text{ m}$$

Η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο Λ είναι:

$$t_\Lambda = \frac{x_\Lambda}{v_\delta}$$

$$\text{ή } t_\Lambda = 0,05 \text{ s}$$

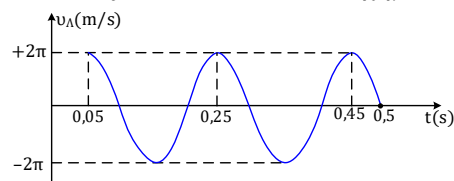
Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Λ είναι η:

$$v_\Lambda = \frac{2\pi}{T} A \sigma \nu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v_\Lambda = 2\pi \sigma \nu 2\pi (5t - 0,25),$$

$$\text{για } t \geq 0,05 \text{ s}$$

Η γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Λ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 0,5 \text{ s}$ απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Γ4. Η απομάκρυνση του σημείου K τη χρονική στιγμή $t_2 = 0,8 \text{ s}$ προκύπτει από την εξίσωση του κύματος, αν θέσουμε σε αυτή όπου t το $t_2 = 0,8 \text{ s}$ και όπου x το $x_K = +0,2 \text{ m}$. Έχουμε:

$$y_K = 0,2 \eta \mu 6\pi \text{ m}$$

$$\text{ή } y_K = 0$$

Η απομάκρυνση του σημείου Λ τη χρονική στιγμή $t_2 = 0,8 \text{ s}$ προκύπτει από την εξίσωση του κύματος, αν θέσουμε σε αυτή όπου t το $t_2 = 0,8 \text{ s}$ και όπου x το $x_K = +0,05 \text{ m}$. Έχουμε:

$$y = 0,2 \eta \mu 7,5\pi \text{ m}$$

$$\text{ή } y_\Lambda = -0,2 \text{ m}$$

Η κατακόρυφη απόσταση των σημείων K και Λ τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$\Delta y = |y_\Lambda - y_K|$$

$$\text{ή } \Delta y = 0,2 \text{ m}$$

Η οριζόντια απόσταση των σημείων K και Λ είναι:

$$\Delta x = x_K - x_\Lambda$$

$$\text{ή } \Delta x = 0,15 \text{ m}$$

Επομένως, η απόσταση μεταξύ των σημείων Κ και Λ τη χρονική στιγμή t_3 είναι:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\text{ή } d = 0,25 \text{ m}$$

Γ5. Αφού τη χρονική στιγμή t_3 το υλικό σημείο Κ κινείται με θετική ταχύτητα επιβραδυνόμενο, η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή αυτή είναι θετική ($y_\Lambda > 0$).

Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση του σημείου Κ, έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m v_K^2 + \frac{1}{2} D y_K^2$$

$$\text{ή } m \omega^2 A^2 = m v_K^2 + m \omega^2 y_K^2$$

$$\text{ή } y_K = + \sqrt{A^2 - \left(\frac{v_K}{\omega} \right)^2}$$

$$\text{ή } y_K = +0,1\sqrt{3} \text{ m}$$

Έχουμε:

$$y_K = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t_3}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } +0,1\sqrt{3} = 0,2 \eta \mu \phi_K$$

$$\text{ή } \eta \mu \phi_K = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ή } \phi_K = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots (2)$$

$$\text{ή } \phi_K = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots (3)$$

Η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_3 είναι:

$$v_K = \omega A \sigma \nu 2\pi \left(\frac{t_3}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v_K = \omega A \sigma \nu \phi_K (4)$$

Από τη σχέση (4), λόγω της σχέσης (2), προκύπτει:

$$v_K = \omega A \sigma \nu \left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{ή } v_K = \omega A \sigma \nu \frac{\pi}{3} > 0$$

Από τη σχέση (4), λόγω της σχέσης (3), προκύπτει:

$$v_K = \omega A \sigma \nu \left(2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\text{ή } v_K = \omega A \sigma \nu \frac{2\pi}{3} < 0$$

Αφού τη χρονική στιγμή t_3 είναι $v_K > 0$, η φάση της ταλάντωσης του σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_3 είναι:

$$\phi_K = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Η φάση της ταλάντωσης του σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta\phi = \phi_\Lambda - \phi_K$$

$$\text{ή } \phi_\Lambda = \phi_K + \Delta\phi$$

$$\text{ή } \phi_\Lambda = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{ή } \phi_\Lambda = 2\kappa\pi + \frac{11\pi}{6}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Η επιτάχυνση του σημείου Λ της χρονική στιγμή t_3 δίνεται από τη σχέση:

$$a_\Lambda = -\omega^2 A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t_3}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } a_\Lambda = -\omega^2 A \eta \mu \phi_\Lambda$$

$$\text{ή } a_\Lambda = -\omega^2 A \eta \mu \left(2\kappa\pi + \frac{11\pi}{6} \right)$$

$$\text{ή } a_\Lambda = -\omega^2 A \eta \mu \frac{11\pi}{6}$$

$$\text{ή } a_\Lambda = + \frac{\omega^2 A}{2}$$

$$\text{ή } a_\Lambda = +100 \text{ m/s}^2$$

ΘΕΜΑ Δ (νέο)

Δ1. Η ορμή ενός φωτονίου της προσπίπτουσας ακτινοβολίας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$\text{ή } p = 1,32 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Η ενέργεια ενός φωτονίου της προσπίπτουσας ακτινοβολίας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_\phi = hf$$

$$\text{ή } E_\phi = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\text{ή } E_\phi = 3,96 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\text{ή } E_\phi = 2,475 \text{ eV}$$

Δ2. Το πλήθος των φωτοηλεκτρονίων που εκπέμπονται από την κάθοδο στη μονάδα του χρόνου $\left(\frac{N}{t}\right)$ είναι ίσο με το πλήθος

των φωτονίων που προσπίπτουν στην άνοδο στη μονάδα του χρόνου. Έχουμε:

$$P = \frac{E_{\text{ολ}}}{t}$$

$$\text{ή } P = \frac{NE_{\varphi}}{t}$$

$$\text{ή } \frac{N}{t} = \frac{P}{E_{\varphi}}$$

$$\text{ή } \frac{N}{t} = 25 \cdot 10^{17} \text{ φωτόνια/s}$$

Επομένως, το πλήθος των φωτοηλεκτρονίων που εκπέμπονται από την κάθοδο στη μονάδα του χρόνου, είναι $\frac{n}{t} = 25 \cdot 10^{17}$ ηλεκτρόνια/s.

Δ3. Τα ηλεκτρόνια δεν εκτρέπονται από το φίλτρο ταχυτήτων. Το μέτρο $\bar{v}$ της ταχύτητας με την οποία εισέρχονται στο φίλτρο ταχυτήτων και στη συνέχεια στο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_2$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v = \frac{E}{B_1}$$

$$\text{ή } v = 16 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Η κινητική ενέργεια K_1 με την οποία τα φωτοηλεκτρόνια φτάνουν στην άνοδο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_e v^2$$

$$\text{ή } K_1 = 1152 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

$$\text{ή } K_1 = 7,2 \text{ eV}$$

Έστω K_{max} η μέγιστη κινητική ενέργεια με την οποία εκπέμπονται τα φωτοηλεκτρόνια από την κάθοδο. Επειδή τα ηλεκτρόνια κατά την κίνηση τους από την κάθοδο στην άνοδο επιταχύνονται από διαφορά δυναμικού $\Delta V = 6,125 \text{ V}$, ισχύει:

$$K_1 - K_{\text{max}} = q_e (V_{\text{καθ}} - V_{\text{αν}})$$

$$\text{ή } K_{\text{max}} = K_1 - (-e)(-\Delta V)$$

$$\text{ή } K_{\text{max}} = K_1 - e\Delta V$$

$$\text{ή } K_{\text{max}} = 1,075 \text{ eV}$$

Έστω φ το έργο εξαγωγής του μετάλλου. Σύμφωνα με τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein ισχύει:

$$K_{\text{max}} = E_{\varphi} - \varphi$$

$$\text{ή } \varphi = E_{\varphi} - K_{\text{max}}$$

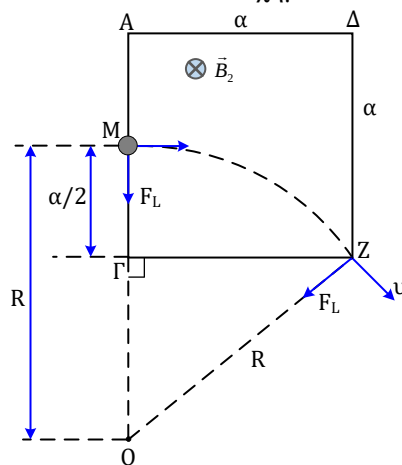
$$\text{ή } \varphi = 1,4 \text{ eV}$$

Έστω V_0 η τάση αποκοπής της ακτινοβολίας. Έχουμε:

$$K_{\text{max}} = eV_0$$

$$\text{ή } V_0 = 1,075 \text{ V}$$

Δ4. Τα φωτοηλεκτρόνια εισέρχονται από το μέσον M της πλευράς ΑΓ και εξέρχονται από την κορυφή Z του τετραγώνου όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχεδιάζουμε τη δύναμη Lorentz που δέχεται ένα ηλεκτρόνιο στο σημείο M και στο σημείο Z της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει, οπότε προσδιορίζουμε το κέντρο O της κυκλικής τροχιάς του. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΖ έχουμε:

$$R^2 = \left(R - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \alpha^2$$

$$\text{ή } R^2 = R^2 + \frac{\alpha^2}{4} - R\alpha + \alpha^2$$

$$\text{ή } R = \frac{5\alpha}{4}$$

$$\text{ή } R = 3 \text{ mm}$$

$$\text{ή } R = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Το μέτρο της έντασης $\vec{B}_2$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$R = \frac{m_e v}{B_2 |q_e|}$$

$$\text{ή } B_2 = \frac{m_e v}{Re}$$

$$\text{ή } B_2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

Δ5. Έχουμε:

$$I_2 = 2I$$

$$\text{ή } \frac{P_2}{A} = 2 \frac{P}{A}$$

$$\text{ή } P_2 = 2P$$

$$\text{ή } \frac{N_2 E \phi}{t} = 2 \frac{N E \phi}{t}$$

$$\text{ή } \frac{N_2}{t} = \frac{2N}{t}$$

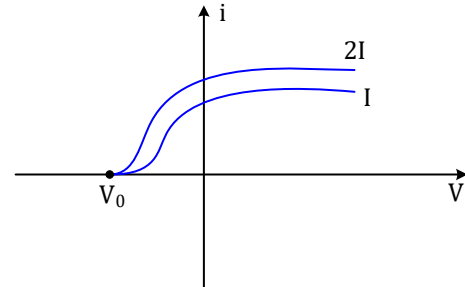
$$\text{ή } n_2 = 2n$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 100\%$$

Οι γραφικές παραστάσεις της έντασης του ρεύματος των φωτοηλεκτρονίων σε συνάρτηση με την εφαρμοζόμενη τάση μεταξύ της ανόδου και της καθόδου στις περιπτώσεις που η ένταση της ακτινοβολίας είναι I και $2I$ απεικονίζονται στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος.



11^ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

A1. β, A2. γ, A3. β, A4. γ

A5. α. Σ, β. Σ, γ. Σ, δ. Λ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

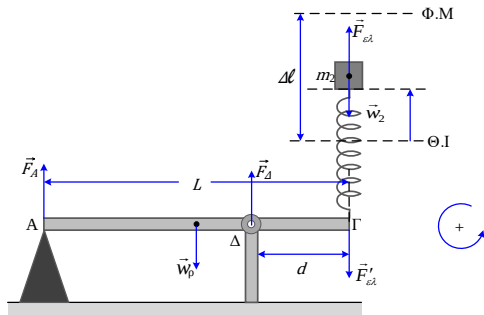
B1. Σωστή απάντηση είναι η β.

Έστω u'_2 η ταχύτητα του σώματος Σ_2 μετά την κρούση. Είναι:

$$u'_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2} u_1$$

$$\text{ή } u'_2 = u_1$$

Η ράβδος ΑΓ μπορεί να ανατραπεί στην περίπτωση που η δύναμη που δέχεται από το ελατήριο έχει φορά προς τα κάτω.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0$$

$$\text{ή } -F_A(L-d) + w_\rho \left(\frac{L}{2} - d\right) - F'_{\epsilon\lambda} d = 0$$

$$\text{ή } -F_A \frac{3L}{4} + Mg \frac{L}{4} - F'_{\epsilon\lambda} \frac{L}{4} = 0$$

$$\text{ή } F_A = \frac{Mg}{3} - \frac{F'_{\epsilon\lambda}}{3} \quad (1)$$

για να μην ανατρέπεται η ράβδος πρέπει:

$$F_A \geq 0, \text{ ή λόγω της σχέσης (1):}$$

$$F'_{\epsilon\lambda} \leq Mg$$

$$\text{ή } F_{\epsilon\lambda} \leq Mg$$

Συνεπώς, όταν η δύναμη $\vec{F}'_{\epsilon\lambda}$ που δέχεται η ράβδος έχει φορά προς τα κάτω το μέτρο της δεν πρέπει να υπερβαίνει την τιμή Mg . Συνεπώς, για να μην ανατρέπεται η ράβδος το σώμα Σ_2 θα πρέπει να φτάνει στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του και το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_{\epsilon\lambda}$ που δέχεται από το ελατήριο να είναι το πολύ ίσο με Mg . Έστω A_{max} το μέγιστο πλάτος με το οποίο μπορεί να ταλαντωθεί το σώμα Σ_2 χωρίς η ράβδος να ανατρέπεται. Στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης πρέπει να ισχύει:

$$F_{\epsilon\lambda}^{max} \leq Mg$$

$$\text{ή } k(\Delta\ell + A) \leq Mg$$

$$\text{ή } k\Delta\ell + kA \leq Mg \quad (2)$$

Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } m_2 g = k\Delta\ell$$

$$\text{ή } 3mg = k\Delta\ell \quad (3)$$

Η σχέση (3), λόγω της σχέσης (2) γίνεται:

$$3mg + kA \leq 5mg$$

$$\text{ή } A \leq \frac{2mg}{k}$$

$$\text{ή } A_{max} = \frac{2mg}{k}$$

Η μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας που πρέπει να έχει το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση, ώστε η ράβδος να μην ανατρέπεται είναι ίση με:

$$u'_{2(max)} = \omega A_{max}$$

$$\text{ή } u'_{2(max)} = \sqrt{\frac{k}{3m}} \frac{2mg}{k}$$

$$\text{ή } u'_{2(max)} = 2g \sqrt{\frac{m}{3k}}$$

$$\text{ή } u_{1(max)} = 2g \sqrt{\frac{m}{3k}}.$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Ισχύει:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2}$$

$$\text{ή } A_1^2 = A_0 A_2$$

$$\text{ή } A_1^2 = \frac{A_0^2}{4}$$

$$\text{ή } A_1 = \frac{A_0}{2}$$

Συνεπώς είναι:

$$\frac{A_4}{A_5} = \frac{A_0}{A_1}$$

$$\text{ή } \frac{A_4}{A_5} = 2$$

$$\text{ή } A_4 = 2A_5 \quad (1)$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι ίσο με:

$$\pi = \frac{E_4 - E_5}{E_4} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \frac{\frac{1}{2}DA_4^2 - \frac{1}{2}DA_5^2}{\frac{1}{2}DA_4^2} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{A_5^2}{A_4^2}\right) \cdot 100\%,$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$\pi = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \cdot 100\% = 75\%$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Έχουμε:

$$K_\alpha = 16K_\rho$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = 16 \frac{1}{2} m_\rho v_\rho^2$$

$$\text{ή } v_\alpha^2 = 4v_\rho^2$$

$$\text{ή } v_\alpha = 2v_\rho$$

Για τα μήκη κύματος κατά de Broglie του πρωτονίου και του σωματίου α ισχύουν:

$$\lambda_p = \frac{h}{m_p v_p} \quad (1)$$

και

$$\lambda_\alpha = \frac{h}{m_\alpha v_\alpha} \quad (2)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_\alpha} = \frac{m_\alpha v_\alpha}{m_p v_p}$$

$$\text{ή } \frac{\lambda_p}{\lambda_\alpha} = \frac{4m_p 2v_p}{m_p v_p}$$

$$\text{ή } \lambda_p = 8\lambda_\alpha$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω A το πλάτος των δύο τρέχοντων κυμάτων τα οποία δημιουργούν το στάσιμο κύμα. Από το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή t_1 προκύπτει:

$$|A_0| = 0,4 \text{ m}$$

$$\text{ή } 2A = 0,4 \text{ m}$$

$$\text{ή } A = 0,2 \text{ m}$$

και

$$\frac{3\lambda}{4} = 0,3$$

$$\text{ή } \lambda = 0,4 \text{ m}$$

Από τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του σημείου K προκύπτει:

$$2T = 0,4 \text{ s}$$

$$\text{ή } T = 0,2 \text{ s}$$

Επομένως, έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{ή } \omega = 10\pi \text{ rad/s}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$$

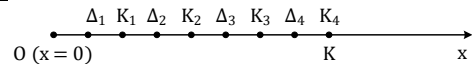
$$\text{ή } y = 0,4 \sin(5\pi x) \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.)}$$

Γ2. Από τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου K έχουμε: $a_{\max(K)} = 400 \text{ m/s}^2$. Έχουμε:

$$a_{\max(K)} = \omega^2 |A_K|$$

$$\text{ή } |A_K| = 0,4 \text{ m}$$

Αφού $|A_K| = 2A$, στο σημείο K εμφανίζεται κοιλία του στάσιμου κύματος.



Αφού ανάμεσα στο σημείο O και στο σημείο K σχηματίζονται 4 δεσμοί, το σημείο K είναι η τέταρτη κοιλία μετά το σημείο O . Οι θέσεις των κοιλιών στον ημιάξονα Ox δίνονται από τη σχέση:

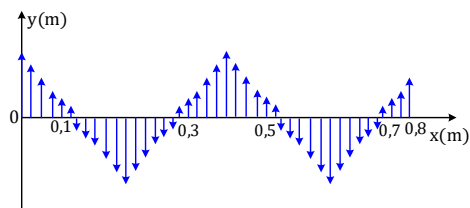
$$x_{\text{κοιλ}} = \kappa \frac{\lambda}{2}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Η θέση του σημείου K προκύπτει από τη σχέση (1) για $\kappa = 4$. Έχουμε:

$$x_K = 2\lambda$$

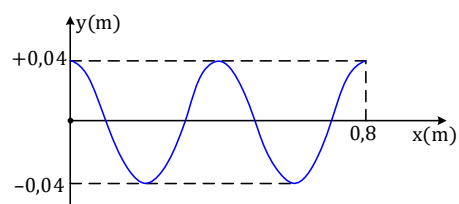
$$\text{ή } x_K = 0,8 \text{ m}$$

Γ3. Ο χρόνος $\Delta t_1 = 0,05 \text{ s}$ είναι ίσος με $T/4$. Το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή t_2 απεικονίζεται στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος.



Ο χρόνος $\Delta t_2 = 0,1 \text{ s}$ είναι ίσος με $\frac{T}{2}$. Στο

ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή t_2 .



Γ4. Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Λ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A_{\Lambda} = 2A \left| \sin \left(\frac{2\pi x_{\Lambda}}{\lambda} \right) \right|$$

$$\text{ή } A_{\Lambda} = 0,4 \left| \sin \frac{3\pi}{4} \right| \text{ m}$$

$$\text{ή } A_{\Lambda} = 0,2\sqrt{2} \text{ m}$$

Έστω v_{Λ} η ταχύτητα του σημείου Λ τις χρονικές στιγμές στις οποίες η απομάκρυνση από τη Θ.Ι. του είναι $y = -0,2 \text{ m}$

Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση του σημείου Λ έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D A_{\Lambda}^2 = \frac{1}{2} m v_{\Lambda}^2 + \frac{1}{2} D y^2$$

$$\text{ή } m \omega^2 A_{\Lambda}^2 = m v_{\Lambda}^2 + m \omega^2 y^2$$

$$\text{ή } |v_{\Lambda}| = \omega \sqrt{A_{\Lambda}^2 - y^2}$$

$$\text{ή } |v_{\Lambda}| = 2\pi \text{ m/s}$$

Γ5. Έστω f' η νέα συχνότητα. Έχουμε:

$$f' = \frac{4}{9} f$$

$$\text{ή } f' = \frac{20}{9} \text{ Hz}$$

Η ταχύτητα διάδοσης των τρέχοντων κυμάτων είναι:

$$v_{\delta} = \lambda f$$

$$\text{ή } v_{\delta} = 2 \text{ m/s}$$

Έστω λ' το νέο μήκος κύματος. Επειδή η ταχύτητα διάδοσης των τρέχοντων κυμάτων δεν μεταβάλλεται, έχουμε:

$$v_{\delta} = \lambda' f'$$

$$\text{ή } \lambda' = \frac{v_{\delta}}{f'}$$

$$\text{ή } \lambda' = 0,9 \text{ m}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Ο δίνεται από τη σχέση:

$$y_O = 2A \eta \mu(2\pi f t)$$

$$\text{ή } y_O = 0,04 \eta \mu \left(\frac{40\pi}{9} t \right) \text{ (S.I.) (1)}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$y_{\Lambda} = 2A \sin \left(\frac{2\pi x_{\Lambda}}{\lambda'} \right) \eta \mu(2\pi f t)$$

$$\text{ή } y_{\Lambda} = 0,4 \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \eta \mu \left(\frac{40\pi}{9} t \right)$$

$$\text{ή } y_{\Lambda} = 0,2 \eta \mu \left(\frac{40\pi}{9} t \right) \text{ (S.I.) (2)}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι: $A_O = 0,4 \text{ m}$, $A_{\Lambda} = 0,2 \text{ m}$ και η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των σημείων Κ και Λ είναι ίση με $\Delta\phi = 0$.

Επομένως η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των δύο σημείων είναι:

$$\Delta y_{\max} = |A_O| - |A_{\Lambda}|$$

$$\text{ή } \Delta y_{\max} = 0,2 \text{ m}$$

Η οριζόντια απόσταση μεταξύ των δύο σημείων είναι:

$$\Delta x = x_{\Lambda} - x_O$$

$$\text{ή } \Delta x = 0,15 \text{ m}$$

Η μέγιστη απόσταση μεταξύ των σημείων Κ και Λ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης τους είναι:

$$d_{\max} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_{\max})^2}$$

$$\text{ή } d_{\max} = 0,25 \text{ m}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο κύκλωμα δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\varepsilon\pi} = Bv\ell$$

Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα δίνεται από τη σχέση:

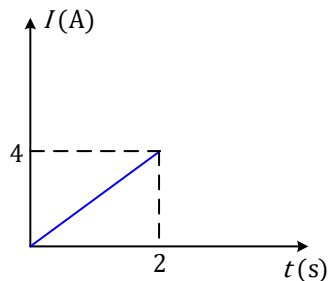
$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_1 + R_{K\Lambda}}$$

$$\text{ή } I_{\varepsilon\pi} = \frac{Bv\ell}{R_1 + R_{K\Lambda}}$$

$$\text{ή } I_{\varepsilon\pi} = \frac{B\ell at}{R_1 + R_{K\Lambda}}$$

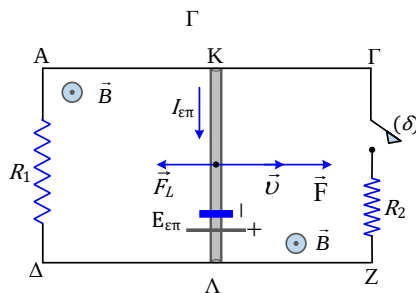
$$\text{ή } I_{\varepsilon\pi} = 2t \text{ (S.I.)}$$

Το επαγωγικό φορτίο υπολογίζεται από το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της έντασης του επαγωγικού ρεύματος και του άξονα των χρόνων από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$.



Συνεπώς, είναι $q_{\varepsilon\pi} = 4 \text{ C}$.

Δ2. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται ο αγωγός ΚΛ κατά τη διάρκεια της κίνησής του.



Ισχύει:

$$\Sigma F = ma$$

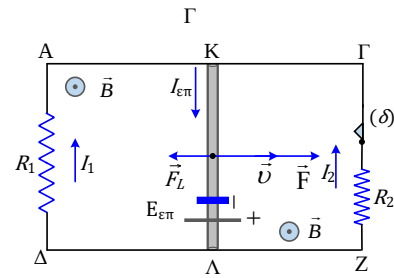
$$\text{ή } F - F_L = ma$$

$$\text{ή } F = F_L + ma$$

$$\text{ή } F = BI_{\varepsilon\pi}\ell + ma$$

$$\text{ή } F = 2t + 6 \text{ (S.I.) (1)}$$

Δ3. Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ υπολογίζεται από τη σχέση (1). Είναι: $F = 10 \text{ N}$. Από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά το κύκλωμα διαμορφώνεται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{1,2}$ του συστήματος των αντιστατών R_1 και R_2 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{1}{R_{1,2}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\text{ή } R_{1,2} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\text{ή } R_{1,2} = 1 \Omega$$

Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ) υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{Bv\ell}{R_{1,2} + R_{K\Lambda}}$$

$$\text{ή } I_{\varepsilon\pi} = \frac{B\ell at_1}{R_{1,2} + R_{K\Lambda}}$$

$$\text{ή } I_{\varepsilon\pi} = 6 \text{ A}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που δέχεται ο αγωγός τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ) είναι ίσο με:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi}\ell$$

$$\text{ή } F_L = 6 \text{ N}$$

Αφού είναι: $F > F_L$ ο αγωγός συνεχίζει να επιταχύνεται. Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται ο αγωγός ΚΛ από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά είναι:

$$\Sigma F = F - F_L$$

$$\text{ή } \Sigma F = F - BI_{\varepsilon\pi}\ell$$

$$\text{ή } \Sigma F = F - B \frac{Bv\ell}{R_{1,2} + R_{K\Lambda}} \ell$$

$$\text{ή } \Sigma F = F - \frac{B^2 \ell^2 v}{R_{1,2} + R_{K\Lambda}} \quad (2)$$

Αφού ο αγωγός ΚΛ συνεχίζει να επιταχύνεται από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά, το μέτρο v της ταχύτητας του αυξάνεται, οπότε από τη σχέση (2) προκύπτει ότι το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται μειώνεται και τη χρονική στιγμή t_2 κατά την οποία αποκτά την οριακή του ταχύτητα $v_{\text{ορ}}$ γίνεται ίσο με το μηδέν. Συνεπώς, από τη χρονική στιγμή t_1 μέχρι τη στιγμή t_2 η κίνηση του αγωγού ΚΛ είναι επιταχυνόμενη με επιτάχυνση που μειώνεται κατά μέτρο ($a = \frac{\Sigma F}{m}$). Τη χρονική στιγμή t_2 ισχύει:

$$\Sigma F = 0,$$

ή λόγω της σχέσης (2):

$$F - \frac{B^2 \ell^2 v_{op}}{R_{1,2} + R_{KL}} = 0$$

$$\text{ή } v_{op} = \frac{F(R_{1,2} + R_{KL})}{B^2 \ell^2}$$

$$\text{ή } v_{op} = 20 \text{ m/s}$$

Δ4. Ισχύει:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt}$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F dx}{dt}$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = \Sigma F v,$$

ή λόγω της σχέσης (2):

$$\frac{dK}{dt} = \left(F - \frac{B^2 \ell^2 v}{R_{1,2} + R_{KL}} \right) v$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = Fv - \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R_{1,2} + R_{KL}}$$

$$\text{ή } \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R_{1,2} + R_{KL}} - Fv + \frac{dK}{dt} = 0$$

$$\text{ή } v^2 - 20v + 64 = 0 \text{ (S.I.) (3)}$$

Η εξίσωση (3) έχει λύσεις:

$$v = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ και } v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Όμως επειδή είναι $t_1 < t < t_2$ είναι

$$v > v_{t_1} = at_1 = 12 \text{ m/s}$$

Συνεπώς δεκτή λύση είναι η $v = 16 \text{ m/s}$.

Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ τη χρονική στιγμή t , είναι ίση με:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{Bv\ell}{R_{1,2} + R_{KL}}$$

$$\text{ή } I_{\varepsilon\pi} = 8 \text{ A}$$

Η τάση V_{KL} του αγωγού ΚΛ τη χρονική στιγμή t είναι ίση με:

$$V_{KL} = I_{\varepsilon\pi} R_{1,2}$$

$$\text{ή } V_{KL} = 8 \text{ V}$$

Η ένταση I_2 του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_2 τη χρονική στιγμή t υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I_2 = \frac{V_{KL}}{R_2}$$

$$\text{ή } I_2 = 4 \text{ A}$$

Συνεπώς, ο ζητούμενος ρυθμός είναι ίσος με:

$$\left(\frac{dQ}{dt} \right)_{R_2} = I_2^2 R_2$$

$$\text{ή } \left(\frac{dQ}{dt} \right)_{R_2} = 32 \text{ J/s}$$

Δ5. Έστω $Q_{R_{o\lambda}}$ η θερμότητα Joule που εκλύεται από τους αντιστάτες του

κυκλώματος από τη χρονική στιγμή t_2 έως τη χρονική στιγμή t_3 . Από την Α.Δ.Ε έχουμε:

$$|\Delta K_{KL}| = Q_{R_{o\lambda}}$$

$$\text{ή } |K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}| = Q_{R_{o\lambda}}$$

$$\text{ή } \left| 0 - \frac{1}{2} m v_{op}^2 \right| = Q_{R_{o\lambda}}$$

$$\text{ή } Q_{R_{o\lambda}} = 200 \text{ J}$$

Έστω $Q_{R_{1,2}}$ η θερμότητα που εκλύεται από το σύστημα των αντιστατών R_1 , R_2 και $Q_{R_{KL}}$ η θερμότητα που εκλύεται από τον αγωγό ΚΛ. Επειδή οι $R_{1,2}$ και R_{KL} διαρρέονται κάθε χρονική στιγμή από το ίδιο ρεύμα $I_{\varepsilon\pi}$, ισχύει:

$$\frac{dQ_{R_{KL}}}{dQ_{R_{1,2}}} = \frac{I_{\varepsilon\pi}^2 R_{KL} dt}{I_{\varepsilon\pi}^2 R_{1,2} dt}$$

$$\text{ή } \frac{dQ_{R_{KL}}}{dQ_{R_{1,2}}} = \frac{R_{KL}}{R_{1,2}}$$

$$\text{ή } Q_{R_{KL}} = Q_{R_{1,2}}$$

Ισχύει:

$$Q_{R_{o\lambda}} = Q_{R_{KL}} + Q_{R_{1,2}}$$

$$\text{ή } Q_{R_{o\lambda}} = 2Q_{R_{1,2}}$$

$$\text{ή } Q_{R_{1,2}} = 100 \text{ J}$$

Έστω dQ_{R_1} και dQ_{R_2} τα στοιχειώδη ποσά θερμότητας που εκλύονται από τους αντιστάτες R_1 και R_2 αντίστοιχα σε χρόνο dt . Ισχύει:

$$\frac{dQ_{R_1}}{dQ_{R_2}} = \frac{\frac{V_{KL}^2 dt}{R_1}}{\frac{V_{KL}^2 dt}{R_2}}$$

$$\text{ή } \frac{dQ_{R_1}}{dQ_{R_2}} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\text{ή } dQ_{R_2} = dQ_{R_1}$$

Επομένως, για τις θερμότητες Q_{R_1} και Q_{R_2} που εκλύουν οι αντιστάτες R_1 και R_2 αντίστοιχα από τη χρονική στιγμή t_2 έως τη χρονική στιγμή t_3 ισχύει: $Q_{R_1} = Q_{R_2}$.

Όμως είναι:

$$Q_{R_{1,2}} = Q_{R_1} + Q_{R_2}$$

$$\text{ή } Q_{R_{1,2}} = 2Q_{R_1}$$

$$\text{ή } Q_{R_1} = 50 \text{ J.}$$

12^ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

A1. β, A2. α, A3. α, A4. γ

A5. α. Σ, β. Σ, γ. Λ, δ. Σ, ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. (νέο) Σωστή απάντηση είναι η γ.

Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 πριν από την κρούση.

Έχουμε:

$$v_0 = \omega A_1$$

$$\text{ή } A_1 = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\text{ή } A_1 = \frac{\sqrt{\frac{3m}{k}}}{\sqrt{\frac{k}{3m}}} g$$

$$\text{ή } A_1 = \frac{3mg}{k}$$

Έστω $\Delta\ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ_2 . Έχουμε:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } m_2 g = k \Delta\ell$$

$$\text{ή } \Delta\ell = \frac{3mg}{k}$$

Τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 από τη Θ.Ι. του είναι:

$$|x| = \Delta\ell$$

$$\text{ή } |x| = \frac{3mg}{k}$$

Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ_2 , έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D A_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} D x^2$$

$$\text{ή } v_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2} (A_1^2 - x^2)}$$

$$\text{ή } v_2 = 0$$

Έστω v'_2 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Έχουμε:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή } v'_2 = 3\sqrt{\frac{m}{k}} g$$

Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 μετά την κρούση. Έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D A_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2} D x^2$$

$$\text{ή } A_2 = \sqrt{\frac{m_2}{k} v_2'^2 + x^2}$$

$$\text{ή } A_2 = \sqrt{\frac{3m}{k} \left(3\sqrt{\frac{m}{k}} g \right)^2 + \left(\frac{3mg}{k} \right)^2}$$

$$\text{ή } A_2 = \frac{6mg}{k}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Επειδή η ένταση $\vec{B}_1$ του μαγνητικού πεδίου (1) αυξάνεται, στο πλαίσιο δημιουργείται ΗΕΔ από επαγωγή. Το μέτρο της ΗΕΔ από επαγωγή που δημιουργείται στο πλαίσιο δίνεται από τον τύπο:

$$E_{\text{επ}} = N \frac{d\Phi}{dt}$$

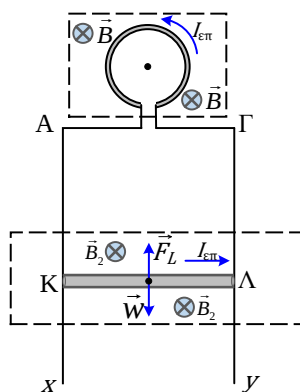
$$\text{ή } E_{\text{επ}} = N \frac{dBA}{dt}$$

$$\text{ή } E_{\text{επ}} = N \lambda A \quad (1)$$

Το επαγωγικό ρεύμα που διαρρέει το πλαίσιο έχει αντίθετη φορά από τη φορά των δεικτών του ρολογιού, αφού σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, δημιουργεί στο κυκλικό πλαίσιο μαγνητικό πεδίο αντίθετης φοράς από το μαγνητικό πεδίο B_1 , ώστε να αντιστέκεται στην αύξηση της μαγνητικής ροής που διέρχεται από το πλαίσιο. Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο και τον αγωγό ΚΛ δίνεται από τη σχέση:

$$I_{\text{επ}} = \frac{E_{\text{επ}}}{R_{\text{ΚΛ}} + R_{\text{πλαίσιου}}}$$

$$\text{ή } I_{\text{επ}} = \frac{N \lambda A}{2R} \quad (2)$$



Ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από το ίδιο επαγωγικό ρεύμα που διαρρέει το πλαίσιο με φορά από το Κ προς το Λ. Επειδή ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί η δύναμη Laplace $\vec{F}_L$ που δέχεται είναι αντίθετη του βάρους του $\vec{W}$. Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού, η ένταση $\vec{B}_2$ του ομογενούς μαγνητικού πεδίου μέσα στο οποίο βρίσκεται ο αγωγός ΚΛ έχει φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα. Επειδή ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } w = F_L$$

$$\text{ή } mg = B_2 I_{\varepsilon\pi} \ell,$$

ή λόγω της σχέσης (2):

$$mg = B_2 \frac{N\lambda A}{2R} \ell$$

$$\text{ή } B_2 = \frac{2mgR}{N\lambda A \ell}.$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β.

Πριν τη δημιουργία του στάσιμου κύματος τα υλικά σημεία της χορδής ταλαντώνονται με πλάτος A και η ενέργεια της ταλάντωσης τους είναι ίση με:

$$E = \frac{1}{2} DA^2$$

Μετά τη δημιουργία του στάσιμου κύματος τα υλικά σημεία ταλαντώνονται με πλάτος το οποίο εξαρτάται από τη θέση τους στον ημιάξονα Ox . Για τα σημεία των οποίων η ενέργεια της ταλάντωσης τους δεν μεταβλήθηκε μετά τη δημιουργία του στάσιμου κύματος, ισχύει:

$$E' = E$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} DA'^2 = \frac{1}{2} DA^2$$

$$\text{ή } |A'| = |A|$$

Για τα σημεία των οποίων η ενέργεια της ταλάντωσης τετραπλασιάστηκε μετά τη δημιουργία του στάσιμου κύματος, ισχύει:

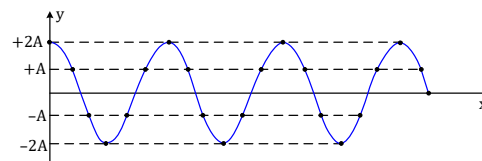
$$E' = 4E$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} DA'^2 = 4 \frac{1}{2} DA^2$$

$$\text{ή } |A'| = 2A$$

Δηλαδή τα σημεία αυτά είναι κοιλίες του στάσιμου κύματος.

Στη χορδή υπάρχουν συνολικά 13 σημεία με πλάτος $|A'| = |A|$. Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται ένα στιγμιότυπο του κύματος μια χρονική στιγμή στην οποία τα σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσης τους.



Όπως φαίνεται από το παραπάνω στιγμιότυπο για να υπάρχουν στη χορδή 13 σημεία με πλάτος $|A'| = |A|$, θα πρέπει στη χορδή να σχηματίζονται 7 κοιλίες. Δηλαδή, υπάρχουν στη χορδή 7 σημεία, των οποίων η ενέργεια τετραπλασιάστηκε μετά τη δημιουργία του στάσιμου κύματος.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που διαγράφουν τα ηλεκτρόνια μέσα στο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$ είναι ίση με:

$$R = d$$

$$\dot{\eta} \quad R = 0,01\sqrt{3} \text{ m}$$

Έχουμε:

$$R = \frac{m_e v_1}{B |q|}$$

$$\eta \quad v_1 = \frac{deB}{m_e}$$

$$\dot{\eta} \quad v_1 = 16\sqrt{3} \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Το μέτρο της στροφορμής των ηλεκτρονίων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$L = mv_1 R$$

$$\dot{\eta} \quad L = 432 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Ο χρόνος κίνησης των ηλεκτρονίων μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta t = \frac{T}{2}$$

$$\hbar \Delta t = \frac{1}{2} \frac{2\pi m_e}{B |q|}$$

$$\hbar \Delta t = \frac{\pi m_e}{Be}$$

$$\dot{\eta} \Delta t = 6,25\pi \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

Γ2. Η κινητική ενέργεια με την οποία εξέρχονται τα ηλεκτρόνια από τη μεταλλική επιφάνεια είναι:

$$K = \frac{1}{2} m_e v^2$$

$$\eta_K = 34,56 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein έχουμε:

$$K = hf_1 - \phi$$

$$\eta \quad K = \frac{hc}{\lambda_1} - \phi$$

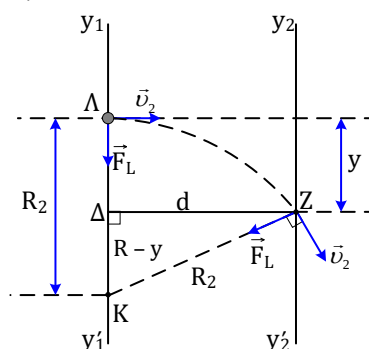
$$\hbar \frac{hc}{\lambda_1} = K + \varphi$$

$$\lambda_1 = \frac{hc}{K + \varphi}$$

$$\lambda_1 = 0,5 \cdot 10^{-7}$$

$\lambda_1 = 50 \text{ nm}$

Γ3. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις Lorenz που δέχονται τα ηλεκτρόνια κατά την είσοδο τους (σημείο Λ) στο μαγνητικό πεδίο και κατά την έξοδο τους (σημείο Ζ) από αυτό και τις προεκτείνουμε για να βρούμε το κέντρο Κ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει.



Από το ορθογώνιο ΚΔΖ που φαίνεται στο
πραπάνω σχήμα, έχουμε:

$$R_2^2 = (R_2 - y)^2 + d^2$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2^2 = \mathbf{R}_2^2 - 2\mathbf{R}_2\mathbf{y} + \mathbf{y}^2 + \mathbf{d}^2$$

$$\dot{\eta} - 2R_2 y = y^2 + d^2$$

$$R_2 = \frac{y^2 + d^2}{2v}$$

$$\dot{\eta} \quad R_{\gamma} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Έχουμε:

$$R_2 = \frac{m_e v_2}{B |q|}$$

$$\eta_{v_2} = \frac{R_2 \text{Be}}{m_0}$$

$$\dot{\eta} \quad v_z = 32 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων αμέσως μετά την έξοδο τους από την κάθοδο είναι ίση με:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_e v_2^2$$

$$\dot{\eta} \quad K_2 = 46,08 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$\eta \quad K_2 = 28,8 \text{ eV}$

Έστω V_{02} η τάση αποκοπής της ακτινοβολίας (2). Έχουμε:

$$K_2 = eV_{02}$$

$$\dot{\eta} \quad V_{02} = 28,8 \text{ eV}$$

Από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein, έχουμε:

$$K_2 = \frac{hc}{\lambda_2} - \phi$$

$$\text{ή } \lambda_2 = \frac{hc}{K_2 + \phi}$$

$$\text{ή } \lambda_2 = 38,75 \text{ nm}$$

Η ορμή ενός φωτονίου της ακτινοβολίας
(2) δίνεται από τη σχέση:

$$p_2 = \frac{h}{\lambda_2}$$

$$\text{ή } p_2 = \frac{hc}{\lambda_2 c}$$

$$\text{ή } p_2 = 17 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Γ4. Αφού οι δύο ακτινοβολίες έχουν την ίδια ένταση, ισχύει:

$$I_2 = I_1$$

$$\text{ή } \frac{P_2}{A} = \frac{P_1}{A}$$

$$\text{ή } n_2 h f_2 = n_1 h f_1$$

$$\text{ή } \frac{n_2}{n_1} = \frac{f_1}{f_2}$$

$$\text{ή } \frac{n_2}{n_1} = \frac{\frac{c}{\lambda_1}}{\frac{c}{\lambda_2}}$$

$$\text{ή } \frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$$\text{ή } \frac{n_2}{n_1} = 0,775$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η ενέργεια που αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου γίνεται μέγιστη όταν σταθεροποιείται το ρεύμα στο κύκλωμα. Έστω I η σταθερή τιμή της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα. Έχουμε:

$$I = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{\text{ΚΛ}} + R_1 + R_\pi}$$

$$\text{ή } I = \frac{B\upsilon\ell}{R_{\text{ΚΛ}} + R_1 + R_\pi}$$

$$\text{ή } I = 3 \text{ A}$$

Επομένως, είναι:

$$U_{\text{max}} = \frac{1}{2} LI^2$$

$$\text{ή } U_{\text{max}} = 2,25 \text{ J}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ_1) η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι ίση με μηδέν. Έχουμε:

$$i = \frac{E_{\varepsilon\pi} - |E_{\text{αυτ}}|}{R_{\text{ΚΛ}} + R_1 + R_\pi}$$

$$\text{ή } 0 = \frac{B\upsilon\ell - |E_{\text{αυτ}}|}{R_{\text{ΚΛ}} + R_1 + R_\pi}$$

$$\text{ή } |E_{\text{αυτ}}| = B\upsilon\ell$$

$$\text{ή } L \left| \frac{di}{dt} \right| = B\upsilon\ell$$

$$\text{ή } \left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{B\upsilon\ell}{L}$$

$$\text{ή } \left| \frac{di}{dt} \right| = 36 \text{ A/s}$$

$$\text{ή } \frac{di}{dt} = +36 \text{ A/s}$$

Δ2. Έστω i_1 η ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή στην οποία ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος είναι

$$\frac{di}{dt} = +24 \text{ A/s.}$$

Έχουμε:

$$i_1 = \frac{E_{\varepsilon\pi} - |E_{\text{αυτ}}|}{R_{\text{ΚΛ}} + R_1 + R_\pi}$$

$$\text{ή } i_1 = \frac{B\upsilon\ell - L \left| \frac{di}{dt} \right|}{R_{\text{ΚΛ}} + R_1 + R_\pi}$$

$$\text{ή } i_1 = 1 \text{ A}$$

Επειδή ο αγωγός ΚΛ κινείται με σταθερή ταχύτητα έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } F = F_L$$

$$\text{ή } F = Bi_1 \ell$$

$$\text{ή } F = 1 \text{ N}$$

Ο ζητούμενος ρυθμός είναι:

$$\frac{dW_F}{dt} = \frac{Fdx}{dt}$$

$$\text{ή } \frac{dW_F}{dt} = Fv$$

$$\text{ή } \frac{dW_F}{dt} = 18 \text{ J/s}$$

Η διαφορά δυναμικού $V_\Theta - V_\Gamma$ στα άκρα του πηνίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$V_\Theta - i_1 R_\pi - |E_{avt}| = V_\Gamma$$

$$\text{ή } V_\Theta - V_\Gamma = |E_{avt}| + i_1 R_\pi$$

$$\text{ή } V_\Theta - V_\Gamma = \left| L \frac{di}{dt} \right| + i_1 R_\pi$$

$$\text{ή } V_\Theta - V_\Gamma = 14 \text{ V}$$

Η διαφορά δυναμικού $V_\Theta - V_\Gamma$ ισούται με την τάση στα άκρα του πηνίου. Επομένως, έχουμε:

$$V_{\pi\eta\nu} = V_\Theta - V_\Gamma$$

$$\text{ή } V_{\pi\eta\nu} = 14 \text{ V}$$

Δ3. Τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ_2) ισχύει:

$$I = \frac{|E_{avt}|}{R_1 + R_2 + R_\pi}$$

$$\text{ή } L \left| \frac{di}{dt} \right| = I(R_1 + R_2 + R_\pi)$$

$$\text{ή } \left| \frac{di}{dt} \right| = 18 \text{ A/s}$$

$$\text{ή } \frac{di}{dt} = -18 \text{ A/s}$$

Δ4. Έστω $Q_{R_{ολ}}$ η συνολική θερμότητα που εκλύεται από το κύκλωμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 . Έχουμε:

$$Q_{R_{ολ}} = |\Delta U_{\pi\eta\nu}|$$

$$\text{ή } Q_{R_{ολ}} = U_{t_1} - U_{t_2}$$

$$\text{ή } Q_{R_{ολ}} = U_{\max} - 0$$

$$\text{ή } Q_{R_{ολ}} = 2,25 \text{ J}$$

Είναι:

$$\frac{Q_{R_2}}{Q_{R_{ολ}}} = \frac{R_2}{R_{ολ}}$$

$$\text{ή } \frac{Q_{R_2}}{Q_{R_{ολ}}} = \frac{1}{6}$$

$$\text{ή } Q_{R_2} = 0,375 \text{ J}$$

Δ5. α. Ο αγωγός ΚΛ από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 δεν δέχεται δύναμη και κινείται με σταθερή ταχύτητα

$\vec{v}_0$. Από τη χρονική στιγμή t_2 και μετά ο αγωγός ΚΛ δέχεται μόνο τη δύναμη Laplace, οπότε επιβραδύνεται.

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού ΚΛ τη χρονική στιγμή t_3 . Τη χρονική στιγμή t_3 ισχύει:

$$\left| \frac{dK}{dt} \right| = |\Sigma F| v$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = F_L v$$

$$\text{ή } \left| \frac{dK}{dt} \right| = B i \ell v$$

$$\text{ή } \left| \frac{dK}{dt} \right| = B \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_3 + R_{\kappa\lambda}} \ell v$$

$$\text{ή } \left| \frac{dK}{dt} \right| = B \frac{B v \ell}{R_3 + R_{\kappa\lambda}} \ell v$$

$$\text{ή } \left| \frac{dK}{dt} \right| = \frac{B^2 v^2 \ell^2}{R_3 + R_{\kappa\lambda}}$$

$$\text{ή } v = 3 \text{ m/s}$$

Έστω $Q'_{R_{ολ}}$ η συνολική θερμότητα Joule που εκλύεται από τους αντιστάτες $R_{\kappa\lambda}$ και R_3 μαζί από τη χρονική στιγμή t_2 έως τη χρονική στιγμή t_3 . Έχουμε:

$$Q'_{R_{ολ}} = |\Delta K|$$

$$\text{ή } Q'_{R_{ολ}} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v^2$$

$$\text{ή } Q'_{R_{ολ}} = 157,5 \text{ J}$$

$$\text{ή } Q_{R_{\kappa\lambda}} + Q_{R_3} = 157,5 \text{ J}$$

Επειδή οι αντιστάτες $R_{\kappa\lambda}$ και R_3 διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, ισχύει:

$$\frac{Q_{R_3}}{Q_{R_{\kappa\lambda}}} = \frac{R_3}{R_{\kappa\lambda}}$$

$$\text{ή } Q_{R_3} = 2 Q_{R_{\kappa\lambda}}$$

Επομένως:

$$3 Q_{R_{\kappa\lambda}} = 157,5 \text{ J}$$

$$\text{ή } Q_{R_{\kappa\lambda}} = 52,5 \text{ J}$$

Επομένως:

$$Q_{R_3} = 105 \text{ J}$$

β. Έχουμε:

$$q = \frac{|\Delta \Phi|}{R_{ολ}}$$

$$\text{ή } q = \frac{B \ell s}{R_{ολ}}$$

ή $q = 18 \text{ C}$

13^ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

A1. α, A2. α, A3. γ, A4. β

A5. α, Σ, β, Λ, γ, Λ, δ, Λ, ε, Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β.

Έστω λ' το μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου. Έχουμε:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi)$$

$$\text{ή } \lambda' - \lambda = 2 \frac{h}{m_e c}$$

$$\text{ή } \lambda' = 2,5 \frac{h}{m_e c}$$

Η ορμή του προσπίπτοντος φωτονίου δίνεται από τη σχέση: $p = \frac{h}{\lambda}$ (1)

Η ορμή του σκεδαζόμενου φωτονίου δίνεται από τη σχέση: $p' = \frac{h}{\lambda'}$ (2)

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{p}{p'} = \frac{\lambda'}{\lambda}$$

$$\text{ή } \frac{p'}{p} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

$$\text{ή } \frac{p'}{p} = \frac{0,5h}{\frac{m_e c}{2,5h}} = \frac{m_e c}{2,5h}$$

$$\text{ή } \frac{p'}{p} = 0,2$$

$$\text{ή } p' = \frac{p}{5}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β.

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος στην πρώτη περίπτωση. Από την Α.Δ.Ο. κατά την κρούση, έχουμε:

$$\vec{p}_{\pi\rho\nu} = \vec{p}_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}}$$

$$\text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή } v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Το ζητούμενο επί τοις εκατό ποσοστό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$P_1 = \frac{K_{ολ(\pi\rho\nu)} - K_{ολ(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})}}{K_{ολ(\pi\rho\nu)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } P_1 = \left[1 - \frac{K_{ολ(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})}}{K_{ολ(\pi\rho\nu)}} \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή } P_1 = \left[1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2} \right] \cdot 100\%,$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$P_1 = \left[1 - \frac{(m_1 + m_2) \frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2}}{m_1 v_1^2} \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή } P_1 = \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) \cdot 100\%$$

$$\text{ή } P_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot 100\% \quad (2)$$

Έστω v' το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος στην δεύτερη περίπτωση. Από την Α.Δ.Ο. κατά την κρούση, έχουμε:

$$\vec{p}_{\pi\rho\nu} = \vec{p}_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}}$$

$$\text{ή } m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

$$\text{ή } v' = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

Το ζητούμενο επί τοις εκατό ποσοστό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$P_2 = \frac{K_{ολ(\pi\rho\nu)} - K_{ολ(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})}}{K_{ολ(\pi\rho\nu)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } P_2 = \left[1 - \frac{K_{ολ(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})}}{K_{ολ(\pi\rho\nu)}} \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή } P_2 = \left[1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2}{\frac{1}{2}m_2 v_2^2} \right] \cdot 100\%,$$

ή λόγω της σχέσης (3):

$$P_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot 100\% \quad (4)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (3) και (4) προκύπτει:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\text{ή } P_2 = \frac{m_1}{m_2} P_1$$

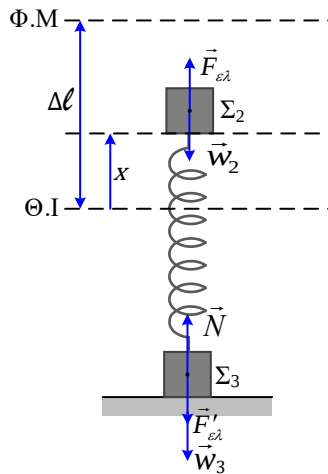
B3. Σωστή απάντηση είναι η β.

Έστω v'_2 η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά της κρούση. Αφού η κρούση είναι ελαστική, ισχύει:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή } v'_2 = \frac{2}{5} v_1 \quad (1)$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχονται τα σώματα Σ_2 και Σ_3 όταν το σώμα Σ_2 βρίσκεται σε μία τυχαία θέση με απομάκρυνση x ($x > 0$) λίγο πάνω από τη θέση ισορροπίας του.



Στην τυχαία θέση ισχύει:

$$\Sigma F_2 = -Dx$$

$$\text{ή } F_{ελ} - w_2 = -kx$$

$$\text{ή } F_{ελ} = m_2g - kx \quad (2)$$

Επειδή το σώμα Σ3 ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F_3 = 0$$

$$\text{ή } N = F'_{ελ} + w_3$$

$$\text{ή } N = F_{ελ} + m_3g,$$

ή λόγω της σχέσης (2):

$$N = m_2g + m_3g - kx$$

$$\text{ή } N = 5mg - kx \quad (3)$$

Για να μην ανασηκώνεται το σώμα πρέπει να ισχύει:

$$N \geq 0$$

$$\text{ή } 5mg - kx \geq 0$$

$$\text{ή } x \leq \frac{5mg}{k}$$

Επομένως το μέγιστο πλάτος A_{max} της ταλάντωσης που μπορεί να εκτελέσει το σώμα Σ2 χωρίς το σώμα Σ3 να χάνει την επαφή του με το έδαφος είναι ίσο με $A_{max} = \frac{5mg}{k}$ (4). Επειδή το σώμα Σ2 αμέσως μετά την κρούση είναι στη θέση ισορροπίας του, ισχύει:

$$v'_2 = v_{max}$$

$$\text{ή } v'_2 = \omega A$$

$$\text{ή } v'_2 = \sqrt{\frac{k}{4m}} A$$

$$\text{ή } v'_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} A \quad (5)$$

Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι:

$$v'_{2(max)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} A_{max},$$

ή λόγω των σχέσεων (1) και (4):

$$\frac{2}{5} v_{1(max)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m} \frac{5mg}{k}}$$

$$\text{ή } v_{1(max)} = \frac{25}{4} g \sqrt{\frac{m}{k}}$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\text{ή } \lambda = 0,8 \text{ m}$$

Έστω ότι το σημείο Σ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής. Τότε, ισχύει:

$$r_1 - r_2 = N\lambda$$

$$\text{ή } N = -1$$

Επομένως, στο σημείο Σ έχουμε ενισχυτική συμβολή. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 1,7$ s έχουν συμβάλλει τα κύματα στο σημείο Σ, ισχύει:

$$A_\Sigma = 2A$$

$$\text{ή } A_\Sigma = 0,02 \text{ m}$$

Γ2. Έστω ένα τυχαίο σημείο αποσβετικής συμβολής που βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και απέχει αποστάσεις r'_1 και r'_2 από τις πηγές Π1 και Π2 αντίστοιχα. Για το σημείο αυτό ισχύουν:

$$r'_1 - r'_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

και

$$r'_1 - r'_2 = d \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

Γ1. Έχουμε:

$$t_1 = \frac{r_1}{v_\delta}$$

$$\text{ή } t_1 = 0,3 \text{ s}$$

Έστω t_2 η χρονική στιγμή στην οποία φτάνει στο σημείο Σ το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π2. Έχουμε:

$$t_2 = t_1 + \Delta t$$

$$\text{ή } t_2 = 0,5 \text{ s}$$

Έχουμε:

$$t_2 = \frac{r_2}{v_\delta}$$

$$\text{ή } r_2 = v_\delta t_2$$

$$\text{ή } r_2 = 2 \text{ m}$$

Από την εξίσωση ταλάντωσης των δύο πηγών προκύπτει ότι:

$$A = 0,01 \text{ m και } \omega = 10\pi \text{ rad/s}$$

Η συχνότητα f των δύο κυμάτων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\omega = 2\pi f$$

$$\text{ή } f = 5 \text{ Hz}$$

Το μήκος κύματος των δύο κυμάτων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \lambda f$$

$$2r'_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} + d$$

$$\text{ή } r'_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2}$$

Λύνουμε την ανίσωση:

$$0 \leq r'_1 \leq d$$

$$\text{ή } 0 \leq (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \leq d$$

$$\text{ή } \frac{-\frac{2d}{\lambda} - 1}{2} \leq N \leq \frac{\frac{2d}{\lambda} - 1}{2}$$

$$\text{ή } -3,625 \leq N \leq 2,625$$

$$\text{ή } N = -3, -2, -1, 0, 1, 2$$

Επομένως υπάρχουν 6 σημεία αποσβετικής συμβολής πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ.

Γ3. Έστω ένα τυχαίο σημείο ενισχυτικής συμβολής που βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και απέχει αποστάσεις r'_1 και r'_2 από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Για το σημείο αυτό, ισχύει:

$$r'_1 - r'_2 = N\lambda \quad (3) \text{ και } r'_1 + r'_2 = d \quad (4)$$

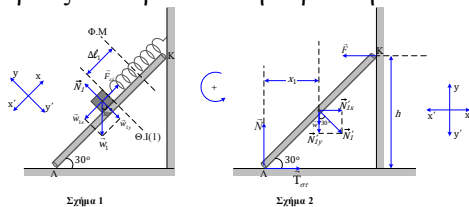
Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (3) και (4) έχουμε:

$$2r'_1 = N\lambda + d$$

$$\text{ή } r'_1 = \frac{N\lambda + d}{2}$$

Λύνουμε την ανίσωση:

Δ1. Στο σχήμα 1 έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση, ενώ στο σχήμα 2 έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος ΚΛ πριν από την κρούση.



Από την ισορροπία του σώματος Σ_1 έχουμε: $\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \quad (1)$ και $\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \quad (2)$. Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$N_1 = w_{1y}$$

$$\text{ή } N_1 = m_1 g \sin \varphi$$

$$\text{ή } N_1 = 10\sqrt{3} \text{ N}$$

Επειδή η ράβδος ΚΛ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_\rho = \vec{0}$$

$$0 \leq r''_1 \leq d$$

$$\text{ή } 0 \leq \frac{N\lambda + d}{2} \leq d$$

$$\text{ή } -\frac{d}{\lambda} \leq N \leq \frac{d}{\lambda}$$

$$\text{ή } -3,125 \leq N \leq 3,125$$

$$\text{ή } N = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

Επομένως, δεξιά της μεσοκαθέτου υπάρχουν τρεις υπερβολές ενισχυτικής συμβολής (με $N = 1, 2, 3$) που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ. Καθεμία από τις υπερβολές αυτές τέμνει την ευθεία $y'y$ σε δύο σημεία. Επομένως, πάνω στην ευθεία $y'y$ βρίσκονται 6 σημεία ενισχυτικής συμβολής.

Γ4. Για να συμβαίνει στο σημείο Σ αποσβετική συμβολή πρέπει να ισχύει:

$$|r_1 - r_2| = (2N+1)\frac{\lambda'}{2}$$

$$\text{ή } |r_1 - r_2| = \frac{(2N+1)v_\delta}{2f'}$$

$$\text{ή } f' = \frac{(2N+1)v_\delta}{2|r_1 - r_2|}$$

$$\text{ή } f' = 2,5(2N+1), \text{ με } N = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Από την τελευταία σχέση για $N = 0$, προκύπτει:

$$f'_{\min} = 2,5 \text{ Hz}$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\text{ή } \Sigma \vec{F}_{x(\rho)} = \vec{0} \quad (3)$$

και

$$\Sigma \vec{F}_{y(\rho)} = \vec{0} \quad (4)$$

Από τη σχέση (3), έχουμε:

$$F = T_{\sigma\tau} + N'_{1x}$$

$$\text{ή } F = T_{\sigma\tau} + N'_1 \eta \mu \varphi$$

$$\text{ή } F = T_{\sigma\tau} + \frac{1}{2} N_1 \quad (5)$$

Από τη σχέση (4), έχουμε:

$$N = w + N'_{1y}$$

$$\text{ή } N = Mg + N'_1 \sin \varphi$$

$$\text{ή } N = Mg + N_1 \sin \varphi$$

$$\text{ή } N = 55 \text{ N}$$

Επειδή η ράβδος ΚΛ ισορροπεί ισχύει ακόμα ότι:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0$$

$$\text{ή } Fh - N'_1 \frac{L}{2} - w \cdot x_1 = 0$$

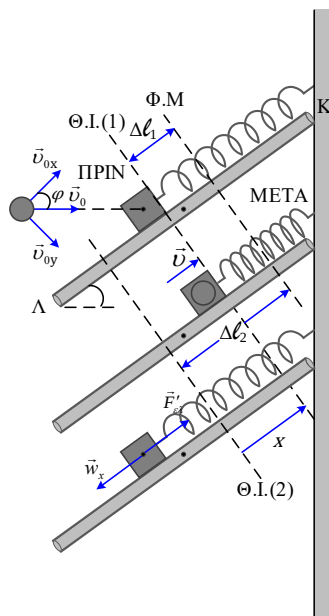
$$\text{ή } FL \eta \mu \varphi = \frac{N'_1 L}{2} + Mg \frac{L}{2} \sin \varphi$$

$$\text{ή } 2F \eta \mu \varphi = N_1 + Mg \sin \varphi$$

$$\text{ή } F = 30\sqrt{3} \text{ N}$$

Συνεπώς από τη σχέση (5) προκύπτει ότι
 $T_{στ} = 25\sqrt{3} \text{ N}$.

Δ2.



Από την Α.Δ.Ο στον άξονα $x'x$ κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\pi\rho\nu} = \vec{p}_{\mu\epsilon\tau\alpha}$$

$$\text{ή } m_2 v_{0x} = (m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή } m_2 v_0 \sin \varphi = (m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή } v = \frac{\sqrt{3} \text{ m}}{2 \text{ s}}$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\pi = \frac{K_{ολ(πρ\nu)} - K_{ολ(μετ\alpha)}}{K_{ολ(πρ\nu)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_0^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2}{\frac{1}{2} m_2 v_0^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 62,5\%$$

Δ3. Έστω $\Delta \ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 . Ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } m_1 g \sin \varphi = k \Delta \ell_1$$

$$\text{ή } \Delta \ell_1 = 0,1 \text{ m}$$

Έστω $\Delta \ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος. Ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$$

$$\text{ή } (m_1 + m_2) g \sin \varphi = k \Delta \ell_2$$

$$\text{ή } \Delta \ell_2 = 0,2 \text{ m}$$

Η απομάκρυνση x του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι ίση με:

$$x = +(\Delta \ell_2 - \Delta \ell_1)$$

$$\text{ή } x = +0,1 \text{ m}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του συσσωματώματος, έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{ή } A = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k} v^2 + x^2}$$

$$\text{ή } A = 0,2 \text{ m}$$

Η δύναμη που δέχεται το συσσωμάτωμα από το ελατήριο γίνεται ίση με μηδέν στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος.

Αφού $A = \Delta \ell_2$, η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου είναι η θετική ακραία θέση της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Οπότε για $t = 0$ είναι $x = +A$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι η: $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ (6).

Από την εξίσωση (6) για $t = 0$ και $x = +0,2 \text{ m}$ προκύπτει:

$$\eta \mu \varphi_0 = 1$$

$$\text{ή } \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

Επειδή είναι: $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$ η λύση της εξίσωσης (7) είναι: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι ίση με:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

$$\text{ή } \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Συνεπώς, η εξίσωση (6) γίνεται:

$$x = 0,2 \eta \mu \left(5t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (S.I.)$$

Δ4. Το μέτρο της επιτάχυνσης του συσσωματώματος γίνεται μέγιστο στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης του. Για $x = -A = -0,2 \text{ m}$ (κάτω ακραία θέση) είναι:

$$U_{ελ(1)} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell_2 + A)^2$$

$$\text{ή } U_{ελ(1)} = 8 \text{ J}$$

Για $x = +A = +0,2 \text{ m}$ (πάνω ακραία θέση) είναι:

$$U_{ελ(2)} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell_2 - A)^2$$

$$\text{ή } U_{ελ(2)} = 0$$

Δ5. Το μέτρο της κάθετης δύναμης $\vec{N}_2$ που ασκεί η ράβδος στο συσσωμάτωμα είναι ίσο με:

$$N_2 = (m_1 + m_2) g \sin \varphi$$

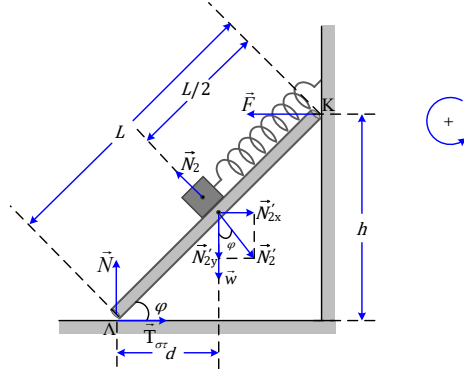
$$\text{ή } N_2 = 20\sqrt{3} \text{ N}$$

Η ράβδος δέχεται από το συσσωμάτωμα την αντίδραση $\vec{N}'_2$ της δύναμης $\vec{N}_2$. Συνεπώς είναι $N'_2 = N_2 = 20\sqrt{3}$ N. Έστω x_1 η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του (Θ.Ι(2)) τις χρονικές στιγμές στις οποίες ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του είναι ίσος με: $\frac{dp}{dt} = -10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$. Ισχύει:

$$\frac{dp}{dt} = -Dx$$

$$\text{ή } x = +0,1$$

Επομένως το συσσωμάτωμα τις παραπάνω χρονικές στιγμές βρίσκεται στη θέση όπου πραγματοποιήθηκε η κρούση, δηλαδή στο μέσο της ράβδου.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0$$

$$\text{ή } -N_2 \frac{L}{2} - wd + Fh = 0$$

$$\text{ή } FL\eta\mu\varphi = \frac{N_2 L}{2} + \frac{Mg\sigma\eta\nu\varphi L}{2}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}F = \frac{1}{2}N_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}Mg$$

$$\text{ή } F = N_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}Mg$$

$$\text{ή } F = 40\sqrt{3} \text{ N}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$$

$$\text{ή } F = T_{\sigma\tau} + N_{2x}$$

$$\text{ή } F = T_{\sigma\tau} + N_2\eta\mu\varphi$$

$$\text{ή } T_{\sigma\tau} = F - N_2\eta\mu\varphi$$

$$\text{ή } T_{\sigma\tau} = 30\sqrt{3} \text{ N}$$

14^ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

A1. β, A2. δ, A3. α, A4. β

A5. α. Σ, β. Σ, γ. Λ, δ. Σ, ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η α.

Για τη συχνότητα f_1 ισχύει:

$$f_1 = 2f_{01}$$

$$\text{ή } f_1 = 2 \frac{\phi_1}{h}$$

Σύμφωνα με τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein, έχουμε:

$$K_1 = hf_1 - \phi_1$$

$$\text{ή } eV_1 = h \frac{2\phi_1}{h} - \phi_1$$

$$\text{ή } eV_1 = \phi_1 \quad (1)$$

Για τη συχνότητα f_2 ισχύει:

$$f_2 = 1,5f_{02}$$

$$\text{ή } f_2 = 1,5 \frac{\phi_2}{h}$$

Σύμφωνα με τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein, έχουμε:

$$K_2 = hf_2 - \phi_2$$

$$\text{ή } eV_2 = h \frac{1,5\phi_2}{h} - \phi_2$$

$$\text{ή } eV_2 = 0,5\phi_2 \quad (2)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{eV_1}{eV_2} = \frac{2 \frac{\phi_1}{h}}{\phi_2}$$

$$\text{ή } \phi_2 = \phi_1$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Όταν ο ανακλαστήρας βρίσκεται στη θέση Z, ισχύει:

$$(\Pi Z \Sigma) - (\Pi \Sigma) = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

Αφού συμβαίνει αποσβετική συμβολή στο σημείο Σ για πρώτη φορά, είναι $N = 0$. Επομένως από τη σχέση (1), έχουμε:

$$(\Pi Z \Sigma) - (\Pi \Sigma) = \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή } 2(\Pi Z) - d = \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή } (\Pi Z) = 3,25\lambda$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΠΜΖ έχουμε:

$$(ZM)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = (\Pi Z)^2$$

$$\text{ή } (ZM) = \sqrt{(3,25\lambda)^2 - (3\lambda)^2}$$

$$\text{ή } (ZM) = 1,25\lambda$$

Όταν ο ανακλαστήρας βρίσκεται στη θέση Δ, ισχύει:

$$(\Pi \Delta \Sigma) - (\Pi \Sigma) = N\lambda \quad (2)$$

Αφού, όταν ο ανακλαστήρας βρίσκεται στη θέση Δ στο σημείο Σ συμβαίνει ενισχυτική συμβολή για τέταρτη φορά μετά τη μετακίνηση του ανακλαστήρα από την αρχική του θέση Z, είναι $N = 4$. Επομένως, από τη σχέση (2) για $N = 4$ προκύπτει:

$$(\Pi \Delta \Sigma) - (\Pi \Sigma) = 4\lambda$$

$$\text{ή } 2(\Pi \Delta) - d = 4\lambda$$

$$\text{ή } (\Pi \Delta) = 5\lambda$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΠΜΔ έχουμε:

$$(\Delta M)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = (\Pi \Delta)^2$$

$$\text{ή } (\Delta M) = \sqrt{(5\lambda)^2 - (3\lambda)^2}$$

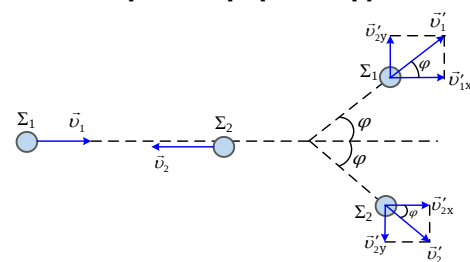
$$\text{ή } (\Delta M) = 4\lambda$$

Η κατακόρυφη μετατόπιση Δy του ανακλαστήρα από τη θέση Z στη θέση Δ είναι ίση με:

$$\Delta y = (\Delta M) - (ZM)$$

$$\text{ή } \Delta y = 2,75\lambda$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β.



Από την Α.Δ.Ο στον y'y έχουμε:

$$\vec{p}_{y(\pi\rho\nu)} = \vec{p}_{y(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})}$$

$$\text{ή } 0 = m_1 v'_{1y} - m_2 v'_{2y}$$

$$\text{ή } m_1 v'_1 \eta \mu \varphi = m_2 v'_2 \eta \mu \varphi$$

$$\text{ή } v'_1 = v'_2$$

Από την Α.Δ.Ο στον x'x έχουμε:

$$\vec{p}_{x(\pi\rho\nu)} = \vec{p}_{x(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})}$$

$$\text{ή } m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$

$$\text{ή } m_1 v_1 - m_1 \frac{v_1}{2} = m_1 v'_1 \sigma \nu \nu \varphi + m_1 v'_1 \sigma \nu \nu \varphi$$

$$\text{ή } \frac{m_1 v_1}{2} = 2m_1 v'_1 \sigma \nu \nu \varphi$$

$$\text{ή } v'_1 = \frac{v_1}{2}$$

Συνεπώς είναι:

$$K_{ολ(πριν)} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$\text{ή } K_{ολ(πριν)} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_1\frac{v_1^2}{4}$$

$$\text{ή } K_{ολ(πριν)} = \frac{5}{8}m_1v_1^2$$

και

$$K_{ολ(μετά)} = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

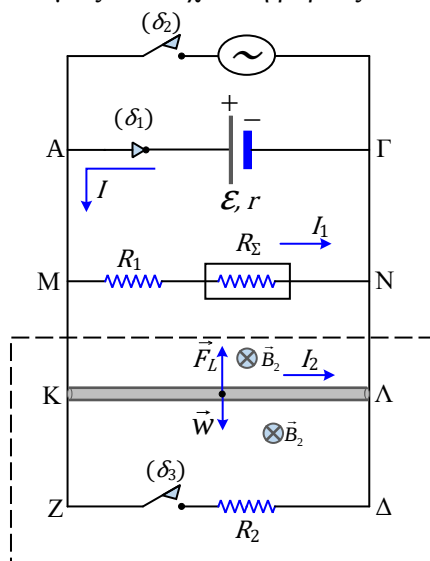
$$\text{ή } K_{ολ(μετά)} = \frac{1}{2}m_1\frac{v_1^2}{4} + \frac{1}{2}m_1\frac{v_1^2}{4}$$

$$\text{ή } K_{ολ(μετά)} = \frac{1}{4}m_1v_1^2$$

Επειδή είναι $K_{ολ(πριν)} > K_{ολ(μετά)}$ η κρούση είναι ανελαστική.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα ρεύματα που διαρρέουν το κύκλωμα και οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος ΚΛ.



Έστω R_{Σ} η ωμική αντίσταση της συσκευής. Από τα στοιχεία κανονικής λειτουργίας της έχουμε:

$$p_K = \frac{V_K^2}{R_{\Sigma}}$$

$$\text{ή } R_{\Sigma} = \frac{V_K^2}{p_K}$$

$$\text{ή } R_{\Sigma} = 1 \Omega$$

Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{1,\Sigma}$ του συστήματος του αντιστάτη R_1 και της συσκευής είναι ίση με:

$$R_{1,\Sigma} = R_1 + R_{\Sigma}$$

$$\text{ή } R_{1,\Sigma} = 2 \Omega$$

Η ισοδύναμη αντίσταση R' του εξωτερικού τμήματος του κυκλώματος είναι ίση με:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_{1,\Sigma}} + \frac{1}{R_{K\Lambda}}$$

$$\text{ή } R' = \frac{R_{1,\Sigma} \cdot R_{K\Lambda}}{R_{1,\Sigma} + R_{K\Lambda}}$$

$$\text{ή } R' = 1 \Omega$$

Η ένταση I του ρεύματος που διαρρέει την πηγή υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I = \frac{\varepsilon}{R' + r}$$

$$\text{ή } I = 4 \text{ A}$$

Η τάση V_{π} στους πόλους της πηγής είναι ίση με:

$$V_{\pi} = \varepsilon - Ir$$

$$\text{ή } V_{\pi} = 4 \text{ V}$$

Η ένταση I_2 του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ είναι ίση με:

$$I_2 = \frac{V_{\pi}}{R_{K\Lambda}}$$

$$\text{ή } I_2 = 2 \text{ A}$$

Αφού ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } mg = F_L$$

$$\text{ή } mg = B_2 I_2 \ell$$

$$\text{ή } B_2 = 1 \text{ T}$$

Η ένταση I_1 του ρεύματος που διαρρέει την συσκευή είναι ίση με:

$$I_1 = \frac{V_{\pi}}{R_{1,\Sigma}}$$

$$\text{ή } I_1 = 2 \text{ A}$$

Αφού η τάση V_{Σ} στα άκρα της συσκευής είναι ίση με:

$$V_{\Sigma} = I_1 R_{\Sigma}$$

$$\text{ή } V_{\Sigma} = 2 \text{ V}$$

Αφού $V_{\Sigma} < V_K$ η συσκευή δεν λειτουργεί κανονικά.

Γ2. Η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο κύκλωμα υπολογίζεται από τον τύπο: $E_{\varepsilon\pi} = B_2 v \ell$

Το επαγωγικό ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα έχει ένταση $I_{\varepsilon\pi}$ που δίνεται από τη σχέση:

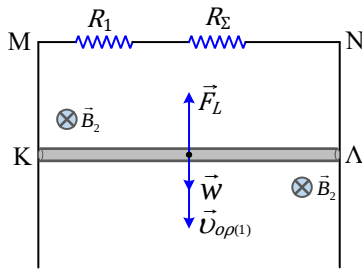
$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{ολ}}$$

$$\text{ή } I_{\varepsilon\pi} = \frac{B_2 v \ell}{R_1 + R_{\Sigma} + R_{K\Lambda}}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace $\vec{F}_L$ που δέχεται ο αγωγός ΚΛ υπολογίζεται τον τύπο:

$$F_L = B_2 I_{\varepsilon\pi} \ell$$

$$\text{ή } F_L = \frac{B_2^2 \ell^2 v}{R_1 + R_{\Sigma} + R_{K\Lambda}}$$



Ο αγωγός αποκτά την οριακή του ταχύτητα $\vec{v}_{op(1)}$ όταν:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

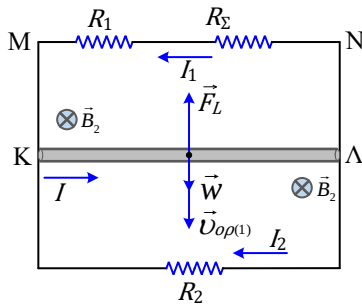
$$\text{ή } mg = F_L$$

$$\text{ή } mg = \frac{B_2^2 \ell^2 v_{op(1)}}{R_1 + R_\Sigma + R_{K\Lambda}}$$

$$\text{ή } v_{op(1)} = \frac{mg(R_1 + R_\Sigma + R_{K\Lambda})}{B_2^2 \ell^2}$$

$$\text{ή } v_{op(1)} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Γ3. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα ρεύματα που διαρρέουν το κύκλωμα και οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος ΚΛ αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη δ_3 .



Ισχύει:

$$R_{\varepsilon\xi} = \frac{R_{1,\Sigma} \cdot R_2}{R_{1,\Sigma} + R_2}$$

$$\text{ή } R_{\varepsilon\xi} = 1 \Omega$$

Η ένταση I του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει τη ράβδο ΚΛ αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη δ_3 είναι ίση με:

$$I = \frac{B_2 v_{op(1)} \ell}{R_{\varepsilon\xi} + R_{K\Lambda}}$$

$$\text{ή } I = \frac{8}{3} \text{ A}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace $\vec{F}_L$ που δέχεται ο αγωγός ΚΛ αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ_3) είναι ίσο με:

$$F_L = B_2 I \ell$$

$$\text{ή } F_L = \frac{8}{3} \text{ N}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου ΚΛ αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη δ_3 , υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt}$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt}$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = \Sigma F v_{op(1)}$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = (mg - F_L) v_{op(1)}$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = -\frac{16}{3} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Γ4. Τη χρονική στιγμή στην οποία η ράβδος ΚΛ αποκτά τη νέα οριακή της ταχύτητα $v_{op(2)}$, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } mg = F_L$$

$$\text{ή } mg = \frac{B_2^2 \ell^2 v_{op(2)}}{R_{\varepsilon\xi} + R_{K\Lambda}}$$

$$\text{ή } v_{op(1)} = \frac{mg(R_{\varepsilon\xi} + R_{K\Lambda})}{B_2^2 \ell^2}$$

$$\text{ή } v_{op(2)} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Έστω $I_{op(2)}$ η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τη ράβδο ΚΛ από τη χρονική στιγμή που αποκτά τη νέα οριακή της ταχύτητα και μετά. Ισχύει:

$$I_{op(2)} = \frac{B_2 v_{op(2)} \ell}{R_{\varepsilon\xi} + R_{K\Lambda}}$$

$$\text{ή } I_{op(2)} = 2 \text{ A}$$

Η τάση $V_{K\Lambda}$ στα άκρα του αγωγού ΚΛ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$V_{K\Lambda} = I_{op(2)} \cdot R_{\varepsilon\xi}$$

$$\text{ή } V_{K\Lambda} = 2 \text{ V}$$

Έστω I'_1 η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τη θερμική συσκευή από τη χρονική στιγμή που η ράβδος αποκτά τη νέα οριακή της ταχύτητας και μετά. Ισχύει:

$$I'_1 = \frac{V_{K\Lambda}}{R_{1,\Sigma}}$$

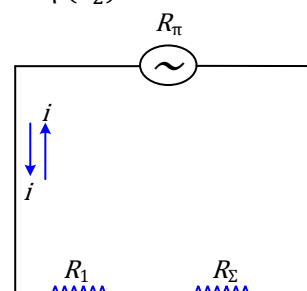
$$\text{ή } I'_1 = 1 \text{ A}$$

Η ζητούμενη θερμότητα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$Q_{R_\Sigma} = I'^2_{1,\Sigma} \Delta t$$

$$\text{ή } Q_{R_\Sigma} = 0,5 \text{ J}$$

Γ5. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται πως διαμορφώνεται το κύκλωμα, με ανοικτούς τους διακόπτες (δ_1) και (δ_3) και κλειστό τον διακόπτη (δ_2).



Η μέγιστη τιμή της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πλαίσιο υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E_{\epsilon\pi(max)} = N\omega B_1 A$$

$$\text{ή } E_{\epsilon\pi(max)} = N\omega B_1 \alpha^2 \quad (1)$$

Το πλάτος I της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I = \frac{E_{\epsilon\pi(max)}}{R_1 + R_\Sigma + R_\pi}$$

$$\text{ή } I = \frac{N\omega B_1 \alpha^2}{R_1 + R_\Sigma + R_\pi} \quad (1)$$

Το πλάτος V_Σ της εναλλασσόμενης τάσης στα άκρα της συσκευής είναι ίσο με:

$$V_\Sigma = IR_\Sigma$$

$$\text{ή } V_\Sigma = \frac{N\omega B_1 \alpha^2}{R_1 + R_\Sigma + R_\pi} R_\Sigma$$

Αφού η συσκευή λειτουργεί κανονικά, ισχύει:

$$V_{\epsilon\nu(\Sigma)} = V_K$$

$$\text{ή } \frac{V_\Sigma}{\sqrt{2}} = V_K$$

$$\text{ή } V_\Sigma = V_K \sqrt{2}$$

$$\text{ή } \frac{N\omega B_1 \alpha^2}{R_1 + R_\Sigma + R_\pi} R_\Sigma = \sqrt{2} V_K$$

$$\text{ή } \omega = 40\sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Από τη σχέση (1) βρίσκουμε: $I = 4\sqrt{2} \text{ A}$. Η χρονική εξίσωση της εναλλασσόμενης τάσης v_π που εμφανίζεται στα άκρα του πλαισίου, προσδιορίζεται ως εξής:

$$v_\pi = i(R_1 + R_\Sigma)$$

$$\text{ή } v_\pi = I(R_1 + R_\Sigma) \eta \mu \omega t$$

$$\text{ή } v_\pi = 8\sqrt{2} \eta \mu(40\sqrt{2} t) \quad (S.I.)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 πριν από την κρούση. Ισχύει:

$$v_0 = v_{max}$$

$$\text{ή } v_0 = \omega A$$

$$\text{ή } v_0 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} A$$

$$\text{ή } A = 0,8 \text{ m}$$

Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ελάχιστα πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ_2 πριν από την κρούση, έχουμε:

$$E = K + U$$

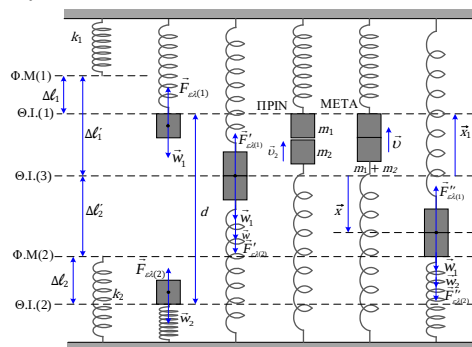
$$\text{ή } \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} D x^2$$

$$\text{ή } k_2 A^2 = m_2 v_2^2 + k_2 d^2$$

$$\text{ή } v_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2} (A^2 - d^2)}$$

$$\text{ή } v_2 = 4\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Δ2.



Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται από την κρούση εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας (3) (Θ.Ι.(3)) που φαίνεται στο παραπάνω

σχήμα. Στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } w_1 + w_2 + F'_{\epsilon\lambda(2)} = F'_{\epsilon\lambda(1)}$$

$$\text{ή } m_1 g + m_2 g + k_2 \Delta \ell'_2 = k_1 \Delta \ell'_1 \quad (1)$$

Στην τυχαία θέση του συσσωματώματος με απομάκρυνση $\vec{x}$ από τη θέση ισορροπίας (3) που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, ισχύει:

$$\Sigma F = w_1 + w_2 + F''_{\epsilon\lambda(2)} - F''_{\epsilon\lambda(1)}$$

$$\text{ή } \Sigma F = m_1 g + m_2 g + k_2 (\Delta \ell'_2 - x) - k_1 (\Delta \ell'_1 + x)$$

$$\text{ή } \Sigma F = m_1 g + m_2 g + k_2 \Delta \ell'_2 - k_2 x - k_1 \Delta \ell'_1 - k_1 x,$$

$$\text{ή λόγω της σχέσης (1):}$$

$$\Sigma F = -k_1 x - k_2 x$$

$$\text{ή } \Sigma F = -(k_1 + k_2) x$$

Επομένως το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D_2 = k_1 + k_2$.

Δ3. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}}$$

$$\text{ή } m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή } v = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η απομάκρυνση x_1 του συσσωματώματος από τη Θ.Ι.(3) αμέσως μετά την κρούση είναι ίση με: $x_1 = +(\Delta \ell'_1 - \Delta \ell_1) \quad (2)$.

Στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 (Θ.Ι.(1)) ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } w_1 = F_{\epsilon\lambda(1)}$$

$$\text{ή } m_1 g = k_1 \Delta \ell_1$$

$$\text{ή } \Delta \ell_1 = 0,1 \text{ m.}$$

Στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 (Θ.Ι(2)) ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } w_2 = F_{\varepsilon\lambda(2)}$$

$$\text{ή } m_2 g = k_2 \Delta \ell_2$$

$$\text{ή } \Delta \ell_2 = 0,1 \text{ m}$$

Όπως φαίνεται από το σχήμα ισχύει: $\Delta \ell'_1 + \Delta \ell'_2 + \Delta \ell_2 = d + \Delta \ell_1$ (3). Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (3) προκύπτει ότι $\Delta \ell'_1 = 0,2 \text{ m}$ και $\Delta \ell'_2 = 0,2 \text{ m}$. Συνεπώς από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $x_1 = +0,1 \text{ m}$. Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση του συσσωματώματος, έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D_2 A_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} D_2 x_1^2$$

$$\text{ή } (k_1 + k_2) A_2^2 = (m_1 + m_2) v^2 + (k_1 + k_2) x_1^2$$

$$\text{ή } A_2 = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k_1 + k_2}} v^2 + x_1^2$$

$$\text{ή } A_2 = 0,2 \text{ m}$$

Η γωνιακή συχνότητα ω_2 της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα είναι ίση με:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D_2}{m_1 + m_2}}$$

$$\text{ή } \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2}}$$

$$\text{ή } \omega_2 = 10 \text{ rad/s}$$

Δ4. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt}$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt}$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = \Sigma F v$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = -D_2 x \cdot v$$

Ισχύει:

$$\frac{dK}{dt} = 0$$

$$\text{ή } -D_2 x \cdot v = 0$$

$$\text{ή } x = 0$$

$$\text{ή } v = 0$$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος μηδενίζεται για πρώτη φορά, όταν $v = 0$ ή $x = +A$. Συνεπώς, είναι:

$$\frac{dp}{dt} = -D_2 x$$

$$\text{ή } \frac{dp}{dt} = -D_2 A_2$$

$$\text{ή } \frac{dp}{dt} = -(k_1 + k_2) A_2$$

$$\text{ή } \frac{dp}{dt} = -80 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}.$$

15^ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

A1. α, A2. γ, A3. γ, A4. δ

A5. α, Σ, β, Λ, γ, Σ, δ, Λ, ε, Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β.

Το μέτρο E_1 της ΗΕΔ από επαγωγή που δημιουργείται στο κυκλικό αγωγό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E_1 = \frac{|d\Phi|}{dt}$$

$$\text{ή } E_1 = \frac{dBA}{dt}$$

$$\text{ή } E_1 = \frac{dB\pi\alpha^2}{dt}$$

$$\text{ή } E_1 = \lambda\pi\alpha^2$$

Η ένταση I_1 του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει τον κυκλικό αγωγό είναι ίση με:

$$I_1 = \frac{E_1}{R}$$

$$\text{ή } I_1 = \frac{\lambda\pi\alpha^2}{R},$$

όπου R η ωμική αντίσταση του κυκλικού αγωγού. Το μέτρο της έντασης B_K στο κέντρο του είναι:

$$B_K = k_\mu \frac{2\pi I_1}{\alpha}$$

$$\text{ή } B_K = \frac{2k_\mu\lambda\pi^2\alpha}{R} \quad (1)$$

Έστω L το μήκος του σύρματος από το οποίο είναι φτιαγμένος ο κυκλικός αγωγός. Ισχύει: $L = 2\pi\alpha$ (2). Για το κυκλικό πλαίσιο ισχύει ότι: $L = N2\pi\alpha'$ (3). Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$2\pi\alpha = N2\pi \frac{\alpha}{10}$$

$$\text{ή } N = 10 \text{ σπείρες}$$

Επειδή το κυκλικό πλαίσιο είναι φτιαγμένο από ολόκληρο το σύρμα από το οποίο ήταν φτιαγμένος ο κυκλικός αγωγός η ωμική του αντίσταση είναι ίση με την ωμική αντίσταση R του κυκλικού αγωγού. Το μέτρο E_2 της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο κυκλικό πλαίσιο υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E_2 = N \frac{|d\Phi|}{dt}$$

$$\text{ή } E_2 = N \frac{dBA}{dt}$$

$$\text{ή } E_2 = N\lambda\pi\alpha'^2$$

$$\text{ή } E_2 = \frac{N\lambda\pi\alpha^2}{100}$$

Η ένταση I_2 του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει το κυκλικό πλαίσιο υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I_2 = \frac{E_2}{R}$$

$$\text{ή } I_2 = \frac{N\lambda\pi\alpha^2}{100R}$$

Το μέτρο B'_K της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο κέντρο του κυκλικού πλαισίου εξαιτίας του επαγωγικού ρεύματος που το διαρρέει, είναι ίσο με:

$$B'_K = N \frac{k_\mu 2\pi I_2}{\alpha'}$$

$$\text{ή } B'_K = \frac{Nk_\mu 2\pi \frac{N\lambda\pi\alpha^2}{100R}}{\frac{\alpha}{10}}$$

$$\text{ή } B'_K = N^2 \frac{2k_\mu\lambda\pi^2\alpha}{10R} \quad (4)$$

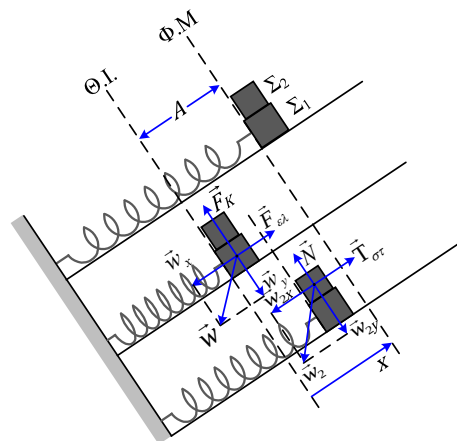
Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (4) και (1) έχουμε:

$$\frac{B'_K}{B_K} = \frac{N^2}{10}$$

$$\text{ή } B'_K = 10B_K$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μηδενίζεται κάθε φορά που το ελατήριο βρίσκεται στην κατάσταση του φυσικού του μήκους. Επομένως τη χρονική στιγμή στην οποία τοποθετούμε το σώμα Σ_2 πάνω στο σώμα Σ_1 το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και το σύστημα των δύο σωμάτων έχει ταχύτητα ίση με το μηδέν. Επομένως η θέση αυτή είναι η πάνω ακραία θέση για το σύστημα των δύο σωμάτων.



Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων. Από τη συνθήκη ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων, έχουμε:

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$$

$$\text{ή } w_x = F_{ελ}$$

$$\text{ή } (m_1 + m_2)g\eta\mu\phi = kA$$

$$\text{ή } A = \frac{(m_1 + m_2)g\eta\mu\phi}{k} \quad (1)$$

Έστω η τυχαία θέση με απομάκρυνση $\vec{x}(x > 0)$ του συστήματος των δύο σωμάτων που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Στη θέση αυτή, ισχύει:

$$\Sigma F_2 = -D_2 x$$

$$\text{ή } T_{\sigma\tau} - w_{2x} = -D_2 x$$

$$\text{ή } T_{\sigma\tau} - m_2 g \eta \mu \varphi = -m_2 \omega^2 x$$

$$\text{ή } T_{\sigma\tau} = m_2 g \eta \mu \varphi - m_2 \frac{k}{m_1 + m_2} x \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή $T_{\sigma\tau(max)}$ της στατικής τριβής που δέχεται το σώμα Σ_2 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του λαμβάνεται για $x = -A$ (κάτω ακραία θέση). Συνεπώς για $x = -A$, από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$T_{\sigma\tau(max)} = m_2 g \eta \mu \varphi + m_2 \frac{k}{m_1 + m_2} A,$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$T_{\sigma\tau(max)} = 2m_2 g \eta \mu \varphi \quad (3)$$

Για να μην ολισθαίνει το σώμα Σ_2 σε σχέση με το σώμα Σ_1 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συστήματος, θα πρέπει να ισχύει:

$$T_{\sigma\tau(max)} \leq \mu_s N$$

$$\text{ή } T_{\sigma\tau(max)} \leq \mu_s m_2 g \sigma \nu \nu \varphi,$$

ή λόγω της σχέσης (3):

$$2m_2 g \eta \mu \varphi \leq \mu_s m_2 g \sigma \nu \nu \varphi$$

$$\text{ή } \mu_s \geq 2 \varepsilon \varphi \varphi$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Η φάση του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \quad (1)$$

Από το διάγραμμα (α) προκύπτει ότι για $x = 0$ είναι $\varphi = 2,5\pi$ rad. Επομένως από τη σχέση (1) έχουμε:

$$2,5\pi = 2\pi \frac{t_1}{T}$$

$$\text{ή } t_1 = 1,25 T \quad (1)$$

Από το διάγραμμα (α) προκύπτει ακόμα ότι για $x = -2,5$ m είναι $\varphi = 0$. Επομένως, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$0 = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{2,5}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } \frac{t_1}{T} = \frac{2,5}{\lambda}$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$1,25 = \frac{2,5}{\lambda}$$

$$\text{ή } \lambda = 2 \text{ m}$$

Από το διάγραμμα (β) προκύπτει:

$$(2,6 - 2)s = 1,5 T$$

$$\text{ή } T = 0,4 \text{ s}$$

Από το διάγραμμα (β) προκύπτει ακόμα ότι:

$$v_{\max} = \omega A$$

$$\text{ή } v_{\max} = \frac{2\pi}{T} A$$

$$\text{ή } A = 0,4 \text{ m}$$

Από το διάγραμμα (β) προκύπτει ότι το σημείο Λ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_\Lambda = 2$ s. Έχουμε:

$$v_\delta = \frac{|x_\Lambda|}{t_\Lambda}$$

$$\text{ή } |x_\Lambda| = v_\delta t_\Lambda$$

$$\text{ή } |x_\Lambda| = \frac{\lambda}{T} t_\Lambda$$

$$\text{ή } |x_\Lambda| = 10 \text{ m}$$

$$\text{ή } x_\Lambda = -10 \text{ m}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

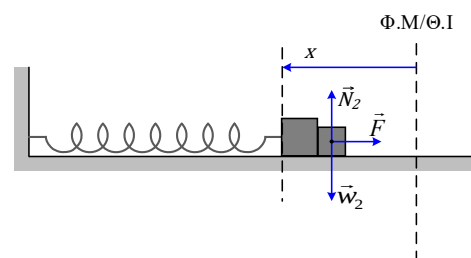
$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = 0,4 \eta \mu 2\pi (2,5t - 5) \quad (\text{S.I.})$$

$$\text{ή } y = 0,4 \eta \mu (5\pi t - 10\pi) \quad (\text{S.I.})$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω η τυχαία θέση με απομάκρυνση x του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Στη θέση αυτή ισχύει:

$$\Sigma F_2 = -D_2 x$$

$$\text{ή } F = -m_2 \omega^2 x \quad (1)$$

Η επαφή των δύο σωμάτων χάνεται, όταν γίνει $F = 0$. Συνεπώς από τη σχέση (1) για $F = 0$ προκύπτει $x = 0$. Δηλαδή η επαφή των δύο σωμάτων χάνεται στη θέση ισορροπίας τους, που είναι η θέση όπου το ελατήριο αποκτά φυσικό του μήκος.

Γ2. Το πλάτος A_1 της ταλάντωσης του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 πριν την απώλεια της επαφής τους είναι ίσο με $A_1 = d = 0,8 \text{ m}$. Συνεπώς τη στιγμή που χάνεται η επαφή των δύο σωμάτων το μέτρο v της ταχύτητας τους είναι ίσο με:

$$v = v_{\max}$$

$$\text{ή } v = \omega_1 A_1$$

$$\text{ή } v = \sqrt{\frac{k_1}{m_1 + m_2}} A_1$$

$$\text{ή } v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την απώλεια της επαφής των δύο σωμάτων τα δύο σώματα εξακολουθούν να βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους, έχοντας ταχύτητα μέτρου v το καθένα. Έστω A_2 το πλάτος ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την απώλεια της επαφής του με το σώμα Σ_2 . Ισχύει:

$$v = v'_{\max}$$

$$\text{ή } v = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} A_2$$

$$\text{ή } A_2 = 0,4 \text{ m}$$

Το σώμα Σ_1 τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την απώλεια της επαφής με το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του κινούμενο με θετική ταχύτητα. Επομένως η αρχική φάση της ταλάντωσης του είναι $\varphi_0 = 0$. Η ζητούμενη χρονική εξίσωση είναι:

$$x = A_2 \eta \mu \omega_2 t \quad \text{με } \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\text{Άρα: } x = 0,4 \eta \mu 10 t \text{ (S.I.)}$$

Γ3. Έστω t_1 η χρονική στιγμή στην οποία το σώμα Σ_2 εισέρχεται στην περιοχή όπου το οριζόντιο δάπεδο είναι τραχύ. Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_2 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ισχύει:

$$\ell = v t_1$$

$$\text{ή } t_1 = \frac{\ell}{v}$$

$$\text{ή } t_1 = \frac{\pi}{30}$$

Η απομάκρυνση x_1 του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με:

$$x_1 = 0,4 \eta \mu \left(10 \frac{\pi}{30} \right) \text{ m}$$

$$\text{ή } x_1 = 0,4 \eta \mu \left(\frac{\pi}{3} \right) \text{ m}$$

$$\text{ή } x_1 = +0,2\sqrt{3} \text{ m}$$

Η ταχύτητα v_1 του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 είναι με:

$$v_1 = \omega_2 A_2 \sin(\omega_2 t_1)$$

$$\text{ή } v_1 = 4 \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{ή } v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 , υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt}$$

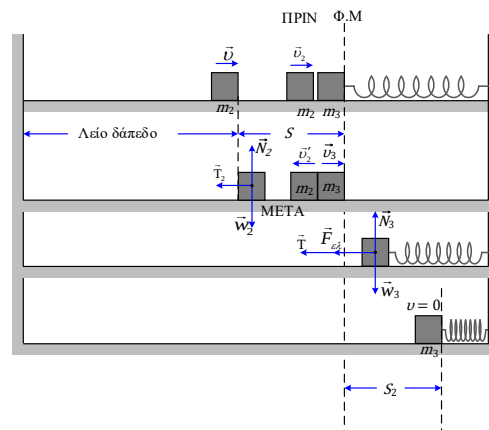
$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt}$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = \Sigma F v$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = -D x_1 v_1$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = -40\sqrt{3} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Γ4. Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ελάχιστα πριν από την κρούση του με το σώμα Σ_3 .



Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 στο τραχύ δάπεδο από τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία εισέρχεται σε αυτό μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία συγκρούεται με το σώμα Σ_3 , έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{T_2}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_2 v^2 = -T_2 S$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_2 v^2 = -\mu m_2 g S$$

$$\text{ή } v_2 = \sqrt{v^2 - 2\mu g S}$$

$$\text{ή } v_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Έστω v_3 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_3 αμέσως μετά την κρούση. Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει:

$$v_3 = v_2$$

$$\text{ή } v_3 = 2 \frac{m}{s}$$

Έστω S_2 το διάστημα που διανύει το σώμα Σ_3 από τη χρονική στιγμή t_2 αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή t_3 στην οποία ακινητοποιείται. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_3 από τη χρονική στιγμή t_2 έως τη χρονική στιγμή t_3 , έχουμε:

$$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_T + W_{F_{\epsilon\lambda}}$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = -TS_2 + U_{\epsilon\lambda(\alpha\rho\chi)} - U_{\epsilon\lambda(\tau\epsilon\lambda)}$$

$$\text{ή } -\frac{1}{2} m_3 v_3^2 = -\mu m_3 g S_2 + 0 - \frac{1}{2} k_2 S_2^2$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k_2 S_2^2 + \mu m_3 g S_2 - \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = 0$$

$$\text{ή } 75 S_2^2 + 15 S_2 - 6 = 0 \text{ (S.I.) (2)}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (2) είναι οι:

$$S_2 = 0,2 \text{ m}$$

$$\text{ή } S_2 = -0,4 \text{ m}$$

Δεκτή λύση είναι η $S_2 = 0,2 \text{ m}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Τη χρονική στιγμή στην οποία σταθεροποιούνται τα ρεύματα η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή στα άκρα του πηνίου είναι ίση με μηδέν. Έχουμε:

$$\frac{1}{R_{\epsilon\xi}} = \frac{1}{R_{\pi}} + \frac{1}{R_1}$$

$$\text{ή } R_{\epsilon\xi} = \frac{R_{\pi} \cdot R_1}{R_{\pi} + R_1}$$

$$\text{ή } R_{\epsilon\xi} = 6 \Omega$$

Η ένταση του ρεύματος I που διαρρέει την πηγή είναι ίση με:

$$I = \frac{E}{R_{\epsilon\xi} + r}$$

$$\text{ή } I = 4 \text{ A}$$

Η πολική τάση της πηγής είναι:

$$V_{\pi} = E - Ir$$

$$\text{ή } V_{\pi} = 24 \text{ V}$$

Η ένταση του ρεύματος I_1 που διαρρέει το πηνίο είναι ίση με:

$$I_1 = \frac{V_{\pi}}{R_{\pi}}$$

$$\text{ή } I_1 = 1,6 \text{ A}$$

Το μέτρο της έντασης του ομογενούς μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο εσωτερικό του πηνίου είναι:

$$B_{\pi} = \mu_0 I_1 \frac{N}{\ell} \quad (1)$$

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου δίνεται από τη σχέση:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \quad (2)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{B_{\pi}}{L} = \frac{I_1}{NA}$$

$$\text{ή } B_{\pi} = \frac{I_1 L}{NA}$$

Η μαγνητική ροή που διέρχεται από μια σπείρα του πηνίου, είναι ίση με:

$$\Phi = B_{\pi} A$$

$$\text{ή } \Phi = \frac{I_1 L}{N}$$

$$\text{ή } \Phi = 64 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

Δ2. Έχουμε:

$$V_{R_1} = i_1 R_1 \quad (3)$$

$$\text{ή } i_1 = 2,5 \text{ A}$$

Η πολική τάση της πηγής είναι:

$$V_{\pi} = E - ir \quad (4)$$

Έχουμε:

$$V_{\pi} = V_{R_1}$$

ή λόγω των σχέσεων (3) και (4):

$$i_1 R_1 = E - ir$$

$$\text{ή } i_1 R_1 = E - (i_1 + i_2)r$$

$$\text{ή } i_2 = \frac{E - i_1(R_1 + r)}{r}$$

$$\text{ή } i_2 = 1 \text{ A}$$

Επίσης, έχουμε:

$$V_A - V_{\Gamma} = V_{R_1}$$

$$\text{ή } |E_{\alpha\upsilon\tau}| + i_2 R_{\pi} = V_{R_1}$$

$$\text{ή } |E_{\alpha\upsilon\tau}| = V_{R_1} - i_2 R_{\pi}$$

$$\text{ή } |E_{\alpha\upsilon\tau}| = 10 \text{ V}$$

$$\text{ή } L \left| \frac{di}{dt} \right| = 10 \text{ V}$$

$$\text{ή } \left| \frac{di}{dt} \right| = 25 \text{ A/s}$$

$$\text{ή } \frac{di}{dt} = +25 \text{ A/s}$$

Δ3. Τη χρονική στιγμή αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη (δ_1), το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο είναι ίσο με $I_1 = 1,6 \text{ A}$.

Έχουμε:

$$I_1 = \frac{|E_{\text{αυτ}}|}{R_{\pi} + R_1}$$

$$\text{ή } |E_{\text{αυτ}}| = 40 \text{ V}$$

$$\text{ή } L \left| \frac{di}{dt} \right| = 40 \text{ V}$$

$$\text{ή } \left| \frac{di}{dt} \right| = 100 \text{ A/s}$$

$$\text{ή } \frac{di}{dt} = -100 \text{ A/s}$$

Η συνολική θερμότητα Joule που εκλύεται από το πηνίο και από τον αντιστάτη R_1 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη (δ_1) μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία μηδενίζεται η ένταση του ρεύματος στο πηνίο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta U = Q_{R_{\text{ολ}}}$$

$$\text{ή } U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}} = Q_{R_{\pi}} + Q_{R_1}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} LI_1^2 - 0 = Q_{R_{\pi}} + Q_{R_1}$$

$$\text{ή } Q_{R_{\pi}} + Q_{R_1} = 512 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Δ4. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του αγωγού ΚΛ δίνεται από τη σχέση:

$$v = v_0 + at$$

$$\text{ή } v = 5t \text{ (S.I.) (6)}$$

Η χρονική εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ και μετά δίνεται από τη σχέση:

$$i = \frac{E_{\text{επ}}}{R_{\text{ολ}}}$$

$$\text{ή } i = \frac{Bv\ell}{R_1 + R_{\text{ΚΛ}}}$$

$$\text{ή } i = \frac{B\ell(v_0 + at)}{R_1 + R_{\text{ΚΛ}}}$$

$$\text{ή } i = 0,5t \text{ (S.I.) (7)}$$

Η χρονική εξίσωση της δύναμης $\vec{F}$ προκύπτει από τη σχέση:

$$\Sigma F = ma$$

$$\text{ή } F - F_L - T = ma$$

$$\text{ή } F = Bi\ell + ma + T$$

$$\text{ή } F = 10 + t \text{ (S.I.) (8)}$$

Από τη σχέση (6) για $t = 2 \text{ s}$, προκύπτει:

$$v_2 = 10 \text{ m/s}$$

Από τη σχέση (8) για $t = 2 \text{ s}$, προκύπτει:

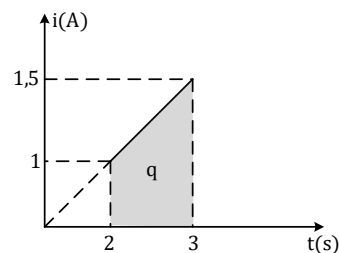
$$F = 12 \text{ N}$$

Ο ζητούμενος ρυθμός είναι ίσος με:

$$\frac{dW_F}{dt} = F \cdot v_2$$

$$\text{ή } \frac{dW_F}{dt} = 120 \text{ J/s}$$

Για να υπολογίσουμε το φορτίο που διέρχεται από μια διατομή του αγωγού ΚΛ από τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ έως τη χρονική στιγμή $t_2 = 3 \text{ s}$ σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει κύκλωμα σε συνάρτηση με τον χρόνο από $t_1 = 2 \text{ s}$ έως $t_2 = 3 \text{ s}$.



Το φορτίο q είναι ίσο με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν στο παραπάνω διάγραμμα.

$$q = \frac{1+1,5}{2} 1 \text{ C}$$

$$\text{ή } q = 1,25 \text{ C}$$

Δ5. Από τη σχέση (6) για $t = 3 \text{ s}$ προκύπτει:

$$v_3 = 15 \text{ m/s}$$

Έχουμε:

$$W_F = \Delta K + Q_{R_{\text{ολ}}} + Q_T$$

$$\text{ή } W_F = \frac{1}{2} mv_3^2 - \frac{1}{2} mv_2^2 + Q_{R_{\text{ολ}}} + Ts \text{ (9)}$$

Το διάστημα που διανύει ο αγωγός ΚΛ από τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 3 \text{ s}$, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$s = v_2(t_3 - t_2) + \frac{1}{2} a(t_3 - t_2)^2$$

$$\text{ή } s = 12,5 \text{ m}$$

Επομένως, από τη σχέση (9) προκύπτει:

$$Q_{R_{\theta\lambda}} = 30 \text{ J}$$

$$\text{ή } Q_{R_{\kappa\lambda}} + Q_{R_1} = 30 \text{ J}$$

Όμως:

$$\frac{Q_{R_1}}{Q_{R_{\kappa\lambda}}} = \frac{R_1}{R_{\kappa\lambda}}$$

$$\text{ή } \frac{Q_{R_1}}{Q_{R_{\kappa\lambda}}} = 1$$

$$\text{Επομένως, } Q_{R_{\kappa\lambda}} = 15 \text{ J}$$

16^ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

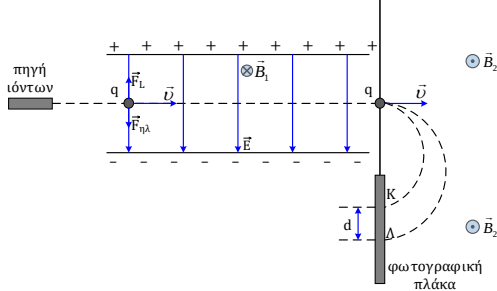
A1. γ, A2. β, A3. β, A4. α

A5. α, β, Σ, γ, Σ, δ, Λ, ε, Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β.

Επειδή τα ιόντα δεν εκτρέπονται από την ευθύγραμμη πορεία τους όταν διέρχονται από το φίλτρο ταχυτήτων, ισχύει:



$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } F_L = F_{\eta\lambda}$$

$$\text{ή } B_1 v |q| = |q| E$$

$$\text{ή } v = \frac{E}{B_1} \quad (1)$$

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που διαγράφουν τα ελαφρύτερα ιόντα μάζας m_1 , όταν εισέρχονται στο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_2$ είναι ίση με:

$$R_1 = \frac{m_1 v}{B_2 |q|}$$

$$\text{ή } R_1 = \frac{m_1 v}{2 B_1 e},$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$R_1 = \frac{m_1 E}{2 B_1^2 e} \quad (2)$$

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που διαγράφουν τα βαρύτερα ιόντα, όταν εισέρχονται στο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_2$ είναι ίση με:

$$R_2 = \frac{m_2 v}{B_2 |q|}$$

$$\text{ή } R_2 = \frac{m_2 v}{2 B_1 e},$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$R_2 = \frac{m_2 E}{2 B_1^2 e} \quad (3)$$

Επειδή είναι $m_2 > m_1$, από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι $R_2 > R_1$.

Επομένως η απόσταση d που αφήνουν τα ίχνη των δύο ιόντων στη φωτογραφική πλάκα, είναι ίση με:

$$d = 2R_2 - 2R_1,$$

ή λόγω των σχέσεων (2) και (3):

$$d = \frac{m_2 E}{B_1^2 e} - \frac{m_1 E}{B_1^2 e}$$

$$\text{ή } d = \frac{(m_2 - m_1) E}{B_1^2 e}$$

$$\text{ή } \frac{2m_p E}{B_1^2 e} = \frac{(m_2 - m_1) E}{B_1^2 e}$$

$$\text{ή } m_2 - m_1 = 2m_p$$

$$\text{ή } m_2 = 42m_p$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο είναι:

$$I_0 = \frac{E_{\epsilon\pi}}{R}$$

$$\text{ή } I_0 = \frac{B \ell v}{R}$$

Έστω i η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα τη χρονική στιγμή t στην οποία η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου είναι $U = U_1/4$. Έχουμε:

$$U = \frac{U_1}{4}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{2} L I_0^2$$

$$\text{ή } i = \frac{I_0}{2}$$

$$\text{ή } i = \frac{B\omega\ell}{2R}$$

Τη χρονική στιγμή t , έχουμε:

$$i = \frac{E_{επ} - |E_{αυτ}|}{R}$$

$$\text{ή } \frac{B\omega\ell}{2R} = \frac{B\omega\ell - |E_{αυτ}|}{R}$$

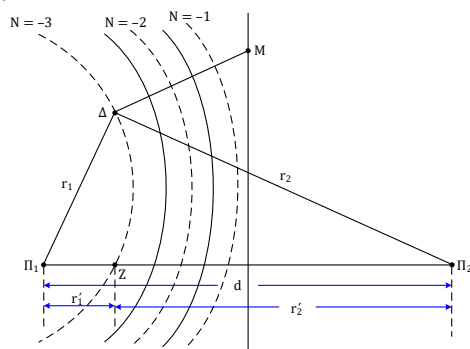
$$\text{ή } |E_{αυτ}| = \frac{B\omega\ell}{2}$$

$$\text{ή } L \left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{B\omega\ell}{2}$$

$$\text{ή } \left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{B\omega\ell}{2L}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι 2 υπερβολές ενισχυτικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΔM (3 σημεία ενισχυτικής συμβολής πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔM μαζί με το σημείο M) καθώς και οι υπερβολές αποσβετικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΔM . Η υπερβολή αποσβετικής συμβολής που διέρχεται από το σημείο Δ έχει $N = -3$.



Έχουμε:

$$r_1 - r_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή } r_1 - r_2 = -2,5\lambda$$

$$\text{ή } \frac{\lambda}{2} - r_2 = -2,5\lambda$$

$$\text{ή } r_2 = 3\lambda$$

Έστω r_1' και r_2' οι αποστάσεις του σημείου Z από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Για το σημείο Z, έχουμε:

$$r_1' - r_2' = (2N + 1) \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή } r_1' - r_2' = -2,5\lambda \quad (1)$$

Επειδή το σημείο Z είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ, ισχύει:

$$r_1' + r_2' = d$$

$$\text{ή } r_1' + r_2' = 4\lambda \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$2r_1' = 1,5\lambda$$

$$\text{ή } r_1' = 0,75\lambda$$

Από τη σχέση (2), προκύπτει:

$$r_2' = 3,25\lambda$$

Το σημείο Z ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{r_1}{v}$$

$$\text{ή } t_1 = \frac{r_1}{\lambda T}$$

$$\text{ή } t_1 = 0,75 T$$

Το σημείο Z παύει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία συμβάλλουν τα δύο κύματα σε αυτό. Έχουμε:

$$t_2 = \frac{r_2}{v}$$

$$\text{ή } t_2 = \frac{r_2}{\lambda T}$$

$$\text{ή } t_2 = 3,25 T$$

Τη χρονική στιγμή $t = 4,25 T$ το σημείο Z έχει ακινητοποιηθεί μόνιμα. Ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί το σημείο Z από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 4,25 T$ είναι ίσος με τον αριθμό των ταλαντώσεων που εκτελεί από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 .

Έχουμε:

$$N = \frac{\Delta t}{T}$$

$$\text{ή } N = \frac{t_2 - t_1}{T}$$

$$\text{ή } N = 2,5 \text{ ταλαντώσεις}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε:

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4}$$

$$\text{ή } \lambda = 4d_{\min}$$

$$\text{ή } \lambda = 0,2 \text{ m}$$

Το μήκος L της χορδής είναι ίσο με:

$$L = 2,5\lambda$$

$$\text{ή } L = 0,5 \text{ m}$$

Γ2. Αφού το σημείο Z διέρχεται 20 φορές ανά δευτερόλεπτο από τη Θ.Ι. του η συχνότητα της ταλάντωσης του είναι $f = 10 \text{ Hz}$. Επομένως, έχουμε:

$$\omega = 2\pi f$$

$$\text{ή } \omega = 20\pi \text{ rad/s}$$

Έστω $|A_0|$ το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου O . Τη χρονική στιγμή t_1 , όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο είναι $y_0 = +0,03 \text{ m}$. Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση που εκτελεί το σημείο O έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } E = \frac{64}{100} E + U$$

$$\text{ή } U = \frac{36}{100} E$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D y_0^2 = 0,36 \frac{1}{2} D A_0^2$$

$$\text{ή } |y_0| = 0,6 |A_0|$$

$$\text{ή } |A_0| = 0,05 \text{ m}$$

$$\text{ή } 2A = 0,05 \text{ m}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y = 0,05 \sin(10\pi x) \eta\mu(20\pi t) \text{ (S.I.)}$$

Γ3. Όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο είναι:

$$x_Z = -\lambda$$

$$\text{ή } x_Z = -0,2 \text{ m}$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σημείου Z δίνεται από τη σχέση:

$$v_Z = \omega A_Z \sin(\omega t)$$

$$\text{ή } v_Z = \omega 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \sin(\omega t)$$

$$\text{ή } v_Z = \pi \sin(20\pi t) \text{ (S.I.) (1)}$$

Από τη σχέση (1) για $t = 0,05 \text{ s}$ προκύπτει:

$$v_A = \pi \sin \pi \text{ m/s}$$

$$\text{ή } v_A = -\pi \text{ m/s}$$

Γ4. Η μέγιστη απόσταση $d_{\max}$ του σημείου Z από το άκρο K της χορδής υπολογίζεται από τη σχέση:

$$d_{\max} = \sqrt{(\Delta x)^2 + A_Z^2}$$

$$\text{ή } d_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 + (2A)^2}$$

$$\text{ή } d_{\max} = 0,05\sqrt{2} \text{ m}$$

Γ5. Η ταχύτητα διάδοσης των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή είναι:

$$v_\delta = \lambda f$$

$$\text{ή } v_\delta = 2 \text{ m/s}$$

Για να δημιουργείται στάσιμο κύμα στη χορδή πρέπει να ισχύει:

$$L = \kappa \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή } L = \frac{\kappa v_\delta}{2f}$$

$$\text{ή } f = \frac{\kappa v_\delta}{2L}$$

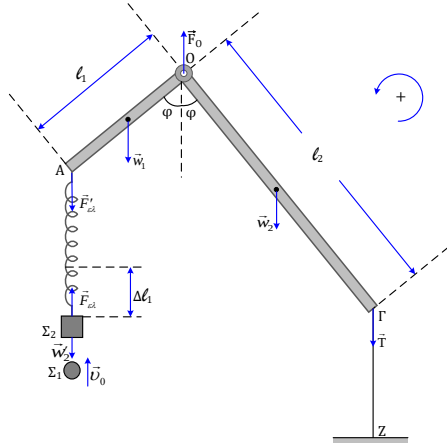
$$\text{ή } f = 2\kappa, \text{ με } \kappa = 1, 2, 3, \dots (1)$$

Αφού στη χορδή έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα με συχνότητα $f = 10 \text{ Hz}$, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $\kappa = 5$. Επομένως, η αμέσως επόμενη συχνότητα f' διέγερσης της χορδής για την οποία δημιουργείται στάσιμο κύμα προκύπτει από τη σχέση (1) για $\kappa = 6$. Έχουμε:

$$f' = 12 \text{ Hz}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Επειδή το σύστημα ράβδοι – σώμα Σ_2 ισορροπεί, ισχύει:



$$\Sigma \tau_{\varepsilon_{(O)}} = 0$$

$$\text{ή } \tau_{w'_2} + \tau_{w_1} + \tau_{w_2} + \tau_T + \tau_{F_0} = 0$$

$$\text{ή } +w'_2 l_1 \eta \mu \varphi + w_1 \frac{l_1}{2} \eta \mu \varphi - w_2 \frac{l_2}{2} \eta \mu \varphi - T l_2 \eta \mu \varphi + 0 = 0$$

$$\text{ή } m_2 g l_1 + M_1 g \frac{l_1}{2} - M_2 g \frac{l_2}{2} - T l_2 = 0$$

$$\text{ή } T = 10 \text{ N}$$

Επειδή το σύστημα ράβδοι – σώμα Σ_2 ισορροπεί, το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_O$ που δέχεται το σύστημα των δύο ράβδων από τον άξονα περιστροφής του υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } F_O = w'_2 + w_1 + w_2 + T$$

$$\text{ή } F_O = m_2 g + M_1 g + M_2 g + T$$

$$\text{ή } F_O = 70 \text{ N}$$

Δ2. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$$

$$\text{ή } m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή } v = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s}$$

Έστω Δl_1 η επιμήκυνση του σώματος Σ_2 στη θέση ισορροπίας του. Έχουμε:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } w'_2 = F_{ελ}$$

$$\text{ή } m_2 g = k \Delta l_1$$

$$\text{ή } \Delta l_1 = 0,1 \text{ m}$$

Έστω Δl_2 η επιμήκυνση του συσσωματώματος στη Θ.Ι. του. Έχουμε:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } (m_1 + m_2) g = k \Delta l_2$$

$$\text{ή } \Delta l_2 = 0,4 \text{ m}$$

Η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του αμέσως μετά την κρούση είναι ίση με:

$$|x| = \Delta l_2 - \Delta l_1$$

$$\text{ή } |x| = 0,3 \text{ m}$$

Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση, έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} D x^2$$

$$\text{ή } A = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k} v^2 + x^2}$$

$$\text{ή } A = 0,2\sqrt{3} \text{ m}$$

Δ3. Έστω x_1 η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία είναι $K = (2/3)E$ για πρώτη φορά μετά την κρούση. Έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } E = \frac{2}{3} E + U$$

$$\text{ή } U = \frac{1}{3} E$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D x_1^2 = \frac{1}{3} \frac{1}{2} D A^2$$

$$\text{ή } x_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} A$$

$$\text{ή } x_1 = \pm 0,2 \text{ m}$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x = +0,3 \text{ m}$, τη χρονική στιγμή t_1 είναι $x_1 = +0,2 \text{ m}$ και $v < 0$. Έχουμε:

$$\frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_1$$

$$\text{ή } \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m_1 + m_2} x_1$$

$$\text{ή } \frac{dv}{dt} = -5 \text{ m/s}^2$$

Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_1 . Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση του συσσωματώματος έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_1^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2$$

$$\text{ή } v_1 = -\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}(A^2 - x_1^2)$$

$$\text{ή } v_1 = -\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσος με:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma Fv$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = -Dx_1v_1$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = +20\sqrt{2} \text{ J/s}$$

Δ4. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το συσσωμάτωμα από το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$F_{ελ} = k(\Delta\ell_2 - |x_1|)$$

$$\text{ή } F_{ελ} = 20 \text{ N}$$

Επειδή το σύστημα των δύο ράβδων ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0$$

$$\text{ή } \tau'_{F_{ελ}} + \tau_{w_1} + \tau_{w_2} + \tau_{\tau} + \tau_{F_0} = 0$$

$$\text{ή } F_{ελ}\ell_1\eta\mu\phi + w_1\frac{\ell_1}{2}\eta\mu\phi - w_2\frac{\ell_2}{2}\eta\mu\phi - T\ell_2\eta\mu\phi + 0 = 0$$

$$\text{ή } F_{ελ}\ell_1 + M_1g\frac{\ell_1}{2} - M_2g\frac{\ell_2}{2} - T\ell_2 = 0$$

$$\text{ή } T = 15 \text{ N}$$

Δ5. Έστω μια τυχαία θέση του συσσωματώματος με απομάκρυνση x ($x > 0$). Έχουμε:

$$\Sigma F = -Dx$$

$$\text{ή } F_{ελ} - (m_1 + m_2)g = -Dx$$

$$\text{ή } F_{ελ} = (m_1 + m_2)g - kx$$

$$\text{ή } F_{ελ} = 40 - 100x \text{ (S.I.) (1)}$$

Επειδή το σύστημα των δύο ράβδων ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0$$

$$\text{ή } \tau'_{F_{ελ}} + \tau_{w_1} + \tau_{w_2} + \tau_{\tau} + \tau_{F_0} = 0$$

$$\text{ή } F_{ελ}\ell_1\eta\mu\phi + w_1\frac{\ell_1}{2}\eta\mu\phi - w_2\frac{\ell_2}{2}\eta\mu\phi - T\ell_2\eta\mu\phi + 0 = 0$$

$$\text{ή } F_{ελ}\ell_1 + M_1g\frac{\ell_1}{2} - M_2g\frac{\ell_2}{2} - T\ell_2 = 0$$

$$\text{ή } T = \frac{F_{ελ}\ell_1 + M_1g\frac{\ell_1}{2} - M_2g\frac{\ell_2}{2} - T\ell_2}{\ell_1}$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$T = 25 - 50x \text{ (S.I.) (2)}$$

Για να μην περιστρέφεται το σύστημα των δύο ράβδων κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος πρέπει να ισχύει:

$$0 \leq T \leq T_{\theta\rho}$$

$$\text{ή } 0 \leq T \leq 50 \text{ N}$$

ή λόγω της σχέσης (2)

$$0 \leq 25 - 50x \leq 50$$

$$\text{ή } -0,5 \text{ m} \leq x \leq 0,5 \text{ m}$$

Επομένως, το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης που μπορεί να εκτελέσει το συσσωμάτωμα χωρίς το νήμα να λυγίσει ή να κοπεί είναι $A_{\max} = 0,5 \text{ m}$.

Έστω v' η μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση του συσσωματώματος, έχουμε:

$$\text{ή } \frac{1}{2}DA_{\max}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

$$\text{ή } v' = 2 \text{ m/s}$$

Έστω v'_0 η μέγιστη τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση, έχουμε:

$$p_{\text{ολ(πριν)}} = p_{\text{ολ(μετά)}}$$

$$\text{ή } m_1v'_0 = (m_1 + m_2)v'$$

$$\text{ή } v'_0 = \frac{8}{3} \text{ m/s}$$

17^ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

A1. δ, A2. α, A3. δ, A4. γ

A5. α. Λ, β. Λ, γ. Σ, δ. Λ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β.

Η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_{K(t_1)} = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) \quad (1)$$

Η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_{\Lambda(t_1)} = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right) \quad (2)$$

Επειδή είναι $x_\Lambda > x_K$, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\varphi_{K(t_1)} > \varphi_{\Lambda(t_1)}$$

Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των δύο υλικών σημείων είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_{K(t_1)} - \varphi_{\Lambda(t_1)} \quad (3)$$

ή λόγω των σχέσεων (1) και (2):

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{x_\Lambda - x_K}{\lambda} \quad (4)$$

Έστω $\varphi_{\Lambda(t_2)}$ η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_2 . Έχουμε:

$$\varphi_{\Lambda(t_2)} = 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right) \quad (5)$$

Η μεταβολή της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$\Delta\varphi_\Lambda = \varphi_{\Lambda(t_2)} - \varphi_{\Lambda(t_1)} \quad (6)$$

ή λόγω των σχέσεων (2) και (5):

$$\Delta\varphi_\Lambda = 2\pi \frac{t_2 - t_1}{T}$$

$$\text{ή } \Delta\varphi_\Lambda = \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4}$$

$$\text{ή } \Delta\varphi_\Lambda = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Επομένως από τη σχέση (6), προκύπτει:

$$\frac{\pi}{2} = 3\pi - \varphi_{\Lambda(t_1)}$$

$$\text{ή } \varphi_{\Lambda(t_1)} = \frac{5\pi}{2} \text{ rad}$$

Επομένως από τη σχέση (3) προκύπτει ότι η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των σημείων Κ και Λ τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

Επομένως, από τη σχέση (4) προκύπτει:

$$\lambda = 0,8 \text{ m}$$

Έστω T η περίοδος του κύματος. Έχουμε:

$$v_\delta = \lambda f$$

$$\text{ή } v_\delta = \frac{\lambda}{T}$$

$$\text{ή } T = \frac{\lambda}{v_\delta}$$

$$\text{ή } T = 0,4 \text{ s}$$

Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = 0,1 \eta \mu 2\pi \left(2,5t - \frac{5x}{4} \right) \quad (\text{S.I.})$$

$$\text{ή } y = 0,1 \eta \mu (5\pi t - 2,5\pi x) \quad (\text{S.I.})$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Το μέτρο της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται ανάμεσα στα σημεία επαφής Μ και Ν του ευθύγραμμου αγωγού με τους κυκλικούς αγωγούς δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\varepsilon\pi} = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|$$

$$\text{ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{d(BS)}{dt}$$

$$\text{ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{BdS}{dt} \quad (1)$$

Επειδή ο ευθύγραμμος αγωγός περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, το τμήμα του ΜΝ διαγράφει σε ίσους χρόνους τα ίδια εμβαδά. Επομένως η σχέση (1) γίνεται:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{B\Delta S}{\Delta t} \quad (2)$$

Αν θεωρήσουμε μια πλήρη περιστροφή του ευθύγραμμου αγωγού, τότε η σχέση (2) γράφεται:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{B(\pi L_2^2 - \pi L_1^2)}{T}$$

$$\text{ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{B\pi[(2\ell)^2 - \ell^2]}{\frac{2\pi}{\omega}}$$

$$\text{ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{1}{2} B\omega 3\ell^2$$

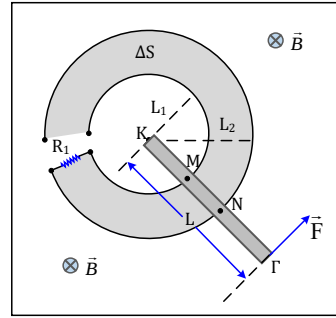
$$\text{ή } E_{\varepsilon\pi} = \frac{3}{2} B\omega \ell^2$$

Έστω R_{MN} η ωμική αντίσταση του τμήματος ΜΝ. Έχουμε:

$$\frac{R_{MN}}{R_{K\Lambda}} = \frac{\rho \frac{(L_2 - L_1)}{A}}{\rho \frac{L}{A}}$$

$$\text{ή } \frac{R_{MN}}{R_{K\Lambda}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ή } R_{K\Lambda} = R$$



Το επαγωγικό ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη R_1 δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_1 + R_{MN}}$$

$$\text{ή } I = \frac{\frac{3}{2} B\omega \ell^2}{2R}$$

$$\text{ή } I = \frac{3}{4} \frac{B\omega \ell^2}{R}$$

Η τάση στα άκρα του αντιστάτη R_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

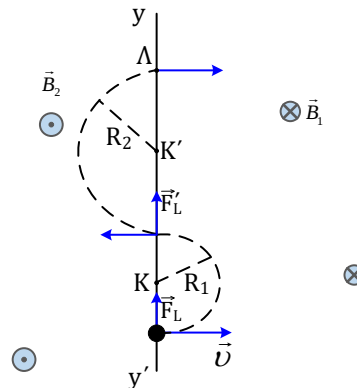
$$V_{R_1} = I_{\varepsilon\pi} R_1$$

$$\text{ή } V_{R_1} = \frac{3}{4} \frac{B\omega \ell^2}{R} R$$

$$\text{ή } V_{R_1} = \frac{3}{4} B\omega \ell^2$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι μαγνητικές δυνάμεις που δέχεται το σωματίδιο καθώς και η τροχιά που ακολουθεί κατά την κίνηση του από το σημείο Κ στο σημείο Λ.



Έστω R_2 η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο στο μαγνητικό πεδίο έντασης B_2 . Όπως φαίνεται από το σχήμα, έχουμε:

$$\begin{aligned} (K\Lambda) &= 2R_1 + 2R_2 \\ \text{ή } 6R_1 &= 2R_1 + 2R_2 \\ \text{ή } R_2 &= 2R_1 \end{aligned}$$

$$\text{ή } \frac{mv}{B_2 |q|} = 2 \frac{mv}{B_1 |q|}$$

$$\text{ή } B_1 = 2B_2$$

Για τους χρόνους κίνησης του σωματιδίου στα δύο πεδία, έχουμε:

$$\Delta t_1 = \frac{T_1}{2} \quad (1)$$

και

$$\Delta t_2 = \frac{T_2}{2} \quad (2)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\text{ή } \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{\frac{2\pi m}{B_1 |q|}}{\frac{2\pi m}{B_2 |q|}}$$

$$\text{ή } \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{B_2}{B_1}$$

$$\text{ή } \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ή } \Delta t_1 = \frac{\Delta t_2}{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τη δοθείσα εξίσωση της έντασης του ρεύματος προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο είναι $\frac{di}{dt} = +2 \text{ A/s}$. Το μέτρο της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στο πηνίο είναι:

$$|E_{\text{αυτ}}| = L \left| \frac{di}{dt} \right|$$

$$\text{ή } E_{\text{αυτ}} = 2 \text{ V}$$

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο δίνεται από τη σχέση:

$$i = \frac{E - |E_{\text{αυτ}}|}{R_{\text{ολ}}}$$

$$\text{ή } i = \frac{Bv\ell - |E_{\text{αυτ}}|}{R_{K\Lambda}}$$

$$\text{ή } Bv\ell = iR_{K\Lambda} + |E_{\text{αυτ}}|$$

$$\text{ή } v = \frac{E_{\text{αυτ}}}{B\ell} + \frac{iR_{K\Lambda}}{B\ell}$$

$$\text{ή } v = 2 + 4t \text{ (S.I.)} \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η κίνηση του αγωγού ΚΛ είναι ομαλά επιταχυνόμενη με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_0 = 2 \text{ m/s}$ και επιτάχυνσης μέτρου $a = 4 \text{ m/s}^2$.

Γ2. Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε:

$$\Sigma F = ma$$

$$\text{ή } F - w - F_L = ma$$

$$\text{ή } F = mg + Bi\ell + ma$$

$$\text{ή } F = 14 + 2t \text{ (S.I.)} \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) για $t = t_1 = 3 \text{ s}$, προκύπτει:

$$v = 14 \text{ m/s}$$

Από τη σχέση (2) για $t = t_1 = 3 \text{ s}$, προκύπτει:

$$F = 20 \text{ N}$$

Ο ζητούμενος ρυθμός υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dW_F}{dt} = F \frac{dx}{dt}$$

$$\text{ή } \frac{dW_F}{dt} = Fv$$

$$\text{ή } \frac{dW_F}{dt} = 280 \text{ J/s}$$

Γ3. Η ενέργεια που προσφέρεται από τον αγωγό ΚΛ μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 μετατρέπεται σε αύξηση της κινητικής του ενέργειας (ΔK), σε αύξηση της βαρυτικής δυναμικής του ενέργειας ($\Delta U_{\text{βαρ}}$), σε θερμότητα Joule πάνω στον αγωγό ΚΛ ($Q_{R_{K\Lambda}}$) και σε αύξηση της

ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου ($\Delta U_{\pi\eta\nu}$). Έχουμε:

$$W_F = \Delta K + \Delta U_{\beta\alpha\rho} + Q_{R_{\kappa\lambda}} + \Delta U_{\pi\eta\nu}$$

$$\text{ή } W_F = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) + mgh + Q_{R_{\kappa\lambda}} + \frac{1}{2}L(i_1^2 - i_0^2) \quad (3)$$

Η μετατόπιση h του αγωγού από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 3 \text{ s}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$h = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2$$

$$\text{ή } h = 24 \text{ m}$$

Από τη δοθείσα εξίσωση της έντασης του ρεύματος για $t = 0$ προκύπτει ότι: $i_0 = 0$, ενώ για $t = 3 \text{ s}$ προκύπτει: $i_1 = 6 \text{ A}$.

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (3) έχουμε: $Q_{R_{\kappa\lambda}} = 72 \text{ J}$

Γ4. Τη χρονική στιγμή t_1 , αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ_2), η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο αρχίζει να μειώνεται. Έστω i_2 η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο τη χρονική στιγμή t_2 . Έχουμε:

$$Q_{R_1} = |\Delta U_{\pi\eta\nu}|$$

$$\text{ή } Q_{R_1} = \left| \frac{1}{2} Li_2^2 - \frac{1}{2} Li_1^2 \right|$$

$$\text{ή } Q_{R_1} = \frac{1}{2} Li_1^2 - \frac{1}{2} Li_2^2$$

$$\text{ή } i_2 = \sqrt{i_1^2 - 2 \frac{Q_{R_1}}{L}}$$

$$\text{ή } i_2 = 2 \text{ A}$$

Έχουμε:

$$i_2 = \frac{|E_{\alpha\upsilon\tau}|}{R_1}$$

$$\text{ή } |E_{\alpha\upsilon\tau}| = i_2 R_1$$

$$\text{ή } |E_{\alpha\upsilon\tau}| = 8 \text{ V}$$

$$\text{ή } |E_{\alpha\upsilon\tau}| = L \left| \frac{di}{dt} \right|$$

$$\text{ή } \left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{|E_{\alpha\upsilon\tau}|}{L}$$

$$\text{ή } \left| \frac{di}{dt} \right| = 8 \text{ A/s}$$

$$\text{ή } \frac{di}{dt} = -8 \text{ A/s}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$P_{\pi\eta\nu} = E_{\alpha\upsilon\tau} \cdot i_2$$

$$\text{ή } P_{\pi\eta\nu} = 16 \text{ J/s}$$

Γ5. Από τη χρονική στιγμή t_1 [αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη (δ_1) και το ταυτόχρονο κλείσιμο του διακόπτη (δ_3)] και μετά ο αγωγός ΚΛ συνεχίζει να κινείται προς τα πάνω, ενώ δέχεται το βάρος του $\vec{W}$ και η δύναμη Laplace $\vec{F}_L$ που αντιστέκεται στην κίνηση του. Επομένως ο αγωγός ΚΛ με τη δράση των δύο παραπάνω δυνάμεων επιβραδύνεται με επιβράδυνση που μειώνεται κατά μέτρο μέχρι να ακινητοποιηθεί στιγμιαία, οπότε μηδενίζεται στιγμιαία η ένταση του ρεύματος που τον διαρρέει και η δύναμη Laplace που δέχεται. Αμέσως μετά ο αγωγός ΚΛ αρχίζει να κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω εξαιτίας του βάρους του $\vec{W}$, οπότε η πολικότητα της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα του αντιστρέφεται και μαζί αντιστρέφονται η ένταση του ρεύματος που τον διαρρέει και η δύναμη Laplace που δέχεται. Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται ο αγωγός ΚΛ κατά την κάθοδο του δίνεται από τη σχέση:

$$\Sigma F = mg - F_L$$

$$\text{ή } \Sigma F = mg - Bi\ell$$

$$\text{ή } \Sigma F = mg - B \frac{E_{\epsilon\pi}}{R_{\kappa\lambda} + R_2} \ell$$

$$\text{ή } \Sigma F = mg - \frac{B^2 \ell^2 v}{R_{\kappa\lambda} + R_2} \quad (4)$$

Καθώς ο αγωγός κατέρχεται το μέτρο της ταχύτητας του αυξάνεται, οπότε από τη σχέση (4) προκύπτει ότι το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται μειώνεται και τη χρονική στιγμή t_3 στην οποία η συνισταμένη δύναμη που δέχεται γίνεται ίση με μηδέν αποκτά την οριακή του ταχύτητα $\vec{v}_{op}$. Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε:

$$\Sigma F = ma$$

$$\text{ή } a = \frac{\Sigma F}{m} \quad (5)$$

Αφού το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται ο αγωγός ΚΛ μειώνεται κατά την κάθοδο του, το μέτρο της επιτάχυνσης του, σύμφωνα με τη σχέση (5), θα μειώνεται κατά την κάθοδο του. Επομένως

η κίνηση του αγωγού ΚΛ από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_3 στην οποία αποκτά την οριακή του ταχύτητα είναι επιταχυνόμενη με επιτάχυνση που μειώνεται κατά μέτρο. Από τη σχέση (4) για $\Sigma F = 0$ και $v = v_{op}$, έχουμε:

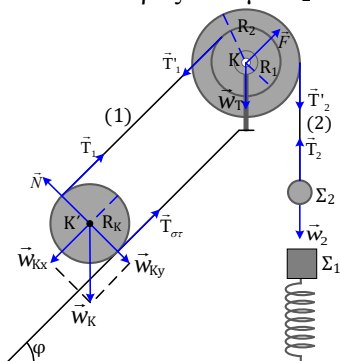
$$0 = mg - \frac{B^2 \ell^2 v_{op}}{R_2 + R_{KL}}$$

$$\text{ή } v_{op} = \frac{mg(R_2 + R_{KL})}{B^2 \ell^2}$$

$$\text{ή } v_{op} = 30 \text{ m/s}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται το σύστημα τροχαλία – κύλινδρος – σώμα Σ_2 .



Επειδή το σώμα Σ_2 ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } w_2 = T_2$$

$$\text{ή } T_2 = m_2 g$$

$$\text{ή } T_2 = 30 \text{ N}$$

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0$$

$$\text{ή } T'_1 R_1 = T'_2 R_2$$

$$\text{ή } T_1 R_1 = T_2 R_2$$

$$\text{ή } T_1 = 60 \text{ N}$$

Επειδή ο κύλινδρος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K')} = 0$$

$$\text{ή } T_1 R_K = T_{\sigma} R_K$$

$$\text{ή } T_{\sigma} = T_1$$

$$\text{ή } T_{\sigma} = 60 \text{ N}$$

Επειδή ο κύλινδρος ισορροπεί, ισχύει ακόμα:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } \Sigma F_x = 0 \quad (1)$$

και

$$\Sigma F_y = 0 \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$w_{Kx} = T_1 + T_{\sigma}$$

$$\text{ή } m_K g \sin \varphi = 2T_1$$

$$\text{ή } m_K = 24 \text{ kg}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\text{ή } N = w_{Ky}$$

$$\text{ή } N = m_K g \cos \varphi$$

$$\text{ή } N = 120\sqrt{3} \text{ N}$$

Για τη στατική τριβή, ισχύει:

$$T_{\sigma} \leq T_{op}$$

$$\text{ή } T_{\sigma} \leq \mu_s N$$

$$\text{ή } \mu_s \geq \frac{T_{\sigma}}{N}$$

$$\text{ή } \mu_s \geq \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{ή } \mu_{s(\min)} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Δ2. Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 . Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ_1 έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D A_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + \frac{1}{2} D d^2$$

$$\text{ή } A_1 = \sqrt{\frac{m_1}{k} v_0^2 + d^2}$$

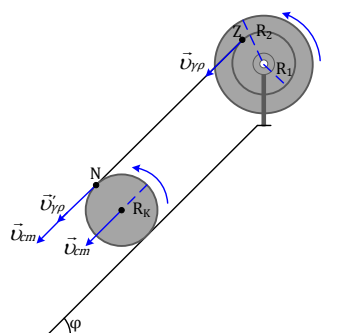
$$\text{ή } A_1 = 0,3\sqrt{2} \text{ m}$$

Δ3. Έστω a_{cm} το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_1 . Έχουμε:

$$s = \frac{1}{2} a_{cm} t_1^2$$

$$\text{ή } a_{cm} = \frac{2s}{t_1^2}$$

$$\text{ή } a_{cm} = 2 \text{ m/s}^2$$



Για τα σημεία Z και N που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα, ισχύει:

$$v_Z = v_N$$

$$\text{ή } \vec{v}_{\gamma p} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}'_{\gamma p}$$

$$\text{ή } v_{\gamma p} = v_{cm} + v'_{\gamma p}$$

$$\text{ή } \omega_{\tau} R_1 = 2v_{cm} \quad (1),$$

όπου ω_{τ} το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1 . Έστω $\alpha_{\gamma\omega\tau}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας. Παραγωγίζοντας τη σχέση (1), έχουμε:

$$\frac{d\omega_{\tau}}{dt} \cdot R_1 = 2 \frac{dv_{cm}}{dt}$$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\tau} R_1 = 2\alpha_{cm}$$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\tau} = \frac{2\alpha_{cm}}{R_1}$$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\tau} = 40 \text{ rad/s}^2$$

Έστω $\Delta\theta$ η γωνία που διαγράφει η τροχαλία από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Έχουμε:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\tau} t_1^2$$

$$\text{ή } \Delta\theta = 5 \text{ rad}$$

Ο ζητούμενος αριθμός των περιστροφών της τροχαλίας είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

$$\text{ή } N = (2,5/\pi) \text{ περιστροφές}$$

Το μέτρο $\alpha_{\gamma\omega\tau(K)}$ της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\tau(K)} R_K$$

$$\text{ή } \alpha_{\gamma\omega\tau(K)} = 20 \text{ rad/s}^2$$

Έστω ω_K το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_1 . Έχουμε:

$$\omega_K = \alpha_{\gamma\omega\tau(K)} t_1$$

$$\text{ή } \omega_K = 10 \text{ rad/s}$$

Δ4. Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση.

Έχουμε:

$$v_2 = gt_1$$

$$\text{ή } v_2 = 5 \text{ m/s}$$

Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$K = \frac{E}{2}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} D A_1^2$$

$$\text{ή } v_1 = \sqrt{\frac{k}{2m_1}} A_1$$

$$\text{ή } v_1 = 3 \text{ m/s}$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά προς τα πάνω, έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$$

$$\text{ή } m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή } v = -3 \text{ m/s}$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)}}{K_{ολ(πριν)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left[1 - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2} \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 57,1\%$$

Δ5. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Ε. της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση, έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } E = \frac{E}{2} + U$$

$$\text{ή } U = \frac{E}{2}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} A^2$$

$$\text{ή } |x| = \frac{\sqrt{2}}{2} A$$

$$\text{ή } |x| = 0,3 \text{ m}$$

Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 .

Έχουμε:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } m_1 g = k \Delta\ell_1$$

$$\text{ή } \Delta\ell_1 = 0,1 \text{ m}$$

Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος. Έχουμε:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } (m_1 + m_2) g = k \Delta\ell_2$$

$$\text{ή } \Delta \ell_2 = 0,4 \text{ m}$$

Επειδή η κρούση γίνεται πάνω από τη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 , η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης x_1 του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$|x_1| = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1 + |x|$$

$$\text{ή } |x_1| = 0,6 \text{ m}$$

Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση που εκτελεί το συσσωμάτωμα, έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D A_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} D x_1^2$$

$$\text{ή } A_2 = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k} v^2 + x_1^2}$$

$$\text{ή } A_2 = 0,6\sqrt{2} \text{ m}$$

Το ζητούμενο πηλίκο είναι ίσο με :

$$\frac{v_{\max(\text{συσσωμ})}}{v_{\max(\Sigma_1)}} = \frac{\omega_2 A_2}{\omega_1 A_1}$$

$$\text{ή } \frac{v_{\max(\text{συσσωμ})}}{v_{\max(\Sigma_1)}} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} A_2}{\sqrt{\frac{k}{m_1}} A_1}$$

$$\text{ή } \frac{v_{\max(\text{συσσωμ})}}{v_{\max(\Sigma_1)}} = 1$$

18^ο Κριτήριο Αξιολόγησης
ΘΕΜΑ Α

A1. γ, A2. β, A3. γ, A4. β
A5. α. Σ, β. Σ, γ. Σ, δ. Λ, ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β.

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας Σ_1 πριν από την κρούση, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το κατώτερο σημείο της τροχιάς της, έχουμε:

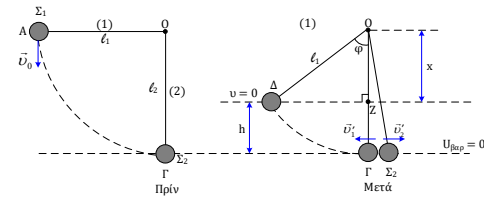
$$E_{\text{μηχ}(A)} = E_{\text{μηχ}(\Gamma)}$$

$$\text{ή } K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + m_1 g \ell = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0$$

$$\text{ή } v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2g\ell_1}$$

$$\text{ή } v_1 = 2\sqrt{g\ell}$$



Έστω v'_1 η ταχύτητα της σφαίρας Σ_1 αμέσως μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ των θέσεων Γ και Δ που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα, έχουμε:

$$E_{\text{μηχ}(\Gamma)} = E_{\text{μηχ}(\Delta)}$$

$$\text{ή } K_\Gamma + U_\Gamma = K_\Delta + U_\Delta$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + 0 = 0 + m_1 g h$$

$$\text{ή } v_1' = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΖΔ έχουμε:

$$\text{συν}\varphi = \frac{x}{\ell_1}$$

$$\text{ή } \text{συν}\varphi = \frac{x}{\ell}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} = \frac{x}{\ell}$$

$$\text{ή } x = \frac{\ell}{2}$$

Επομένως:

$$h = \ell_1 - x$$

$$\text{ή } h = \ell - \frac{\ell}{2}$$

$$\text{ή } h = \frac{\ell}{2} \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) λόγω της σχέσης (2) προκύπτει:

$$v'_1 = \sqrt{g\ell}$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\text{ή } -\sqrt{g\ell} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} 2\sqrt{g\ell}$$

$$\text{ή } m_2 = 3m_1$$

$$\text{ή } m_1 = m$$

Η μεταβολή της στροφορμής της σφαίρας Σ_1 εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_{\text{τελ}} - \vec{L}_{\text{αρχ}}$$

ή θεωρώντας ως θετική φορά την αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού:

$$\Delta L = -m_1 v_1' \ell - m_1 v_1 \ell$$

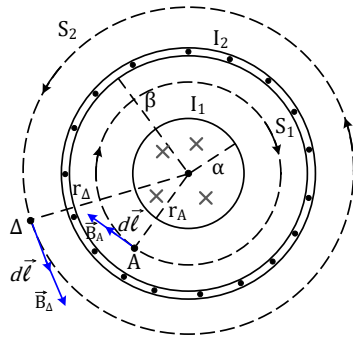
$$\text{ή } \Delta L = -m_1 \ell (v_1' + v_1)$$

$$\text{ή } \Delta L = -3m\ell\sqrt{g\ell}$$

$$\text{ή } |\Delta L| = 3m\ell\sqrt{g\ell}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α.

Για να υπολογίσουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Α θεωρούμε την κυκλική διαδρομή S_1 ακτίνας $r_A = 2a$ που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα και εφαρμόζουμε το νόμο του Ampere.



Έχουμε:

$$\sum B \cdot d\ell \cdot \cos\theta = \mu_0 I_{\text{εγκ}}$$

$$\text{ή } \sum B \cdot d\ell \cdot \cos\theta = \mu_0 I_{\text{εγκ}}$$

$$\text{ή } B_A \sum d\ell = \mu_0 I_1$$

$$\text{ή } B_A 2\pi r_A = \mu_0 I$$

$$\text{ή } B_A = \frac{\mu_0 I}{2\pi 2\alpha}$$

$$\text{ή } B_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi\alpha} \quad (1)$$

Για να υπολογίσουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Δ θεωρούμε την κυκλική διαδρομή S_2 ακτίνας $r_\Delta = 5\alpha$ που απεικονίζεται στο παραπάνω σχήμα και εφαρμόζουμε το νόμο του Ampere.

Έχουμε:

$$\sum B \cdot d\ell \cdot \cos\theta = \mu_0 I_{\text{εγκ}}$$

$$\text{ή } \sum B \cdot d\ell \cdot \cos\theta = \mu_0 I_{\text{εγκ}}$$

$$\text{ή } B_\Delta \sum d\ell = \mu_0 (I_2 - I_1)$$

$$\text{ή } B_\Delta 2\pi r_\Delta = \mu_0 2I$$

$$\text{ή } B_\Delta = \frac{\mu_0 I}{5\pi\alpha} \quad (2)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{B_A}{B_\Delta} = \frac{5}{4}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Έχουμε:

$$p_2 = 2p_1$$

$$\text{ή } \frac{h}{\lambda_2} = 2 \frac{h}{\lambda_1}$$

$$\text{ή } \lambda_1 = 2\lambda_2$$

$$\text{ή } \frac{c}{f_1} = 2 \frac{c}{f_2}$$

$$\text{ή } f_2 = 2f_1$$

Από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein κατά την πρόσπτωση της

ακτινοβολίας (1) στην επιφάνεια του μετάλλου, έχουμε:

$$K = hf_1 - \phi \quad (1)$$

Από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein κατά την πρόσπτωση της ακτινοβολίας (2) στην επιφάνεια του μετάλλου, έχουμε:

$$K_2 = hf_2 - \phi$$

$$\text{ή } K_2 = 2hf_1 - \phi \quad (2)$$

Έστω t_1 και t_2 οι χρόνοι παραμονής στο μαγνητικό πεδίο για τα φωτοηλεκτρόνια των ακτινοβολιών (1) και (2) αντίστοιχα.

Έχουμε:

$$t_1 = N_1 T_1 \quad (3)$$

και

$$t_2 = N_2 T_2 \quad (4)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (3) και (4) έχουμε:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{N_1 T_1}{N_2 T_2}$$

$$\text{ή } \frac{t_1}{t_2} = \frac{N_1 \frac{2\pi m_e}{Be}}{N_2 \frac{2\pi m_e}{Be}}$$

$$\text{ή } \frac{t_1}{t_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$\text{ή } \frac{t_1}{t_2} = \frac{2N_2}{N_2}$$

$$\text{ή } t_1 = 2t_2$$

$$\text{ή } \frac{d}{v_1 \sin\phi_1} = 2 \frac{d}{v_2 \sin\phi_2}$$

$$\text{ή } v_2 \sin\phi_2 = 2v_1 \sin\phi_1$$

$$\text{ή } v_2 \frac{1}{2} = 2v_1 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ή } v_2 = 2\sqrt{3}v_1$$

Επομένως για τις μέγιστες κινητικές ενέργειες των φωτοηλεκτρονίων κατά την έξοδο από την μεταλλική επιφάνεια ισχύει:

$$\frac{K_2}{K} = \frac{\frac{1}{2} m_e v_2^2}{\frac{1}{2} m_e v_1^2}$$

$$\text{ή } \frac{K_2}{K} = 12$$

$$\text{ή } K_2 = 12K$$

ή λόγω των σχέσεων (1) και (2):

$$2hf_1 - \phi = 12hf_1 - 12\phi$$

$$\text{ή } 11\varphi = 10hf_1$$

$$\text{ή } f_1 = 1,1 \frac{\varphi}{h}$$

Επομένως από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$K = 0,1\varphi$$

$$\text{ή } \varphi = 10K$$

$$\text{ή } hf_0 = 10K$$

$$\text{ή } f_0 = \frac{10K}{h}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η εξίσωση του στιγμιότυπου του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (1)$$

Η δοθείσα εξίσωση του στιγμιότυπου του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 γράφεται:

$$y = 0,4\eta\mu 2\pi (1,75 - 2,5x) \quad (2)$$

Από τη σύγκριση της σχέσης (1) με τη σχέση (2) έχουμε:

$$A = 0,4 \text{ m}, \quad \frac{t_1}{T} = 1,75 \text{ και } \frac{1}{\lambda} = 2,5 \text{ m}^{-1}$$

$$\text{ή } \lambda = 0,4 \text{ m}$$

Έστω t_K η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το υλικό σημείο K. Τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία το σημείο K διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο με αρνητική ταχύτητα για πρώτη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσης του, έχουμε:

$$t_2 = t_K + \frac{T}{2} \quad (3)$$

Έστω t_Λ η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το υλικό σημείο Λ. Το υλικό σημείο Λ ακινητοποιείται στιγμιαία για τρίτη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσης του τη χρονική στιγμή t_2 . Έχουμε:

$$t_2 = t_\Lambda + \frac{5T}{4} \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$t_K + \frac{T}{2} = t_\Lambda + \frac{5T}{4}$$

$$\text{ή } t_K - t_\Lambda = \frac{3T}{4} \quad (5)$$

Όμως $t_K - t_\Lambda = 0,3 \text{ s}$. Επομένως από τη σχέση (5) προκύπτει:

$$\frac{3T}{4} = 0,3 \text{ s}$$

$$\text{ή } T = 0,4 \text{ s}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T}$$

$$\text{ή } v_\delta = 1 \text{ m/s}$$

Γ2. Έχουμε:

$$\frac{t_1}{T} = 1,75$$

$$\text{ή } t_1 = 0,7 \text{ s}$$

Επομένως:

$$t_3 = t_1 + \frac{T}{2}$$

$$\text{ή } t_3 = 0,9 \text{ s}$$

Έστω ένα τυχαίο σημείο Σ του θετικού ημιάξονα το οποίο τη χρονική στιγμή t_3 έχει αντίθετη επιτάχυνση από το σημείο Ο.

Έχουμε:

$$a_\Sigma = -a_O$$

$$\text{ή } -\omega^2 y_\Sigma = \omega^2 y_O$$

$$\text{ή } y_\Sigma = -y_O$$

Για να υπολογίσουμε τον αριθμό των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου που βρίσκονται στον θετικό ημιάξονα Οx και τη χρονική στιγμή t_3 έχουν αντίθετη απομάκρυνση από το σημείο Ο υπολογίζουμε την απόσταση x από το σημείο Ο στην οποία έχει διαδοθεί το κύμα τη χρονική στιγμή t_3 . Έχουμε:

$$x = v_\delta t_3$$

$$\text{ή } x = 0,9 \text{ m}$$

Χωρίζουμε την απόσταση x σε N τμήματα

$$\text{μήκους } \frac{\lambda}{4} \text{ το καθένα. Έχουμε:}$$

$$N = \frac{x}{\frac{\lambda}{4}}$$

$$\text{ή } N = \frac{4x}{\lambda}$$

$$\text{ή } N = 9$$

Η απομάκρυνση του σημείου Ο τη χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$y_O = A\eta\mu \frac{2\pi t_3}{T}$$

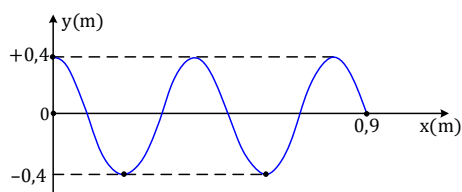
$$\text{ή } y_0 = 0,4\eta\mu(4,5\pi) \text{ m}$$

$$\text{ή } y_0 = 0,4\eta\mu\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

$$\text{ή } y_0 = 0,4\eta\mu\frac{\pi}{2} \text{ m}$$

$$y_0 = +0,4 \text{ m}$$

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_3 στον θετικό ημιάξονα Ox .



Όπως φαίνεται από το στιγμιότυπο υπάρχουν 2 σημεία στον θετικό ημιάξονα Ox τα οποία τη χρονική στιγμή t_3 έχουν αντίθετη απομάκρυνση και επομένως και αντίθετη επιτάχυνση από το σημείο O .

Γ3. Ο αριθμός των ταλαντώσεων N_O που εκτελεί το σημείο O από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_4 δίνεται από τη σχέση:

$$N_O = ft_4$$

$$\text{ή } N_O = \frac{1}{T} t_4$$

$$\text{ή } t_4 = N_O T$$

$$\text{ή } t_4 = 4 \text{ s}$$

Ο αριθμός των ταλαντώσεων N_K που εκτελεί το σημείο K από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_4 δίνεται από τη σχέση:

$$N_K = f(t_4 - t_K)$$

$$\text{ή } N_K = \frac{t_4 - t_K}{T}$$

$$\text{ή } t_4 - t_K = N_K T$$

$$\text{ή } t_K = t_4 - N_K T$$

$$\text{ή } t_K = 0,4 \text{ s}$$

Η θέση x_K του υλικού σημείου K υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \frac{x_K}{t_K}$$

$$\text{ή } x_K = v_\delta t_K$$

$$\text{ή } x_K = 0,4 \text{ m}$$

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του υλικού σημείου K δίνεται από τη σχέση:

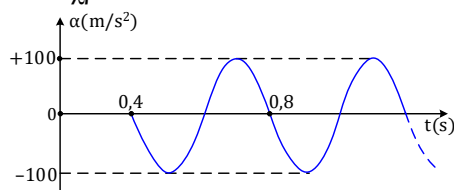
$$a_K = -\omega^2 A \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } a_K = -\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 A \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } a_K = -100\eta\mu 2\pi(2,5t - 1),$$

$$\text{για } t \geq 0,4 \text{ s}$$

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του σημείου K σε συνάρτηση με τον χρόνο.



Γ4. Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση που εκτελεί το σημείο Λ έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } E = \frac{25}{100} E + U$$

$$\text{ή } U = \frac{3}{4} E$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D y_\Lambda^2 = \frac{3}{4} \frac{1}{2} D A^2$$

$$\text{ή } y_\Lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} A$$

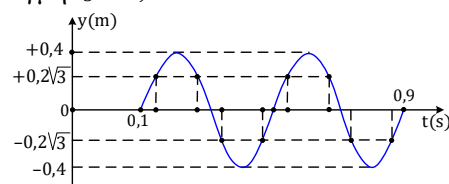
$$\text{ή } y_\Lambda = \pm 0,2\sqrt{3} \text{ m}$$

Η χρονική στιγμή t_Λ στην οποία αρχίζει το σημείο Λ να ταλαντώνεται υπολογίζεται από τη σχέση:

$$t_K - t_\Lambda = 0,3 \text{ s}$$

$$\text{ή } t_\Lambda = 0,1 \text{ s}$$

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Λ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_3 = 0,9 \text{ s}$.



Όπως προκύπτει από το προηγούμενο διάγραμμα το σημείο Λ έχει απομάκρυνση $y = \pm 0,2\sqrt{3} \text{ m}$ 8 φορές από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_3 .

Γ5. Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Κ δίνεται από τη σχέση

$$\varphi_K = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } \varphi_K = 2\pi(2,5t - 1) \text{ (S.I.) (6)}$$

Η θέση x_Λ του σημείου Λ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \frac{x_\Lambda}{t_\Lambda}$$

$$\text{ή } x_\Lambda = +0,1 \text{ m}$$

Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_\Lambda = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } \varphi_\Lambda = 2\pi \left(2,5t - \frac{1}{4} \right) \text{ (S.I.) (7)}$$

Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των σημείων Κ και Λ είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_\Lambda - \varphi_K$$

ή λόγω των σχέσεων (6) και (7):

$$\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

Τις χρονικές στιγμές στις οποίες ισχύει $y_K = +0,4 \text{ m}$, έχουμε:

$$y_K = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y_K = A\eta\mu\varphi_K$$

$$\text{ή } \eta\mu\varphi_K = 1$$

$$\varphi_K = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},$$

με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

Επομένως:

$$\Delta\varphi = \varphi_\Lambda - \varphi_K$$

$$\text{ή } \frac{3\pi}{2} = \varphi_\Lambda - \left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{ή } \varphi_\Lambda = 2\kappa\pi + 2\pi, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Λ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\Lambda = \omega A \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v_\Lambda = \frac{2\pi}{T} A \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v_\Lambda = 2\pi \sigma\upsilon\nu\varphi_\Lambda$$

$$\text{ή } v_\Lambda = 2\pi \sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + 2\pi)$$

$$\text{ή } v_\Lambda = +2\pi \text{ m/s}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α. Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία σταθεροποιείται η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο ισχύει:

$$I_0 = \frac{E}{R_1 + r}$$

$$\text{ή } I_0 = 4 \text{ A}$$

Έστω B_Σ το μέτρο της έντασης του ομογενούς μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο εσωτερικό του πηνίου. Έχουμε:

$$B_\Sigma = \mu_0 \frac{I_0 N}{\ell_\Sigma} \text{ (1), όπου } \ell_\Sigma \text{ το μήκος του}$$

πηνίου. Ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου δίνεται από τη σχέση:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell_\Sigma} \text{ (2)}$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{B}{L} = \frac{I_0}{NA}$$

$$\text{ή } B = \frac{LI_0}{NA}$$

$$\text{ή } B = 32\pi \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

β. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (δ_1) ισχύει:

$$i = \frac{E - |E_{\text{αυτ}}|}{R_1 + r}$$

$$\text{ή } 0 = \frac{E - |E_{\text{αυτ}}|}{R_1 + r}$$

$$\text{ή } |E_{\text{αυτ}}| = E$$

$$\text{ή } L \left| \frac{di}{dt} \right|_0 = E$$

$$\text{ή } \left| \frac{di}{dt} \right|_0 = \frac{E}{L}$$

$$\text{ή } \left| \frac{di}{dt} \right|_0 = 30 \text{ A/s}$$

$$\text{ή } \left(\frac{di}{dt} \right)_0 = +30 \text{ A/s}$$

Έστω i' η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο τη χρονική στιγμή στην οποία η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου είναι: $U = 0,2 \text{ J}$. Έχουμε:

$$U = \frac{1}{2} L (i')^2$$

$$\text{ή } i' = 1 \text{ A}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$i' = \frac{E - |E_{\text{αυτ}}|}{R_1 + r}$$

$$\text{ή } |E_{\text{αυτ}}| = E - i'(R_1 + r)$$

$$\text{ή } L \left| \frac{di}{dt} \right| = E - i'(R_1 + r)$$

$$\text{ή } \left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{E - i'(R_1 + r)}{L}$$

$$\text{ή } \left| \frac{di}{dt} \right| = 22,5 \text{ A/s}$$

$$\text{ή } \frac{di}{dt} = +22,5 \text{ A/s}$$

Δ2. Έστω i_2 η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_2 . Έχουμε:

$$V_{R_2} = i_2 R_2$$

$$\text{ή } i_2 = 1 \text{ A}$$

Έστω i_1 η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ. Έχουμε:

$$V_{R_2} = V_{R_{\text{ΚΛ}}}$$

$$\text{ή } V_{R_2} = i_1 R_3$$

$$\text{ή } i_1 = 1,5 \text{ A}$$

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο είναι:

$$i = I_1 + I_2$$

$$\text{ή } i = 2,5 \text{ A}$$

Η ισοδύναμη αντίσταση του συστήματος του αντιστάτη R_2 και του αγωγού ΚΛ είναι:

$$R_{2,3} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

$$\text{ή } R_{2,3} = 0,6 \Omega$$

Το μέτρο της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή στα άκρα του πηνίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$i = \frac{|E_{\text{αυτ}}|}{R_{2,3}}$$

$$\text{ή } |E_{\text{αυτ}}| = 1,5 \text{ V}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\left| \frac{dU_{\text{πην}}}{dt} \right| = E_{\text{αυτ}} \cdot i$$

$$\text{ή } \left| \frac{dU_{\text{πην}}}{dt} \right| = 3,75 \text{ J/s}$$

Δ3. Έστω $Q_{R_{\text{ολ}}}$ η συνολική θερμότητα Joule που εκλύεται από το κύκλωμα και Q_{R_2} , Q_{R_3} οι θερμότητες Joule που εκλύονται από τους αντιστάτες R_2 και R_3 αντίστοιχα από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 . Έχουμε:

$$Q_{R_{\text{ολ}}} = |\Delta U_{\text{πην}}|$$

$$\text{ή } Q_{R_{\text{ολ}}} = U_{(t_1)} - U_{(t_2)}$$

$$\text{ή } Q_{R_{\text{ολ}}} = \frac{1}{2} L I_0^2$$

$$\text{ή } Q_{R_2} + Q_{R_3} = 3,2 \text{ J} \quad (1)$$

Επειδή οι αντιστάτες R_2 και R_3 είναι συνδεδεμένοι παράλληλα μεταξύ τους, ισχύει:

$$\frac{dQ_{R_2}}{dQ_{R_3}} = \frac{\frac{V_{R_2}^2}{R_2} dt}{\frac{V_{R_3}^2}{R_3} dt}$$

$$\text{ή } \frac{dQ_{R_2}}{dQ_{R_3}} = \frac{R_3}{R_2}$$

$$\text{ή } \frac{dQ_{R_2}}{dQ_{R_3}} = \frac{1}{1,5}$$

$$\text{ή } dQ_{R_3} = 1,5 dQ_{R_2}$$

Επομένως, έχουμε:

$$Q_{R_3} = 1,5 Q_{R_2} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$Q_{R_2} = 1,28 \text{ J}$$

Δ4. Η ισοδύναμη αντίσταση των αντιστατών R_2 και R_4 είναι:

$$R_{2,4} = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4}$$

$$\text{ή } R_{2,4} = 0,6 \Omega$$

Η ισοδύναμη αντίσταση όλου του κυκλώματος είναι

$$R_{\text{ολ}} = R_3 + R_{2,4}$$

$$\text{ή } R_{\text{ολ}} = 1,6 \Omega$$

Τη χρονική στιγμή t_3 στην οποία ο αγωγός ΚΛ αποκτά την οριακή του ταχύτητα, ισχύει:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } F = F_L$$

$$\text{ή } F = BI_{op}\ell$$

$$\text{ή } F = B \frac{E_{επ}}{R_{ολ}} \ell$$

$$\text{ή } F = B \frac{Bv_{op}\ell}{R_{ολ}} \ell$$

$$\text{ή } F = \frac{B^2 \ell^2 v_{op}}{R_{ολ}}$$

$$\text{ή } v_{op} = 16 \text{ m/s}$$

Η τάση στα άκρα του αγωγού ΚΛ τη χρονική στιγμή t_3 είναι:

$$V_{ΚΛ} = E_{επ} - I_{op} R_3$$

$$\text{ή } V_{ΚΛ} = Bv_{op}\ell - \frac{Bv_{op}\ell}{R_{ολ}} R_3$$

$$\text{ή } V_{ΚΛ} = 6V$$

Ο ζητούμενος ρυθμός υπολογίζεται από τη σχέση:

$P_{R_4} = I_4^2 R_4$, όπου I_4 η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_4 τη χρονική στιγμή t_3 . Έχουμε:

$$I_4 = \frac{V_{ΚΛ}}{R_4}$$

$$\text{ή } I_4 = 6 \text{ A}$$

$$\text{Επομένως } P_{R_4} = 36 \text{ J/s}$$

Δ5. Έχουμε:

$$Q_{R_{ολ}} = |\Delta K|$$

$$\text{ή } Q_{R_{ολ}} = |K_{τελ} - K_{αρχ}|$$

$$\text{ή } Q_{R_{ολ}} = K_{αρχ}$$

$$\text{ή } Q_{R_{ολ}} = \frac{1}{2} m v_{op}^2$$

$$\text{ή } Q_{R_{ολ}} = 64 \text{ J}$$

Το επαγωγικό φορτίο $q_{επ}$ που περνά από μία διατομή του αγωγού ΚΛ από τη

χρονική στιγμή t_3 έως τη χρονική στιγμή t_4 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$q_{επ} = \frac{|\Delta \Phi|}{R_{ολ}}$$

$$\text{ή } q_{επ} = \frac{B \Delta S}{R_{ολ}}$$

$$\text{ή } q_{επ} = \frac{B \ell \cdot S}{R_{ολ}}$$

$$\text{ή } q_{επ} = 8 \text{ C}$$

Έστω q_2 και q_4 το επαγωγικό φορτίο που περνά από μία διατομή του αντιστάτη R_2 και του αντιστάτη R_4 αντίστοιχα, από τη χρονική στιγμή t_3 έως τη χρονική στιγμή t_4 . Από την αρχή διατήρησης του φορτίου ισχύει:

$$q_{επ} = q_2 + q_4 \quad (2)$$

Όμως στο στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt , ισχύει ότι:

$$dq_2 = I_2 dt \quad (3)$$

και

$$dq_4 = I_4 dt \quad (4)$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (2) και (3), έχουμε:

$$\frac{dq_2}{dq_4} = \frac{I_2}{I_4}$$

$$\text{ή } \frac{dq_2}{dq_4} = \frac{\frac{V_{ΚΛ}}{R_2}}{\frac{V_{ΚΛ}}{R_4}}$$

$$\text{ή } \frac{dq_2}{dq_4} = \frac{R_4}{R_2}$$

$$\text{ή } \frac{dq_2}{dq_4} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ή } dq_4 = 1,5 dq_2$$

Συνεπώς στο χρονικό διάστημα από t_3 μέχρι t_4 ισχύει ότι: $q_4 = 1,5 q_2$ (5)

Από τις σχέσεις (2) και (5) προκύπτει ότι:

$$q_{επ} = 2,5 q_2$$

$$\text{ή } q_2 = 3,2 \text{ C}$$

$$\text{Επομένως, } q_4 = 4,8 \text{ C}$$

19^ο Κριτήριο Αξιολόγησης
ΘΕΜΑ Α

A1. γ, A2. β, A3. α, A4. β
A5. α. Σ, β. Λ, γ. Λ, δ. Λ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β.

Από το στιγμιότυπο προκύπτει ότι η απομάκρυνση του σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με: $y_K = +0,05\sqrt{2}$ m.

Έστω $|A_K|$ το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Κ. Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση του σημείου Κ, έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } E = 2U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}DA_K^2 = 2\frac{1}{2}Dy_K^2$$

$$\text{ή } |A_K| = \sqrt{2}|y_K|$$

$$\text{ή } |A_K| = 0,1 \text{ m}$$

Όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο, έχουμε:

$$\frac{3\lambda}{4} = 0,45 \text{ m}$$

$$\text{ή } \lambda = 0,6 \text{ m}$$

Η θέση του σημείου Κ στον θετικό ημιάξονα είναι $x_K = +0,1$ m. Έχουμε:

$$|A_K| = 2A \sin \left| \frac{2\pi x_K}{\lambda} \right|$$

$$\text{ή } |A_K| = 2A \left| \sin \frac{\pi}{3} \right|$$

$$\text{ή } |A_K| = A$$

$$\text{ή } A = 0,1 \text{ m}$$

Αφού το υλικό σημείο Κ διέρχεται από τη Θ.Ι. του 10 φορές κάθε δευτερόλεπτο η συχνότητα της ταλάντωσης του είναι ίση με $f = 5$ Hz. Έχουμε:

$$\omega = 2\pi f$$

$$\text{ή } \omega = 10\pi \text{ rad/s}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = 2A \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \eta \mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y = 0,2 \sin \left(\frac{10\pi x}{3} \right) \eta \mu(10\pi t) \text{ (S.I.)}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β.

Αρχικά, ισχύει:

$$F = F_K$$

$$\text{ή } F = \frac{mv_1^2}{R_1} \quad (1)$$

Η στροφορμή του σφαιριδίου διατηρείται σταθερή κατά την μετακίνησή του. Έχουμε:

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\epsilon\lambda}$$

$$\text{ή } mv_1R_1 = mv_2R_2$$

$$\text{ή } v_1R_1 = v_2R_2 \quad (2)$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ υπολογίζεται από το Θ.Μ.Κ.Ε. Έχουμε:

$$W_F = K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}$$

$$\text{ή } \frac{5}{8}FR_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\text{ή } \frac{5}{8}FR_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$\frac{5}{8} \frac{mv_1^2}{R_1} R_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\text{ή } v_2^2 - v_1^2 = \frac{5}{4}v_1^2$$

$$\text{ή } v_2^2 = \frac{9}{4}v_1^2$$

$$\text{ή } v_2 = \frac{3}{2}v_1 \quad (3)$$

Επομένως, από τη σχέση (2) λόγω της σχέσης (3) προκύπτει:

$$R_2 = \frac{2}{3} R_1$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Έστω λ' το μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου. Έχουμε:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi) \quad (1)$$

Έστω K η κινητική ενέργεια του ανακρουόμενου ηλεκτρονίου και E, E' οι ενέργειες του προσπίπτοντος και του σκεδαζόμενου φωτονίου αντίστοιχα. Έχουμε:

$$K = E - E'$$

$$\text{ή } 4E' = E - E'$$

$$\text{ή } E' = \frac{E}{5}$$

$$\text{ή } \frac{hc}{\lambda'} = \frac{1}{5} \frac{hc}{\lambda}$$

$$\text{ή } \lambda' = 5\lambda \quad (2)$$

Η ορμή του προσπίπτοντος φωτονίου δίνεται από τη σχέση:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$\text{ή } \lambda = \frac{h}{p}$$

$$\text{ή } \lambda = \frac{h}{4m_e c} \quad (3)$$

Από τη σχέση (2) λόγω της σχέσης (1) προκύπτει:

$$\lambda' = \frac{5}{4} \frac{h}{m_e c} \quad (4)$$

Επομένως, από τη σχέση (1) λόγω των σχέσεων (3) και (4) προκύπτει:

$$\frac{h}{m_e c} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi)$$

$$\text{ή } \cos \varphi = 0$$

$$\text{ή } \varphi = 90^\circ$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τη δοθείσα εξίσωση της ταλάντωσης των δυο πηγών προκύπτει ότι $A = 0,05 \text{ m}$

και

$$\omega = 2\pi f$$

$$\text{ή } f = 4 \text{ Hz}$$

Έχουμε:

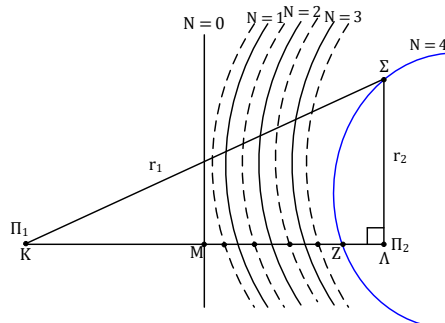
$$v_\delta = \lambda f$$

$$\text{ή } \lambda = 0,5 \text{ m}$$

Επειδή το σημείο Σ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής, ισχύει:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \quad (1)$$

Όπως προκύπτει από το ακόλουθο σχήμα είναι $N = 4$.



Επομένως, από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$r_1 - r_2 = 2 \quad (2)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΣ έχουμε:

$$r_1^2 = d^2 + r_2^2 \quad (3)$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (2) και (3) προκύπτει:

$$r_1 = 5 \text{ m και } r_2 = 3 \text{ m}$$

Γ2. Το σημείο Σ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_1 = \frac{r_1}{v_\delta}$$

$$\text{ή } t_1 = 1,5 \text{ s}$$

Η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Σ ξεκινά τη χρονική στιγμή:

$$t_2 = \frac{r_2}{v_\delta}$$

$$\text{ή } t_2 = 2,5 \text{ s}$$

Ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί το σημείο Σ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$N = f(t_2 - t_1)$$

$$\text{ή } N = 4 \text{ ταλαντώσεις}$$

Επομένως το σημείο Σ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 ακινητοποιείται στιγμιαία 8 φορές.

Γ3. Έστω ένα τυχαίο σημείο αποσβετικής συμβολής που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και απέχει από τις πηγές Π_1 και Π_2 αποστάσεις r_1' και r_2' αντίστοιχα.

Έχουμε:

$$r_1' - r_2' = (2N+1) \frac{\lambda}{2} \quad (4)$$

και

$$r_1' + r_2' = d \quad (5)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (4) και (5) έχουμε:

$$2r_1' = (2N+1) \frac{\lambda}{2} + d$$

$$\text{ή } r_1' = (2N+1) \frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2}$$

Για να βρούμε τον αριθμό των σημείων αποσβετικής συμβολής που ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ λύνουμε την ανίσωση:

$$0 \leq r_1' \leq d$$

$$\text{ή } 0 \leq (2N+1) \frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \leq d$$

$$\text{ή } -\frac{2d}{\lambda} - 1 \leq 2N \leq \frac{2d}{\lambda} - 1$$

$$\text{ή } -17 \leq 2N \leq 15$$

$$\text{ή } -8,5 \leq 2N \leq 7,5$$

$$\text{ή } N = -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7$$

Η πιο κοντινή υπερβολή απόσβετικής συμβολής αριστερά του σημείου Z έχει $N = 3$.

Επομένως, υπάρχουν 4 σημεία αποσβετικής συμβολής στο ευθύγραμμο τμήμα ΣΛ ($N = +4, +5, +6, +7$).

Γ4. Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Σ μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό είναι:

$$|A_\Sigma| = 2A$$

$$\text{ή } A_\Sigma = 0,1 \text{ m}$$

Έστω y η απομάκρυνση του σημείου Σ τις χρονικές στιγμές στις οποίες η επιτάχυνση του είναι $\alpha = +32\sqrt{3} \text{ m/s}^2$. Έχουμε:

$$\alpha = -\omega^2 y$$

$$\text{ή } y = -\frac{\alpha}{\omega^2}$$

$$\text{ή } y = -0,05\sqrt{3} \text{ m}$$

Αφού $|y| > A$, τις παραπάνω χρονικές στιγμές τα κύματα έχουν συμβάλει στο σημείο Σ.

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Σ τις χρονικές στιγμές στις οποίες η απομάκρυνση του είναι

$y = -0,05\sqrt{3} \text{ m}$. Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση του σημείου Σ έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D A_\Sigma^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D y^2$$

$$\text{ή } m \omega^2 A_\Sigma^2 = m v^2 + m \omega^2 y^2$$

$$\text{ή } v = \omega \sqrt{A_\Sigma^2 - y^2}$$

$$\text{ή } v = 0,4\pi \text{ m/s}$$

Γ5. Όπως αποδείξαμε στο ερώτημα Γ3 για ένα τυχαίο σημείο αποσβετικής συμβολής που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ

ισχύει $r_1' = (2N+1) \frac{\lambda'}{4} + \frac{d}{2}$, όπου λ' το

νέο μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Για να σχηματίζονται στο ευθύγραμμο τμήμα 6 σημεία αποσβετικής συμβολής πρέπει το πιο απομακρυσμένο σημείο από την πηγή Π_1 να έχει $N = 2$. Επομένως από την τελευταία σχέση για $N = 2$ προκύπτει:

$$r_1' = \frac{5\lambda'}{4} + \frac{d}{2}$$

$$\text{ή } r_1' = \frac{5v_\delta}{4f'} + \frac{d}{2},$$

όπου f' η νέα συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών. Έχουμε:

$$r_1' \leq d$$

$$\text{ή } \frac{5v_\delta}{4f'} + \frac{d}{2} \leq d$$

$$\text{ή } \frac{5v_\delta}{4f'} \leq \frac{d}{2}$$

$$\text{ή } f' \geq \frac{2,5v_\delta}{d}$$

$$\text{ή } f' \geq 1,25 \text{ Hz}$$

$$\text{ή } f_{\min} = 1,25 \text{ Hz}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το πηνίο δεν διαρρέεται από ρεύμα. Έστω i_0 η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_2 τη χρονική στιγμή $t = 0$. Έχουμε:

$$i_0 = \frac{E}{R_2 + r}$$

ή $i_0 = 2,25 \text{ A}$

Επειδή ο κλάδος ΖΗ δεν διαρρέεται από ρεύμα η τάση στα άκρα του πηνίου είναι ίση με την τάση στα άκρα του αντιστάτη R_2 . Έχουμε:

$$V_{\pi\eta\nu} = V_{R_2}$$

ή $V_{\pi\eta\nu} = i_0 R_2$

ή $V_{\pi\eta\nu} = 6,75 \text{ V}$

Επειδή το πηνίο είναι ιδανικό, ισχύει:

$$E_{\text{αυτ}} = V_{\pi\eta\nu}$$

ή $L \left| \frac{di}{dt} \right| = V_{\pi\eta\nu}$

ή $\left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{V_{\pi\eta\nu}}{L}$

ή $\left| \frac{di}{dt} \right| = 13,5 \text{ A/s}$

ή $\frac{di}{dt} = +13,5 \text{ A/s}$

β. Έστω I_1 η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο. Έχουμε:

$$I_1 = \frac{V_{\pi}}{R_1} \quad (1), \text{ όπου } V_{\pi} \text{ η πολική τάση, όταν}$$

η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο είναι μέγιστη (όταν σταθεροποιούνται τα ρεύματα στους κλάδους του κυκλώματος). Η ισοδύναμη αντίσταση των αντιστατών R_1 και R_2 είναι:

$$R_{1,2} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

ή $R_{1,2} = 2 \Omega$

Η ισοδύναμη αντίσταση όλου του κυκλώματος είναι:

$$R_{\text{ολ}} = R_{1,2} + r$$

ή $R_{\text{ολ}} = 3 \Omega$

Έστω I η ένταση του ρεύματος που διαρρέει την πηγή όταν σταθεροποιούνται τα ρεύματα. Έχουμε:

$$I = \frac{E}{R_{\text{ολ}}}$$

ή $I = 3 \text{ A}$

Η πολική τάση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$V_{\pi} = E - Ir$$

ή $V_{\pi} = 6 \text{ V}$

Επομένως, από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$I_1 = \frac{V_{\pi}}{R_1}$$

ή $I_1 = 1 \text{ A}$

Η μέγιστη τιμή της ενέργειας που αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου είναι:

$$U_{\text{max}} = \frac{1}{2} L I_1^2$$

ή $U_{\text{max}} = 0,25 \text{ J}$

Δ2. Αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη (δ_1) η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο έχει τιμή $I_1 = 1 \text{ A}$ και αρχίζει να ελαττώνεται μέχρι να μηδενιστεί. Τη χρονική στιγμή αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη (δ_1), ισχύει:

$$I_1 = \frac{|E_{\text{αυτ}}|}{R_1 + R_2}$$

ή $|E_{\text{αυτ}}| = I_1 (R_1 + R_2)$

ή $|E_{\text{αυτ}}| = 9 \text{ V}$

Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη (δ_1) υπολογίζεται από τη σχέση:

$$|E_{\text{αυτ}}| = L \left| \frac{di}{dt} \right|$$

ή $\left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{|E_{\text{αυτ}}|}{L}$

ή $\left| \frac{di}{dt} \right| = 18 \text{ A/s}$

ή $\frac{di}{dt} = -18 \text{ A/s}$

Ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου την ίδια χρονική στιγμή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\left| \frac{dU_{\pi\eta\nu}}{dt} \right| = |E_{\text{αυτ}}| I_1$$

ή $\left| \frac{dU_{\pi\eta\nu}}{dt} \right| = 9 \text{ J/s}$

Δ3. α. Έστω i η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο τη χρονική στιγμή στην

οποία είναι $U = \frac{25}{100} U_{\max}$ (2). Από τη

σχέση (2) έχουμε:

$$\frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{2} LI_1^2$$

$$\text{ή } i = \frac{I_1}{2}$$

$$\text{ή } i = 0,5 \text{ A}$$

Η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή στα άκρα του πηνίου την παραπάνω χρονική στιγμή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$i = \frac{|E_{\text{αυτ}}|}{R_1 + R_2}$$

$$\text{ή } |E_{\text{αυτ}}| = 4,5 \text{ V}$$

Η διαφορά δυναμικού $V_Z - V_H$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$V_Z + |E_{\text{αυτ}}| - iR_1 = V_H$$

$$\text{ή } V_Z - V_H = iR_1 - E_{\text{αυτ}}$$

$$\text{ή } V_Z - V_H = -1,5 \text{ V}$$

β. Η συνολική θερμότητα Joule $Q_{R_{\text{ολ}}}$ που εκλύεται από τους αντιστάτες R_1 και R_2 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη (δ_1) μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία μηδενίζεται η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q_{R_{\text{ολ}}} = |\Delta U_{\text{πην}}|$$

$$\text{ή } Q_{R_{\text{ολ}}} = U_{\max}$$

$$\text{ή } Q_{\text{ολ}} = 0,25 \text{ J}$$

$$\text{ή } Q_{R_1} + Q_{R_2} = 0,25 \text{ J} \quad (3)$$

Επειδή οι αντιστάτες R_1 και R_2 διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, ισχύει:

$$\frac{Q_{R_1}}{Q_{R_2}} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\text{ή } \frac{Q_{R_1}}{Q_{R_2}} = 2$$

$$\text{ή } Q_{R_1} = 2Q_{R_2}$$

Επομένως, από τη σχέση (3) προκύπτει:

$$Q_{R_2} = \frac{0,25}{3} \text{ J}$$

Δ4. α. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του αγωγού δίνεται από τη σχέση:

$$v = v_0 - \alpha t$$

$$\text{ή } v = 10 - 2t \text{ (S.I.)} \quad (4)$$

Η ισοδύναμη αντίσταση του συστήματος των αντιστατών R_2 και R_3 , είναι:

$$R_{2,3} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

$$\text{ή } R_{2,3} = 0,75 \Omega$$

Η χρονική εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ δίνεται από τη σχέση:

$$i = \frac{E_{\text{επ}}}{R_{\text{ΚΛ}} + R_{2,3}}$$

$$\text{ή } i = \frac{B\ell v}{R_{\text{ΚΛ}} + R_{2,3}}$$

ή λόγω της σχέσης (4):

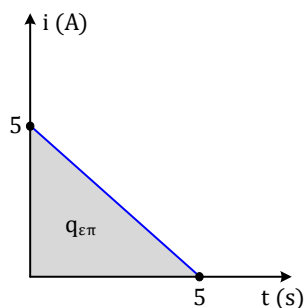
$$i = 5 - t \text{ (S.I.)} \quad (5)$$

Η χρονική στιγμή t_1 στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία ο αγωγός υπολογίζεται από τη σχέση (4), αν θέσουμε σε αυτή $v = 0$ και $t = t_1$. Έχουμε:

$$0 = 10 - 2t_1$$

$$\text{ή } t_1 = 5 \text{ s}$$

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται η γραφική παράσταση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 .



Το ζητούμενο επαγωγικό φορτίο είναι ίσο με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν. Έχουμε:

$$q_{\text{επ}} = \frac{5 \cdot 5}{2} \text{ C}$$

$$\text{ή } q_{\text{επ}} = 12,5 \text{ C}$$

β. Η χρονική εξίσωση του μέτρου της δύναμης F προκύπτει από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση που εκτελεί ο αγωγός ΚΛ. Έχουμε:

$$\Sigma F = ma$$

$$\text{ή } F + F_L - mg = ma$$

$$\text{ή } F + Bi\ell - mg = ma$$

$$\text{ή } F = ma + mg - Bi\ell$$

$$\text{ή } F = 1 + t \text{ (S.I.)} \quad (6)$$

Από τη σχέση (4) για $t = 2 \text{ s}$ προκύπτει: $v = 6 \text{ m/s}$, ενώ από τη σχέση (6) για $t = 2 \text{ s}$ προκύπτει: $F = 3 \text{ N}$.

Η ισχύς της δύναμης F τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ είναι:

$$P_F = \frac{dW_F}{dt}$$

$$\text{ή } P_F = -\frac{Fdx}{dt}$$

$$\text{ή } P_F = -Fv$$

$$\text{ή } P_F = -18 \text{ J/s}$$

Δ5. Όπως προκύπτει από τη σχέση (6) τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$ το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ είναι ίσο με $F = 6 \text{ N}$. Τη χρονική στιγμή t_1 ο αγωγός δέχεται τη δύναμη $\vec{F}$ και το βάρος $\vec{w}$ (η δύναμη

Laplace έχει μηδενιστεί). Επειδή είναι $F > w$ ο αγωγός αρχίζει να επιταχύνεται προς τα πάνω, οπότε η δύναμη Laplace που δέχεται έχει φορά προς τα κάτω. Όταν αποκτά την οριακή του ταχύτητα ισχύει:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } F - w - F_L = 0$$

$$\text{ή } F - w = Bi\ell$$

$$\text{ή } F - mg = B \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{\text{KL}} + R_{2,3}} \ell$$

$$\text{ή } F - mg = \frac{B^2 \ell^2 v_{\text{op}}}{R_{\text{KL}} + R_{2,3}}$$

$$\text{ή } v_{\text{op}} = \frac{(F - mg)(R_{\text{KL}} + R_{2,3})}{B^2 \ell^2}$$

$$\text{ή } v_{\text{op}} = 2 \text{ m/s}$$

20^ο Κριτήριο Αξιολόγησης
ΘΕΜΑ Α

A1. γ, A2. γ, A3. β, A4. δ
A5. α, Α, β, Α, γ, Σ, δ, Σ, ε, Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η α.

Όπως προκύπτει από τα δύο διαγράμματα το πλάτος του κύματος είναι $A = 0,2 \text{ m}$.

Όπως προκύπτει από το δεύτερο διάγραμμα, έχουμε:

$$2\lambda = 1 \text{ m}$$

$$\text{ή } \lambda = 0,5 \text{ m}$$

Από τα δύο διαγράμματα προκύπτει ότι το μέτωπο του κύματος από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 έχει διανύσει

απόσταση $d = \frac{\lambda}{2}$. Επομένως η χρονική

διαφορά $\Delta t = t_2 - t_1$ είναι ίση με $T/2$ όπου

T η περίοδος του κύματος. Έχουμε:

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{2}$$

$$\text{ή } T = 0,2 \text{ s}$$

Όπως προκύπτει από το πρώτο διάγραμμα το μέτωπο του κύματος θέτει σε ταλάντωση το υλικό σημείο που βρίσκεται στη θέση:

$$x = 3\frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή } x = 0,75 \text{ m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι ίση με:

$$v_\delta = \lambda f$$

$$\text{ή } v_\delta = \frac{\lambda}{T}$$

$$\text{ή } v_\delta = 2,5 \text{ m/s}$$

Επομένως, η χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με:

$$t_1 = \frac{x}{v_\delta}$$

$$\text{ή } t_1 = 0,3 \text{ s}$$

Η εξίσωση του στιγμιότυπου του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } y = 0,2\eta\mu 2\pi(1,5 - 2x) \text{ (S.I.)}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ.

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε:

$$\Sigma F = ma$$

$$\text{ή } F - F_L = ma$$

$$\text{ή } F - Bi\ell = ma$$

$$\text{ή } i = \frac{F - ma}{B\ell}$$

$$\text{ή } i = 4t \text{ (S.I.) (1)}$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$\frac{di}{dt} = 4 \text{ A/s}$$

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα δίνεται από τη σχέση:

$$i = \frac{E_{\text{επ}} - |E_{\text{αυτ}}|}{R}$$

$$\text{ή } i = \frac{Bv\ell - L\left|\frac{di}{dt}\right|}{R}$$

$$\text{ή } Bv\ell = iR + L\left|\frac{di}{dt}\right|$$

$$\text{ή } v = \frac{iR + L\left|\frac{di}{dt}\right|}{B\ell}$$

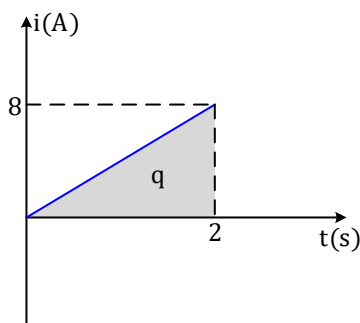
$$\text{ή } v = 2 + 4t \text{ (S.I.) (2)}$$

Από τη σχέση (2) για $v = 10 \text{ m/s}$ και $t = t_1$ προκύπτει:

$$10 = 2 + 4t_1$$

$$\text{ή } t_1 = 2 \text{ s}$$

Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται το διάγραμμα της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με τον χρόνο από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 .



Το ζητούμενο φορτίο ισούται με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν στο παραπάνω διάγραμμα:

$$q = \frac{8 \cdot 2}{2} \text{ C}$$

$$\text{ή } q = 8 \text{ C}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β.

Όπως προκύπτει από το διάγραμμα η τάση αποκοπής V_{01} για την ακτινοβολία (1) είναι μεγαλύτερη από την τάση αποκοπής V_{02} για την ακτινοβολία (2) ($V_{01} > V_{02}$). Για την ακτινοβολία (1) έχουμε:

$$K_1 = hf_1 - \varphi$$

$$\text{ή } eV_{01} = \frac{hc}{\lambda_1} - \varphi$$

$$\text{ή } \frac{hc}{\lambda_1} = eV_{01} + \varphi \quad (1)$$

Για την ακτινοβολία (2) έχουμε:

$$K_2 = hf_2 - \varphi$$

$$\text{ή } eV_{02} = \frac{hc}{\lambda_2} - \varphi$$

$$\text{ή } \frac{hc}{\lambda_2} = eV_{02} + \varphi \quad (2)$$

Αφού $V_{01} > V_{02}$, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\frac{hc}{\lambda_1} > \frac{hc}{\lambda_2}$$

$$\text{ή } \lambda_2 > \lambda_1$$

Η ένταση της ακτινοβολίας (1) δίνεται από τη σχέση:

$$I_1 = \frac{P_1}{A}$$

$$\text{ή } I_1 = \frac{E_{\text{ολ(φωτ)}}}{A \cdot \Delta t}$$

$$\text{ή } I_1 = \frac{N_1 hf_1}{A \cdot \Delta t}$$

$$\text{ή } I_1 = \frac{N_1 hc}{\lambda_1 A \Delta t}$$

$$\text{ή } I_1 = \frac{n_1 hc}{\lambda_1 A} \quad (3), \text{ όπου } n_1 \text{ ο αριθμός των}$$

φωτονίων της ακτινοβολίας (1) ανά μονάδα χρόνου που προσπίπτουν στην κάθοδο.

Η ένταση της ακτινοβολίας (2) δίνεται από τη σχέση:

$$I_2 = \frac{P_2}{A}$$

$$\text{ή } I_2 = \frac{E_{\text{ολ(φωτ)}}}{A \cdot \Delta t}$$

$$\text{ή } I_2 = \frac{N_2 hf_2}{A \cdot \Delta t}$$

$$\text{ή } I_2 = \frac{N_2 hc}{\lambda_2 A \Delta t}$$

$$\text{ή } I_2 = \frac{n_2 hc}{\lambda_2 A} \quad (4), \text{ όπου } n_2 \text{ ο αριθμός των}$$

φωτονίων της ακτινοβολίας (2) που προσπίπτουν στην κάθοδο.

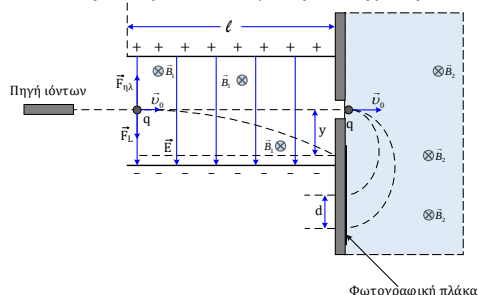
Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (3) και (4) έχουμε:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{n_1 \lambda_2}{n_2 \lambda_1} \quad (5)$$

Αφού είναι $n_1 > n_2$ και $\lambda_2 > \lambda_1$, από τη σχέση (5) προκύπτει ότι: $I_1 > I_2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί η δύναμη Lorentz $\vec{F}_L$ και η ηλεκτρική δύναμη $\vec{F}_{\eta\lambda}$ που δέχονται τα ιόντα κατά τη διεύλση τους από το φίλτρο ταχυτήτων.



Αφού τα ιόντα χλωρίου έχουν αρνητικό φορτίο, η ηλεκτρική δύναμη που δέχονται από το φίλτρο ταχυτήτων έχει αντίθετη

φορά από την ένταση $\vec{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου. Τα ιόντα που εισέρχονται μέσα στο φίλτρο ταχυτήτων με αρχική ταχύτητα $\vec{u}_0$ κινούνται μέσα σε αυτό ευθύγραμμα και ομαλά. Επομένως, η δύναμη Lorentz που δέχονται τα ιόντα χλωρίου είναι αντίθετη με την ηλεκτρική δύναμη. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει η ένταση $\vec{B}_1$ του μαγνητικού πεδίου του φίλτρου ταχυτήτων να είναι κάθετη στη σελίδα με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

Για τα ιόντα που κινούνται μέσα στο φίλτρο ταχυτήτων με σταθερή ταχύτητα $\vec{u}_0$, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = 0$$

$$\text{ή } \vec{F}_L = \vec{F}_{\eta\lambda}$$

$$\text{ή } B_1 v_0 |q| = |q| E$$

$$\text{ή } B_1 = \frac{E}{v_0}$$

$$\text{ή } B_1 = 28 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

Γ2. Έστω Δt ο χρόνος κίνησης στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο των ιόντων του ελαφρύτερου ισότοπου, όταν καταργήσουμε το μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_1$. Έχουμε:

$$\Delta t = \frac{\ell}{v_0}$$

$$\text{ή } \Delta t = 10^{-6} \text{ s}$$

Έστω α το μέτρο της επιτάχυνσης των ιόντων του ελαφρύτερου ισότοπου. Έχουμε:

$$y = \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2$$

$$\text{ή } \alpha = \frac{2y}{(\Delta t)^2}$$

$$\text{ή } \alpha = 10^{10} \text{ m/s}^2$$

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε:

$$\Sigma F = m_1 \alpha$$

$$\text{ή } F_{\eta\lambda} = m_1 \alpha$$

$$\text{ή } |q| E = m_1 \alpha$$

$$\text{ή } m_1 = \frac{|q| E}{\alpha}$$

$$\text{ή } m_1 = \frac{e E}{\alpha}$$

$$\text{ή } m_1 = 56 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Γ3. Οι ακτίνες R_1 και R_2 των κυκλικών τροχιών που διαγράφουν τα ιόντα του ελαφρύτερου και του βαρύτερου ισότοπου του χλωρίου αντίστοιχα κατά την κίνηση τους στο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_2$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$R_1 = \frac{m_1 v_0}{B_2 |q|} \text{ και } R_2 = \frac{m_2 v_0}{B_2 |q|}$$

Αφού $m_2 > m_1$, είναι $R_2 > R_1$.

Επομένως, έχουμε:

$$d = 2R_2 - 2R_1$$

$$\text{ή } d = \frac{2m_2 v_0}{B_2 e} - \frac{2m_1 v_0}{B_2 e}$$

$$\text{ή } d = \frac{2v_0}{B_2 e} (m_2 - m_1)$$

$$\text{ή } m_2 - m_1 = \frac{dB_2 e}{2v_0}$$

$$\text{ή } m_2 = m_1 + \frac{dB_2 e}{2v_0}$$

$$\text{ή } m_2 = 59,2 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Γ4. Τα ιόντα των δύο ισότοπων του χλωρίου κινούνται μέσα στο φίλτρο ταχυτήτων στον ίδιο χρόνο. Η χρονική διαφορά με την οποία αφήνουν τα ίχνη τους στη φωτογραφική πλάκα οφείλεται στους διαφορετικούς χρόνους κίνησης τους μέσα στο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_2$. Έχουμε:

$$\Delta t = \frac{T_2}{2} - \frac{T_1}{2}$$

$$\text{ή } \Delta t = \frac{1}{2} \frac{2\pi m_2}{B_2 |q|} - \frac{1}{2} \frac{2\pi m_1}{B_2 |q|}$$

$$\text{ή } \Delta t = \frac{\pi(m_2 - m_1)}{B_2 e}$$

$$\text{ή } \Delta t = 2\pi \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

Γ5. Έστω Δt_2 ο χρόνος κίνησης των ιόντων του ελαφρύτερου ισότοπου του χλωρίου μέσα στο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_3$.

Έχουμε:

$$L = v_x \Delta t_2$$

$$\text{ή } L = v_0 \sin \varphi \Delta t_2$$

$$\text{ή } \Delta t_2 = 2\pi \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

Έστω N ο αριθμός των περιστροφών που εκτελούν τα ιόντα μέσα στο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_3$. Έχουμε:

$$\Delta t_2 = N T_2$$

$$\text{ή } N = \frac{\Delta t_2}{T_2}$$

$$\text{ή } N = \frac{\Delta t_2}{\frac{2\pi m_1}{B_3 e}}$$

$$\text{ή } N = \frac{\Delta t_2 B_3 e}{2\pi m_1}$$

$$\text{ή } N = 100 \text{ περιστροφές}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ_2 έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D A_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 + \frac{1}{2} D \Delta \ell^2$$

$$\text{ή } k A_1^2 = m_2 v_{02}^2 + k \Delta \ell^2$$

$$\text{ή } A_1 = \sqrt{\frac{m_2}{k} v_{02}^2 + \Delta \ell^2} \quad (1)$$

όπου $\Delta \ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ_2 .

Στη Θ.Ι. του σώματος Σ_2 ισχύει:

$$\Sigma F = 0$$

$$\text{ή } m_2 g \eta \mu \varphi = k \Delta \ell$$

$$\text{ή } \Delta \ell = 0,2\sqrt{3} \text{ m}$$

Επομένως από τη σχέση (1), προκύπτει:

$$A_1 = 0,4 \text{ m}$$

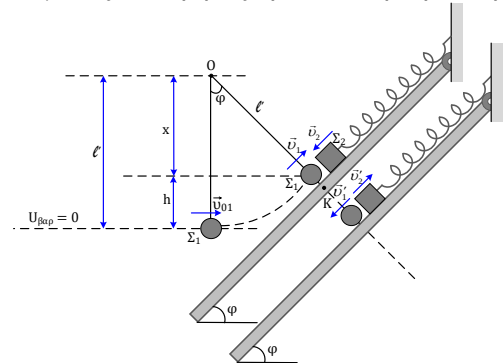
Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 πριν από την κρούση. Έχουμε:

$$v_2 = \omega A_1$$

$$\text{ή } v_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} A_1$$

$$\text{ή } v_2 = 2 \text{ m/s}$$

Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση.



Τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση το νήμα σχηματίζει γωνία $\varphi = 60^\circ$ με την αρχική κατακόρυφη διεύθυνση του. Έχουμε:

$$\sigma \nu \varphi = \frac{x}{\ell'}$$

$$\text{ή } \sigma \nu \varphi = \frac{\ell' - h}{\ell'}$$

$$\text{ή } h = \ell'(1 - \sigma \nu \varphi)$$

$$\text{ή } h = 0,8 \text{ m}$$

Από την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση, έχουμε:

$$E_{\mu \eta \chi(\alpha \rho \chi)} = E_{\mu \eta \chi(\tau \epsilon \lambda)}$$

$$\text{ή } K_{\alpha \rho \chi} + U_{\alpha \rho \chi} = K_{\tau \epsilon \lambda} + U_{\tau \epsilon \lambda}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + m_1 g h$$

$$\text{ή } v_1 = \sqrt{v_{01}^2 - 2 g h}$$

$$\text{ή } v_1 = 3 \text{ m/s}$$

Δ2. Έστω $\vec{v}'_1$ και $\vec{v}'_2$ οι ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση. Επειδή τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν ίσες μάζες και η κρούση είναι κεντρική και ελαστική ανταλλάσσουν ταχύτητες κατά τη διάρκεια της κρούσης. Επομένως, έχουμε:

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_1$$

$$\text{ή } v'_2 = v_1$$

$$\text{ή } v'_2 = 3 \text{ m/s}$$

και

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_2$$

$$\text{ή } v'_1 = v_2$$

$$\text{ή } v'_1 = 2 \text{ m/s}$$

Η μεταβολή της στροφορμής του σώματος Σ_1 εξαιτίας της κρούσης δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta \vec{L}_1 = \vec{L}_{\tau \epsilon \lambda(1)} - \vec{L}_{\alpha \rho \chi(1)}$$

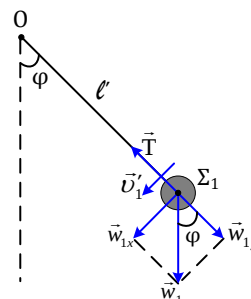
ή θεωρώντας θετική την αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού

$$\Delta L_1 = -L_{\tau \epsilon \lambda(1)} - L_{\alpha \rho \chi(1)}$$

$$\text{ή } \Delta L_1 = -m_1 (v'_1 + v_1) \ell'$$

$$\text{ή } \Delta L_1 = 32 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Δ3. Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση.



Έχουμε:

$$\Sigma F_{\alpha \kappa \tau} = F_K$$

$$\text{ή } \Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = \frac{m_1 v_1'^2}{\ell'}$$

$$\text{ή } \Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = 10 \text{ N}$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = \Sigma F$$

$$\text{ή } \left| \frac{dp}{dt} \right| = \sqrt{\Sigma F_{\alpha\kappa\tau}^2 + w_{1y}^2}$$

$$\text{ή } \left| \frac{dp}{dt} \right| = \sqrt{\Sigma F_{\alpha\kappa\tau}^2 + (m_1 g \sin \varphi)^2}$$

$$\text{ή } \left| \frac{dp}{dt} \right| = 10\sqrt{5} \text{ N}$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του σώματος Σ_1 ως προς τον άξονα (p), αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\left| \frac{dL}{dt} \right| = |\Sigma \tau|$$

$$\text{ή } \left| \frac{dL}{dt} \right| = w_{1x} \ell$$

$$\text{ή } \left| \frac{dL}{dt} \right| = m_1 g \eta \mu \phi \ell'$$

$$\text{ή } \left| \frac{dL}{dt} \right| = 32\sqrt{3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

Δ4. Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Έχουμε:

$$|v_2'| = v_{\max}$$

$$\text{ή } |v_2'| = \omega A_2$$

$$\text{ή } |v_2'| = \sqrt{\frac{k}{m_2}} A_2$$

$$\text{ή } A_2 = 0,6 \text{ m}$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη Θ.Ι. του κινούμενου με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι ίση με μηδέν ($\varphi_0 = 0$).

Επομένως, η χρονική εξίσωση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση είναι:

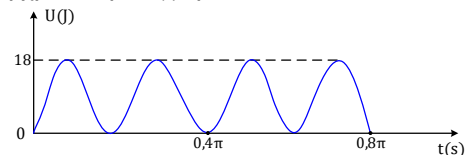
$$U = \frac{1}{2} kx^2$$

$$\text{ή } U = \frac{1}{2} k(A\eta\mu\omega t)^2$$

$$\text{ή } U = \frac{1}{2} kA^2\eta\mu^2\omega t$$

$$\text{ή } U = 18\eta\mu^2 5t \text{ (S.I.) (1)}$$

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται η γραφική παράσταση της σχέσης (1) από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 0,8\pi \text{ s}$



Δ5. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας του τις χρονικές στιγμές μετά την κρούση στις οποίες η ταχύτητα του είναι $v = +1,5\sqrt{3} \text{ m/s}$.

Από την Α.Δ.Ε. της ταλάντωσης έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} DA^2 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} Dx^2$$

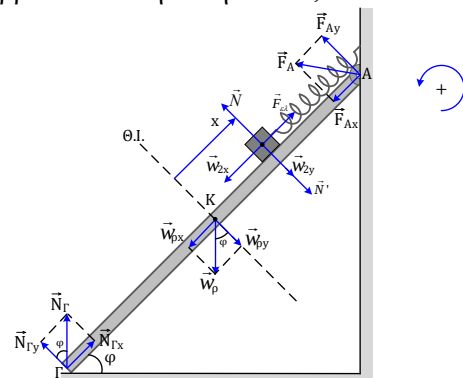
$$\text{ή } x = \pm \sqrt{A^2 - \frac{m_2}{k} v^2}$$

$$\text{ή } x = \pm 0,3 \text{ m}$$

Επειδή το σώμα Σ_2 έχει θετική ταχύτητα και κινείται επιβραδυνόμενο, ισχύει ότι:

$$x = +0,3 \text{ m}$$

Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση $x = +0,3 \text{ m}$.



Έστω N το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ_2 από τη ράβδο. Έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\text{ή } N = m_2 g \sin \varphi$$

$$\text{ή } N = 20 \text{ N}$$

Το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από το σώμα Σ_2 είναι:

$$N' = N$$

$$\text{ή } N' = 20 \text{ N}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0$$

$$\text{ή } \tau_{F_A} + \tau_{N'} + \tau_{w_p} + \tau_{N_\Gamma} = 0$$

$$\text{ή } 0 + N' \left(\frac{\ell}{2} - x \right) + M_p g \sin \varphi \frac{\ell}{2} - N_\Gamma \sin \varphi \ell = 0$$

$$\text{ή } N_\Gamma = 34 \text{ N}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } \Sigma F_x = 0 \text{ (2) και } \Sigma F_y = 0 \text{ (3)}$$

Από τη σχέση (2), έχουμε:

$$F_{Ax} + w_{px} = N_{\Gamma x}$$

$$\text{ή } F_{Ax} = N_\Gamma \eta \mu \varphi - M_p g \eta \mu \varphi$$

$$\text{ή } F_{Ax} = -3\sqrt{3} \text{ N}$$

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$F_{Ay} + N_{\Gamma y} = w_{py} + N'$$

$$\text{ή } F_{Ay} = M_p g \sin \varphi + N' - N_\Gamma \sin \varphi$$

$$\text{ή } F_{Ay} = 23 \text{ N}$$

Το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση είναι:

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2}$$

$$\text{ή } F_A = \sqrt{556} \text{ N}$$