

Απαντήσεις Θεμάτων – Λύσεις Ασκήσεων

Κεφάλαιο 3ο Μηχανικές ταλαντώσεις

Κεφάλαιο 4ο Κύματα

Θέματα Επανάληψης

Κεφάλαιο 3ο: Μηχανικές ταλαντώσεις

3.1 Απλή αρμονική ταλάντωση: Κινηματική προσέγγιση

ΘΕΜΑΤΑ Α

Θέματα πολλαπλής επιλογής

9. δ	10. γ	11. β	12. β	13. β	14. γ	15. δ	16. δ	17. α
18. δ	19. β	20. γ	21. α	22. γ	23. α	24. α	25. δ	26. α
27. β	28. γ	29. δ	30. γ					

Θέματα του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

31.	α. Σ	β. Λ	γ. Λ	δ. Λ	ε. Σ
32.	α. Λ	β. Σ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Λ
33.	α. Λ	β. Λ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Λ
34.	α. Σ	β. Σ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Λ
35.	α. Σ	β. Λ	γ. Λ	δ. Λ	ε. Λ

36. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Από τις δοθείσες χρονικές εξισώσεις προκύπτουν: $A = 0,2 \text{ m}$ και $a_{\max} = 20 \text{ m/s}^2$.

Είναι: $a_{\max} = \omega^2 A$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

37. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτουν:

$$v_{\max} = 4 \text{ m/s} \text{ και } \frac{T}{4} = \frac{\pi}{20} \text{ s} \text{ ή } T = \frac{\pi}{5} \text{ s}.$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:
 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 10 \text{ rad/s}$. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος.

Είναι: $v_{\max} = \omega A$ ή $A = 0,4 \text{ m}$.

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $v = +v_{\max}$. Επομένως, το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ διέρχεται από το μέσον της τροχιάς του με θετική ταχύτητα. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$x = A \sin(\omega t) \text{ ή } x = 0,4 \sin(10t) \text{ (S.I.)}.$$

38. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Η μέγιστη επιτάχυνση του σώματος είναι:

$a_{\max} = \omega^2 A$. Τη χρονική στιγμή στην οποία το σώμα διέρχεται από τη θέση $x = +A/2$ ισχύει:

$$\alpha = -\omega^2 x \text{ ή } \alpha = -\omega^2 \frac{A}{2} \text{ ή } \alpha = -\frac{1}{2} a_{\max}.$$

39. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Έστω x η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της ταχύτητας του είναι $v = \frac{\sqrt{3}}{2} v_{\max}$. Είναι:

$$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2} \text{ ή } \frac{\sqrt{3}}{2} v_{\max} = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\text{ή } \frac{\sqrt{3}}{2} \omega A = \omega \sqrt{A^2 - x^2} \text{ ή } \frac{\sqrt{3}}{2} A = \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\text{ή } \frac{3}{4} A^2 = A^2 - x^2 \text{ ή } |x| = \frac{A}{2}.$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha = \omega^2 |x| \text{ ή } \alpha = \omega^2 \frac{A}{2} \text{ ή } \alpha = \frac{1}{2} a_{\max}.$$

40. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται επιταχυνόμενο από μια θέση του αρνητικού ημιάξονα, η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι θετική. Δηλαδή, είναι:

$$v = +\omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\text{ή } v = +\omega \sqrt{A^2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} A\right)^2} \text{ ή } v = +\frac{\omega A}{2}.$$

41. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητα του σώματος είναι $v = 0$, το σώμα βρίσκεται σε μία από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του ($x = \pm A$). Επειδή αμέσως μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα αποκτά αρνητική ταχύτητα, συμπεραίνουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $x = +A$. Επομένως, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

(Βλέπε μεθοδολογία: «Υπολογισμός της αρχικής φάσης ϕ_0 της ταλάντωσης, όταν δεν γνω-

ρίζουμε τις χρονικές εξισώσεις κίνησης του σώματος».)

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει:

$$v_{\max} = 2 \text{ m/s} \text{ και } \frac{T}{2} = 0,2\pi \text{ s} \text{ ή } T = 0,4\pi \text{ s.}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ ή } \omega = 5 \text{ rad/s.}$$

Το πλάτος A της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $v_{\max} = \omega A$ ή $A = 0,4 \text{ m}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } x = 0,4\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

42. Σωστή επιλογή είναι η β.

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι:

$$T = \frac{\pi}{5} \text{ s} \text{ και } a_{\max} = 10 \text{ m/s}^2.$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ ή } \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης.

$$\text{Είναι: } a_{\max} = \omega^2 A \text{ ή } A = 0,1 \text{ m.}$$

$$\text{Για } t = 0 \text{ είναι: } a = -a_{\max} \text{ ή } -\omega^2 x = -\omega^2 A$$

$$\text{ή } x = +A.$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } x = 0,1\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

43. Σωστή επιλογή είναι η β.

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος είναι $A = 0,2 \text{ m}$. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει

ακόμη ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση: $x = +0,2 \text{ m}$ ή $x = +A$.

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης του είναι $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή $t = (\pi/60) \text{ s}$ η απομάκρυνση του σώματος είναι $x = +0,1 \text{ m}$ για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$. Είναι: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } 0,1 = 0,2\eta\mu\left(\omega \frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} = \eta\mu\left(\omega \frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{ή } \eta\mu\left(\omega \frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{6} \quad (1).$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι:

$$\omega \frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad (2)$$

$$\text{ή } \omega \frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \quad (3).$$

Από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$ προκύπτει $\omega = -20 \text{ rad/s}$ (άτοπο), ενώ από την ίδια σχέση για $\kappa = 1$ προκύπτει $\omega = 100 \text{ rad/s}$. Από τη σχέση (3) για $\kappa = 0$ προκύπτει $\omega = 20 \text{ rad/s}$, ενώ από την ίδια σχέση για $\kappa = 1$ προκύπτει $\omega = 140 \text{ rad/s}$. Δεκτή λύση είναι η $\omega = 20 \text{ rad/s}$.

Η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης του σώματος είναι: $a_{\max} = \omega^2 A$ ή $a_{\max} = 80 \text{ m/s}^2$.

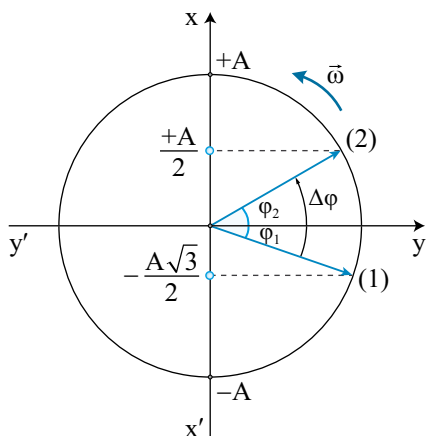
Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$a = -a_{\max} \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή } a = -80\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

44. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Ο ζητούμενος χρόνος Δt είναι ίσος με το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να μεταβεί το περιστρεφόμενο διάνυσμα από τη θέση (1) απευθείας στη θέση (2), που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Για τις γωνίες ϕ_1 και ϕ_2 ισχύουν:

$$\eta\mu\phi_1 = \frac{|x_1|}{A} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\phi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad \phi_1 = (\pi/3) \text{ rad}$$

$$\text{και } \eta\mu\phi_2 = \frac{|x_2|}{A} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\phi_2 = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \phi_2 = (\pi/6) \text{ rad.}$$

Η γωνία που διαγράφει το περιστρεφόμενο διάνυσμα κατά την απευθείας μετάβασή του από τη θέση (1) στη θέση (2) είναι:

$$\Delta\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad \text{ή} \quad \Delta\phi = (\pi/2) \text{ rad (1).}$$

$$\text{Ισχύει: } \Delta\phi = \omega\Delta t \quad \text{ή} \quad \Delta\phi = \frac{2\pi}{T}\Delta t \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (1): } \Delta t = \frac{T}{4}.$$

45. Σωστή επιλογή είναι η β .

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη Θ.Ι. του κινούμενο με θετική ταχύτητα. Έστω ότι το σώμα φτάνει για πρώτη φορά στη θέση $x_1 = +\frac{A}{2}$ τη χρονική στιγμή t_1 .

$$\text{Είναι: } x_1 = A\eta\mu(\omega t_1) \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} = \eta\mu(\omega t_1)$$

$$\text{ή } \eta\mu\frac{\pi}{6} = \eta\mu(\omega t_1) \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{\pi}{6\omega}.$$

Επομένως, ο ελάχιστος χρόνος μετάβασης του σώματος από τη θέση $x = 0$ στη θέση $x_1 = +\frac{A}{2}$

$$\text{είναι: } \Delta t_1 = t_1 - 0 \quad \text{ή} \quad \Delta t_1 = t_1 \quad \text{ή} \quad \Delta t_1 = \frac{\pi}{6\omega} \quad (1).$$

Έστω ότι το σώμα φτάνει για πρώτη φορά στη θέση $x_2 = +A$ τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι:

$$x_2 = A\eta\mu(\omega t_2) \quad \text{ή} \quad 1 = \eta\mu(\omega t_2)$$

$$\text{ή } \eta\mu\frac{\pi}{2} = \eta\mu(\omega t_2) \quad \text{ή} \quad t_2 = \frac{\pi}{2\omega}.$$

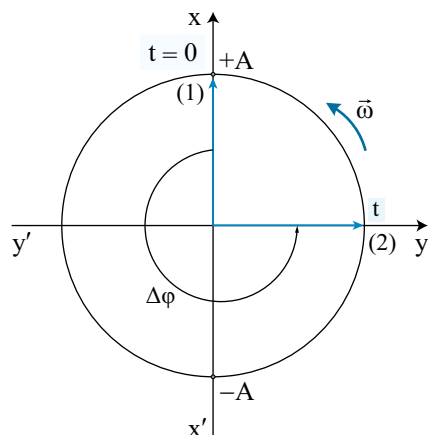
Επομένως, ο ελάχιστος χρόνος μετάβασης του σώματος από τη θέση x_1 στη θέση x_2 είναι ίσος

$$\text{με: } \Delta t_2 = t_2 - t_1 \quad \text{ή} \quad \Delta t_2 = \frac{\pi}{3\omega} \quad (2).$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $\Delta t_2 = 2\Delta t_1$.

46. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Η ζητούμενη χρονική στιγμή t ισούται με το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\phi$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Είναι: $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2} \text{ rad (1)}$.

Επειδή το περιστρεφόμενο διάνυσμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\bar{\omega}$,

ισχύει: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ ή $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$ ή $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\frac{2\pi}{T}}$

ή $\Delta t = \frac{T \cdot \Delta\varphi}{2\pi}$ ή, λόγω της σχέσης (1):

$$\Delta t = \frac{3T}{4} \quad \text{ή} \quad t = \frac{3T}{4}.$$

47. Σωστή επιλογή είναι η β.

Για τις φάσεις φ_1 και φ_2 των ταλαντώσεων των σωμάτων (1) και (2) αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει: $\varphi_1 = \omega_1 t_1$ (1) και $\varphi_2 = \omega_2 t_1$ (2). Επειδή είναι $\varphi_1 > \varphi_2$, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι: $\omega_1 > \omega_2$.

Οι μέγιστες επιταχύνσεις των σωμάτων (1) και (2) δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις:

$$a_{\max(1)} = \omega_1^2 A \quad (3) \quad \text{και} \quad a_{\max(2)} = \omega_2^2 A \quad (4).$$

Επειδή ισχύει $\omega_1 > \omega_2$, από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει: $a_{\max(1)} > a_{\max(2)}$.

48. Σωστή επιλογή είναι η β.

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι:

$$T_2 = 2T_1 \quad \text{ή} \quad \frac{2\pi}{\omega_2} = 2 \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 2\omega_2 \quad (1)$$

$$\text{και} \quad a_{\max(1)} = 2a_{\max(2)} \quad \text{ή} \quad \omega_1^2 A_1 = 2\omega_2^2 A_2$$

$$\text{ή, λόγω της σχέσης (1):} \quad A_2 = 2A_1 \quad (2).$$

Οι μέγιστες ταχύτητες των δύο σωμάτων δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις:

$$v_{\max(1)} = \omega_1 A_1 \quad (3) \quad \text{και} \quad v_{\max(2)} = \omega_2 A_2 \quad (4).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (3) και

$$(4), \text{ προκύπτει: } \frac{v_{\max(1)}}{v_{\max(2)}} = \frac{\omega_1 A_1}{\omega_2 A_2}$$

ή, λόγω των σχέσεων (1) και (2)

$$\frac{v_{\max(1)}}{v_{\max(2)}} = 1 \quad \text{ή} \quad v_{\max(1)} = v_{\max(2)}.$$

49. Σωστή επιλογή είναι η β.

Από τη σχέση $v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$, για $x = -\frac{A}{2}$,

$$\text{προκύπτει: } v = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega A. \text{ Από τη σχέση}$$

$$a = \omega^2 |x|, \text{ για } x = -\frac{A}{2}, \text{ προκύπτει: } a = \frac{\omega^2 A}{2}.$$

Επομένως, ο ζητούμενος λόγος του μέτρου της ταχύτητας προς το μέτρο της επιτάχυνσης του

$$\text{σώματος είναι: } \frac{v}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\omega}.$$

50. Σωστή επιλογή είναι η α.

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι:

$$T_1 = 2T_2 \quad \text{ή} \quad \frac{2\pi}{\omega_1} = 2 \frac{2\pi}{\omega_2} \quad \text{ή} \quad \omega_2 = 2\omega_1 \quad (1).$$

Έστω A_1 και A_2 τα πλάτη των ταλαντώσεων των σωμάτων (1) και (2) αντίστοιχα.

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι:

$$v_{\max(2)} = \frac{v_{\max(1)}}{2} \quad \text{ή} \quad \omega_2 A_2 = \frac{\omega_1 A_1}{2}$$

$$\text{ή λόγω της σχέσης (1): } A_2 = \frac{A_1}{4} \quad (2).$$

Οι μέγιστες επιταχύνσεις των σωμάτων (1) και (2) δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις:

$$a_{\max(1)} = \omega_1^2 A_1 \quad (3) \quad \text{και} \quad a_{\max(2)} = \omega_2^2 A_2 \quad (4).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (3) και

$$(4) \text{ προκύπτει: } \frac{a_{\max(1)}}{a_{\max(2)}} = \frac{\omega_1^2 A_1}{\omega_2^2 A_2}$$

$$\text{ή, λόγω των σχέσεων (1) και (2): } \frac{a_{\max(1)}}{a_{\max(2)}} = 1.$$

51. α. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με την εξίσωση $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ προκύπτουν: $A = 0,6 \text{ m}$, $\omega = 20 \text{ rad/s}$ και $\varphi_0 = 0$.

Επομένως, είναι: $v_{\max} = \omega A$ ή $v_{\max} = 12 \text{ m/s}$.

β. Είναι: $v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0)$

ή $v = 12 \sin(20t)$ (S.I.)

και $a = -\alpha_{\max} \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

ή $a = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

ή $a = -240 \eta\mu(20t)$ (S.I.).

γ. Είναι: $a = -\omega^2 x_1$ ή $a = -80 \text{ m/s}^2$.

δ. Είναι: $|v_2| = \omega \sqrt{A^2 - x_2^2}$

ή $|v_2| = 6\sqrt{3} \text{ m/s}$.

52. α. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με την εξίσωση $v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0)$ προκύπτουν: $v_{\max} = 4 \text{ m/s}$, $\omega = 10 \text{ rad/s}$ και $\varphi_0 = 0$.

Ισχύει: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ή $T = 0,2\pi \text{ s}$.

β. Το πλάτος A της ταλάντωσης του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$v_{\max} = \omega A$ ή $A = \frac{v_{\max}}{\omega}$ ή $A = 0,4 \text{ m}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ ή $x = 0,4\eta\mu(10t)$ (S.I.).

γ. Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$a = -\alpha_{\max} \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

ή $a = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

ή $a = -40\eta\mu(10t)$ (S.I.) (1).

Από τη σχέση (1) για $t = \pi/60 \text{ s}$, προκύπτει:

$a = -40\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ m/s}^2$ ή $a = -20 \text{ m/s}^2$.

δ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες η επιτάχυνσή του είναι $a = +20\sqrt{3} \text{ m/s}^2$.

Είναι: $a = -\omega^2 x_1$ ή $x_1 = -\frac{a}{\omega^2}$

ή $x_1 = -0,2\sqrt{3} \text{ m}$.

Έστω $|v_1|$ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές. Είναι:

$|v_1| = \omega \sqrt{A^2 - x_1^2}$ ή $|v_1| = 2 \text{ m/s}$.

53. α. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με την εξίσωση $a = -\alpha_{\max} \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ προκύπτουν: $\alpha_{\max} = 200 \text{ m/s}^2$, $\omega = 20 \text{ rad/s}$ και $\varphi_0 = 0$.

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος. Ισχύει: $\alpha_{\max} = \omega^2 A$ ή $A = \frac{\alpha_{\max}}{\omega^2}$

ή $A = 0,5 \text{ m}$.

β. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0)$ ή $v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$

ή $v = 10 \sin(20t)$ (S.I.).

γ. Σε κάθε περίοδο το σώμα διανύει διάστημα $s = 4A$. Συνεπώς, το διάστημα που διανύει το σώμα σε χρόνο $\Delta t = 2T$ είναι: $s = 8A$

ή $s = 4 \text{ m}$.

δ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες διέρχεται από μια θέση του αρνητικού ημιάξονα με ταχύτητα $v = -6 \text{ m/s}$. Είναι:

$$v = -\omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad \text{ή} \quad v^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$$

$$\text{ή} \quad x = -\sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} \quad \text{ή} \quad x = -0,4 \text{ m.}$$

Η επιτάχυνση του σώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές είναι: $\alpha = -\omega^2 x$
ή $\alpha = +160 \text{ m/s}^2$.

54. α. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με την εξίσωση $v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0)$ προκύπτουν: $v_{\max} = 2 \text{ m/s}$ και $\varphi_0 = 0$.

Το ελάχιστο χρονικό διάστημα μετάβασης του σώματος από τη μία ακραία θέση στην άλλη είναι: $\Delta t = \frac{T}{2}$ ή $T = 2\Delta t$ ή $T = 0,4\pi \text{ s}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 5 \text{ rad/s}$.

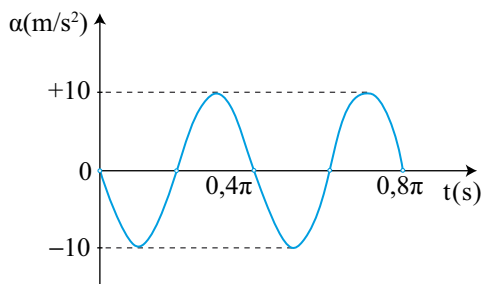
Το πλάτος της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $v_{\max} = \omega A$ ή $A = \frac{v_{\max}}{\omega}$ ή $A = 0,4 \text{ m}$.

β. Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = -\alpha_{\max} \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ή} \quad \alpha = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή} \quad \alpha = -10\eta\mu(5t) \text{ (S.I.) (1)}$$

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο, από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 0,8\pi \text{ s}$.



γ. Ισχύει: $\frac{dv}{dt} = \alpha$.

Από τη σχέση (1) για $t = (\pi/10) \text{ s}$ προκύπτει:

$$\alpha = -10\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ m/s}^2 \quad \text{ή} \quad \alpha = -10 \text{ m/s}^2.$$

Επομένως, είναι: $\frac{dv}{dt} = -10 \text{ m/s}^2$.

δ. Έστω N το πλήθος των πλήρων ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα σε χρόνο $\Delta t = 10\pi \text{ s}$.

$$\text{Είναι: } f = \frac{N}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \frac{\omega}{2\pi} = \frac{N}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad N = \frac{\omega}{2\pi} \Delta t$$

$$\text{ή} \quad N = 25 \text{ ταλαντώσεις.}$$

ε. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $|v| = 1 \text{ m/s}$.

$$\text{Είναι: } |v| = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad \text{ή} \quad x = \pm\sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}}$$

$$\text{ή} \quad x = \pm 0,2\sqrt{3} \text{ m.}$$

Επομένως, η απόσταση d του σώματος από το μέσον της τροχιάς του τις παραπάνω χρονικές στιγμές είναι: $d = |x| = 0,2\sqrt{3} \text{ m}$.

55. α. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος. Η απόσταση d μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης είναι:

$$d = 2A \quad \text{ή} \quad A = \frac{d}{2} \quad \text{ή} \quad A = 0,1 \text{ m.}$$

Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με την εξίσωση $\alpha = -\alpha_{\max} \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ προκύπτουν: $\alpha_{\max} = 10 \text{ m/s}^2$ και $\varphi_0 = 0$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha_{\max} = \omega^2 A \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{\alpha_{\max}}{A}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

β. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ή} \quad v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\dot{y} = 1 \sin(10t) \text{ (S.I.) (1).}$$

Από τη σχέση (1) για $t = (\pi/15) \text{ s}$ προκύπτει:

$$v = 1 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ m/s} \quad \dot{y} = -\frac{1}{2} \text{ m/s}.$$

γ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση: $x = A \eta\mu(\omega t + \phi_0)$

$$\dot{y} = 0,1 \eta\mu(10t) \text{ (S.I.) (2).}$$

Από τη σχέση (2) για $x = +0,1 \text{ m}$, προκύπτει:

$$0,1 = 0,1 \eta\mu(10t) \quad \dot{y} \quad \eta\mu(10t) = \eta\mu \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{y} \quad 10t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \text{με } \kappa = 0, 1, 2, 3, \dots (3).$$

Από τη σχέση (3) για $\kappa = 0$ προκύπτει:

$$10t = \frac{\pi}{2} \quad \dot{y} \quad t = (\pi/20) \text{ s}.$$

δ. Το σώμα ακινητοποιείται στιγμιαία στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του, δηλαδή στις θέσεις στις οποίες η απομάκρυνσή του είναι: $x = \pm A$ ή $x = \pm 0,1 \text{ m}$.

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του είναι:

$$|a| = a_{\max} \quad \dot{y} \quad |a| = \omega^2 A \quad \dot{y} \quad |a| = 10 \text{ m/s}^2.$$

56. α. Από τις δοθείσες εξισώσεις προκύπτει ότι: $v_{\max} = 2 \text{ m/s}$ (1) και $a_{\max} = 40 \text{ m/s}^2$ (2).

$$\text{Είναι: } v_{\max} = \omega A \text{ (2) και } a_{\max} = \omega^2 A \text{ (3).}$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (2) και

$$(3), \text{ έχουμε: } \frac{v_{\max}}{a_{\max}} = \frac{\omega A}{\omega^2 A} \quad \dot{y} \quad \frac{v_{\max}}{a_{\max}} = \frac{1}{\omega}$$

ή, λόγω των σχέσεων (1) και (2): $\omega = 20 \text{ rad/s}$.

β. Το ζητούμενο πλήθος των ταλαντώσεων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$f = \frac{N}{\Delta t} \quad \dot{y} \quad N = f \Delta t \quad \dot{y} \quad N = \frac{\omega}{2\pi} \Delta t$$

$$\dot{y} \quad N = 100 \text{ ταλαντώσεις.}$$

γ. Το σώμα σε κάθε ταλάντωση που εκτελεί διέρχεται από το μέσον της τροχιάς του ($x = 0$) δύο φορές. Επομένως, ο αριθμός των διελεύσεων του σώματος από το μέσον της τροχιάς του μετά από N πλήρεις ταλαντώσεις είναι: $N' = 2N$ ή $N' = 200$ φορές.

δ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

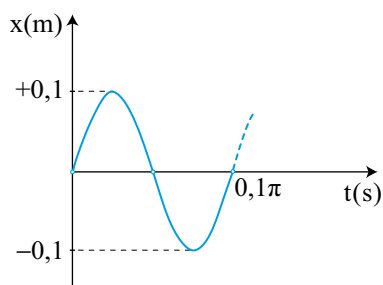
$$x = A \eta\mu(\omega t + \phi_0), \text{ όπου το } A \text{ προκύπτει:}$$

$$v_{\max} = \omega A \quad \dot{y} \quad A = \frac{v_{\max}}{\omega} \quad \dot{y} \quad A = 0,1 \text{ m}.$$

Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$x = 0,1 \eta\mu(20t) \text{ (S.I.).}$$

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.



ε. Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = (\pi/20) \text{ s}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v = v_{\max} \sin(\omega t) \quad \dot{y} \quad v = 2 \sin(\pi) \text{ m/s} \quad \dot{y} \quad v = -2 \text{ m/s}.$$

57. α. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης που γνωρίζουμε από τη θεωρία προκύπτει:

$$A = 0,8 \text{ m}, \quad \omega = 10 \text{ rad/s} \quad \text{και} \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

Έστω f η συχνότητα της ταλάντωσης. Είναι:

$$\omega = 2\pi f \quad \dot{y} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \dot{y} \quad f = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}.$$

β. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή } v = 8 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) (1).}$$

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ προκύπτει: $v = 0$.

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dv}{dt} = a \quad \text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = -80 \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) (2).}$$

Από τη σχέση (2) για $t = \frac{\pi}{60}$ s προκύπτει:

$$\frac{dv}{dt} = -80 \eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ m/s}^2 \quad \text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = -40\sqrt{3} \text{ m/s}^2.$$

δ. Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος γίνεται για πρώτη φορά μέγιστο μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ στη θέση με απομάκρυνση $x = -0,8$ m. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης για $x = -0,8$ m, έχουμε:

$$-0,8 = 0,8 \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ή} \quad \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\text{ή} \quad 10t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \quad \text{ή} \quad 10t = 2\kappa\pi + \pi,$$

με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ (3). Από τη σχέση (3) για

$\kappa = 0$ προκύπτει: $t = 0,1\pi$ s.

58. α. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με την εξίσωση $a = -\alpha_{\max} \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ προκύπτει: $\alpha_{\max} = 2 \text{ m/s}^2$, $\omega = 5 \text{ rad/s}$

και $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Το πλάτος A της ταλάντωσης του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha_{\max} = \omega^2 A \quad \text{ή} \quad A = \frac{\alpha_{\max}}{\omega^2} \quad \text{ή} \quad A = 0,08 \text{ m.}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ή} \quad T = 0,4\pi \text{ s.}$$

β. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή} \quad v = 0,4 \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) (1).}$$

γ. Από τη σχέση (1) για $t = \frac{\pi}{30}$ s προκύπτει:

$$v = 0,4 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad v = -0,2 \text{ m/s.}$$

δ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $|v| = 0,2\sqrt{3} \text{ m/s}$. Είναι:

$$|v| = \omega \sqrt{A^2 - x^2} \quad \text{ή} \quad x = \pm \sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}}$$

$$\text{ή} \quad x = \pm 0,04 \text{ m.}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές υπολογίζεται από τη σχέση: $|a| = \omega^2 |x|$ ή $|a| = 1 \text{ m/s}^2$.

ε. Επειδή η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$, τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $x = +A$. Επομένως, η χρονική στιγμή στην οποία το μέτρο της ταχύτητας του σώματος γίνεται μέγιστο για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$, είναι: $t = \frac{T}{4}$ ή $t = 0,1\pi$ s.

59. α. Επειδή το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ διέρχεται από το μέσον της τροχιάς του ($x = 0$) με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι ίση με μηδέν ($\varphi_0 = 0$). Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = 2\pi f \quad \text{ή} \quad \omega = 10\pi \text{ rad/s.}$$

Συνεπώς, είναι: $x = A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή} \quad x = 0,3 \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.) (1),}$$

$$v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή } v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή } v = 3\pi \sin(10\pi t) \text{ (2)}$$

$$\text{και } a = -\alpha_{\max} \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

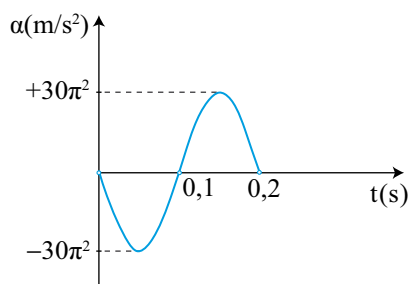
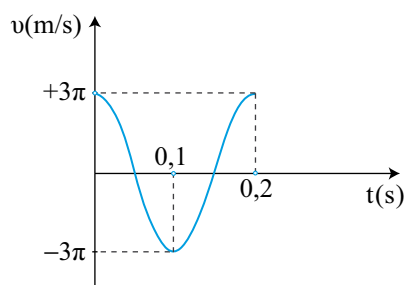
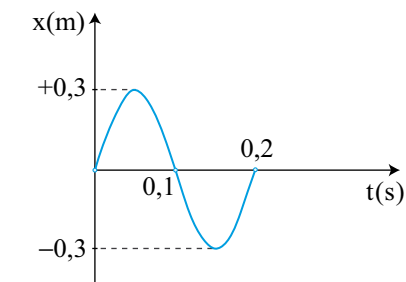
$$\text{ή } a = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή } a = -30\pi^2 \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.) (3).}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{ή } T = 0,2 \text{ s.}$$

Οι γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο απεικονίζεται στη συνέχεια:



β. Η επιτάχυνση του σώματος μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα διέρχεται από το μέσον της τροχιάς του ($x = 0$). Το χρονικό διάστημα Δt μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων του σώματος από τη θέση $x = 0$ είναι: $\Delta t = \frac{T}{2}$ ή $\Delta t = 0,1 \text{ s}$.

γ. Η απόσταση του σώματος από το μέσον της τροχιάς του ($x = 0$) ισούται με το μέτρο της απομάκρυνσης. Δηλαδή, είναι:

$$|x| = 0,1 \text{ m} \quad \text{ή } x = \pm 0,1 \text{ m.}$$

Επομένως, το μέτρο της ταχύτητας του σώματος είναι: $|v| = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$ ή $v = 2\pi\sqrt{2} \text{ m/s}$.

δ. Από τη σχέση (3) για $t = 0,15 \text{ s}$ προκύπτει:

$$a = -30\pi^2 \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) \text{ m/s}^2 \quad \text{ή } a = +30\pi^2 \text{ m/s}^2.$$

60. α. Η συχνότητα f της ταλάντωσης του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση: $f = \frac{N}{\Delta t}$ ή $f = 10 \text{ Hz}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega = 2\pi f$ ή $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$.

Το μέτρο v της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$, στην οποία διέρχεται από τη θέση ισορροπίας, ισούται με τη μέγιστη τιμή της ταχύτητάς του. Επομένως, το πλάτος A της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v = v_{\max} \quad \text{ή } v = \omega A \quad \text{ή } A = \frac{v}{\omega} \quad \text{ή } A = 0,4 \text{ m.}$$

β. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι ίση με μηδέν ($\varphi_0 = 0$). Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση: $x = A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } x = 0,4 \eta\mu(20\pi t) \text{ (S.I.).}$$

γ. Η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος είναι: $T = \frac{1}{f}$ ή $T = 0,1 \text{ s}$.

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος γίνεται μέγιστο για δεύτερη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα βρίσκεται στην ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσής του ($x = -A$). Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, είναι: $t_1 = \frac{3T}{4}$ ή $t_1 = 0,075 \text{ s}$.

δ. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$v = v_{\max} \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή } v = 8\pi \sin(20\pi t) \text{ (S.I.) (1)}$$

Από τη σχέση (1) για $t = 1/120 \text{ s}$, προκύπτει:

$$v = 8\pi \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ m/s} \text{ ή } v = 4\pi\sqrt{3} \text{ m/s}.$$

61. α. Οι θέσεις στις οποίες ακινητοποιείται στιγμιαία το σώμα είναι οι ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του ($x = \pm A$). Η απόσταση d μεταξύ των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του σώματος είναι ίση με $2A$, όπου A το πλάτος της ταλάντωσης. Είναι:

$$d = 2A \text{ ή } A = \frac{d}{2} \text{ ή } A = 0,4 \text{ m}.$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\alpha_{\max} = \omega^2 A$

$$\text{ή } \omega = \sqrt{\frac{\alpha_{\max}}{A}} \text{ ή } \omega = 5 \text{ rad/s}.$$

β. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από το μέσον της τροχιάς του ($x = 0$) με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\phi_0 = 0$. Επομένως, είναι:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \text{ ή } x = 0,4\eta\mu(5t) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{και } v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή } v = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή } v = 2\sigma\upsilon\nu(5t) \text{ (S.I.)}$$

γ. Έστω x_K και x_Λ οι απομακρύνσεις του ταλαντούμενου σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες βρίσκεται στις θέσεις K και Λ , αντίστοιχα. Είναι: $\alpha_K = -\omega^2 x_K$ ή $x_K = -\frac{\alpha_K}{\omega^2}$

$$\text{ή } x_K = -0,2 \text{ m} \text{ και } \alpha_\Lambda = -\omega^2 x_\Lambda$$

$$\text{ή } x_\Lambda = -\frac{\alpha_\Lambda}{\omega^2} \text{ ή } x_\Lambda = +0,2 \text{ m}.$$

Επομένως, η απόσταση $d_{K\Lambda}$ μεταξύ των θέσεων K και Λ είναι: $d_{K\Lambda} = |x_K| + |x_\Lambda|$

$$\text{ή } d_{K\Lambda} = 0,4 \text{ m}.$$

δ. Είναι: $|v_K| = \omega \sqrt{A^2 - x_K^2}$ ή $|v_K| = \sqrt{3} \text{ m/s}$

$$\text{και } |v_\Lambda| = \omega \sqrt{A^2 - x_\Lambda^2} \text{ ή } |v_\Lambda| = \sqrt{3} \text{ m/s}.$$

$$\text{Επομένως, είναι: } \frac{|v_K|}{|v_\Lambda|} = 1.$$

62. α. Έστω T η περίοδος της ταλάντωσης. Ο ελάχιστος χρόνος μετάβασης του σώματος από τη μια ακραία θέση στην άλλη είναι ίσος με $T/2$. Επομένως, είναι: $\frac{T}{2} = 0,1 \text{ s}$ ή $T = 0,2 \text{ s}$.

β. Η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης είναι ίση με $2A$. Επομένως, είναι: $d = 2A$ ή $A = 0,1 \text{ m}$.

Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας του σώματος είναι: $v_{\max} = \omega A$ ή $v_{\max} = \frac{2\pi}{T} A$ ή $v_{\max} = \pi \text{ m/s}$.

γ. Αφού για $t = 0$ είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$. Η φάση της ταλάντωσης του σώματος τη χρονική στιγμή $t = (1/20) \text{ s}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \quad \text{ή} \quad \varphi = \frac{2\pi}{T}t + \varphi_0 \quad \text{ή} \quad \varphi = \pi \text{ rad.}$$

δ. Η επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = (1/20) \text{ s}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή} \quad \alpha = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή} \quad \alpha = -100 \eta\mu(\pi) \text{ m/s}^2 \quad \text{ή} \quad \alpha = 0.$$

63. α. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση: $x = A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (1).

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = +A$, προκύπτει: $\eta\mu\varphi_0 = 1$ ή $\eta\mu\varphi_0 = \eta\mu \frac{\pi}{2}$

$$\text{ή} \quad \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots (2).$$

Εφόσον είναι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$ προκύπτει: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

β. Έστω ω η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης. Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

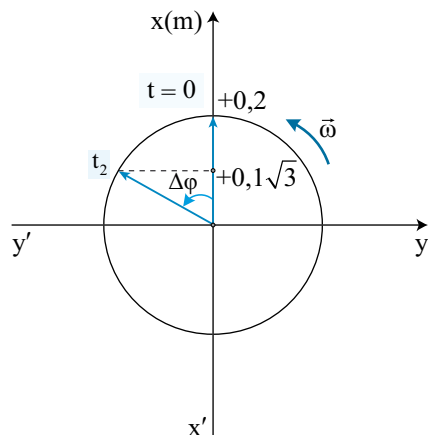
$$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

γ. Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$x = 0,2 \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.}).$$

$$\text{δ. Είναι: } \alpha = -\omega^2 x \quad \text{ή} \quad \alpha = -10\sqrt{3} \text{ m/s}^2.$$

ε. Η ζητούμενη χρονική στιγμή t_2 είναι ίση με το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\varphi$ που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Από το σχήμα προκύπτει:

$$\text{συν}\Delta\varphi = \frac{0,1\sqrt{3}}{0,2} \quad \text{ή} \quad \text{συν}\Delta\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ή} \quad \Delta\varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Επειδή το περιστρεφόμενο διάνυσμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\bar{\omega}$,

$$\text{ισχύει: } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \quad \text{ή} \quad \Delta t = (\pi/60) \text{ s}$$

$$\text{ή} \quad t_2 = (\pi/60) \text{ s.}$$

64. α. Έστω ω η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης. Είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

β. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 .

$$\text{Είναι: } \alpha = -\omega^2 x \quad \text{ή} \quad x = -0,1 \text{ m.}$$

γ. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης. Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει: $v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$

$$\text{ή} \quad v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2) \quad \text{ή} \quad A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}$$

$$\text{ή} \quad A = 0,2 \text{ m.}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από το μέσον της τροχιάς του ($x = 0$) δίνεται από τη σχέση: $x = A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (1).

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητα του σώματος είναι ίση με μηδέν, η απομάκρυνσή του την ίδια χρονική στιγμή είναι: $x = \pm A$ ή $x = \pm 0,2$ m. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η επιτάχυνση του σώματος είναι αρνητική, σύμφωνα με τη σχέση $a = -\omega^2 x$ η απομάκρυνσή του την ίδια χρονική στιγμή είναι θετική ($x > 0$). Επομένως, τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x = +0,2$ m. Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = +0,2$ m, προκύπτει:

$$\eta\mu\varphi_0 = 1 \text{ ή } \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \text{ ή } \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},$$

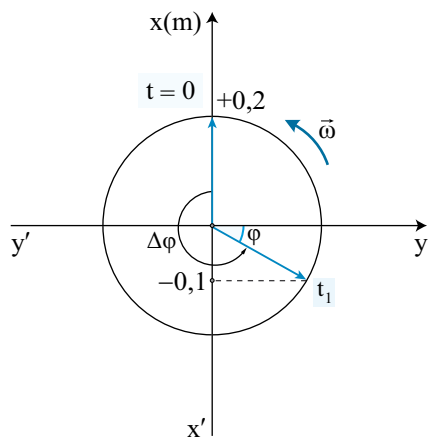
με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ (2).

Επειδή ισχύει ότι: $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ rad, από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$ προκύπτει: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad.

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση: $v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } v = 2\sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

δ. Η ζητούμενη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\varphi$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω φ η οξεία γωνία που σχηματίζει το περιστρεφόμενο διάνυσμα με τον άξονα $y'y$ τη χρονική στιγμή t_1 . Σύμφωνα με το σχήμα, εί-

$$\text{ναι: } \eta\mu\varphi = \frac{|x|}{A} \text{ ή } \eta\mu\varphi = \frac{0,1}{0,2} \text{ ή } \eta\mu\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\text{ή } \varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad. Σύμφωνα με το σχήμα, είναι:}$$

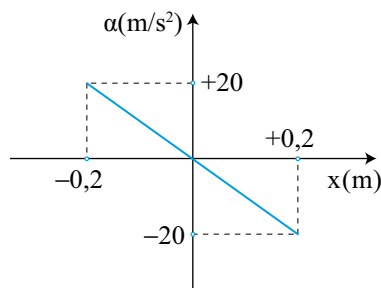
$$\Delta\varphi = \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \text{ rad ή } \Delta\varphi = \frac{4\pi}{3} \text{ rad.}$$

Επειδή το περιστρεφόμενο διάνυσμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\bar{\omega}$,

$$\text{ισχύει: } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \text{ ή } \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \text{ ή } \Delta t = \frac{4\pi}{30} \text{ s}$$

$$\text{ή } t_1 = \frac{4\pi}{30} \text{ s.}$$

ε. Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται η επιτάχυνση του σώματος σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x .



65. α. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος είναι $x = +A$, η αρχική φάσης της ταλάντωσης είναι:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

β. Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων του σώματος από τη θέση ισορροπίας ($x = 0$) είναι ίσο με $T/2$. Επομένως,

$$\text{είναι: } \frac{T}{2} = \frac{\pi}{20} \text{ s ή } T = \frac{\pi}{10} \text{ s.}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της φάσης της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega \quad \text{ή} \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \frac{d\phi}{dt} = 20 \text{ rad/s.}$$

γ. Το διάστημα που διανύει το σώμα στο χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων του από τη θέση ισορροπίας ($x = 0$) είναι ίσο με $2A$. Είναι: $2A = 0,8 \text{ m}$ ή $A = 0,4 \text{ m}$.

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες η απομάκρυνσή του είναι: $x = +0,2\sqrt{3} \text{ m}$.

$$\text{Είναι: } v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad \text{ή} \quad v = 4 \text{ m/s.}$$

δ. Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$\phi = 3\phi_0 \quad \text{ή} \quad \phi = \frac{3\pi}{2} \text{ rad.}$$

Η επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi_0) \quad \text{ή} \quad \alpha = -\omega^2 A \sin \phi$$

$$\text{ή} \quad \alpha = -\omega^2 A \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \text{ m/s}^2 \quad \text{ή} \quad \alpha = +160 \text{ m/s}^2.$$

66. α. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος. Είναι:

$$d = 2A \quad \text{ή} \quad A = \frac{d}{2} \quad \text{ή} \quad A = 0,4 \text{ m.}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = 2\pi f$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Έστω x η απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$. Είναι:

$$\alpha = -\omega^2 x \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\alpha}{\omega^2} \quad \text{ή} \quad x = +0,4 \text{ m.}$$

β. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$x = A \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή} \quad x = 0,4 \sin(10t + \phi_0) \text{ (S.I.) (1).}$$

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = +0,4 \text{ m}$,

$$\text{προκύπτει: } +0,4 = 0,4 \sin \phi_0 \quad \text{ή} \quad \sin \phi_0 = 1$$

$$\text{ή} \quad \sin \phi_0 = \sin \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \phi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots (2).$$

Επειδή ισχύει $0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη σχέση

$$(2) \text{ για } \kappa = 0 \text{ προκύπτει: } \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση: $v = \omega A(\omega t + \phi_0)$

$$\text{ή} \quad v = 4 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Από τη σχέση (1) για $t = t_1 = (\pi/15) \text{ s}$ και

$$\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad, προκύπτει:}$$

$$x = 0,4 \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \text{ m} \quad \text{ή} \quad x = -0,2 \text{ m.}$$

Η ζητούμενη απόσταση d' είναι:

$$d' = |x| + A \quad \text{ή} \quad d' = 0,6 \text{ m.}$$

δ. Η επιτάχυνση του σώματος μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα διέρχεται από το μέσον της τροχιάς του ($x = 0$). Από τη σχέση (1) για $x = 0$ προκύπτει:

$$0 = A \sin(\omega t + \phi_0) \quad \text{ή} \quad \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\text{ή} \quad \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = \sin 0 \quad (3).$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (3) είναι:

$$10t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots (4)$$

$$\text{ή} \quad 10t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \pi, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots (5).$$

Από τη σχέση (4) για $\kappa = 0$ και $\kappa = 1$ προκύπτουν: $t = -0,05\pi \text{ s}$ και $t = 0,15\pi \text{ s}$ αντίστοιχα.

Από τη σχέση (5) για $\kappa = 0$ και $\kappa = 1$ προκύπτουν: $t = 0,05\pi \text{ s}$ και $t = 0,25\pi \text{ s}$ αντίστοιχα. Η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι η $t = 0,15\pi \text{ s}$.

67. α. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \omega = 20 \text{ rad/s.}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος. Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad \text{ή} \quad v^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$$

$$\text{ή} \quad A = \sqrt{\frac{v^2}{\omega^2} + x^2} \quad \text{ή} \quad A = 0,4 \text{ m.}$$

β. Έστω x_0 η απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$. Είναι: $\alpha = -\omega^2 x_0$

ή $x_0 = +0,4 \text{ m}$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (1).$$

Από τη σχέση (1), για $t = 0$ και $x = +0,4 \text{ m}$, προκύπτει: $+0,4 = 0,4\eta\mu\varphi_0$ ή $\eta\mu\varphi_0 = 1$

$$\text{ή} \quad \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (2).$$

Επειδή ισχύει: $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$ από τη σχέση

$$(2) \text{ για } \kappa = 0 \text{ προκύπτει: } \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$$x = 0,4\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ή} \quad v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή} \quad v = 8 \sin\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3).$$

Από τη σχέση (3) για $t = (\pi/60) \text{ s}$ προκύπτει:

$$v = 8 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad v = -4\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

δ. Έστω x_K η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες βρίσκεται στη

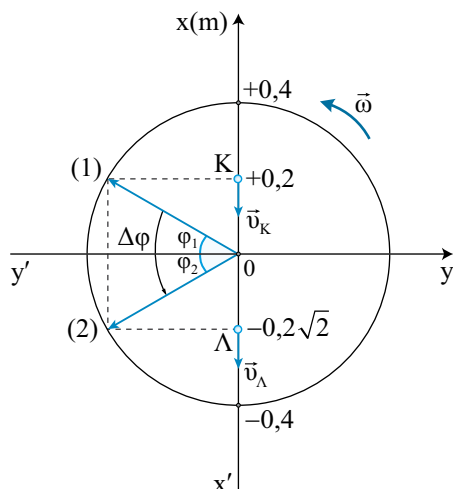
θέση Κ. Είναι: $\alpha_K = -\omega^2 x_K$ ή $x_K = -\frac{\alpha_K}{\omega^2}$

$$\text{ή} \quad x_K = +0,2 \text{ m.}$$

Έστω x_Λ η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες βρίσκεται στη θέση

$$\Lambda. \text{ Είναι: } \alpha_\Lambda = -\omega^2 x_\Lambda \quad \text{ή} \quad x_\Lambda = -\frac{\alpha_\Lambda}{\omega^2}$$

$$\text{ή} \quad x_\Lambda = -0,2\sqrt{2} \text{ m.}$$



Ο ελάχιστος χρόνος μετάβασης Δt του σώματος από τη θέση Κ στη θέση Λ ισούται με τον χρόνο που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\varphi$ που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Η οξεία γωνία φ_1 που σχηματίζει το περιστρεφόμενο διάνυσμα με τον οριζόντιο άξονα $y'y$ στη θέση (1) υπολογίζεται από τη σχέση: $\eta\mu\varphi_1 = \frac{x_K}{A}$

$$\text{ή} \quad \eta\mu\varphi_1 = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_1 = \eta\mu\frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Η οξεία γωνία φ_2 που σχηματίζει το περιστρεφόμενο διάνυσμα με τον οριζόντιο άξονα $y'y$ στη θέση (2) υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\eta\mu\varphi_2 = \frac{|x_\Lambda|}{A} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ή} \quad \eta\mu\varphi_2 = \eta\mu\frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Η γωνία $\Delta\varphi$ που διαγράφει το περιστρεφόμενο διάνυσμα είναι: $\Delta\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

$$\text{ή } \Delta\varphi = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ rad} \quad \text{ή } \Delta\varphi = \frac{5\pi}{12} \text{ rad.}$$

$$\text{Ισχύει: } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{ή } \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \quad \text{ή } \Delta t = \frac{\pi}{48} \text{ s.}$$

68. α. Ο ελάχιστος χρόνος μετάβασης του σώματος από το μέσον της τροχιάς του ($x = 0$) στην ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσής του είναι ίσος με $T/4$. Επομένως, είναι:

$$\frac{T}{4} = 0,1\pi \text{ s} \quad \text{ή } T = 0,4\pi \text{ s.}$$

Στον παραπάνω χρόνο το διάστημα που διανύει το σώμα είναι ίσο με το πλάτος της ταλάντωσής του. Επομένως, ισχύει: $A = 0,2 \text{ m}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 5 \text{ rad/s}$.

β. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = +A$, προκύπτει: $+A = A\eta\mu\varphi_0$ ή $\eta\mu\varphi_0 = 1$

$$\text{ή } \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \quad \text{ή } \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},$$

με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ (2).

Εφόσον ισχύει: $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$ προκύπτει: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = -\alpha_{\max}\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ή } \alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή } \alpha = -5\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της επιτάχυνσής του είναι ίσο με το μισό της μέγιστης

$$\text{τιμή της. Είναι: } |\alpha| = \frac{\alpha_{\max}}{2} \quad \text{ή } \omega^2 |x| = \frac{\omega^2 A}{2}$$

$$\text{ή } |x| = \frac{A}{2} \quad \text{ή } |x| = 0,1 \text{ m.}$$

Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές υπολογίζεται από τη σχέση: $|v| = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ ή $|v| = 0,5\sqrt{3} \text{ m/s}$.

δ. Το σώμα διέρχεται από το μέσον της τροχιάς του ($x = 0$) δύο φορές σε κάθε πλήρη ταλάντωση που εκτελεί. Το πλήθος N των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $N = f\Delta t$ ή $N = \frac{\omega}{2\pi} t_1$ ή $N = 20$ ταλαντώσεις.

Επομένως, το πλήθος N' των διελεύσεων του σώματος από το μέσον της τροχιάς του ($x = 0$) από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $N' = 2N$ ή $N' = 40$ φορές.

69. α. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι: $\frac{T}{2} = 0,1\pi \text{ s}$ ή $T = 0,2\pi \text{ s}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

β. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει, ακόμη, ότι $A = 0,5 \text{ m}$. Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_{\max} = \omega A$ ή $v_{\max} = 5 \text{ m/s}$.

γ. Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = -\alpha_{\max}\eta\mu(\omega t) \quad \text{ή } \alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } \alpha = -50\eta\mu(10t) \text{ (S.I.).}$$

δ. Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $\varphi = \omega t$

ή $\varphi = 10t$ (S.I.) (1). Από τη σχέση (1) για $t = 0,2\pi$ s προκύπτει: $\varphi = 2\pi$ rad.

70. α. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι: $\frac{T}{4} = 0,1\pi$ s ή $T = 0,4\pi$ s.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 5$ rad/s.

β. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει, ακόμη, ότι: $v_{\max} = 3$ m/s. Το πλάτος A της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_{\max} = \omega A \text{ ή } A = \frac{v_{\max}}{\omega} \text{ ή } A = 0,6 \text{ m.}$$

Η απόσταση d μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του σώματος είναι ίση με: $d = 2A$ ή $d = 1,2$ m.

γ. Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι ίση με μηδέν ($\varphi_0 = 0$). Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t)$ ή $x = 0,6\eta\mu(5t)$ (S.I.) (1). Από τη σχέση (1) για $t = 0,2\pi$ s προκύπτει: $x = 0,6\eta\mu(\pi)$ m ή $x = 0$.

δ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $|v| = 1,5$ m/s. Είναι:

$$|v| = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \text{ ή } v^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$$

$$\text{ή } x = \pm\sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} \text{ ή } x = \pm 0,3\sqrt{3} \text{ m.}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές υπολογίζεται από τη σχέση: $|a| = \omega^2|x|$ ή $|a| = 7,5\sqrt{3}$ m/s².

71. α. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι: $\frac{T}{2} = 0,05\pi$ s ή $T = 0,1\pi$ s.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 20$ rad/s.

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει, επίσης, ότι: $a_{\max} = 16$ m/s². Το πλάτος A της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a_{\max} = \omega^2 A \text{ ή } A = \frac{a_{\max}}{\omega^2} \text{ ή } A = 0,04 \text{ m.}$$

Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_{\max} = \omega A$ ή $v_{\max} = 0,8$ m/s.

β. Εφόσον το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος είναι $|a| = 8$ m/s², ισχύει ότι: $a = +8$ m/s² ή $a = -8$ m/s².

Έστω x η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες είναι $a = +8$ m/s².

$$\text{Ισχύει: } a = -\omega^2 x \text{ ή } x = -\frac{a}{\omega^2} \text{ ή } x = -0,02 \text{ m.}$$

Έστω x' η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες είναι $a = -8$ m/s².

$$\text{Ισχύει: } a = -\omega^2 x' \text{ ή } x' = -\frac{a}{\omega^2}$$

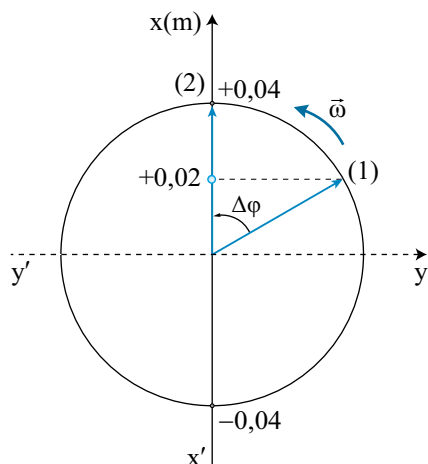
ή $x' = +0,02$ m. Η ζητούμενη απόσταση είναι: $d = |x| + |x'|$ ή $d = 0,04$ m.

γ. Τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος είναι $|a| = 8$ m/s², η απομάκρυνσή του είναι: $x = \pm 0,02$ m.

Επομένως, το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές υπολογίζεται από τη σχέση: $|v| = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$$\text{ή } |v| = 0,4\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

δ. Ο ελάχιστος χρόνος μετάβασης του σώματος από τη θέση με απομάκρυνση $x_1 = +0,02$ m στη θέση με απομάκρυνση $x_2 = +0,04$ m είναι ίσος με τον χρόνο Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\varphi$ που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Από το σχήμα προκύπτει ότι:

$$\text{συν}\Delta\varphi = \frac{x_1}{A} \quad \text{ή} \quad \text{συν}\Delta\varphi = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = (\pi/3) \text{ rad.}$$

$$\text{Είναι: } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \quad \text{ή} \quad \Delta t = (\pi/60) \text{ s.}$$

72. α. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι: $A = 0,1 \text{ m}$ και $\alpha_{\max} = 10 \text{ m/s}^2$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από

$$\text{τη σχέση: } \alpha_{\max} = \omega^2 A \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{\alpha_{\max}}{A}}$$

ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Η συχνότητα f της ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\omega = 2\pi f \quad \text{ή} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{ή} \quad f = \frac{5}{\pi} \text{ Hz.}$$

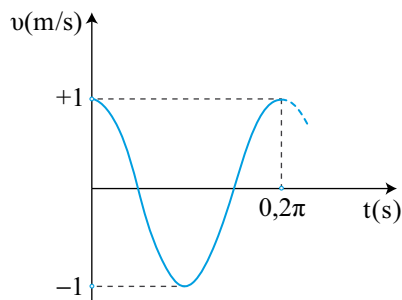
β. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση: $v = v_{\max} \text{ συν}(\omega t)$ ή $v = \omega A \text{ συν}(\omega t)$ ή $v = 1 \text{ συν}(10t) \text{ (S.I.)}$.

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ή} \quad T = 0,2\pi \text{ s.}$$

Στο διάγραμμα του επόμενου σχήματος απεικονίζεται η γραφική παράσταση της ταχύτη-

τας του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο t , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 0,2\pi \text{ s}$.



γ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της επιτάχυνσής του είναι $|a| = 5 \text{ m/s}^2$. Είναι:

$$|a| = \omega^2 |x| \quad \text{ή} \quad |x| = \frac{|a|}{\omega^2} \quad \text{ή} \quad |x| = 0,05 \text{ m.}$$

Το μέτρο της ταχύτητας $|v|$ του σώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές υπολογίζεται από

$$\text{τη σχέση: } |v| = \omega \sqrt{A^2 - x^2} \quad \text{ή} \quad |v| = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s.}$$

δ. Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος μεγιστοποιείται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του, δηλαδή, κάθε φορά που το σώμα εκτελεί μία πλήρη ταλάντωση το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος μεγιστοποιείται 2 φορές. Έστω N το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 4\pi \text{ s}$.

$$\text{Είναι: } f = \frac{N}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad N = 20 \text{ ταλαντώσεις.}$$

Επομένως, το πλήθος N' των μεγιστοποιήσεων του μέτρου της επιτάχυνσης του σώματος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 4\pi \text{ s}$ είναι: $N' = 2N$ ή $N' = 40$ φορές.

73. α. Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος είναι $A = 0,2 \text{ m}$. Από το διάγραμμα προκύπτει επίσης ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = +0,2 \text{ m}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } x = 0,2\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \text{ (S.I.) (1).}$$

Από τη σχέση (1), για $t = 0$ και $x = +0,2 \text{ m}$, προκύπτει: $+0,2 = 0,2\eta\mu\varphi_0$ ή $\eta\mu\varphi_0 = 1$

$$\text{ή } \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \text{ ή } \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},$$

με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ (2).

Επειδή ισχύει: $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$ από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$ προκύπτει: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

β. Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το σώμα βρίσκεται για πρώτη φορά στη θέση $x = +0,1\sqrt{2} \text{ m}$ τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{40} \text{ s}$.

Από τη σχέση (1) για $x = +0,1\sqrt{2} \text{ m}$ και $t = \frac{\pi}{40} \text{ s}$, προκύπτει:

$$0,1\sqrt{2} = 0,2\eta\mu\left(\omega\frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{ή } \eta\mu\left(\omega\frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ή } \eta\mu\left(\omega\frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ (3).}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (3) είναι:

$$\omega\frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \text{ (4),}$$

$$\text{ή } \omega\frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \text{ (5).}$$

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα

βρίσκεται στη θέση $x = +0,2 \text{ m}$, τη χρονική στιγμή $t = (\pi/40) \text{ s}$ στην οποία βρίσκεται στη θέση $x = +0,1\sqrt{2} \text{ m}$ για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$, η ταχύτητά του είναι αρνητική. Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = (\pi/40) \text{ s}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή } v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\left(\omega\frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) (6).}$$

Από τη σχέση (6), λόγω της σχέσης (4), προ-

$$\text{κύπτει: } v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{ή } v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} > 0.$$

Από τη σχέση (6), λόγω της σχέσης (5), προ-

$$\text{κύπτει: } v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\text{ή } v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0.$$

Επομένως, η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση (5). Από τη σχέση (5) για $\kappa = 0$ προκύπτει: $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

γ. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$v = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή } v = 2\sigma\upsilon\nu\left(10\tau + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

74. α. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει

$$\text{ότι: } \frac{T}{2} = \frac{\pi}{20} \text{ s ή } T = \frac{\pi}{10} \text{ s και } v_{\max} = 4 \text{ m/s.}$$

Η γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ ή } \omega = 20 \text{ rad/s. Το πλάτος } A \text{ της τα-}$$

λάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_{\max} = \omega A \text{ ή } A = \frac{v_{\max}}{\omega} \text{ ή } A = 0,2 \text{ m.}$$

β. Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = (\pi/2)$ rad (βλέπε λύση βασικής άσκηση 7, ερώτημα γ). Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή } a = -80 \eta \mu \left(20t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $|v| = 2\sqrt{3}$ m/s. Είναι:

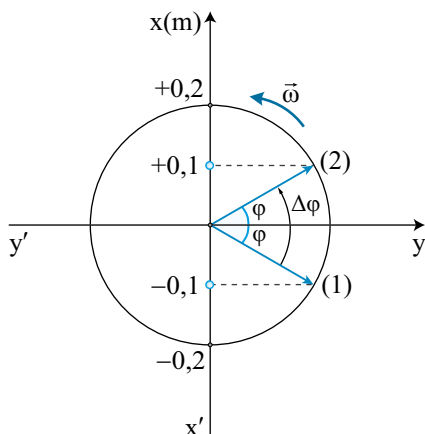
$$|v| = \omega \sqrt{A^2 - x^2} \quad \text{ή} \quad v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

$$\text{ή } x = \pm \sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} \quad \text{ή } x = \pm 0,1 \text{ m.}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές είναι:

$$|a| = \omega^2 |x| \quad \text{ή} \quad |a| = 40 \text{ m/s}^2.$$

δ. Το ζητούμενο χρονικό διάστημα ισούται με το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\varphi$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



$$\text{Είναι: } \eta \mu \varphi = \frac{|x|}{A} \quad \text{ή} \quad \varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

$$\text{Επομένως, είναι: } \Delta\varphi = 2\varphi \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

Επειδή το περιστρεφόμενο διάνυσμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω ,

$$\text{ισχύει: } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \quad \text{ή} \quad \Delta t = (\pi/60) \text{ s.}$$

75. α. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι: $A = 0,2$ m και $a_{\max} = 5 \text{ m/s}^2$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $a_{\max} = \omega^2 A$

$$\text{ή } \omega = \sqrt{\frac{a_{\max}}{A}} \quad \text{ή} \quad \omega = 5 \text{ rad/s.}$$

β. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητα του σώματος είναι ίση με μηδέν ($v = 0$), το σώμα βρίσκεται σε μία από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του ($x = \pm A$). Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η επιτάχυνση του σώματος είναι αρνητική ($a < 0$), η απομάκρυνσή του την ίδια χρονική στιγμή είναι θετική ($x > 0$). Επομένως, για $t = 0$ είναι $x = +A$.

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = (\pi/2)$ rad. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση: $v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } v = 1 \sigma \nu \eta \mu \left(5t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι:

$$t = \frac{3T}{4}, \quad \text{όπου } T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ή} \quad T = 0,4\pi \text{ s,}$$

οπότε προκύπτει: $t = 0,3\pi \text{ s.}$

δ. Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα έχει διανύσει διάστημα: $s = 1 \text{ m}$ ή $s = 5A$.

Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0$. Η επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $a = -\omega^2 x$ ή $a = 0$.

76. α. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει:

$$T = \frac{\pi}{10} \text{ s και } a_{\max} = 240 \text{ m/s}^2.$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \omega = 20 \text{ rad/s.}$$

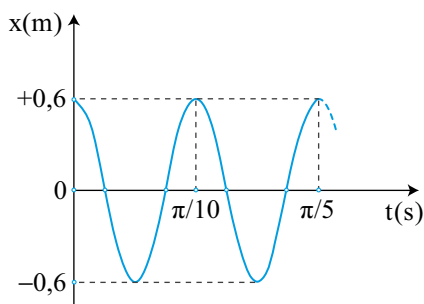
Το πλάτος A της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $a_{\max} = \omega^2 A$ ή $A = 0,6 \text{ m}$.

β. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι για $t = 0$ είναι: $\alpha = -a_{\max}$ ή $-\omega^2 x = \omega^2 A$ ή $x = +A$.

Επομένως, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } x = 0,6\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.



γ. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dv}{dt} = \alpha \quad \text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = -240\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) (1).}$$

Από τη σχέση (1) για $t = \frac{\pi}{20} \text{ s}$ προκύπτει:

$$\frac{dv}{dt} = -240\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) \text{ m/s}^2 \quad \text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = +240 \text{ m/s}^2.$$

δ. Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{|v|}{|a|} = \frac{\omega\sqrt{A^2 - x^2}}{\omega^2|x|} \quad \text{ή} \quad \frac{|v|}{|a|} = \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{\omega|x|}$$

$$\text{ή} \quad \frac{|v|}{|a|} = \frac{\sqrt{3}}{60}.$$

77. α. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από το μέσον της τροχιάς του ($x = 0$) με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι ίση με μηδέν ($\varphi_0 = 0$). Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ισχύει: $v = +v_{\max}$ ή $|v| = \omega A$ (1). Τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα ακινητοποιείται στιγμιαία ισχύει: $|a| = a_{\max}$ ή $|a| = \omega^2 A$ (2).

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και

$$(2) \text{ προκύπτει: } \frac{|v|}{|a|} = \frac{1}{\omega} \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{|a|}{|v|}$$

ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$A = \frac{|v|}{\omega} \quad \text{ή} \quad A = 0,2 \text{ m.}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$x = A\eta\mu(\omega t) \quad \text{ή} \quad x = 0,2\eta\mu(10t) \text{ (S.I.)}$$

β. Η ταχύτητα του σώματος της χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v = v_{\max} \sin(\omega t_1) \quad \text{ή} \quad v = 2 \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \text{ m/s}$$

$$\text{ή} \quad v = -\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dv}{dt} = a \quad \text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t_2)$$

$$\text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = -20\eta\mu\left(\frac{10\pi}{6}\right) \text{ m/s}^2$$

$$\text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = +10\sqrt{3} \text{ m/s}^2.$$

δ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t_3 . Επειδή η επιτάχυνση του

σώματος τη χρονική στιγμή t_3 έχει αντίθετη φορά από τη φορά της ταχύτητάς του, ισχύει:

$$a > 0 \quad \text{ή} \quad -\omega^2 x > 0 \quad \text{ή} \quad x < 0. \text{ Είναι:}$$

$$v = -\omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad \text{ή} \quad v^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$$

$$\text{ή} \quad x = -\sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} \quad \text{ή} \quad x = -0,1 \text{ m.}$$

Επομένως, η επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t_3 είναι: $a = -\omega^2 x$

$$\text{ή} \quad a = +10 \text{ m/s}^2.$$

78. α. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{ή} \quad a = 0 \quad \text{ή} \quad -\omega^2 x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 0.$$

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t_1 \left(t_1 < \frac{T}{4}\right)$ το σώμα έχει θετική ταχύτητα, τη χρονική στιγμή $t = 0$ διέρχεται από το μέσον της τροχιάς του ($x = 0$) επίσης με θετική ταχύτητα.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \text{ (1).}$$

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = 0$ προκύπτει:

$$0 = A\eta\mu\varphi_0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_0 = 0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu 0 \text{ (2).}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (2) είναι:

$$\varphi_0 = 2\kappa\pi, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \text{ (3)}$$

$$\text{ή} \quad \varphi_0 = 2\kappa\pi + \pi, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \text{ (4).}$$

Επειδή είναι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$ από τις σχέσεις (3) και (4) για $\kappa = 0$ προκύπτουν: $\varphi_0 = 0$ και $\varphi_0 = \pi \text{ rad}$ αντίστοιχα.

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος είναι: $v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0)$ (5). Από τη σχέση (5) για $t = 0$ και $\varphi_0 = 0$ προκύπτει

$v = v_{\max} \sin \omega t > 0$, ενώ από την ίδια σχέση για $t = 0$ και $\varphi_0 = \pi$ rad προκύπτει $v = v_{\max} \sin \pi < 0$. Επειδή για $t = 0$ είναι $v > 0$, δεκτή λύση είναι η $\varphi_0 = 0$.

β. Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται σε μία θέση του θετικού ημιάξονα με απομάκρυνση x . Εφόσον τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα απέχει 0,2 m από το μέσον της τροχιάς του, ισχύει: $|x| = 0,2$ m ή $x = +0,2$ m.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Το πλάτος A της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$

$$\text{ή} \quad A = \sqrt{\frac{v^2}{\omega^2} + x^2} \quad \text{ή} \quad A = 0,4 \text{ m.}$$

Συνεπώς, η σχέση (1) γράφεται:

$$x = 0,4 \eta \mu(10t) \text{ (S.I.) (6).}$$

γ. Είναι: $\alpha = -\omega^2 x$ ή $\alpha = -20 \text{ m/s}^2$.

δ. Από τη σχέση (6) για $x = -0,2\sqrt{3}$ m προκύπτει: $-0,2\sqrt{3} = 0,4 \eta \mu(10t)$

$$\text{ή} \quad \eta \mu(10t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad \eta \mu(10t) = \eta \mu\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad (7).$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (7) είναι:

$$10t = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \quad \text{με} \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

$$\text{ή} \quad 10t = 2\kappa\pi + \frac{4\pi}{3}, \quad \text{με} \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (9).$$

Από τη σχέση (8) για $\kappa = 0, \kappa = 1$ και

$$\kappa = 2 \text{ προκύπτουν: } t = -\frac{\pi}{30} \text{ s, } t = \frac{\pi}{6} \text{ s}$$

$$\text{και } t = \frac{11\pi}{30} \text{ s αντίστοιχα.}$$

Από τη σχέση (9) για $\kappa = 0, \kappa = 1$ και

$$\kappa = 2 \text{ προκύπτουν: } t = \frac{4\pi}{30} \text{ s, } t = \frac{\pi}{3} \text{ s}$$

$$\text{και } t = \frac{16\pi}{30} \text{ s αντίστοιχα.}$$

Από τις παραπάνω χρονικές στιγμές το σώμα διέρχεται για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ από τη θέση $x = -0,2\sqrt{3}$ m, τη χρονική στιγμή $t = (4\pi/30)$ s.

79. α. Το υλικό σημείο διέρχεται από το μέσον της τροχιάς του ($x = 0$) κάθε $T/2$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης. Είναι: $\frac{T}{2} = 0,2\pi$ s ή $T = 0,4\pi$ s.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 5 \text{ rad/s}$.

β. Έστω x_1 η απομάκρυνση του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t_1 και A το πλάτος της ταλάντωσης. Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$\alpha = -\omega^2 x_1 \quad \text{ή} \quad x_1 = -\frac{\alpha}{\omega^2} \quad \text{ή} \quad x_1 = -0,2 \text{ m.}$$

Την ίδια χρονική στιγμή ισχύει:

$$v = -\omega \sqrt{A^2 - x_1^2} \quad \text{ή} \quad A = \sqrt{\frac{v^2}{\omega^2} + x_1^2}$$

$$\text{ή} \quad A = 0,2\sqrt{2} \text{ m.}$$

γ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου δίνεται από τη σχέση:

$$x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \quad (1).$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι ίση με μηδέν, η απομάκρυνσή του την ίδια χρονική στιγμή είναι $x = \pm A$. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η επιτάχυνση του υλικού σημείου είναι αρνητική, η απομάκρυνσή του την ίδια χρονική στιγμή είναι $x = +A$. Από την εξίσωση (1) για

$$t = 0 \text{ και } x = +A, \text{ προκύπτει: } \eta \mu \varphi_0 = 1$$

$$\text{ή} \quad \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots (2).$$

Εφόσον ισχύει $0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$ προκύπτει: $\phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του υλικού σημείου δίνεται από τη σχέση:

$$v = \omega A \sin(\omega t + \phi_0)$$

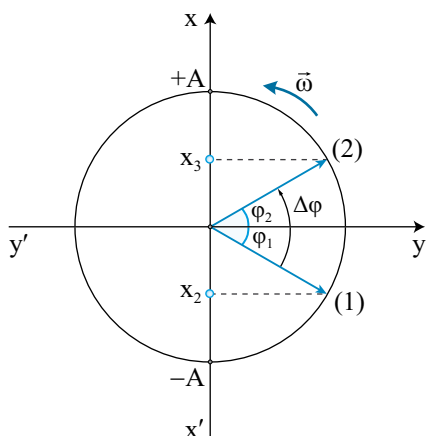
$$\text{ή } v = \sqrt{2} \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

δ. Έστω x η απομάκρυνση του υλικού σημείου τις χρονικές στιγμές στις οποίες η ταχύτητά του είναι $v = +\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ m/s}$. Είναι:

$$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2} \quad \text{ή} \quad v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

$$\text{ή } x = \pm \sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} \quad \text{ή} \quad x = \pm 0,1\sqrt{2} \text{ m}.$$

Ο ελάχιστος χρόνος που απαιτείται για να αποκτήσει το υλικό σημείο σε δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές ταχύτητα $v = +\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ m/s}$ είναι ίσος με τον ελάχιστο χρόνο που απαιτείται για να μεταβεί το υλικό σημείο από τη θέση $x_2 = -0,1\sqrt{2} \text{ m}$ απευθείας στη θέση $x_3 = +0,1\sqrt{2} \text{ m}$.



Ο χρόνος αυτός είναι ίσος με τον χρόνο Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρε-

φόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\phi$ που φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα. Από το σχήμα προκύπτει:

$$\eta\mu\phi_1 = \frac{|x_2|}{A} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\phi_1 = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \phi_1 = (\pi/6) \text{ rad}$$

$$\text{και } \eta\mu\phi_2 = \frac{|x_3|}{A} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\phi_2 = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \phi_2 = (\pi/6) \text{ rad}.$$

Επομένως, είναι: $\Delta\phi = \phi_1 + \phi_2$ ή $\Delta\phi = (\pi/3) \text{ rad}$.

Επειδή το περιστρεφόμενο διάνυσμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω , ισχύει: $\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ ή $\Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega}$ ή $\Delta t = (\pi/15) \text{ s}$.

80. α. Από τη σύγκριση της δοθείσας σχέσης $\alpha = -100x$ (S.I.) με τη σχέση $\alpha = -\omega^2 x$, προκύπτει ότι: $\omega^2 = 100 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Η απόσταση που διανύει το σημειακό αντικείμενο στη χρονική διάρκεια μίας περιόδου της ταλάντωσης είναι ίση με $4A$, όπου A το πλάτος της ταλάντωσης. Συνεπώς, ισχύει:

$$4A = 0,8 \text{ m} \quad \text{ή} \quad A = 0,2 \text{ m}.$$

Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας του σημειακού αντικειμένου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_{\max} = \omega A \quad \text{ή} \quad v_{\max} = 2 \text{ m/s}.$$

β. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημειακό αντικείμενο διέρχεται από το μέσον της τροχιάς του ($x = 0$) με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σημειακού αντικειμένου δίνεται από τη σχέση:

$$v = \omega A \sin(\omega t + \phi_0) \quad \text{ή} \quad v = 2 \sin(10t) \text{ (S.I.)}$$

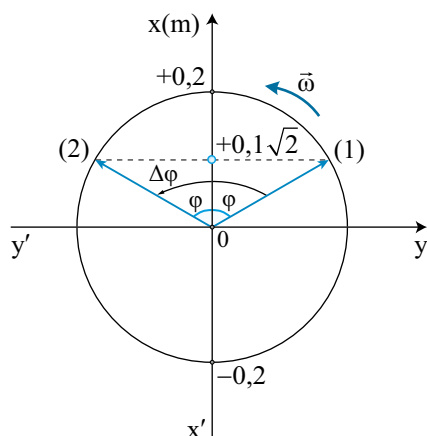
γ. Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$|v| = \frac{v_{\max}}{2} \quad \text{ή} \quad \omega \sqrt{A^2 - x^2} = \frac{\omega A}{2}$$

$$\text{ή} \quad x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} A \quad \text{ή} \quad x = \pm 0,1\sqrt{3} \text{ m}.$$

Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 το σημειακό αντικείμενο επιταχύνεται κινούμενο με αρνητική ταχύτητα, βρίσκεται σε μια θέση του θετικού ημιάξονα και κινείται προς το μέσον της τροχιάς του. Επομένως, είναι: $x = +0,1\sqrt{3} \text{ m}$.

δ. Ο ζητούμενος χρόνος μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια του περιστρεφόμενου διανύσματος και είναι ίσος με τον χρόνο Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\phi$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Από το σχήμα προκύπτει ότι:

$$\sin\varphi = \frac{0,1\sqrt{2}}{0,2} \quad \text{ή} \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ή} \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Η γωνία $\Delta\phi$ είναι: $\Delta\phi = 2\varphi$ ή $\Delta\phi = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$

$$\text{Ισχύει: } \omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} \quad \text{ή} \quad \Delta t = 0,05\pi \text{ s.}$$

81. α. Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων του σώματος από το μέσον της τροχιάς του ($x = 0$) είναι ίσος με $T/2$.

$$\text{Επομένως, είναι: } \frac{T}{2} = 0,1\pi \text{ s} \quad \text{ή} \quad T = 0,2\pi \text{ s.}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s.} \quad \text{Η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση: } a_{\max} = \omega^2 A \quad \text{ή} \quad a_{\max} = 40 \text{ m/s}^2.$$

β. Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα διέρχεται από μια θέση του θετικού ημιάξονα επιβραδυνόμενο, η ταχύτητά του v είναι θετική.

$$\text{Είναι: } v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad \text{ή} \quad v = +2\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

γ. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση: $a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0)$ ή $a = -40\eta\mu(10t) \text{ (S.I.)}$.

δ. Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος μεγιστοποιείται τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του ($x = \pm A$). Επομένως, η επιτάχυνση του σώματος μεγιστοποιείται δύο φορές σε κάθε πλήρη ταλάντωση.

Έστω N το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα στο χρονικό διάστημα Δt , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 10\pi \text{ s}$. Είναι: $N = f\Delta t$ ή $N = \frac{\Delta t}{T}$ ή $N = 50$ ταλαντώσεις.

Επομένως, το πλήθος των μεγιστοποιήσεων του μέτρου της επιτάχυνσης του σώματος στο χρονικό διάστημα Δt είναι: $N' = 2N$ ή $N' = 100$ φορές.

82. α. Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος μεγιστοποιείται κάθε $T/2$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης.

Είναι: $\frac{T}{2} = 0,05\pi \text{ s}$ ή $T = 0,1\pi \text{ s}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης, είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \omega = 20 \text{ rad/s.}$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητα του σώματος είναι ίση με μηδέν ($v = 0$), το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται σε μία από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του ($x = \pm A$). Την ίδια χρονική στιγμή ισχύει:

$$a = -\omega^2 x \quad \text{ή} \quad x = -\frac{a}{\omega^2} \quad \text{ή} \quad x = +0,4 \text{ m.}$$

Επομένως, είναι: $A = |x| = 0,4 \text{ m}$.

β. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (1).$$

Από την εξίσωση (1) για $t = 0$ και

$$x = +0,4 \text{ m} \text{ προκύπτει: } +0,4 = 0,4\eta\mu\varphi_0$$

$$\text{ή } \eta\mu\varphi_0 = 1 \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2}$$

$$\text{ή } \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (2).$$

Εφόσον είναι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$, προκύπτει: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Επομέ-

νως, είναι: $x = 0,4\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$.

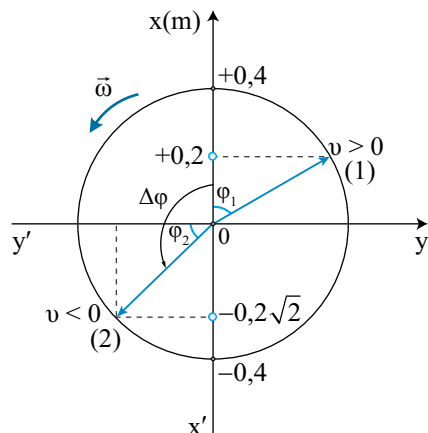
γ. Είναι: $|v| = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ ή $v^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$

$$\text{ή } x = \pm\sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} \quad \text{ή} \quad x = \pm 0,2\sqrt{3} \text{ m.}$$

Επομένως, η ζητούμενη απόσταση είναι:

$$d = 2|x| \quad \text{ή} \quad d = 0,4\sqrt{3} \text{ m.}$$

δ. Ο ζητούμενος χρόνος είναι ίσος με τον χρόνο Δt που απαιτείται για να μεταβεί το περιστρεφόμενο διάνυσμα από τη θέση (1) απευθείας στη θέση (2) που φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



Έστω φ_1 η οξεία γωνία που σχηματίζει το περιστρεφόμενο διάνυσμα με τον άξονα $x'x$ στη θέση (1). Από το σχήμα προκύπτει ότι:

$$\sin\varphi_1 = \frac{x_1}{A} \quad \text{ή} \quad \sin\varphi_1 = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \varphi_1 = (\pi/3) \text{ rad.}$$

Έστω φ_2 η οξεία γωνία που σχηματίζει το περιστρεφόμενο διάνυσμα με τον άξονα $y'y$ στη θέση (2). Από το σχήμα προκύπτει ότι:

$$\eta\mu\varphi_2 = \frac{|x_2|}{A} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ή} \quad \varphi_2 = (\pi/4) \text{ rad.}$$

Η γωνία $\Delta\varphi$ που διαγράφει το περιστρεφόμενο διάνυσμα κατά την απευθείας μετάβαση του από τη θέση (1) στη θέση (2), είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \text{ rad} + \varphi_2 \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ rad}$$

$$\text{ή} \quad \Delta\varphi = (13\pi/12) \text{ rad.}$$

$$\text{Είναι: } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \quad \text{ή} \quad \Delta t = (13\pi/240) \text{ s.}$$

83. α. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημειακού αντικειμένου δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$.

Από την εξίσωση (1) για $t = 0$

$$\text{και } x = +A, \text{ προκύπτει: } +A = A\eta\mu\varphi_0$$

$$\text{ή } \eta\mu\varphi_0 = 1 \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2}$$

ή $\varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ (2).

Εφόσον είναι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ rad, από τη σχέση

(2) για $\kappa = 0$, προκύπτει: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad.

β. Ισχύει: $v_1 = -\omega\sqrt{A^2 - x_1^2}$

ή $v_1^2 = \omega^2(A^2 - x_1^2)$ (2) και $v_2 = +\omega\sqrt{A^2 - x_2^2}$

ή $v_2^2 = \omega^2(A^2 - x_2^2)$ (3).

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (2) και

(3) προκύπτει: $\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{A^2 - x_1^2}{A^2 - x_2^2}$ ή $A = 0,2$ m.

Από τη σχέση (2) για $A = 0,2$ m, προκύπτει:

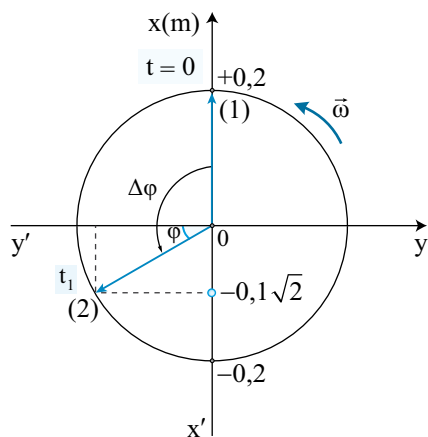
$\omega = 10$ rad/s.

γ. Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σημειακού αντικειμένου δίνεται από τη σχέση:

$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0)$

ή $a = -20 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.).

δ. Η ζητούμενη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με τον χρόνο Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\varphi$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω φ η οξεία γωνία που σχηματίζει το περιστρεφόμενο διάνυσμα με τον άξονα $y'y$ τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\eta\mu\varphi = \frac{|x_2|}{A}$

ή $\eta\mu\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\varphi = (\pi/4)$ rad.

Η γωνία $\Delta\varphi$ είναι: $\Delta\varphi = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ rad

ή $\Delta\varphi = (3\pi/4)$ rad.

Είναι: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ ή $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$ ή $\Delta t = (3\pi/40)$ s

ή $t_1 = 0,075\pi$ s.

84. α. Η δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος γράφεται:

$x = 0,5 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.) (1).

Από τη σύγκριση της σχέσης (1) με τη σχέση $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ προκύπτει:

$A = 0,5$ m, $\omega = 10$ rad/s και $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad.

β. Επειδή το σώμα διέρχεται από μία θέση του αρνητικού ημιιάξονα επιταχυνόμενο, κινείται προς τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα. Επομένως, ισχύει: $v = +\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

ή $v = +3$ m/s.

γ. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$

ή $v = 5 \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.).

δ. Επειδή το σώμα επιβραδύνεται έχοντας αρνητική ταχύτητα, βρίσκεται σε μία θέση του αρνητικού ημιιάξονα και κινείται προς την ακραία αρνητική του θέση. Είναι:

$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ ή $v^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$

ή $x = -\sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}}$ ή $x = -0,3$ m.

Η επιτάχυνση του σώματος προκύπτει:

$$a = -\omega^2 x \quad \text{ή} \quad a = +30 \text{ m/s}^2.$$

85. α. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με την εξίσωση $v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0)$ προκύπτει: $v_{\max} = 2 \text{ m/s}$, $\omega = 10 \text{ rad/s}$

$$\text{και } \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

Το πλάτος A της ταλάντωσης του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_{\max} = \omega A$

$$\text{ή } A = \frac{v_{\max}}{\omega} \quad \text{ή} \quad A = 0,2 \text{ m.}$$

β. Είναι: $x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } x = 0,2 \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I.) (1)}$$

$$\text{και } a = -\omega^2 A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή } a = -20 \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Από τη σχέση (1) για $t = t_1 = \frac{\pi}{30} \text{ s}$ προκύ-

$$\text{πτει: } x_1 = 0,2 \eta \mu \left(\frac{5\pi}{6} \right) \text{ m} \quad \text{ή} \quad x_1 = +0,1 \text{ m.}$$

Από τη σχέση (2) για $t = t_2 = \frac{\pi}{10} \text{ s}$ προκύπτει:

$$x_2 = 0,2 \eta \mu \left(\frac{3\pi}{2} \right) \text{ m} \quad \text{ή} \quad x_2 = -0,2 \text{ m.}$$

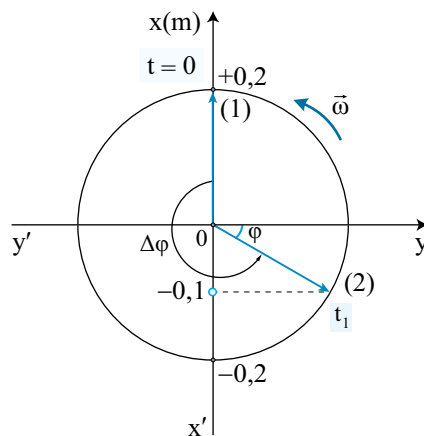
Η απόσταση μεταξύ των δύο θέσεων είναι:

$$d = x_1 + |x_2| \quad \text{ή} \quad d = 0,3 \text{ m.}$$

δ. Από τη σχέση (1) για $t = 0$ προκύπτει:

$$x = +0,2 \text{ m.}$$

Η ζητούμενη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με τον χρόνο Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta \varphi$ που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Από το σχήμα προκύπτει ότι:

$$\eta \mu \varphi = \frac{|x|}{A} \quad \text{ή} \quad \eta \mu \varphi = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \varphi = (\pi/6) \text{ rad.}$$

Η γωνία $\Delta \varphi$ είναι:

$$\Delta \varphi = \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \Delta \varphi = \frac{4\pi}{3} \text{ rad.}$$

$$\text{Είναι: } \omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta \varphi}{\omega}$$

$$\text{ή } \Delta t = (4\pi/30) \text{ s} \quad \text{ή} \quad t_1 = (4\pi/30) \text{ s.}$$

86. α. Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t} \quad (1).$$

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι για $t = 0$ είναι $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$. Από το διάγραμμα προκύπτει,

$$\text{ακόμη, ότι για } t = 0,2\pi \text{ s είναι } \varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad.}$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (1), προκύπτει: $\omega = 5 \text{ rad/s}$.

β. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση: $x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$ (2).

Από τη σχέση (2) για $t = 0$ προκύπτει:

$$x = A \eta \mu \varphi_0 \quad \text{ή} \quad x = A \eta \mu \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad \text{ή} \quad x = +A.$$

Η απόσταση d της θέσης όπου βρίσκεται το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ ($x = +A$) από τη θέση μέγιστης αρνητικής απομάκρυνσης ($x = -A$) είναι: $d = 2A$ ή $A = \frac{d}{2}$ ή $A = 0,4 \text{ m}$.

γ. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή } v = 2 \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

δ. Η επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή στην οποία η φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi = (11\pi/6) \text{ rad}$, υπολογίζεται από τη σχέση: $\alpha = -\alpha_{\max} \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ ή $\alpha = -\omega^2 A \eta\mu\varphi$

$$\text{ή } \alpha = -10 \eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right) \text{ m/s}^2 \text{ ή } \alpha = -5 \text{ m/s}^2.$$

87. α. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι για $x = -0,1 \text{ m}$ είναι: $\alpha = +10 \text{ m/s}^2$.

Η γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\alpha = -\omega^2 x$

$$\text{ή } \omega = 10 \text{ rad/s}.$$

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει επίσης ότι $\alpha_{\max} = 20 \text{ m/s}^2$. Το πλάτος A της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\alpha_{\max} = \omega^2 A$

$$\text{ή } A = 0,2 \text{ m}.$$

β. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η επιτάχυνση του σώματος είναι ίση με μηδέν, ισχύει: $\alpha = -\omega^2 x$ ή $x = 0$.

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας ($x = 0$) με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = 0$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$x = A \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \text{ ή } x = 0,2 \eta\mu(10t) \text{ (S.I.)}$$

γ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $|v| = 1 \text{ m/s}$. Είναι:

$$|v| = \omega \sqrt{A^2 - x^2} \text{ ή } x = \pm \sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}}$$

$$\text{ή } x = \pm 0,1\sqrt{3} \text{ m}.$$

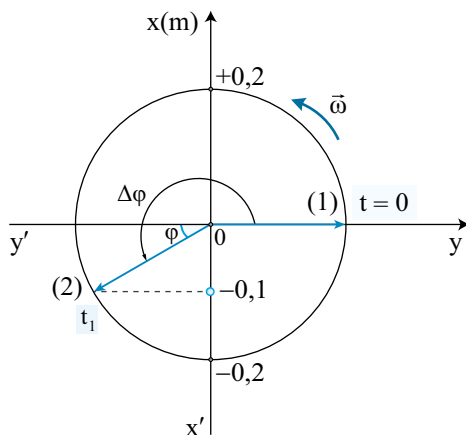
Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές είναι:

$$|a| = \omega^2 |x| \text{ ή } |a| = 10\sqrt{3} \text{ m/s}^2.$$

δ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία η ταχύτητά του είναι $v = -\sqrt{3} \text{ m/s}$ για δεύτερη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$. Είναι: $v = \omega \sqrt{A^2 - x_1^2}$

$$\text{ή } x_1 = -\sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} \text{ ή } x_1 = -0,1 \text{ m}.$$

Η ζητούμενη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με τον χρόνο Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\varphi$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω φ η οξεία γωνία που σχηματίζει το περιστρεφόμενο διάνυσμα με τον άξονα $y'y$ τη χρονική στιγμή t_1 . Από το σχήμα προκύπτει

$$\text{ότι: } \eta\mu\varphi = \frac{|x_1|}{A} \text{ ή } \eta\mu\varphi = \frac{0,1}{0,2} \text{ ή } \eta\mu\varphi = \frac{1}{2}$$

ή $\varphi = (\pi/6)$ rad. Η γωνία $\Delta\varphi$ είναι:

$$\Delta\varphi = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = (7\pi/6) \text{ rad}.$$

$$\text{Είναι: } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \quad \text{ή} \quad t_1 = (7\pi/60) \text{ s}.$$

88. α. Έστω T η περίοδος της ταλάντωσης. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι:

$$\frac{5T}{4} = 0,5\pi \text{ s} \quad \text{ή} \quad T = 0,4\pi \text{ s}.$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \omega = 5 \text{ rad/s}.$$

Από το διάγραμμα προκύπτει ακόμη ότι για $t = 0$ είναι $x = +A$.

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

β. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή $t = (\pi/30) \text{ s}$ η απομάκρυνση του σώματος είναι $x = +0,4\sqrt{3} \text{ m}$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (1).

Από τη σχέση (1) για $t = (\pi/30) \text{ s}$

και $x = +0,4\sqrt{3} \text{ m}$, προκύπτει:

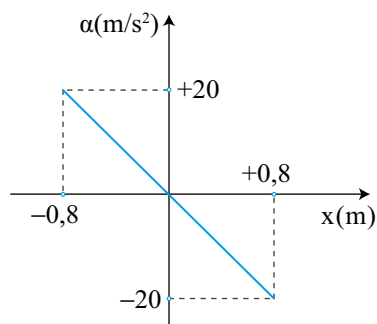
$$0,4\sqrt{3} \text{ m} = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{ή} \quad A = 0,8 \text{ m}.$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση: $v = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή} \quad v = 4\sigma\upsilon\nu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}.$$

γ. Είναι: $\alpha = -\omega^2 x$ ή $\alpha = -25x \text{ (S.I.)}$.

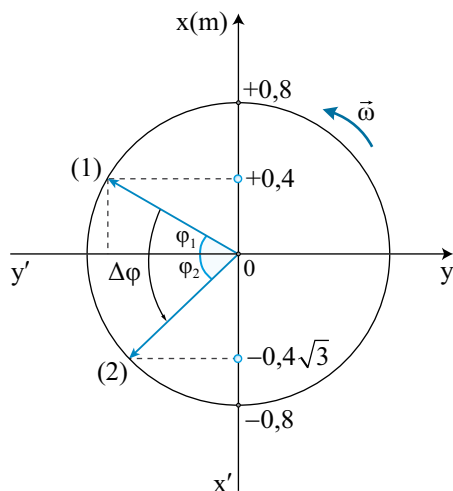
Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης a του σώματος σε συνάρτηση με την απομάκρυνση.



δ. Έστω x_K η απομάκρυνση του σώματος στη θέση Κ. Είναι: $\alpha_K = -\omega^2 x_K$ ή $x_K = -\frac{\alpha_K}{\omega^2}$
ή $x_K = +0,4 \text{ m}$.

Έστω x_Λ η απομάκρυνση του σώματος στη θέση Λ. Είναι: $\alpha_\Lambda = -\omega^2 x_\Lambda$ ή $x_\Lambda = -\frac{\alpha_\Lambda}{\omega^2}$
ή $x_\Lambda = -0,4\sqrt{3} \text{ m}$.

Ο ελάχιστος χρόνος μετάβασης του σώματος από τη θέση Κ (1) στη θέση Λ (2) είναι ίσος με τον χρόνο Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\varphi$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Από το σχήμα προκύπτει ότι:

$$\eta\mu\varphi_1 = \frac{x_K}{A} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_1 = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \varphi_1 = (\pi/6) \text{ rad}$$

$$\text{και} \quad \eta\mu\varphi_2 = \frac{|x_\Lambda|}{A} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ή $\varphi_2 = (\pi/3) \text{ rad}$. Η γωνία $\Delta\varphi$ είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = (\pi/2) \text{ rad}.$$

$$\text{Είναι: } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \quad \text{ή} \quad \Delta t = 0,1\pi \text{ s}.$$

89. α. Έστω T η περίοδος της ταλάντωσης.

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι:

$$v_{\max} = 4 \text{ m/s} \quad \text{και} \quad \frac{3T}{4} = 0,15\pi \text{ s} \quad \text{ή} \quad T = 0,2\pi \text{ s}.$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Το πλάτος A της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $v_{\max} = \omega A$ ή $A = 0,4 \text{ m}$.

β. Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$ (βλέπε βασική άσκηση 7, ερώτημα γ). Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή} \quad x = 0,4\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

γ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες η ταχύτητά του είναι $v = +2\sqrt{3} \text{ m/s}$. Είναι: $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$$\text{ή} \quad x = \pm\sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} \quad \text{ή} \quad x = \pm 0,2 \text{ m}.$$

Εφόσον το σώμα τις παραπάνω χρονικές στιγμές κινείται προς το μέσον της τροχιάς του ($x = 0$) με θετική ταχύτητα είναι $x = -0,2 \text{ m}$.

$$\text{Επομένως, είναι: } \frac{dv}{dt} = \alpha \quad \text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x$$

$$\text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = +20 \text{ m/s}^2.$$

δ. Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $|v| = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$, είναι: $x = \pm 0,2 \text{ m}$.

Η ελάχιστη απόσταση του σώματος από την ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του είναι:

$$d_{\min} = A - |x| \quad \text{ή} \quad d_{\min} = 0,2 \text{ m}.$$

Η μέγιστη απόσταση του σώματος από την ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του είναι:

$$d_{\max} = |A| + |x| \quad \text{ή} \quad d_{\max} = 0,6 \text{ m}.$$

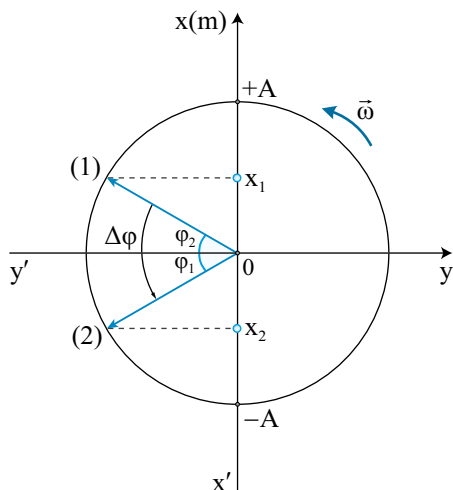
90. α. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = 0,2 \text{ m}$.

Από το διάγραμμα προκύπτει, ακόμη, ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσης. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

β. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι το ελάχιστο χρονικό διάστημα Δt για να μεταβεί το σώμα από τη θέση με απομάκρυνση $x_1 = +0,1 \text{ m}$ στη θέση με απομάκρυνση $x_2 = -0,1 \text{ m}$ είναι:

$$\Delta t = \left(t_1 + \frac{\pi}{15} \text{ s}\right) - t_1 \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\pi}{15} \text{ s}.$$

Το παραπάνω χρονικό διάστημα Δt ισούται με τον χρόνο που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\varphi$ που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Από το σχήμα προκύπτει ότι:

$$\eta\mu\varphi_1 = \frac{x_1}{A} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_1 = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \varphi_1 = (\pi/6) \text{ rad}$$

$$\text{και } \eta\mu\varphi_2 = \frac{|x_2|}{A} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_2 = \frac{1}{2}$$

ή $\varphi_2 = (\pi/6) \text{ rad}$. Η γωνία $\Delta\varphi$ είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}.$$

$$\text{Είναι: } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \omega = 5 \text{ rad/s}.$$

γ. Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$a = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή } a = -5 \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

δ. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση

$$v = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή } v = 1 \sigma\upsilon\nu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

Από την τελευταία σχέση για $t = \frac{\pi}{30} \text{ s}$ προκύ-

$$\text{πτει: } v = 1 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{ή} \quad v = -0,5 \text{ m/s}.$$

3.2 Απλή αρμονική ταλάντωση: Δυναμική προσέγγιση

ΘΕΜΑΤΑ Α

Θέματα πολλαπλής επιλογής

7. δ	8. β	9. γ	10. δ	11. β	12. γ	13. α	14. α	15. δ
16. β	17. α	18. β	19. α	20. δ	21. β			

Θέματα του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

22.	α. Σ	β. Λ	γ. Σ	δ. Λ	ε. Λ
23.	α. Σ	β. Σ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Λ

24. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Το σώμα που είναι αναρτημένο στο ελατήριο (1) ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T_1}{2}$ (1), ενώ το σώμα που είναι αναρτημένο στο ελατήριο (2) ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{T_2}{2}$ (2).

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει: $\frac{t_1}{t_2} = \frac{T_1}{T_2}$ (3).

Είναι: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}$ (4) και $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}}$ (5).

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (4) και

(5) προκύπτει: $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{m_1}{k_1} \cdot \frac{k_2}{m_2}}$ ή $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{m_1 k_2}{m_2 k_1}}$

ή $T_1 = 2T_2$ (6).

Από τη σχέση (3), λόγω της σχέσης (6), προκύπτει: $t_1 = 2t_2$.

Επομένως, το σώμα που είναι αναρτημένο στο ελατήριο (1) ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά αργότερα από το σώμα που είναι αναρτημένο στο ελατήριο (2).

25. Σωστή επιλογή είναι η β .

Η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος (1)

δίνεται από τη σχέση: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$ (1).

Η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος (2)

δίνεται από τη σχέση: $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$ (2).

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και

(2) προκύπτει: $\frac{T_1}{T_2} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$ ή $T_1 = 2T_2$.

Το σώμα (1) διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή:

$t_1 = \frac{T_1}{4}$ ή $t_1 = \frac{2T_2}{4}$ ή $t_1 = \frac{T_2}{2}$ (3).

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα (2) βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του, τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T_2}{2}$ θα βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του.

26. Α. Σωστή επιλογή είναι η β .

Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος είναι: $A = 2\Delta\ell$. Ο ζητούμενος λόγος είναι:

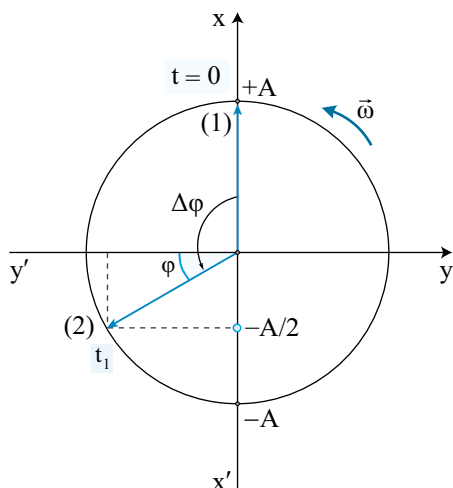
$$\frac{\Sigma F_{\max}}{F_{\varepsilon\lambda(\max)}} = \frac{kA}{k(\Delta\ell + A)} \quad \text{ή} \quad \frac{\Sigma F_{\max}}{F_{\varepsilon\lambda(\max)}} = \frac{2}{3}.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η β .

Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά για την ταλάντωση τη φορά προς τα κάτω, τότε η απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x = +A$. Τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα διέρχεται από τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος η απομάκρυνσή του είναι: $x = -\Delta\ell$ ή $x = -\frac{A}{2}$.

Η χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος ισούται με το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται για

να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\varphi$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Από το σχήμα προκύπτει ότι:

$$\eta\mu\varphi = \frac{|x|}{A} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \varphi = (\pi/6) \text{ rad.}$$

Επομένως, είναι:

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = (2\pi/3) \text{ rad.}$$

Επειδή το περιστρεφόμενο διάνυσμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\bar{\omega}$,

$$\text{ισχύει: } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\frac{\Delta\varphi}{2\pi}} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{T\Delta\varphi}{2\pi}$$

$$\text{ή} \quad \Delta t = \frac{T}{3} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{T}{3}.$$

27. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του γίνεται μέγιστο κάθε φορά που το σώμα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του ($x = -A$). Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά για την ταλάντωση τη φορά προς τα πάνω, τότε τη χρονική στιγμή $t = 0$ εί-

ναι $x = 0$ και $v > 0$. Επομένως, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = 0$. Η ζητούμενη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x = A\eta\mu(\omega t_1) \quad \text{ή} \quad -A = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t_1\right)$$

$$\text{ή} \quad \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t_1\right) = -1 \quad \text{ή} \quad \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t_1\right) = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\text{ή} \quad \frac{2\pi}{T}t_1 = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}.$$

Από την τελευταία σχέση για $\kappa = 0$ προκύπτει:

$$\frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{3\pi}{2} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{3T}{4}.$$

28. Σωστή επιλογή είναι η α.

Από το διάγραμμα του σχήματος προκύπτουν:

$$\alpha_{\max(1)} = \alpha_{\max(2)} \quad \text{και} \quad A_2 = 4A_1.$$

$$\text{Είναι: } \alpha_{\max(1)} = \alpha_{\max(2)} \quad \text{ή} \quad \omega_1^2 A_1 = \omega_2^2 A_2$$

$$\text{ή} \quad \omega_1^2 A_1 = \omega_2^2 4A_1 \quad \text{ή} \quad \omega_1^2 = 4\omega_2^2 \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 2\omega_2.$$

Για τις σταθερές k_1 και k_2 των δύο ελατηρίων, ισχύει: $k_1 = m\omega_1^2$ (1) και $k_2 = m\omega_2^2$ (2).

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει: $k_1 = 4k_2$.

29. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Όταν τα δύο σώματα βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους, τα μέτρα των δυνάμεων επαναφοράς που δέχονται είναι ίσα με τις μέγιστες τιμές τους. Είναι: $\Sigma F_{\max(1)} = \Sigma F_{\max(2)}$

$$\text{ή} \quad k_1 A_1 = k_2 A_2 \quad \text{ή} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{k_2}{k_1}.$$

30. Σωστή επιλογή είναι η α.

Από το διάγραμμα του σχήματος προκύπτουν:

$$A_1 = A_2 \quad \text{και} \quad \Sigma F_{\max(1)} > \Sigma F_{\max(2)} \quad (1). \text{ Από τη σχέση}$$

$$(1) \text{ έχουμε: } D_1 A_1 > D_2 A_2 \quad \text{ή} \quad k_1 A_1 > k_2 A_2$$

$$\text{ή} \quad k_1 > k_2 \quad \text{ή} \quad m\omega_1^2 > m\omega_2^2 \quad \text{ή} \quad \omega_1 > \omega_2.$$

Για τις φάσεις φ_1 και φ_2 των ταλαντώσεων των σωμάτων (1) και (2), αντίστοιχα, μία τυχαία χρονική στιγμή t ισχύει: $\varphi_1 = \omega_1 t$ (1) και

$$\varphi_2 = \omega_2 t$$
 (2).

Επειδή είναι: $\omega_1 > \omega_2$, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $\varphi_1 > \varphi_2$.

31. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = |\Sigma F| \quad \text{ή} \quad \left| \frac{dp}{dt} \right| = D|x| \quad (1).$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, τη χρονική στιγμή $t = T/4$ θα βρίσκεται σε μία από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του ($x = \pm A$). Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (1) τη χρονική στιγμή $t = T/4$ το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος είναι ίσο με τη μέγιστη τιμή του.

32. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Οι γωνιακές συχνότητες της ταλάντωσης των σωμάτων (1) και (2) δίνονται, αντίστοιχα, από

$$\text{τις σχέσεις: } \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad (1) \text{ και } \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και

$$(2) \text{ προκύπτει: } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{k_1 m_2}{k_2 m_1}} \quad \text{ή} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2} \quad (3).$$

Οι μέγιστες ταχύτητες ταλάντωσης των σωμάτων (1) και (2) δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις: $v_{\max(1)} = \omega_1 A_1$ (4) και $v_{\max(2)} = \omega_2 A_2$ (5).

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (4) και

$$(5), \text{ έχουμε: } \frac{v_{\max(1)}}{v_{\max(2)}} = \frac{\omega_1 A_1}{\omega_2 A_2} \quad \text{ή} \quad \frac{v_{\max(1)}}{v_{\max(2)}} = \frac{\omega_1 d}{\omega_2 d}$$

$$\text{ή, λόγω της σχέσης (3): } \frac{v_{\max(1)}}{v_{\max(2)}} = \frac{1}{2}.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Οι μέγιστες δυνάμεις επαναφοράς που δέχονται τα σώματα (1) και (2) κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής τους δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις:

$$\Sigma F_{\max(1)} = D_1 A_1 \quad (6) \quad \text{και} \quad \Sigma F_{\max(2)} = D_2 A_2 \quad (7).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (6) και

$$(7), \text{ έχουμε: } \frac{\Sigma F_{\max(1)}}{\Sigma F_{\max(2)}} = \frac{D_1 A_1}{D_2 A_2}$$

$$\text{ή} \quad \frac{\Sigma F_{\max(1)}}{\Sigma F_{\max(2)}} = \frac{k_1 d}{k_2 d} \quad \text{ή} \quad \frac{\Sigma F_{\max(1)}}{\Sigma F_{\max(2)}} = \frac{1}{2}.$$

33. α. Έστω T η περίοδος της ταλάντωσης.

Είναι: $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{40} \text{ s}$ ή $T = \frac{\pi}{10} \text{ s}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης, είναι:

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 20 \text{ rad/s}$.

β. Η δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο σώμα δίνεται από τη σχέση:

$\Sigma F = -Dx$ ή $\Sigma F = -m\omega^2 x$ (1).

Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 είναι $x = +0,2 \text{ m}$ και $\Sigma F = -80 \text{ N}$, από τη σχέση (1) προκύπτει: $m = 1 \text{ kg}$.

γ. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι ίση με μηδέν ($\varphi_0 = 0$). Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης δίνεται από τη σχέση:

$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0)$

ή $a = -160 \sin(20t)$ (S.I.).

δ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες η επιτάχυνσή του είναι: $a = -160 \text{ m/s}^2$. Είναι: $a = -\omega^2 x_1$

ή $x_1 = +0,4 \text{ m}$ ή $x_1 = +A$. Επομένως, τις παραπάνω χρονικές στιγμές το σώμα βρίσκεται στη θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης, οπότε η ταχύτητά του είναι: $v = 0$.

34. α. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει:

$\Sigma F_{\max} = 100 \text{ N}$ και $A = 0,5 \text{ m}$.

Είναι: $\Sigma F_{\max} = DA$ ή $D = 200 \text{ N/m}$.

β. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 .

Είναι: $\Sigma F = -Dx$ ή $x = +0,25 \text{ m}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $\omega = 20 \text{ rad/s}$.

Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$ ή $v = -5\sqrt{3} \text{ m/s}$.

γ. Επειδή για $t = 0$ είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος είναι η: $v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$

ή $v = 10 \sin\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.).

δ. Είναι: $a = -\omega^2 x$ ή $0 = -\omega^2 x$ ή $x = 0$.

Επομένως, η επιτάχυνση του σώματος μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του.

Έστω t_2 η χρονική στιγμή στην οποία η επιτάχυνση του σώματος μηδενίζεται για δεύτερη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$. Είναι:

$t_2 = \frac{3T}{4}$ ή $t_2 = \frac{3}{4} \frac{2\pi}{\omega}$ ή $t_2 = 0,075\pi \text{ s}$.

35. α. Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του δίνεται από τη σχέση:

$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ή, αλγεβρικά: $\Sigma F = F_1 + F_2$

ή $\Sigma F = 100x - 150x$ (S.I.)

ή $\Sigma F = -50x$ (S.I.) (1).

Επομένως, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι το υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = 50 \text{ N/m}$.

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$

$$\text{ή } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 10 \text{ rad/s. Το πλάτος } A \text{ της ταλά-}$$

ντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_0 = v_{\max} \text{ ή } v_0 = \omega A \text{ ή } A = 0,2 \text{ m.}$$

Επειδή για $t = 0$ είναι $x = 0$ και $v > 0$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$

$$\text{ή } x = 0,2\eta\mu(10t) \text{ (S.I.).}$$

γ. Έστω N το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί το υλικό σημείο στο χρονικό διάστημα Δt , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = \pi$ s. Είναι: $N = \frac{\Delta t}{T}$, όπου $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\text{ή } T = 0,2\pi \text{ s, ή } N = 5 \text{ ταλαντώσεις.}$$

Στη χρονική διάρκεια μίας πλήρους ταλάντωσης το σώμα διανύει διάστημα $s = 4A$. Επομένως, μετά από 5 πλήρεις ταλαντώσεις το διάστημα που έχει διανύσει το υλικό σώμα είναι: $s' = Ns$ ή $s' = 20A$ ή $s' = 4 \text{ m}$.

δ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$\frac{dv}{dt} = a \text{ ή } \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_1 \text{ ή } x_1 = -0,1\sqrt{3} \text{ m.}$$

Επειδή αμέσως μετά τη χρονική στιγμή t_1 το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας (επιτάχυνσης) του σώματος αυξάνεται, το σώμα τη χρονική στιγμή t_1 κινείται προς τη θέση με απομάκρυνση $x = -A$. Επομένως, η ταχύτητα v του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι αρνητική και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v = -\omega\sqrt{A^2 - x_1^2} \text{ ή } v = -1 \text{ m/s.}$$

36. α. Βλέπε λύση βασικής άσκησης 3, ερώτημα α. $T = 0,2\pi$ s.

β. (Βλέπε λύση βασικής άσκησης 3, ερώτημα γ.). Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης το σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$

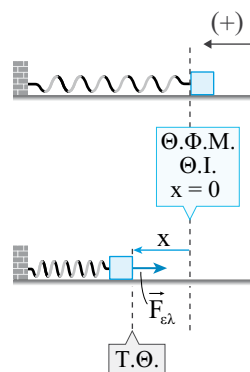
$$\text{ή } x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

γ. (Βλέπε λύση βασικής άσκησης 3, ερώτημα β.) Είναι: $v = -\omega A$ ή $v = -2 \text{ m/s}$.

$$\delta. \text{ Είναι: } \left|\frac{dp}{dt}\right|_{\max} = \Sigma F_{\max} \text{ ή } \left|\frac{dp}{dt}\right|_{\max} = DA$$

$$\text{ή } \left|\frac{dp}{dt}\right|_{\max} = kA \text{ ή } \left|\frac{dp}{dt}\right| = 20 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

37. α. Θεωρούμε την τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν θεωρήσουμε ως θετική τη φορά της απομάκρυνσης x , τότε για την συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα στη θέση αυτήν, ισχύει: $\Sigma F = -F_{ελ}$ ή $\Sigma F = -kx$.

Επομένως, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m\omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ή} \quad \omega = 20 \text{ rad/s.}$$

β. Εφόσον το σώμα αφήνεται ελεύθερο ($\vec{v} = \vec{0}$) να κινηθεί από τη θέση όπου το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά d , το πλάτος της ταλάντωσης του είναι: $A = d$ ή $A = 0,4 \text{ m}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ (1).

Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x = +A$. Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = +A$ προκύπτει: $+A = A\eta\mu\phi_0$ ή $\eta\mu\phi_0 = 1$

$$\text{ή} \quad \eta\mu\phi_0 = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ή} \quad \phi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},$$

με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ (2).

Εφόσον είναι: $0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$ από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$, προκύπτει $\phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση: $a = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$

$$\text{ή} \quad a = -160\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Έστω t_1 η ζητούμενη χρονική στιγμή.

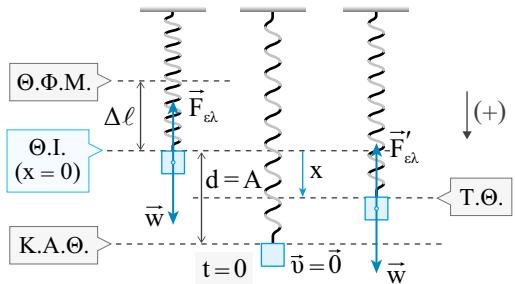
$$\text{Είναι: } t_1 = \frac{T}{2} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{2} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{\pi}{\omega}$$

$$\text{ή} \quad t_1 = 0,05\pi \text{ s.}$$

δ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο είναι $F_{ελ} = 80 \text{ N}$. Είναι: $|F_{ελ}| = k|x_1|$ ή $|x_1| = 0,2 \text{ m}$.

Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές υπολογίζεται από τη σχέση: $|v| = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2}$ ή $|v| = 4\sqrt{3} \text{ m/s}$.

38. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση ισορροπίας του είναι το βάρος του $\vec{w}$ και η δύναμη από το ελατήριο $\vec{F}_{ελ}$. Έστω $\Delta\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος. Στη θέση ισορροπίας του σώματος, ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$
ή $w - F_{ελ} = 0$ ή $mg = k\Delta\ell$ (1).



Έστω η τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του (βλ. σχήμα). Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά τη φορά της απομάκρυνσης x , τότε για τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα στην τυχαία θέση ισχύει: $\Sigma F = w - F'_{ελ}$ ή $\Sigma F = mg - k(\Delta\ell + x)$ ή $\Sigma F = mg - k\Delta\ell - kx$, ή, λόγω της σχέσης (1): $\Sigma F = -kx$ (2).

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

Η περίοδος της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ ή $T = 0,2\pi \text{ s}$.

β. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ (3).

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα αφήνεται ελεύθερο ($\vec{v} = \vec{0}$) να κινηθεί από τη θέση όπου το εκτρέψαμε. Επομένως, το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος είναι: $A = d$ ή $A = 0,3 \text{ m}$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$: είναι $x = +A$.

Από τη σχέση (3) για $t = 0$ και $x = +A$, προκύπτει: $+A = A\eta\mu\varphi_0$ ή $\eta\mu\varphi_0 = 1$

$$\text{ή } \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ ή } \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},$$

με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ (4).

Εφόσον είναι: $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ rad, από τη σχέση (4) για $\kappa = 0$, προκύπτει $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad. Η γωνιακή

συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 10$ rad/s.

Συνεπώς, η σχέση (3) γράφεται:

$$x = 0,3\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

γ. Η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι:

$$t = \frac{3T}{4} \text{ ή } t = 0,15\pi \text{ s.}$$

δ. Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του γίνεται μέγιστο στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του. Είναι:

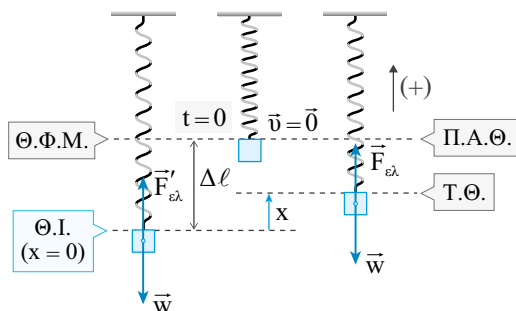
$$F_{\varepsilon\lambda(\max)} = k(\Delta\ell + A) \text{ (5). Από τη σχέση (1)}$$

$$\text{προκύπτει: } \Delta\ell = \frac{mg}{k} \text{ ή } \Delta\ell = 0,1 \text{ m.}$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (5), προκύπτει: $F_{\varepsilon\lambda(\max)} = 40 \text{ N}$.

Εφόσον είναι: $A > \Delta\ell$, το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του γίνεται ελάχιστο τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα διέρχεται από τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Είναι: $F_{\varepsilon\lambda(\min)} = 0$.

39. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση ισορροπίας του είναι το βάρος του $\vec{w}$ και η δύναμη από το ελατήριο $\vec{F}'_{\varepsilon\lambda}$.



Έστω $\Delta\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος.

Στη θέση ισορροπίας του σώματος, ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } w - F'_{\varepsilon\lambda} = 0 \text{ ή } mg = k\Delta\ell \text{ (1).}$$

Στη τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος με απομάκρυνση x που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, ισχύει: $\Sigma F = F_{\varepsilon\lambda} - w$

$$\text{ή } \Sigma F = k(\Delta\ell - x) - mg \text{ ή } \Sigma F = k\Delta\ell - kx - mg$$

$$\text{ή, λόγω της σχέσης (1): } \Sigma F = -kx.$$

Επομένως, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο: $D = m\omega^2$

$$\text{ή } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \text{ ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ ή } \omega = 5 \text{ rad/s.}$$

Εφόσον τη χρονική $t = 0$ το σώμα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, το πλάτος της ταλάντωσης του είναι: $A = \Delta\ell$. Από τη σχέση

$$(1) \text{ προκύπτει: } \Delta\ell = \frac{mg}{k} \text{ ή } A = \frac{mg}{k}$$

$$\text{ή } A = 0,4 \text{ m.}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (2).

Από τη σχέση (2) για $t = 0$ και $x = +A$ προκύπτει: $+A = A\eta\mu\varphi_0$ ή $\eta\mu\varphi_0 = 1$

$$\text{ή } \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ ή } \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},$$

με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ (3).

Εφόσον είναι: $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη σχέση

(3) για $\kappa = 0$, προκύπτει $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Επομένως, η σχέση (2) γράφεται:

$$x = 0,4\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}.$$

γ. Θεωρούμε τη τυχαία θέση με απομάκρυνση $x(x > 0)$ που φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα. Στη θέση αυτήν ισχύει: $\Sigma F = -Dx$

$$\text{ή } F_{ελ} - w = -kx \text{ ή } F_{ελ} = mg - kx$$

$$\text{ή } F_{ελ} = mg - kA\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή } F_{ελ} = 40 - 40\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}.$$

δ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τις χρονικές στιγμές στις οποίες διέρχεται από μία θέση του αρνητικού ημιάξονα κινούμενο με ταχύτητα μέτρου

$$v = \sqrt{3} \text{ m/s. Είναι: } v = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2}$$

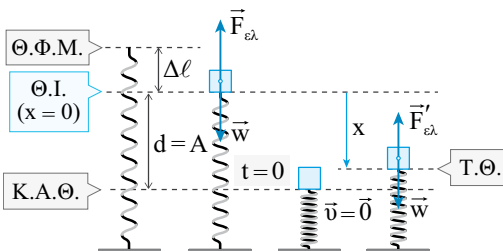
$$\text{ή } v^2 = \omega^2(A^2 - x_1^2) \text{ ή } x_1 = -\sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}}$$

$$\text{ή } x_1 = -0,2 \text{ m.}$$

Εφόσον είναι $x_1 < 0$, το σώμα βρίσκεται σε μία θέση κάτω από τη θέση ισορροπίας του. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο τις χρονικές στιγμές στις οποίες βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση x_1 είναι: $F'_{ελ} = k(\Delta\ell + |x_1|)$ ή $F'_{ελ} = 60 \text{ N}$.

40. α. Για να αποδείξουμε ότι η κίνηση του σώματος είναι απλή αρμονική ταλάντωση, αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα σε μία τυχαία θέση της τροχιάς του είναι της μορφής: $\Sigma F = -Dx$

όπου D η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης και x η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του.



Το σώμα αρχικά ισορροπεί με το ελατήριο συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell$. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση ισορροπίας του είναι το βάρος του $\vec{w}$ και η δύναμη από το ελατήριο $\vec{F}_{ελ}$. Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F_{ελ} = 0$ ή $mg = k\Delta\ell$ (1).

Έστω η τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του. Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά τη φορά της απομάκρυνσης x , τότε για τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα στην τυχαία θέση ισχύει: $\Sigma F = w - F'_{ελ}$ ή $\Sigma F = mg - k(\Delta\ell + x)$ ή $\Sigma F = mg - k\Delta\ell - kx$ ή, λόγω της σχέσης (1): $\Sigma F = k\Delta\ell - k\Delta\ell - kx$ ή $\Sigma F = -kx$ (2).

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η κίνηση του σώματος είναι απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$ ή $D = 100 \text{ N/m}$. Η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

$$\text{ή } \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

β. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί από τη θέση όπου το εκτρέψαμε, οπότε η θέση αυτή είναι η κάτω

ακραία θέση της ταλάντωσης του και το πλάτος της ταλάντωσης είναι:

$$A = d \text{ ή } A = 0,1\sqrt{2} \text{ m.}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (3). Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x = +A$.

Από τη σχέση (3) για $t = 0$ και $x = +A$ προκύπτει: $+A = A\eta\mu\varphi_0$ ή $\eta\mu\varphi_0 = 1$

$$\text{ή } \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ ή } \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},$$

με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ (4).

Εφόσον είναι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη σχέση (4) για $\kappa = 0$, προκύπτει $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση: $v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } v = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή } v = \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Η δύναμη που δέχεται το σώμα από το ελατήριο γίνεται ίση με μηδέν τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα διέρχεται από τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Στη θέση αυτή είναι $x = -\Delta\ell$, ή λόγω της σχέσης (1): $x = -\frac{mg}{k}$ ή $x = -0,1 \text{ m}$.

Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές υπολογίζεται από τη σχέση: $|v| = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ ή $|v| = 1 \text{ m/s}$.

δ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τις χρονικές στιγμές στις οποίες η επιτάχυνσή του είναι $a = +10 \text{ m/s}^2$.

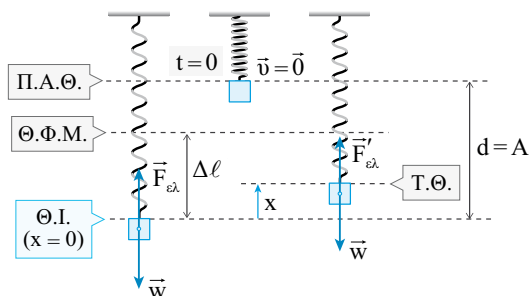
$$\text{Είναι: } a = -\omega^2 x_1 \text{ ή } x_1 = -\frac{a}{\omega^2} \text{ ή } x_1 = -0,1 \text{ m.}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές υπολογίζεται

$$\text{από τη σχέση: } \frac{dp}{dt} = \Sigma F \text{ ή } \frac{dp}{dt} = -Dx$$

$$\text{ή } \frac{dp}{dt} = -kx \text{ ή } \frac{dp}{dt} = +10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

41. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση ισορροπίας του είναι το βάρος του $\vec{w}$ και η δύναμη από το ελατήριο $\vec{F}_{\text{ελ}}$.



Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \text{ ή } w - F_{\text{ελ}} = 0 \text{ ή } mg = k\Delta\ell \text{ (1).}$$

Στην τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος με απομάκρυνση x που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, ισχύει: $\Sigma F = F'_{\text{ελ}} - w$

$$\text{ή } \Sigma F = k(\Delta\ell - x) - mg \text{ ή } \Sigma F = k\Delta\ell - kx - mg$$

$$\text{ή, λόγω της σχέσης (1): } \Sigma F = -kx.$$

Επομένως, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

β. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (2).

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα αφήνεται ελεύθερο ($\vec{v} = \vec{0}$) να κινηθεί από τη θέση όπου το εκτρέψαμε. Επομένως, το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = d$ ή $A = 0,2 \text{ m}$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x = +A$.

Από τη σχέση (2) για $t = 0$ και $x = +A$, προκύπτει: $+A = A\eta\mu\varphi_0$ ή $\eta\mu\varphi_0 = 1$

$$\text{ή } \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ ή } \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},$$

με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ (4).

Εφόσον ισχύει $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ rad, από τη σχέση (4) για $\kappa = 0$, προκύπτει $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται

$$\text{από τη σχέση: } D = m\omega^2 \text{ ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \text{ή } \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Συνεπώς, η σχέση (2) γράφεται:

$$x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο γίνεται μέγιστο τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του ($x = -A$). Η ζητούμενη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$t_1 = \frac{T}{2} \text{ ή } t_1 = \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{2} \text{ ή } t_1 = \frac{\pi}{\omega} \text{ ή } t_1 = 0,1\pi \text{ s.}$$

δ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τις χρονικές στιγμές στις οποίες ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του είναι: $\frac{dp}{dt} = -20 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$. Είναι: $\frac{dp}{dt} = \Sigma F$

$$\text{ή } \frac{dp}{dt} = -Dx_1 \text{ ή } \frac{dp}{dt} = -kx_1 \text{ ή } x_1 = +0,1 \text{ m.}$$

Εφόσον $x_1 > 0$, το σώμα βρίσκεται σε μία θέση πάνω από τη θέση ισορροπίας του. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $\Delta\ell = \frac{mg}{k}$ ή $\Delta\ell = 0,1 \text{ m}$. Εφόσον ισχύει $x_1 = +\Delta\ell$, το σώμα βρίσκεται στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Στη θέση αυτήν ισχύει: $F_{ελ} = 0$.

42. α. Η περίοδος της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \text{ ή } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ ή } T = 0,4\pi \text{ s.}$$

β. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι:

$$A = x_0 \text{ ή } A = 0,3 \text{ m.}$$

Εφόσον για $t = 0$ είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\varphi_0 = (\pi/2)$ rad.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ ή } \omega = 5 \text{ rad/s. Η χρονική εξίσωση της}$$

δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του δίνεται από τη σχέση: $\Sigma F = -DA\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } \Sigma F = -30\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) (1).}$$

γ. Από τη σχέση (1) για $t = \frac{T}{2} = 0,2\pi \text{ s}$, προ-

$$\text{κύπτει: } \frac{dp}{dt} = \Sigma F \text{ ή } \frac{dp}{dt} = -30\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

$$\text{ή } \frac{dp}{dt} = +30 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

δ. Έστω $\Delta\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος. Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F_{ελ} = 0$

ή $mg = k\Delta\ell$ ή $\Delta\ell = 0,4 \text{ m}$. Επειδή είναι $A < \Delta\ell$, το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο γίνεται ελάχιστο στην πάνω ακραία θέση της τροχιάς του. Δηλαδή, είναι: $F_{ελ(\min)} = k(\Delta\ell - A)$

$$\text{ή } F_{ελ(\min)} = 10 \text{ N.}$$

43. α. Για τη δοθείσα χρονική στιγμή

$$t = (\pi/20) \text{ s ισχύει: } t = \frac{T}{4} \text{ ή } T = 0,2\pi \text{ s.}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ ή } \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Η μάζα του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $k = m\omega^2$ ή $m = 2 \text{ kg}$.

β. Το πλάτος A της ταλάντωσης του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ ή $v = \omega\sqrt{A^2 - \Delta\ell^2}$ (1), όπου $\Delta\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος. Στη Θ.Ι. του σώματος ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή } w - F_{ελ} = 0 \text{ ή } mg = k\Delta\ell \text{ ή } \Delta\ell = 0,1 \text{ m.}$$

Από τη σχέση (1) με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών προκύπτει: $A = 0,2 \text{ m}$.

Επειδή για $t = 0$ είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \text{ ή } x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Θεωρούμε μια τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος με απομάκρυνση x ($x > 0$) από τη θέση ισορροπίας του. Είναι: $\Sigma F = F_{ελ} + w$ ή $-Dx = F_{ελ} + mg$ ή $F_{ελ} = -mg - kx$ ή $F_{ελ} = -mg - kA\eta\mu(\omega t + \phi_0)$

$$\text{ή } F_{ελ} = -20 - 40\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

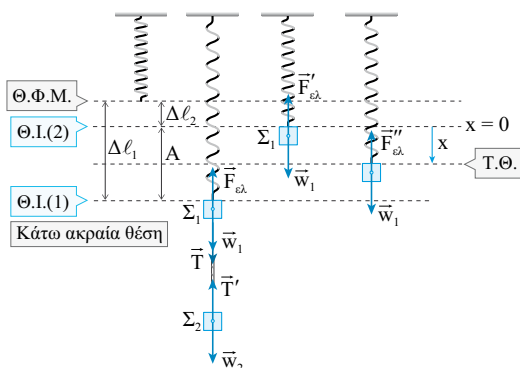
δ. Το μέτρο της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα γίνεται μέγιστο στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης του. Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο στην **πάνω ακραία θέση** είναι:

$$F_{ελ} = k(A - \Delta\ell) = 20 \text{ N.}$$

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο στην **κάτω ακραία θέση** είναι: $F_{ελ} = k(\Delta\ell + A) = 60 \text{ N}$.

44. α. Στο επόμενο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα Σ_1 και

Σ_2 στη θέση ισορροπίας του συστήματός τους [Θ.Ι.(1)] καθώς και οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_1 στη θέση ισορροπίας του [Θ.Ι.(2)], γύρω από την οποία εκτελεί ταλάντωση μετά την κοπή του νήματος.



Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(2)].

Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 , ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F'_{ελ} = 0$ ή $mg = k\Delta\ell_2$ (1).

Θεωρούμε την τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος Σ_1 με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του [Θ.Ι.(2)] που φαίνεται στο σχήμα. Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά τη φορά της απομάκρυνσης x , τότε για τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα Σ_1 στην τυχαία θέση ισχύει:

$$\Sigma F = w - F''_{ελ} \text{ ή } \Sigma F = mg - k(\Delta\ell_2 + x)$$

$$\text{ή } \Sigma F = mg - k\Delta\ell_2 - kx$$

$$\text{ή, λόγω της σχέσης (1): } \Sigma F = -kx.$$

Επομένως, το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m\omega^2 \text{ ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ ή } \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 [Θ.Ι.(1)]. Στη θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 + w_2 + T - T' - F_{ελ} = 0$

$$\text{ή } 2mg = k\Delta\ell_1 \quad \text{ή } \Delta\ell_1 = 0,2 \text{ m.}$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\Delta\ell_2 = \frac{mg}{k} \quad \text{ή } \Delta\ell_2 = 0,1 \text{ m.}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 είναι: $A = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2$ ή $A = 0,1 \text{ m.}$

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad.}$ Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ή } x = 0,1\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Επειδή είναι $A = \Delta\ell_2$, το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ_1 από το ελατήριο γίνεται ελάχιστο τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα διέρχεται από τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος.

Δηλαδή, είναι $F_{ελ} = 0$.

Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο γίνεται μέγιστο στην κάτω ακραία θέση της τροχιάς του. Δηλαδή είναι:

$$F_{ελ(max)} = k(\Delta\ell_2 + A) \quad \text{ή } F_{ελ(max)} = 20 \text{ N.}$$

δ. Εφόσον είναι $\Delta\ell > \Delta\ell_2$, το σώμα βρίσκεται σε μια θέση κάτω από τη θέση ισορροπίας του. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του. Είναι:

$$x_1 = +(\Delta\ell - \Delta\ell_2) \quad \text{ή } x_1 = +0,05 \text{ m.}$$

Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής υπολογίζεται

$$\text{από τη σχέση: } \frac{dp}{dt} = \Sigma F \quad \text{ή } \frac{dp}{dt} = -Dx_1$$

$$\text{ή } \frac{dp}{dt} = -5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

45. α. Βλέπε λύση βασικής άσκησης 5, ερώτημα α.

β. Στη Θ.Ι. του σώματος ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή } w_x - F_{ελ} = 0$$

$$\text{ή } mg\eta\mu\varphi = k\Delta\ell \quad (1) \quad \text{ή } k = 100 \text{ N/m.}$$

γ. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$

ή $k = m\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{50} \text{ rad/s.}$ Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση: $a_{\max} = \omega^2 A$ ή $A = 0,4 \text{ m.}$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή στην οποία βρίσκεται στη θέση $x = +\frac{A}{2}$ είναι:

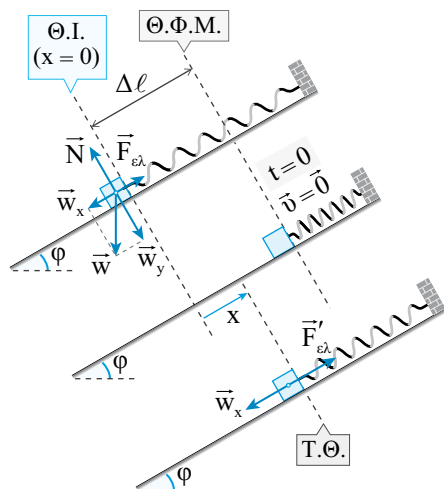
$$\left|\frac{dv}{dt}\right| = \omega^2 |x| \quad \text{ή } \left|\frac{dv}{dt}\right| = 10 \text{ m/s}^2.$$

δ. Η απομάκρυνση x_1 του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος είναι: $x_1 = \pm\Delta\ell$ ή $x_1 = \pm 0,1 \text{ m.}$

Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $v = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2}$

$$\text{ή } v = \sqrt{7,5} \text{ m/s.}$$

46. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση ισορροπίας του είναι το βάρος του $\vec{w}$, η δύναμη από το ελατήριο $\vec{F}_{ελ}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το κεκλιμένο επίπεδο. Αναλύουμε το βάρος $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες $\vec{w}_x$ και $\vec{w}_y$ (βλ. στο επόμενο σχήμα).



Έστω $\Delta\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος. Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή } w_x - F_{\epsilon\lambda} = 0 \text{ ή } m g \eta \mu \varphi = k \Delta\ell \quad (1).$$

Στην τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, ισχύει:

$$\Sigma F = F'_{\epsilon\lambda} - w_x \text{ ή } \Sigma F = k(\Delta\ell - x) - m g \eta \mu \varphi$$

$$\text{ή } \Sigma F = k \Delta\ell - kx - m g \eta \mu \varphi,$$

$$\text{ή, λόγω της σχέσης (1): } \Sigma F = -kx.$$

Επομένως, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
ή $\omega = 5 \text{ rad/s}$.

β. Εφόσον το σώμα αφήνεται ελεύθερο ($\vec{v} = \vec{0}$) να κινηθεί στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = \Delta\ell$ ή λόγω της σχέσης (1):

$$A = \frac{m g \eta \mu \varphi}{k} \text{ ή } A = 0,2 \text{ m}.$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$ (2).

Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x = +A$. Από τη σχέση (2) για $t = 0$ και $x = +A$, προκύπτει: $+A = A \eta \mu \varphi_0$ ή $\eta \mu \varphi_0 = 1$

$$\text{ή } \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \left(\frac{\pi}{2} \right) \text{ ή } \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (3).$$

Εφόσον είναι: $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη σχέση (3) για $\kappa = 0$, προκύπτει: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα δίνεται από τη σχέση:

$$\Sigma F = -Dx \text{ ή } \Sigma F = -k A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή } \Sigma F = -20 \eta \mu \left(5t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Από τη σχέση (2) για $t = \frac{\pi}{15} \text{ s}$ προκύπτει:

$$x = 0, 2 \eta \mu \left(\frac{5\pi}{6} \right) \text{ m ή } x = +0,1 \text{ m}.$$

Το μέτρο της δύναμης επαναφοράς που δέχεται το σώμα τη χρονική στιγμή $t = (\pi/15) \text{ s}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$|\Sigma F| = D|x| \text{ ή } F = k|x| \text{ ή } |\Sigma F| = 10 \text{ N}.$$

Τη χρονική στιγμή $t = (\pi/15) \text{ s}$ το σώμα βρίσκεται σε μία θέση του θετικού ημιιάξονα, δηλαδή σε μία θέση πάνω από τη θέση ισορροπίας του. Επομένως, το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο είναι: $F_{\epsilon\lambda} = k(\Delta\ell - x)$ ή $F_{\epsilon\lambda} = k(A - x)$ ή $F_{\epsilon\lambda} = 10 \text{ N}$.

δ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τις χρονικές στιγμές στις οποίες η δύναμη επαναφοράς που δέχεται είναι $\Sigma F = +10\sqrt{3} \text{ N}$. Είναι: $\Sigma F = -Dx_1$

$$\text{ή } \Sigma F = -kx_1 \text{ ή } x_1 = -0,1\sqrt{3} \text{ m}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές υπολογίζεται από τη σχέση: $|v| = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2}$ ή $|v| = 0,5 \text{ m/s}$.

47. α. Βλέπε λύση βασικής άσκησης 6, ερώτημα α.

β. Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος είναι: $A = d$ ή $A = 0,2 \text{ m}$.

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m\omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \quad \text{ή} \quad \omega = 20 \text{ rad/s}.$$

Η χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς δίνεται από τη σχέση:

$$\Sigma F = -Dx \quad \text{ή} \quad \Sigma F = -DA\eta\mu(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = -80\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.}).$$

γ. Η επιτάχυνση του σώματος γίνεται ίση με μηδέν τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του.

Η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι:

$$t = \frac{T}{4} \quad \text{ή} \quad t = \frac{(2\pi/\omega)}{4} \quad \text{ή} \quad t = \frac{\pi}{40} \text{ s}.$$

δ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το μέτρο της δύναμης που δέχεται από το ελατήριο (1) είναι $F_{ελ(1)} = 30 \text{ N}$. Είναι: $F_{ελ(1)} = k_1|x|$ ή $|x| = 0,1 \text{ m}$.

Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad \text{ή} \quad v = 2\sqrt{3} \text{ m/s}.$$

48. α. Το σώμα στη θέση ισορροπίας του, στη διεύθυνση της κίνησής του, δέχεται τη δύναμη $\vec{F}'_{ελ(1)}$ από το ελατήριο (1) και τη δύναμη $\vec{F}'_{ελ(2)}$ από το ελατήριο (2). Στη Θ.Ι. του σώματος ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $F'_{ελ(2)} - F'_{ελ(1)} = 0$ ή $k_1\Delta\ell_1 = k_2\Delta\ell_2$ (1).

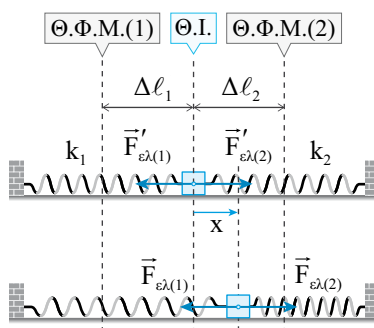
Έστω η τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά τη φορά της απομάκρυνσης x , τότε για τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα στη θέση αυτήν ισχύει: $\Sigma F = F_{ελ(2)} - F_{ελ(1)}$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = k_2(\Delta\ell_2 - x) - k_1(\Delta\ell_1 + x)$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = k_2\Delta\ell_2 - k_2x - k_1\Delta\ell_1 - k_1x$$

$$\text{ή λόγω της σχέσης (1): } \Sigma F = -(k_1 + k_2)x.$$

Επομένως, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k_1 + k_2$.



β. Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\Delta\ell_2 = \frac{k_1\Delta\ell_1}{k_2} \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_2 = 0,3 \text{ m}.$$

γ. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = 0,4 \text{ m}$. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι: $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης

είναι: $\varphi_0 = (\pi/2)$ rad. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m\omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \quad \text{ή} \quad \omega = 5 \text{ rad/s.}$$

Θεωρούμε την τυχαία θέση στον θετικό ημιάξονα με απομάκρυνση x ($x > 0$) που φαίνεται στο σχήμα.

Η αλγεβρική τιμή της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο (1) δίνεται από τη σχέση: $F_{ελ(1)} = -k_1(\Delta\ell_1 + x)$

$$\text{ή} \quad F_{ελ(1)} = -k_1\Delta\ell_1 - kx$$

$$\text{ή} \quad F_{ελ(1)} = -k_1\Delta\ell_1 - k_1A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή} \quad F_{ελ(1)} = -7,5 - 30\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

Η αλγεβρική τιμή της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο (2) δίνεται από τη σχέση: $F_{ελ(2)} = +k_2(\Delta\ell_2 - x)$

$$\text{ή} \quad F_{ελ(2)} = k_2\Delta\ell_2 - k_2x$$

$$\text{ή} \quad F_{ελ(2)} = k_2\Delta\ell_2 - k_2A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή} \quad F_{ελ(2)} = -7,5 - 10\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

δ. Τη χρονική στιγμή στην οποία το σώμα ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά βρίσκεται στη θέση $x = -A$. Επομένως, ισχύει:

$$\frac{|F_{ελ(1)}|}{|F_{ελ(2)}|} = \frac{k_1|\Delta\ell_1 - A|}{k_2|\Delta\ell_2 + A|} \quad \text{ή} \quad \frac{|F_{ελ(1)}|}{|F_{ελ(2)}|} = \frac{9}{7}.$$

49. α. Έστω T η περίοδος της ταλάντωσης του σώματος. Το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κάθε $T/2$.

$$\text{Είναι: } \frac{T}{2} = 0,05\pi \text{ s} \quad \text{ή} \quad T = 0,1\pi \text{ s.}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:
 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 20 \text{ rad/s}$. Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο: $D = m\omega^2$ ή $D = 400 \text{ N/m}$.

β. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t_1 .

$$\text{Είναι: } \frac{dp}{dt} = -Dx_1 \quad \text{ή} \quad x_1 = -0,2\sqrt{3} \text{ m.}$$

Το πλάτος A της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $v = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2}$

$$\text{ή} \quad v^2 = \omega^2(A^2 - x_1^2) \quad \text{ή} \quad A = \sqrt{\frac{v^2}{\omega^2} + x_1^2}$$

$$\text{ή} \quad A = 0,4 \text{ m.}$$

γ. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητα του σώματος είναι ίση με μηδέν ($\vec{v} = \vec{0}$), το σώμα βρίσκεται σε μια από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του ($x = \pm A$).

Επιπλέον, επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η δύναμη επαναφοράς που δέχεται το σώμα είναι αρνητική ($\Sigma F < 0$), η απομάκρυνση του την ίδια χρονική στιγμή, σύμφωνα με τη σχέση $\Sigma F = -Dx$, είναι θετική. Επομένως, για $t = 0$ είναι: $x = +A = +0,4 \text{ m}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (1).

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = +0,4 \text{ m}$, προκύπτει: $+0,4 = 0,4\eta\mu\varphi_0$ ή $\eta\mu\varphi_0 = 1$

$$\text{ή} \quad \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ή} \quad \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots (2).$$

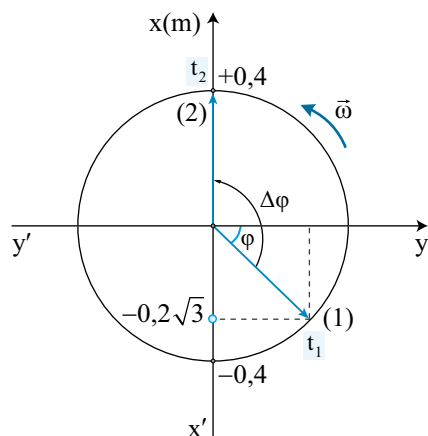
Επειδή ισχύει $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$ προκύπτει: $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$$x = 0,4\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

δ. Το μέτρο της δύναμης επαναφοράς γίνεται μέγιστο στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης του σώματος.

Το ζητούμενο χρονικό διάστημα Δt είναι ίσο με τον χρόνο που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\varphi$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Από το σχήμα προκύπτει ότι: $\eta\mu\varphi = \frac{x_1}{A}$

$$\text{ή} \quad \eta\mu\varphi = \frac{0,2\sqrt{3}}{0,4} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

Η γωνία $\Delta\varphi$ που διαγράφει το περιστρεφόμενο διάνυσμα από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}.$$

Επειδή το περιστρεφόμενο διάνυσμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\bar{\omega}$, ισχύει: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ ή $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$ ή $\Delta t = (\pi/24) \text{ s}$.

50. α. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει

ότι: $\frac{T}{2} = 0,1\pi \text{ s}$ ή $T = 0,2\pi \text{ s}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει, επίσης, ότι $\Sigma F_{\max} = 20 \text{ N}$. Το πλάτος A της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\Sigma F_{\max} = DA$

$$\text{ή} \quad A = \frac{\Sigma F_{\max}}{m\omega^2} \quad \text{ή} \quad A = 0,2 \text{ m}.$$

β. Από το διάγραμμα προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ η δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο σώμα είναι $\Sigma F = 0$. Επομένως, τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι: $\Sigma F = -Dx$ ή $x = 0$. Αμέσως μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ η δύναμη επαναφοράς γίνεται αρνητική ($\Sigma F < 0$), οπότε σύμφωνα με τη σχέση $\Sigma F = -Dx$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι θετική ($x > 0$). Επομένως, τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα ($v > 0$). Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (1).

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = 0$, προκύπτει: $0 = A\eta\mu\varphi_0$ ή $\eta\mu\varphi_0 = 0$ ή $\eta\mu\varphi_0 = \eta\mu 0$ (2).

Εφόσον είναι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, οι λύσεις της εξίσωσης (2) είναι: $\varphi_0 = 0$ ή $\varphi_0 = \pi \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση: $v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0)$ (3). Από τη σχέση (3) για $t = 0$ και $\varphi_0 = 0$, προκύπτει: $v = v_{\max} \sin 0 > 0$, ενώ από την ίδια σχέση για $t = 0$ και $\varphi_0 = \pi \text{ rad}$, προκύπτει:

$$v = v_{\max} \sin \pi < 0.$$

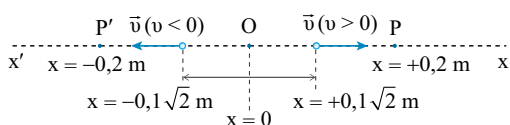
Αφού για $t = 0$ είναι $v > 0$, δεκτή λύση είναι η $\varphi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$a = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ή} \quad a = -20\eta\mu(10t) \text{ (S.I.)}.$$

γ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τις χρονικές στιγμές στις οποίες η ταχύτητά του είναι $v = +\sqrt{2} \text{ m/s}$.

$$\text{Είναι: } v = +\omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad \text{ή} \quad x = \pm\sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} \\ \text{ή} \quad x = \pm 0,1\sqrt{2} \text{ m}.$$

Εφόσον το σώμα επιβραδύνεται και η ταχύτητά του είναι θετική, βρίσκεται στη θέση $x = +0,1\sqrt{2} \text{ m}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (αν βρισκόταν στη θέση $x = -0,1\sqrt{2} \text{ m}$ επιβραδυνόμενο, η ταχύτητά του θα ήταν αρνητική).



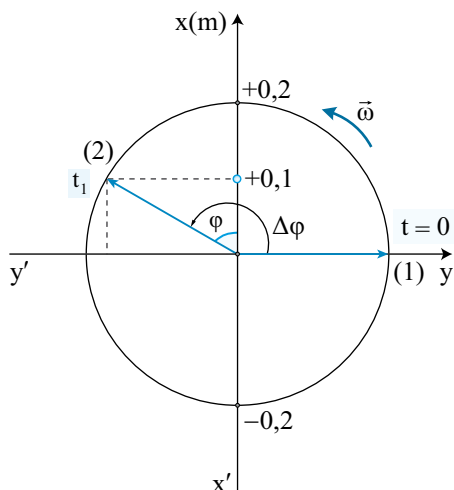
$$\text{Συνεπώς, ισχύει: } \frac{dp}{dt} = -Dx \quad \text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = -m\omega^2 x$$

$$\text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = -10\sqrt{2} \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

δ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τις χρονικές στιγμές στις οποίες η δύναμη επαναφοράς που δέχεται είναι $\Sigma F = -10 \text{ N}$. Είναι: $\Sigma F = -Dx_1$

$$\text{ή } x_1 = -\frac{\Sigma F}{D} \quad \text{ή } x_1 = -\frac{\Sigma F}{m\omega^2} \quad \text{ή } x_1 = +0,1 \text{ m.}$$

Η ζητούμενη χρονική στιγμή t_1 ισούται με τον χρόνο Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\phi$ που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Η οξεία γωνία ϕ που σχηματίζει το περιστρεφόμενο διάνυσμα με τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\text{συν}\phi = \frac{x_1}{A} \quad \text{ή } \text{συν}\phi = \frac{0,1}{0,2} \quad \text{ή } \text{συν}\phi = \frac{1}{2}$$

$$\text{ή } \phi = (\pi/3) \text{ rad.}$$

Επομένως, η γωνία $\Delta\phi$ που διαγράφει το περιστρεφόμενο διάνυσμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 , είναι:

$$\Delta\phi = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \text{ rad} \quad \text{ή } \Delta\phi = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\text{Είναι: } \omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad \text{ή } \Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} \quad \text{ή } t_1 = (\pi/12) \text{ s.}$$

51. α. Από τη σύγκριση της δοθείσας σχέσης με τη σχέση: $\Sigma F = -Dx$, προκύπτει:

$D = 50 \text{ N/m}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m\omega^2 \quad \text{ή } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{ή } \omega = 5 \text{ rad/s.}$$

Έστω x η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή $t = 0$.

$$\text{Είναι: } \Sigma F = -Dx \quad \text{ή } x = +0,5 \text{ m.}$$

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητα του σώματος είναι ίση με μηδέν, το σώμα τη χρονική στιγμή αυτή βρίσκεται στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του.

Επομένως, είναι: $A = x$ ή $A = 0,5 \text{ m}$.

β. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ (1).

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = +A$ προκύπτει: $+A = A\eta\mu\phi_0$ ή $\eta\mu\phi_0 = 1$

$$\text{ή } \eta\mu\phi_0 = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ή } \phi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},$$

με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ (2).

Εφόσον είναι $0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$ προκύπτει: $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα δίνεται από τη σχέση:

$$\Sigma F = -Dx \quad \text{ή } \Sigma F = -DA\eta\mu(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή } \Sigma F = -25\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της ταχύτητάς του είναι

$$|v| = 2 \text{ m/s. Είναι: } |v| = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2}$$

$$\text{ή } x_1 = \pm\sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} \quad \text{ή } x_1 = \pm 0,3 \text{ m.}$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές υπολογίζεται από τη σχέση:

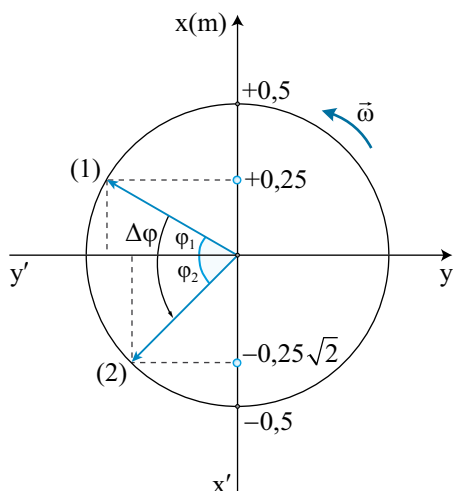
$$\left|\frac{dp}{dt}\right| = D|x_1| \quad \text{ή } \left|\frac{dp}{dt}\right| = 15 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

δ. Στη θέση Κ ισχύει: $\Sigma F_{(K)} = -Dx_K$

ή $x_K = +0,25 \text{ m}$. Στη θέση Λ ισχύει:

$$\Sigma F_{(\Lambda)} = -Dx_{\Lambda} \quad \text{ή} \quad x_{\Lambda} = -0,25\sqrt{2} \text{ m}.$$

Ο ελάχιστος χρόνος κίνησης του σώματος μεταξύ των θέσεων Κ (1) και Λ (2) είναι ίσος με τον χρόνο Δt που απαιτείται για να μεταβεί το περιστρεφόμενο διάνυσμα από τη θέση (1) απευθείας στη θέση (2) που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Από το σχήμα προκύπτει ότι: $\eta\mu\phi_1 = \frac{x_K}{A}$

$$\text{ή} \quad \eta\mu\phi_1 = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \phi_1 = (\pi/6) \text{ rad} \quad \text{και} \quad \eta\mu\phi_2 = \frac{|x_{\Lambda}|}{A}$$

$$\text{ή} \quad \eta\mu\phi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ή} \quad \phi_2 = (\pi/4) \text{ rad}.$$

Η γωνία $\Delta\phi$ που διαγράφει το περιστρεφόμενο διάνυσμα κατά την απευθείας μετάβασή του από τη θέση (1) στη θέση (2), είναι:

$$\Delta\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad \text{ή} \quad \Delta\phi = \frac{5\pi}{12} \text{ rad}.$$

$$\text{Είναι:} \quad \omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} \quad \text{ή} \quad \Delta t = (\pi/12) \text{ s}.$$

52. α. Έστω Α το πλάτος της ταλάντωσης. Είναι: $s = 2A$ ή $A = 0,4 \text{ m}$. Η αρχική συσπείρωση d του ελατηρίου είναι ίση με το πλάτος της ταλάντωσης. Επομένως, είναι: $d = 0,4 \text{ m}$.

β. Έστω Τ η περίοδος της ταλάντωσης. Είναι:

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{20} \text{ s} \quad \text{ή} \quad T = \frac{\pi}{10} \text{ s}.$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \omega = 20 \text{ rad/s}.$$

Η σταθερά του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $k = m\omega^2$ ή $k = 200 \text{ N/m}$.

γ. Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x = +A$. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$v = \omega A \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή} \quad v = 8 \sin\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}.$$

δ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $|v| = 4\sqrt{2} \text{ m/s}$. Από τη σχέση $|v| = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ προκύπτει $x = \pm 0,2\sqrt{2} \text{ m}$. Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο σώμα τις παραπάνω χρονικές στιγμές υπολογίζεται από τη σχέση: $F_{ελ} = k\Delta\ell$ ή $F_{ελ} = k|x|$

$$\text{ή} \quad F_{ελ} = 40\sqrt{2} \text{ N}.$$

53. α. Βλέπε λύση άσκησης 38, ερώτημα α.

β. Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F_{ελ} = 0$ ή $mg = k\Delta\ell$

$$\text{ή} \quad k = 100 \text{ N/m}.$$

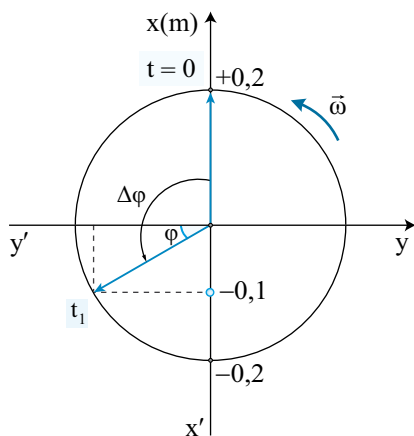
γ. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\varphi_0 = (\pi/2)$ rad. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m\omega^2 \quad \text{ή} \quad k = m\omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ή $\omega = 10$ rad/s. Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση: $a = -\omega^2 A \mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή} \quad a = -20\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

δ. Έστω t_1 η χρονική στιγμή στην οποία το σώμα διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Η απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $x_1 = -\Delta\ell$ ή $x_1 = -0,1$ m. Η χρονική στιγμή t_1 ισούται με το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\varphi$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω φ η οξεία γωνία που σχηματίζει το περιστρεφόμενο διάνυσμα με τον άξονα y' τη χρονική στιγμή t_1 . Από το σχήμα προκύπτει:

$$\eta\mu\varphi = \frac{|x_1|}{A} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \varphi = (\pi/6) \text{ rad.}$$

Η γωνία $\Delta\varphi$ που διαγράφει το περιστρεφόμενο διάνυσμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη

$$\text{χρονική στιγμή } t_1 \text{ είναι: } \Delta\varphi = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \text{ rad}$$

$$\text{ή} \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad. Είναι: } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$$

$$\text{ή} \quad \Delta t = \frac{\pi}{15} \text{ s} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{\pi}{15} \text{ s.}$$

$$\text{ε. Είναι: } \frac{\Sigma F_{\max}}{F_{\text{ελ}(\max)}} = \frac{DA}{k(\Delta\ell + A)} \quad \text{ή} \quad \frac{\Sigma F_{\max}}{F_{\text{ελ}(\max)}} = \frac{2}{3}.$$

54. α. Έστω T η περίοδος της ταλάντωσης.

$$\text{Είναι: } \Delta t = \frac{T}{4} \quad \text{ή} \quad T = 0,4\pi \text{ s.}$$

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 5$ rad/s. Η μάζα του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$

$$\text{ή} \quad k = m\omega^2 \quad \text{ή} \quad m = \frac{k}{\omega^2} \quad \text{ή} \quad m = 16 \text{ kg.}$$

γ. Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος είναι $A = \Delta\ell$, όπου $\Delta\ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος. Στη Θ.Ι. του σώματος ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή} \quad mg = k\Delta\ell \quad \text{ή} \quad mg = kA \quad \text{ή} \quad A = 0,4 \text{ m.}$$

Τη χρονική $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι. του είναι $x = 0$ και η ταχύτητά του είναι θετική. Επομένως, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\varphi_0 = 0$.

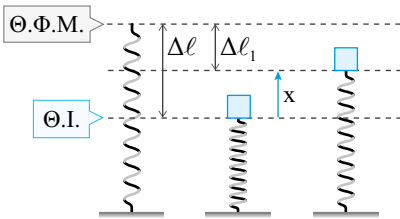
Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή} \quad x = 0,4\eta\mu(5t) \text{ (S.I.)}$$

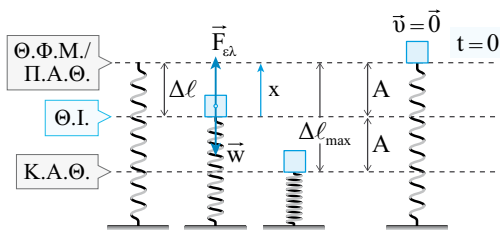
δ. Η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι:

$$t = \frac{T}{4} \quad \text{ή} \quad t = 0,1\pi \text{ s.}$$

ε. Επειδή στη θέση ισορροπίας του σώματος η συσπείρωση του ελατηρίου είναι $\Delta\ell = 0,4 \text{ m}$, η θέση όπου το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell_1 = 0,135 \text{ m}$ είναι μία θέση πάνω από τη θέση ισορροπίας του σώματος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στη θέση αυτήν η απομάκρυνση x του σώματος από τη Θ.Ι. του είναι: $x = +(\Delta\ell - \Delta\ell_1)$ ή $x = +0,265 \text{ m}$. Η επιτάχυνση του σώματος στην ίδια θέση είναι: $a = -\omega^2 x$ ή $a = -6,625 \text{ m/s}^2$.



55. α. Έστω ότι στη θέση ισορροπίας του σώματος το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell$. Η συσπείρωση του ελατηρίου γίνεται μέγιστη στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του.



Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα αφήνεται ελεύθερο να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση από τη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = \Delta\ell$ (2). Επομένως, η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, όπως φαίνεται από το σχήμα, είναι: $\Delta\ell_{\max} = 2A$ ή $A = 0,1 \text{ m}$.

β. Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F_{\epsilon\lambda} = 0$ ή $mg = k\Delta\ell$ ή $kA = mg$ ή $k = 100 \text{ N/m}$.

γ. Επειδή για $t = 0$ είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $k = m\omega^2$

$$\text{ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ή } \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Η χρονική εξίσωση της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο σώμα δίνεται από τη σχέση:

$$\Sigma F = -Dx \quad \text{ή} \quad \Sigma F = -kA\eta\mu(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή } \Sigma F = -10\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

δ. Έστω μία τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος στον θετικό ημιάξονα με απομάκρυνση x ($x > 0$) από τη θέση ισορροπίας του.

$$\text{Είναι: } \Sigma F = -Dx \quad \text{ή} \quad F_{\epsilon\lambda} - mg = -kx$$

$$\text{ή } F_{\epsilon\lambda} = mg - kx \quad \text{ή} \quad F_{\epsilon\lambda} = mg - kA\eta\mu(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή } F_{\epsilon\lambda} = 10 - 10\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

ε. Στη θέση ισορροπίας του σώματος το μέτρο της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα ισούται με μηδέν, ενώ στην ίδια θέση το μέτρο της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο σώμα είναι $F_{\epsilon\lambda} = k\Delta\ell \neq 0$. Έστω μία τυχαία θέση x κάτω από τη θέση ισορροπίας. Ισχύει: $|\Sigma F| = |F_{\epsilon\lambda}|$ ή $k|x| = k(\Delta\ell + |x|)$ ή $k\Delta\ell = 0$ άτοπο. Έστω μία τυχαία θέση x πάνω από τη θέση ισορροπίας. Ισχύει:

$$|\Sigma F| = |F_{\epsilon\lambda}| \quad \text{ή} \quad k|x| = k(\Delta\ell - |x|)$$

$$\text{ή } |x| = \frac{\Delta\ell}{2} \quad \text{ή } |x| = 0,05 \text{ m} \quad \text{ή } x = +0,05 \text{ m.}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$

$$\text{ή } x = 0,1\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) για $x = +0,05$ m έχουμε:

$$\frac{1}{2} = \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ ή } \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} \quad (2).$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (2) είναι

$$10t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

$$\text{ή } 10t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (4).$$

Από τη σχέση (3) για $\kappa = 0$ προκύπτει:

$$t = -\frac{\pi}{30} \text{ s, ενώ από την ίδια σχέση για } \kappa = 1$$

προκύπτει: $t = \frac{\pi}{6}$ s. Από τη σχέση (4) για

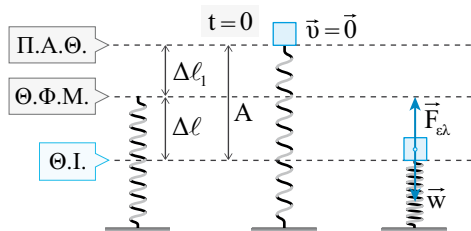
$\kappa = 0$ προκύπτει: $t = \frac{\pi}{30}$ s, ενώ από την ίδια

σχέση για $\kappa = 1$ προκύπτει: $t = \frac{7\pi}{30}$ s.

Εφόσον τη χρονική στιγμή t το σώμα διέρχεται από τη θέση $x = +0,05$ m για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$, η δεκτή λύση είναι
η: $t = \frac{\pi}{30}$ s.

56. α. Βλέπε λύση βασικής άσκησης 4, ερώτημα α.

β. Η θέση στην οποία αφήνουμε το σώμα ελεύθερο να κινηθεί τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι η πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του. Η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση αυτήν είναι $\Delta\ell_1 = 0,1$ m.



Η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος είναι $\Delta\ell = 0,1$ m.

Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } w - F_{ek} = 0 \text{ ή } mg = k\Delta\ell$$

$$\text{ή } k = 200 \text{ N/m.}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης, όπως φαίνεται από το σχήμα, είναι: $A = \Delta\ell_1 + \Delta\ell$ ή $A = 0,2$ m.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $k = m\omega^2$

$$\text{ή } \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\varphi_0 = (\pi/2)$ rad.

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης δίνεται από τη σχέση: $a = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } a = -20\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα διέρχεται από τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του είναι:

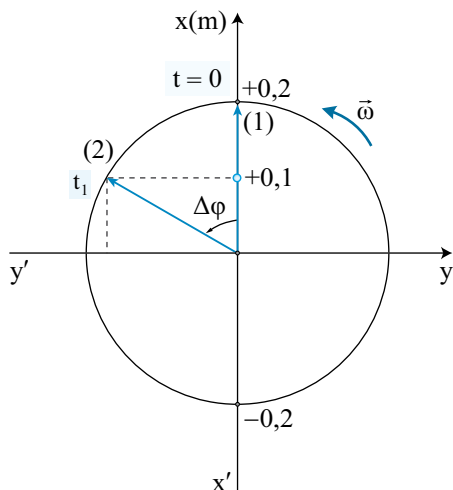
$$x = +\Delta\ell \text{ ή } x = +0,1 \text{ m.}$$

Ο ζητούμενος ρυθμός υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } \frac{dp}{dt} = \Sigma F \text{ ή } \frac{dp}{dt} = -Dx$$

$$\text{ή } \frac{dp}{dt} = -kx \text{ ή } \frac{dp}{dt} = -10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

δ. Η ζητούμενη χρονική στιγμή t_1 ισούται με το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\varphi$ που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



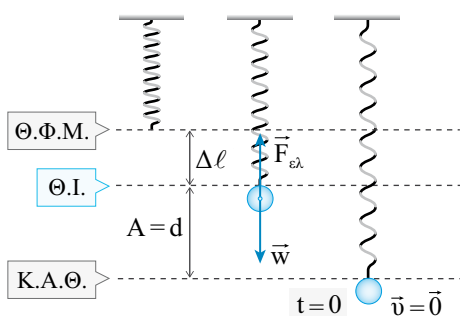
Από το σχήμα προκύπτει ότι:

$$\sin \Delta\varphi = \frac{0,1}{0,2} \quad \text{ή} \quad \sin \Delta\varphi = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

$$\text{Είναι: } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \quad \text{ή} \quad \Delta t = (\pi/30) \text{ s}$$

$$\text{ή } t_1 = (\pi/30) \text{ s.}$$

57. α. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση τη ταλάντωσής του.



Επομένως, το πλάτος της ταλάντωσης είναι:
 $A = d$ ή $A = 0,2 \text{ m}$. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ή} \quad v = 2 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

β. Είναι: $t = \frac{T}{2}$ ή $t = \frac{(2\pi/\omega)}{2}$ ή $t = \frac{\pi}{\omega}$

ή $t = 0,1\pi \text{ s}$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } x = 0,2 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) (1).}$$

Από τη σχέση (1) για $t = 0,1\pi \text{ s}$ προκύπτει:

$$x = 0,2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \text{ m} \quad \text{ή} \quad x = -0,2 \text{ m.}$$

Το μέτρο της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0,1\pi \text{ s}$, είναι: $|\Sigma F| = D|x|$ ή $|\Sigma F| = k|x|$ ή $\Sigma F = 20 \text{ N}$.

Έστω $\Delta\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος. Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή } w - F_{\text{ελ}} = 0 \quad \text{ή} \quad mg = k\Delta\ell \quad \text{ή} \quad \Delta\ell = 0,1 \text{ m.}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0,1\pi \text{ s}$ το σώμα βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του.

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0,1\pi \text{ s}$ είναι $|x| > \Delta\ell$, αυτή τη χρονική στιγμή το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell'$.

$$\text{Είναι: } \Delta\ell' = |x| - \Delta\ell \quad \text{ή} \quad \Delta\ell' = 0,1 \text{ m.}$$

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο τη χρονική στιγμή $t = 0,1\pi \text{ s}$, είναι: $F_{\text{ελ}} = k\Delta\ell'$ ή $F_{\text{ελ}} = 10 \text{ N}$.

γ. Τις χρονικές στιγμές στις οποίες η δύναμη που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο είναι ίση με μηδέν, το σώμα βρίσκεται στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος.

Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τις παραπάνω χρονικές στιγμές. Είναι: $x_1 = -\Delta\ell$ ή $x_1 = -0,1$ m.

Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση: $|v| = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2}$
ή $|v| = \sqrt{3}$ m/s.

δ. Είναι: $s = 3,5A$. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος είναι $x = +A$, τη χρονική στιγμή στην οποία έχει διανύσει διάστημα $s = 3,5A$, βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $x' = -\frac{A}{2}$ ή $x' = -0,1$ m.

Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dv}{dt} = a \quad \text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x' \quad \text{ή} \quad a = +10 \text{ m/s}^2.$$

58. α. Βλέπε βασική άσκηση 4, ερώτημα α.

β. Έστω $\Delta\ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος. Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή} \quad w - F_{ελ} = 0 \quad \text{ή} \quad mg = k\Delta\ell \quad \text{ή} \quad \Delta\ell = 0,4 \text{ m.}$$

Εφόσον το σώμα αφήνεται ελεύθερο ($\vec{v} = \vec{0}$) να κινηθεί στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος, το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = \Delta\ell$ ή $A = 0,4$ m.

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι. του είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = (\pi/2)$ rad. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m\omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ή} \quad \omega = 5 \text{ rad/s.}$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση: $v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή} \quad v = 2\sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τις χρονικές στιγμές στις οποίες η επιτάχυνσή του είναι $a = +5 \text{ m/s}^2$.

$$\text{Είναι: } a = -\omega^2 x \quad \text{ή} \quad x = -0,2 \text{ m.}$$

Επομένως, τις παραπάνω χρονικές στιγμές το σώμα βρίσκεται σε μια θέση κάτω από τη Θ.Ι. του και το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο στη θέση αυτήν, είναι:

$$F_{ελ} = k(\Delta\ell + |x|) \quad \text{ή} \quad F_{ελ} = 60 \text{ N.}$$

δ. Έστω $\Delta\ell'$ η συσπείρωση του ελατηρίου τις χρονικές στιγμές στις οποίες η δύναμη που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο έχει μέτρο: $F'_{ελ} = 20 \text{ N}$. Είναι: $F'_{ελ} = k\Delta\ell'$

$$\text{ή} \quad \Delta\ell' = 0,2 \text{ m.}$$

Επειδή είναι $\Delta\ell' < \Delta\ell$, το σώμα τις παραπάνω χρονικές στιγμές βρίσκεται σε μια θέση πάνω από τη θέση ισορροπίας του με απομάκρυνση: $x_1 = +(\Delta\ell - \Delta\ell')$ ή $x_1 = +0,2$ m. Το μέτρο v της ταχύτητας του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2}$ ή $v = \sqrt{3}$ m/s.

59. α. Βλέπε βασική άσκηση 4, ερώτημα α.

β. Τη χρονική $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του. Επομένως, το πλάτος της ταλάντωσης είναι:

$A = 0,2$ m. Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F_{ελ} = 0$ ή $mg = k\Delta\ell$ ή $k = 100 \text{ N/m}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m\omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ή} \quad \omega = 5 \text{ rad/s.}$$

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = 0$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη Θ.Ι. του δίνεται από τη σχέση:
 $x = A\mu(\omega t + \varphi_0)$ ή $x = 0,2\mu(5t)$ (S.I.).

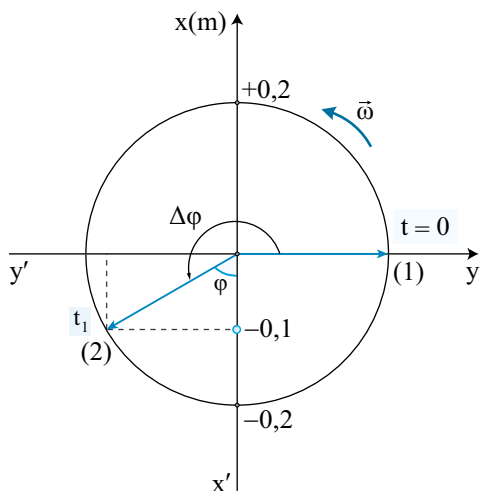
γ. Επειδή, είναι $A < \Delta\ell$, το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος είναι συνεχώς συσπειρωμένο. Έστω $\Delta\ell'$ η συσπείρωση του ελατηρίου τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο είναι $F_{ελ} = 50 \text{ N}$.

Είναι: $F_{ελ} = k\Delta\ell'$ ή $\Delta\ell' = 0,5 \text{ m}$.

Εφόσον είναι $\Delta\ell' > \Delta\ell$, το σώμα τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται σε μια θέση κάτω από τη Θ.Ι. του. Η απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι. του τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$x = -(\Delta\ell' - \Delta\ell)$ ή $x = -0,1 \text{ m}$.

Η ζητούμενη χρονική στιγμή t_1 ισούται με το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\varphi$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω φ η οξεία γωνία που σχηματίζει το περιστρεφόμενο διάνυσμα με τον άξονα x' τη χρονική στιγμή t_1 . Από το σχήμα προκύπτει

ότι: $\sin\varphi = \frac{|x|}{A}$ ή $\sin\varphi = \frac{1}{2}$ ή $\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$.

Η γωνία που διαγράφει το περιστρεφόμενο διάνυσμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη

χρονική στιγμή t_1 είναι: $\Delta\varphi = \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

ή $\Delta\varphi = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$. Είναι: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ ή $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$

ή $\Delta t = \frac{7\pi}{30} \text{ s}$ ή $t_1 = \frac{7\pi}{30} \text{ s}$.

δ. Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$v = \omega A \sin(\omega t_1 + \varphi_0)$ ή $v = 1 \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \text{ m/s}$

ή $v = -0,5\sqrt{3} \text{ m/s}$.

ε. Η μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο υπολογίζεται από τη σχέση:

$F_{ελ(\max)} = k(\Delta\ell + A)$ ή $F_{ελ(\max)} = 60 \text{ N}$.

Εφόσον είναι $A < \Delta\ell$, η ελάχιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο υπολογίζεται από τη σχέση:

$F_{ελ(\min)} = k(\Delta\ell - A)$ ή $F_{ελ(\min)} = 20 \text{ N}$.

60. α. Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα Σ_2 έχει μετακινηθεί κατακόρυφα προς τα κάτω από την αρχική του θέση κατά h , ισχύει:

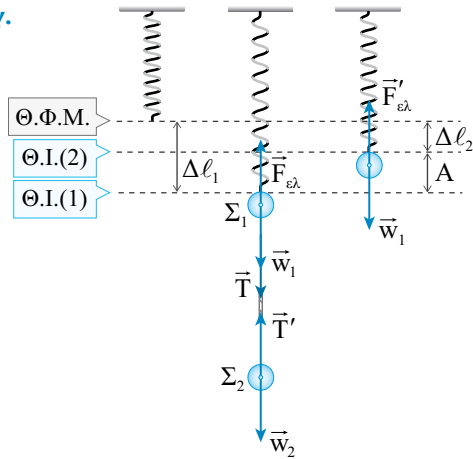
$h = \frac{1}{2}gt_1^2$ ή $t_1 = \frac{\pi}{20} \text{ s}$.

Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_1 διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας του, οπότε ισχύει: $t_1 = \frac{T}{4}$ ή $T = \frac{\pi}{5} \text{ s}$.

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Η σταθερά του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση: $k = m_1\omega^2$ ή $k = 100 \text{ N/m}$.

γ.



Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 [Θ.Ι.(1)]. Ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή } F_{\epsilon\lambda} - w_1 - w_2 - T + T' = 0 \quad \text{ή } F_{\epsilon\lambda} = w_1 + w_2$$

ή $k\Delta\ell_1 = (m_1 + m_2)g$ (1). Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(2)]. Ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή } w_1 - F_{\epsilon\lambda} = 0 \quad \text{ή } k\Delta\ell_2 = m_1g \quad (2).$$

Η θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι η κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κοπή του νήματος. Επομένως, το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2$. Με αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2), έχουμε: $k(\Delta\ell_1 - \Delta\ell_2) = m_2g$ ή $kA = m_2g$ ή $m_2 = 3 \text{ kg}$.

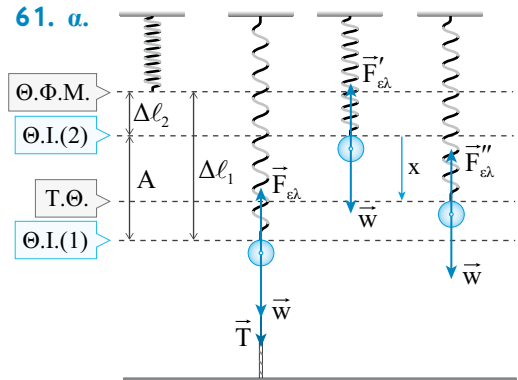
δ. Η μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που ασκείται στο σώμα Σ_1 από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του είναι:

$$F_{\epsilon\lambda(\max)} = k(\Delta\ell_2 + A), \text{ όπου από τη σχέση (2) προκύπτει } \Delta\ell_2 = 0,1 \text{ m, ή } F_{\epsilon\lambda(\max)} = 40 \text{ N.}$$

Εφόσον ισχύει ότι: $A > \Delta\ell_2$, η ελάχιστη τιμή του μέτρου που ασκείται στο σώμα Σ_1 από

το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του είναι: $F_{\epsilon\lambda(\min)} = 0$ (τις χρονικές στιγμές στις οποίες το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος).

61. α.



Αρχικά το σώμα ισορροπεί [Θ.Ι.(1)] με το ελατήριο επιμηκυνόμενο κατά $\Delta\ell_1$ και οι δυνάμεις που δέχεται είναι το βάρος του $\vec{w}$, η δύναμη από το ελατήριο $\vec{F}_{\epsilon\lambda}$ και η τάση του νήματος $\vec{T}$. Μετά την κοπή του νήματος το σώμα εκτελεί ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας (2) [Θ.Ι.(2)] που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας (2). Στη θέση ισορροπίας (2) ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F'_{\epsilon\lambda} = 0$

$$\text{ή } mg = k\Delta\ell_2 \quad (1).$$

Θεωρούμε την τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας (2) που φαίνεται στο σχήμα. Στη θέση αυτήν ισχύει: $\Sigma F = w - F''_{\epsilon\lambda}$

$$\text{ή } \Sigma F = mg - k(\Delta\ell_2 + x)$$

$$\text{ή } \Sigma F = mg - k\Delta\ell_2 - kx \quad (2)$$

$$\text{ή λόγω της σχέσης (1): } \Sigma F = -kx.$$

Επομένως, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

Η περίοδος της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ ή $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
ή $T = 0,2\pi \text{ s}$.

β. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του, οπότε η επιτάχυνσή του είναι μέγιστη. Το πλάτος A της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη

σχέση: $\alpha_{\max} = \omega^2 A$ ή $\alpha_{\max} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A$

ή $A = 0,4 \text{ m}$.

γ. Η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι:

$t = \frac{T}{2}$ ή $t = 0,1\pi \text{ s}$.

δ. Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας για τη θέση ισορροπίας (1) έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

ή $w + T - F_{\text{ελ}} = 0$ ή $mg = k\Delta\ell_1 - T$ (3).

Η αρχική θέση ισορροπίας του σώματος [Θ.Ι.(1)] είναι η κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του. Επομένως, ισχύει ότι: $A = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2$.

Με αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (3) και (1) έχουμε: $0 = k\Delta\ell_1 - T - k\Delta\ell_2$

ή $T = k(\Delta\ell_1 - \Delta\ell_2)$ ή $T = kA$ ή $T = 40 \text{ N}$.

ε. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

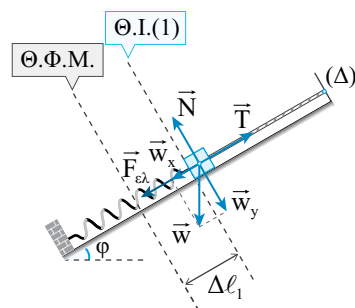
$\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$

ή $x = 0,4\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.).

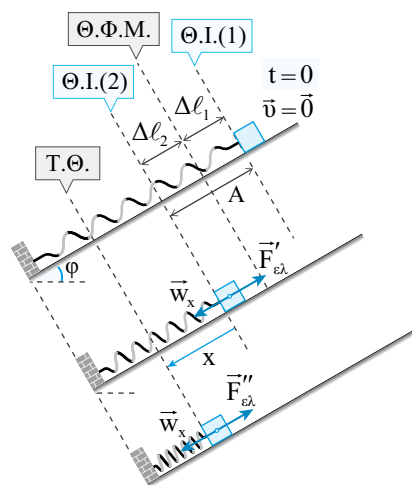
62. α. Οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα στην αρχική θέση ισορροπίας του [Θ.Ι.(1)] είναι το βάρος του $\vec{w}$, η τάση του νήματος $\vec{T}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το κεκλιμένο επίπεδο και η δύναμη $\vec{F}_{\text{ελ}}$ από το ελατήριο.

Αναλύουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες $\vec{w}_x$ και $\vec{w}_y$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Είναι: $w_x = mg\eta\mu\phi$ ή $w_x = 10 \text{ N}$. Αφού είναι $T > w_x$, το ελατήριο στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος είναι επιμηκυμένο. Στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος [Θ.Ι.(1)] ισχύει: $\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$ ή $T - w_x - F_{\text{ελ}} = 0$
ή $F_{\text{ελ}} = T - w_x$ ή $F_{\text{ελ}} = 10 \text{ N}$.

β.



Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ και μετά το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από

τη θέση ισορροπίας (2) [Θ.Ι.(2)] που φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα. Στη Θ.Ι (2) ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_x - F'_{ελ} = 0 \quad \text{ή} \quad mg\eta\mu\varphi = k\Delta\ell_2 \quad (1),$$

όπου $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας (2). Στην τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας (2) που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα ισχύει: $\Sigma F_x = w_x - F''_{ελ}$

$$\text{ή} \quad \Sigma F_x = mg\eta\mu\varphi - k(\Delta\ell_2 + x)$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F_x = mg\eta\mu\varphi - k\Delta\ell_2 - kx$$

$$\text{ή} \quad \text{λόγω της σχέσης (1): } \Sigma F_x = -kx.$$

Επομένως, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

γ. Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος [Θ.Ι.(1)]. Είναι: $F_{ελ} = k\Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,05 \text{ m}$.

Η αρχική θέση ισορροπίας του σώματος [Θ.Ι.(1)] είναι η πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του. Επομένως, το πλάτος A της ταλάντωσης είναι: $A = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 \quad (2)$.

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$\Delta\ell_2 = \frac{mg\eta\mu\varphi}{k} \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_2 = 0,05 \text{ m}.$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (2) προκύπτει: $A = 0,1 \text{ m}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (3)$.

Από τη σχέση (3) για $t = 0$ και $x = +A$ προκύπτει: $A = A\eta\mu\varphi_0$ ή $\eta\mu\varphi_0 = 1$ ή $\eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2}$

$$\text{ή} \quad \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (4).$$

Εφόσον είναι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη σχέση (4) για $\kappa = 0$ προκύπτει: $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

Συνεπώς, η σχέση (2) γράφεται:

$$x = 0,1\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.}).$$

δ. Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο γίνεται μέγιστο στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του. Επομένως, η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι:

$$t = \frac{T}{2} \quad \text{ή} \quad t = \frac{(2\pi/\omega)}{2} \quad \text{ή} \quad t = \frac{\pi}{\omega} \quad \text{ή} \quad t = 0,1\pi \text{ s}.$$

ε. Έστω $\Delta\ell$ η παραμόρφωση του ελατηρίου σε σχέση με το φυσικό του μήκος τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο είναι

$$F_{ελ} = 20 \text{ N}. \text{ Ισχύει: } F_{ελ} = k\Delta\ell \quad \text{ή} \quad \Delta\ell = \frac{F_{ελ}}{k}$$

$$\text{ή} \quad \Delta\ell = 0,1 \text{ m}.$$

Στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell_1 = 0,05 \text{ m}$. Εφόσον είναι $\Delta\ell > \Delta\ell_1$, το ελατήριο δεν μπορεί να είναι επιμηκυμένο τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο είναι $F_{ελ} = 20 \text{ N}$. Επομένως, τις παραπάνω χρονικές στιγμές το ελατήριο είναι συσπειρωμένο. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του στη θέση όπου το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell$.

$$\text{Είναι: } |x_1| = \Delta\ell - \Delta\ell_2 \quad \text{ή} \quad |x_1| = 0,05 \text{ m}$$

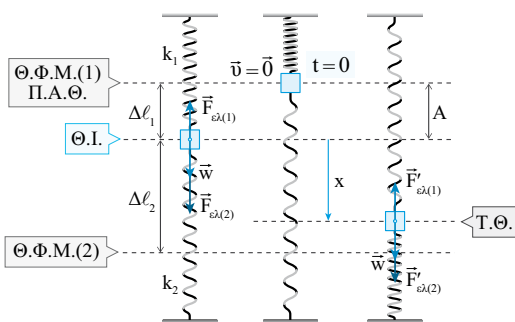
$$\text{ή} \quad x_1 = -0,05 \text{ m}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος στη θέση με απομάκρυνση x_1 είναι:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F \quad \text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = -Dx_1 \quad \text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = -kx_1$$

$$\text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = +10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

63. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ στη θέση ισορροπίας του είναι το βάρος $\vec{w}$, η δύναμη από το ελατήριο (1) $\vec{F}_{ελ(1)}$ και η δύναμη από το ελατήριο (2) $\vec{F}_{ελ(2)}$.



Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \vec{w} + \vec{F}_{ελ(2)} - \vec{F}_{ελ(1)} = 0$$

$$\text{ή} \quad mg + k_2 \Delta \ell_2 = k_1 \Delta \ell_1 \quad (1).$$

Έστω η τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά τη φορά της απομάκρυνσης x , τότε για τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα στη θέση αυτήν ισχύει: $\Sigma F = F'_{ελ(2)} + w - F'_{ελ(1)}$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = k_2 (\Delta \ell_2 - x) + mg - k_1 (\Delta \ell_1 + x)$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = k_2 \Delta \ell_2 - k_2 x + mg - k_1 \Delta \ell_1 - k_1 x$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$\Sigma F = -k_1 x - k_2 x \quad \text{ή} \quad \Sigma F = -(k_1 + k_2)x.$$

Επομένως, το σώμα Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k_1 + k_2$.

β. Η περίοδος της ταλάντωσης υπολογίζεται

$$\text{από τη σχέση: } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \quad \text{ή} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

ή $T = 0,1\pi$ s. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του.

Η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι:

$$t = \frac{3T}{4} \quad \text{ή} \quad t = 0,075\pi \text{ s.}$$

γ. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = \Delta \ell_1$.

Από τη σχέση (1), έχουμε:

$$mg + 2k_2 \Delta \ell_1 = k_1 \Delta \ell_1 \quad \text{ή} \quad mg = (k_1 - 2k_2) \Delta \ell_1$$

$$\text{ή} \quad \Delta \ell_1 = \frac{mg}{k_1 - 2k_2} \quad \text{ή} \quad \Delta \ell_1 = 0,1 \text{ m.}$$

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ από τη θέση ισορροπίας του είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 20 \text{ rad/s}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0)$

$$\text{ή} \quad x = 0,1 \eta \mu \left(20t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{S.I.}).$$

δ. Το σώμα ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του. Στη θέση αυτήν ισχύει: $F_{ελ(1)} = k_1 (\Delta \ell_1 + A)$

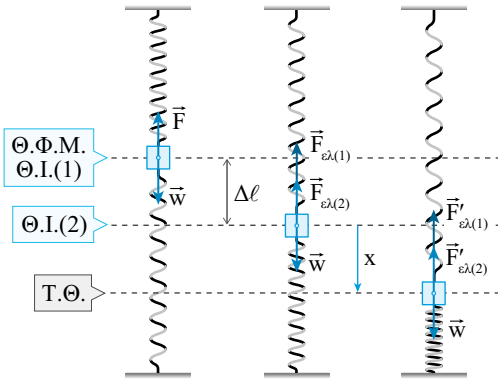
$$\text{ή} \quad F_{ελ(1)} = 60 \text{ N} \text{ και } F_{ελ(2)} = k_2 (\Delta \ell_2 - A)$$

$$\text{ή} \quad F_{ελ(2)} = k_2 (2\Delta \ell_1 - A) \quad \text{ή} \quad F_{ελ(2)} = 10 \text{ N.}$$

$$\text{Επομένως, είναι: } \frac{F_{ελ(1)}}{F_{ελ(2)}} = 6.$$

64. α. Αρχικά το σώμα Σ ισορροπεί στη θέση όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Στη θέση αυτήν [Θ.Ι.(1)] οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι το βάρος του $\vec{w}$ και η δύναμη $\vec{F}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ καταργούμε τη δύναμη $\vec{F}$, οπότε το σώμα Σ ταλαντώνεται γύρω από τη θέση ισορροπίας (2) [Θ.Ι.(2)] που φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη

θέση ισορροπίας (2) είναι το βάρος του $\vec{w}$, η δύναμη $\vec{F}_{ελ(1)}$ από το ελατήριο (1) και η δύναμη $\vec{F}_{ελ(2)}$ από το ελατήριο (2).



Έστω Δl η παραμόρφωση των δύο ελατηρίων στη θέση ισορροπίας (2). Στη θέση ισορροπίας (2), ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή } w - F_{ελ(1)} - F_{ελ(2)} = 0 \text{ ή } mg = k_1 \Delta l + k_2 \Delta l \quad (1).$$

Έστω η τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας (2) που φαίνεται στο σχήμα. Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά τη φορά της απομάκρυνσης x , τότε για τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα στη θέση αυτήν ισχύει:

$$\Sigma F = w - F'_{ελ(1)} - F'_{ελ(2)}$$

$$\text{ή } \Sigma F = mg - k_1(\Delta l + x) - k_2(\Delta l + x)$$

$$\text{ή } \Sigma F = mg - k_1 \Delta l - k_1 x - k_2 \Delta l - k_2 x$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$\Sigma F = -k_1 x - k_2 x \text{ ή } \Sigma F = -(k_1 + k_2)x.$$

Επομένως, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k_1 + k_2$.

β. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας (2) δίνεται από τη σχέση: $x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$ (2).

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του

και η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας (2) είναι: $x = +A$. Από τη σχέση (2) για $t = 0$ και $x = +A$, προκύπτει: $+A = A \eta \mu \varphi_0$

$$\text{ή } \eta \mu \varphi_0 = 1 \text{ ή } \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{ή } \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (3).$$

Επειδή ισχύει $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη σχέση

$$(3) \text{ για } \kappa = 0 \text{ προκύπτει: } \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

Στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F = 0$ ή $mg = F$

ή $m = 1 \text{ kg}$. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι:

$A = \Delta l$. Από τη σχέση (1), προκύπτει:

$$\Delta l = \frac{mg}{k_1 + k_2} \text{ ή } \Delta l = 0,1 \text{ m}.$$

Επομένως, είναι: $A = 0,1 \text{ m}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$

$$\text{ή } \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \text{ ή } \omega = 10 \text{ rad/s}.$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση: $v = \omega A \sigma \nu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } v = 1 \sigma \nu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ από το ελατήριο (1) γίνεται μέγιστο τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του.

$$\text{Είναι: } F_{ελ, \max(1)} = k_1(\Delta l + A)$$

$$\text{ή } F_{ελ, \max(1)} = 15 \text{ N}.$$

δ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ από τη θέση ισορροπίας (2) τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της επιτάχυνσής του είναι $a = 5 \text{ m/s}^2$. Είναι: $a = \omega^2 |x|$ ή $|x| = 0,05 \text{ m}$ ή $x = \pm 0,05 \text{ m}$.

Τις χρονικές στιγμές στις οποίες η απομάκρυνση του σώματος Σ από τη θέση ισορροπίας (2) είναι $x = +0,05 \text{ m}$, το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ από το ελατήριο (2) είναι:

$$F_{\varepsilon\lambda(2)} = k_2 (\Delta\ell - |x|) \quad \text{ή} \quad F_{\varepsilon\lambda(2)} = 1,25 \text{ N}.$$

Τις χρονικές στιγμές στις οποίες η απομάκρυνση του σώματος Σ από τη θέση ισορροπίας (2) είναι $x = -0,05 \text{ m}$, το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ από το ελατήριο (2) είναι:

$$F_{\varepsilon\lambda(2)} = k_2 (\Delta\ell + |x|) \quad \text{ή} \quad F_{\varepsilon\lambda(2)} = 3,75 \text{ N}.$$

3.3 Απλή αρμονική ταλάντωση: Ενεργειακή προσέγγιση

ΘΕΜΑΤΑ Α

Θέματα πολλαπλής επιλογής

9. β	10. δ	11. δ	12. α	13. β	14. γ	15. α	16. β	17. β
18. α	19. γ	20. δ	21. β	22. β	23. β	24. γ	25. α	26. α
27. γ	28. δ	29. α	30. α	31. γ	32. γ			

Θέματα του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

33.	α. Σ	β. Λ	γ. Λ	δ. Λ	ε. Σ
34.	α. Λ	β. Σ	γ. Λ	δ. Λ	ε. Σ
35.	α. Σ	β. Λ	γ. Λ	δ. Λ	ε. Σ
36.	α. Σ	β. Λ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Σ
37.	α. Λ	β. Σ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Σ
38.	α. Λ	β. Σ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Λ

39. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Οι χρονικές εξισώσεις της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις:

$$K = E \sin^2(\omega t) \quad (1) \quad \text{και} \quad U = E \eta \mu^2(\omega t) \quad (2).$$

Η δοθείσα γραφική παράσταση αντιστοιχεί στη **σχέση (2)**.

40. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Έστω T η περίοδος της ταλάντωσης. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι:

$$\frac{T}{2} = 0,2\pi \text{ s} \quad \text{ή} \quad T = 0,4\pi \text{ s}.$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \omega = 5 \text{ rad/s}.$$

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ακόμη, ότι: $K_{\max} = 2 \text{ J}$. Το πλάτος A της ταλάντωσης

$$\text{υπολογίζεται από τη σχέση: } K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

$$\text{ή } K_{\max} = \frac{1}{2} m (\omega A)^2 \quad \text{ή} \quad K_{\max} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

$$\text{ή } A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m}} \quad \text{ή} \quad A = 0,4 \text{ m}.$$

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ η κινητική ενέργεια του σώματος είναι: $K = 0$ ή $\frac{1}{2} m v^2 = 0$ ή $v = 0$.

Επομένως, τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται σε μια από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του ($x = \pm A$). Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο σώμα είναι αρνητική ($\Sigma F < 0$), σύμφωνα με τη σχέση $\Sigma F = -Dx$, η απομά-

κρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας την ίδια χρονική στιγμή είναι θετική ($x > 0$).

Επομένως, για $t = 0$ είναι: $x = +A$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0) \quad (1). \text{ Από τη σχέση (1) για}$$

$$t = 0 \text{ και } x = +A \text{ προκύπτει: } +A = A \eta \mu \phi_0$$

$$\text{ή } \eta \mu \phi_0 = 1 \quad \text{ή} \quad \eta \mu \phi_0 = \eta \mu \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{ή } \phi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (2).$$

Επειδή ισχύει $0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη σχέση

$$(2) \text{ για } \kappa = 0 \text{ προκύπτει: } \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

Επομένως η σχέση (1) γράφεται:

$$x = 0,4 \eta \mu \left(5t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{S.I.}).$$

41. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Ισχύει $E = \frac{1}{2} k A^2$. Το πλάτος A της ταλάντωσης και η σταθερά k του ελατηρίου δεν μεταβάλλονται, οπότε η **ενέργεια E της ταλάντωσης διατηρείται σταθερή**.

42. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης, έχουμε: $E = K + U$ ή $K = E - U$

$$\text{ή } K = \frac{1}{2} D A^2 - \frac{1}{2} D x^2$$

$$\text{ή } K = \frac{1}{2} D A^2 - \frac{1}{2} D \left(\frac{A}{2} \right)^2$$

$$\text{ή } K = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} D A^2 \quad \text{ή} \quad K = \frac{3E}{4}.$$

43. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Έστω x η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες η κινητική του ενέργεια είναι τριπλάσια από τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης ($K = 3U$). Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης, έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad E = 4U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}DA^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}Dx^2$$

$$\text{ή} \quad x = \pm \frac{A}{2}.$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας του σώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές είναι:

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = |\alpha| \quad \text{ή} \quad \left| \frac{dv}{dt} \right| = \omega^2 |x|$$

$$\text{ή} \quad \left| \frac{dv}{dt} \right| = \omega^2 \frac{A}{2} \quad \text{ή} \quad \left| \frac{dv}{dt} \right| = \frac{\alpha_{\max}}{2}.$$

44. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Έστω x η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τις χρονικές στιγμές στις οποίες η κινητική του ενέργεια είναι ίση με τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης ($K = U$). Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης, έχουμε: $E = K + U$ ή $E = 2U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}DA^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}Dx^2 \quad \text{ή} \quad x = \pm \frac{A\sqrt{2}}{2}.$$

Επειδή η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι ίση με μηδέν, το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα. Επομένως, η κινητική ενέργεια του σώματος και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης γίνονται για δεύτερη φορά ίσες τη χρονική στιγμή t στην οποία το σώμα διέρχεται από τη θέση $x = +\frac{\sqrt{2}}{2}A$ για δεύτερη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Η ζητούμενη χρονική στιγμή t υπολογίζεται

$$\text{από τη σχέση: } x = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$\text{ή} \quad +\frac{A\sqrt{2}}{2} = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{ή} \quad \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ή} \quad \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad (1).$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι:

$$\frac{2\pi t}{T} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (2),$$

$$\frac{2\pi t}{T} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4}, \quad \text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (3).$$

Από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$ προκύπτει $t = \frac{T}{8}$,

ενώ από την ίδια σχέση για $\kappa = 1$ προκύπτει:

$$t = \frac{9T}{8}.$$

Από τη σχέση (3) για $\kappa = 0$ προκύπτει $t = \frac{3T}{8}$,

ενώ από την ίδια σχέση για $\kappa = 1$ προκύπτει:

$$t = \frac{11T}{8}.$$

Επομένως, το σώμα διέρχεται από τη θέση

$x = +\frac{A\sqrt{2}}{2}$ για δεύτερη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ τη χρονική στιγμή $t = \frac{3T}{8}$.

45. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης, έχουμε: $E = K + U$ ή $U = E - K$

$$\text{ή} \quad U = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 - \frac{1}{2}m\left(\frac{v_{\max}}{2}\right)^2$$

$$\text{ή} \quad U = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \quad \text{ή} \quad U = \frac{3}{4}E \quad \text{ή} \quad U = 75\%E.$$

46. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Έστω A_1 το πλάτος του ταλαντωτή A και A_2 το πλάτος του ταλαντωτή B .

Έστω k_1 η σταθερά του ελατηρίου του ταλαντωτή Α και k_2 η σταθερά του ελατηρίου του ταλαντωτή Β. Είναι: $k_1 = k$ και $k_2 = \frac{k}{2}$. Για τις ενέργειες E_1 και E_2 των ταλαντωτών Α και Β αντίστοιχα, ισχύει:

$$E_2 = 2E_1 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}k_2 A_2^2 = 2 \frac{1}{2}k_1 A_1^2 \quad \text{ή} \quad A_2 = 2A_1.$$

Οι μέγιστες επιταχύνσεις των ταλαντωτών Α και Β δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις:

$$\alpha_{\max(1)} = \omega_1^2 A_1 \quad (1) \quad \text{και} \quad \alpha_{\max(2)} = \omega_2^2 A_2 \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{\alpha_{\max(1)}}{\alpha_{\max(2)}} = \frac{\omega_1^2 A_1}{\omega_2^2 A_2} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\max(1)}}{\alpha_{\max(2)}} = \frac{\frac{k_1}{m} A_1}{\frac{k_2}{2m} A_2}$$

$$\text{ή} \quad \frac{\alpha_{\max(1)}}{\alpha_{\max(2)}} = \frac{2k_1 A_1}{k_2 A_2} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\max(1)}}{\alpha_{\max(2)}} = 2$$

$$\text{ή} \quad \alpha_{\max(1)} = 2\alpha_{\max(2)}.$$

47. Σωστή επιλογή είναι η α.

Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της κινητικής ενέργειας κάθε σώματος ισούται με το μισό της περιόδου της ταλάντωσής του. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι:

$$A_1 = A_2 = A \quad \text{και} \quad E_2 > E_1.$$

$$\text{Είναι: } E_2 > E_1 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}D_2 A^2 > \frac{1}{2}D_1 A^2$$

$$\text{ή} \quad m\omega_2^2 > m\omega_1^2 \quad \text{ή} \quad \omega_2 > \omega_1$$

$$\text{ή} \quad \frac{2\pi}{T_2} > \frac{2\pi}{T_1} \quad \text{ή} \quad T_1 > T_2 \quad \text{ή} \quad \frac{T_1}{2} > \frac{T_2}{2}.$$

48. Σωστή επιλογή είναι η α.

Έστω k_1 και k_2 οι σταθερές των ελατηρίων στα κάτω άκρα των οποίων είναι δεμένα τα σώματα (1) και (2) αντίστοιχα. Έστω ότι στη θέση

ισορροπίας του σώματος (1) το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell_1$. Στη θέση ισορροπίας του σώματος (1), ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή} \quad w_1 - F_{\epsilon\lambda(1)} = 0 \quad \text{ή} \quad m_1 g = k_1 \Delta\ell_1 \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_1 = \frac{m_1 g}{k_1}.$$

Έστω ότι στη θέση ισορροπίας του σώματος (2) το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell_2$.

Στη θέση ισορροπίας του σώματος (2), ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_2 - F_{\epsilon\lambda(2)} = 0 \quad \text{ή} \quad m_2 g = k \Delta\ell_2$$

$$\text{ή} \quad \Delta\ell_2 = \frac{m_2 g}{k}. \quad \text{Σύμφωνα με την εκφώνηση,}$$

$$\text{ισχύει: } \Delta\ell_1 = \Delta\ell_2 \quad \text{ή} \quad \frac{m_1 g}{k_1} = \frac{m_2 g}{k_2} \quad \text{ή, επειδή}$$

$$m_2 = \frac{m_1}{4}, \quad k_1 = 4k_2.$$

Οι γωνιακές συχνότητες των ταλαντώσεων που εκτελούν τα σώματα (1) και (2) δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad (1) \quad \text{και} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}}{\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}} \quad \text{ή} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{k_1 m_2}{k_2 m_1}} \quad \text{ή} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = 1$$

ή $\omega_1 = \omega_2$. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης του σώματος (1) και v_2 το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης του σώματος (2).

$$\text{Ισχύει: } v_1 = v_2 \quad \text{ή} \quad \omega_1 A_1 = \omega_2 A_2 \quad \text{ή} \quad A_1 = A_2.$$

49. Σωστή επιλογή είναι η β.

Έστω k_1 και k_2 οι σταθερές των ελατηρίων στα ελεύθερα άκρα των οποίων είναι αναρτημένα τα σώματα (1) και (2) αντίστοιχα. Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου σταθεράς k_1 στη θέση ισορροπίας του σώματος (1).

Στη θέση ισορροπίας του σώματος (1) ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_1 - F_{ελ(1)} = 0 \quad \text{ή} \quad m_1 g = k_1 \Delta \ell_1$$

$$\text{ή} \quad \Delta \ell_1 = \frac{m_1 g}{k_1}.$$

Εφόσον το σώμα (1) αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί είναι: $A_1 = \Delta \ell_1$ ή $A_1 = \frac{m_1 g}{k_1}$.

Έστω $\Delta \ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου σταθεράς k_2 στη θέση ισορροπίας του σώματος (2). Στη θέση ισορροπίας του σώματος (2) ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_2 - F_{ελ(2)} = 0$

$$\text{ή} \quad m_2 g = k_2 \Delta \ell_2 \quad \text{ή} \quad \Delta \ell_2 = \frac{m_2 g}{k_2}.$$

Εφόσον το σώμα (2) αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί είναι: $A_2 = \Delta \ell_2$ ή $A_2 = \frac{m_2 g}{k_2}$.

$$\text{Είναι: } A_1 = A_2 \quad \text{ή} \quad \frac{m_1 g}{k_1} = \frac{m_2 g}{k_2}$$

$$\text{ή} \quad \frac{m_1}{k_1} = \frac{m_2}{k_2} \quad \text{ή} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{k_1}{k_2}.$$

Επειδή είναι $m_1 > m_2$, από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $k_1 > k_2$. Η ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος (1) είναι: $E_1 = \frac{1}{2} k_1 A_1^2$

(1), ενώ η ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος (2) είναι $E_2 = \frac{1}{2} k_2 A_2^2$ (2).

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και

$$(2), \text{ έχουμε: } \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2} k_1 A_1^2}{\frac{1}{2} k_2 A_2^2} \quad \text{ή} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{k_1}{k_2} \quad (3).$$

Επειδή είναι $k_1 > k_2$, από τη σχέση (3) προκύπτει: $E_1 > E_2$.

50. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Έστω A_1 και A_2 τα πλάτη των ταλαντώσεων των σωμάτων (1) και (2) αντίστοιχα.

$$\text{Ισχύει: } \Sigma F_{\max(1)} = \Sigma F_{\max(2)} \quad \text{ή} \quad k_1 A_1 = k_2 A_2$$

$$\text{ή} \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{A_2}{A_1} \quad (1). \text{ Επειδή ισχύει } k_1 > k_2, \text{ από τη}$$

σχέση (1) προκύπτει: $A_1 < A_2$.

Οι ενέργειες των ταλαντώσεων που εκτελούν τα σώματα (1) και (2) δίνονται, αντίστοιχα, από

$$\text{τις σχέσεις: } E_1 = \frac{1}{2} D_1 A_1^2 \quad \text{ή} \quad E_1 = \frac{1}{2} k_1 A_1^2 \quad (1)$$

$$\text{και } E_2 = \frac{1}{2} D_2 A_2^2 \quad \text{ή} \quad E_2 = \frac{1}{2} k_2 A_2^2 \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2} k_1 A_1^2}{\frac{1}{2} k_2 A_2^2} \quad \text{ή} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{k_1 A_1^2}{k_2 A_2^2} \quad \text{ή} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{k_1 A_1 A_1}{k_2 A_2 A_2}$$

$$\text{ή} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{\Sigma F_{\max(1)} A_1}{\Sigma F_{\max(2)} A_2} \quad \text{ή} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{A_1}{A_2} \quad (2).$$

Επειδή ισχύει: $A_1 < A_2$, από τη σχέση (2) προκύπτει: $E_1 < E_2$.

51. Σωστή επιλογή είναι η β .

$$\text{Είναι: } E_2 = 4E_1 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} k A_2^2 = 4 \frac{1}{2} k A_1^2$$

$$\text{ή} \quad A_2^2 = 4A_1^2 \quad \text{ή} \quad A_2 = 2A_1 \quad \text{ή} \quad A_2 = 2d.$$

52. Σωστή επιλογή είναι η γ .

$$\text{Είναι: } K_{\max(1)} = E_1 \quad \text{ή} \quad K_{\max(1)} = \frac{1}{2} k A^2 \quad (1)$$

$$\text{και } K_{\max(2)} = E_2 \quad \text{ή} \quad K_{\max(2)} = \frac{1}{2} 2k A^2 \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2), προκύπτει:

$$\frac{K_{\max(1)}}{K_{\max(2)}} = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad K_{\max(2)} = 2K_{\max(1)}.$$

53. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Έστω x η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας τις χρονικές στιγμές στις οποίες η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι $U = 12,5 \text{ J}$.

$$\text{Είναι: } U = \frac{1}{2}Dx^2 \quad \text{ή} \quad U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$\text{ή } x = \pm \sqrt{\frac{2U}{m\omega^2}} \quad \text{ή } x = \pm 0,5 \quad \text{ή } x = \pm A.$$

Από τη δοθείσα σχέση $x = 0,5\eta\mu(5t)$ η περίοδος T της ταλάντωσης προκύπτει:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ή} \quad T = 0,4\pi \text{ s.}$$

Η χρονική στιγμή t στην οποία η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης γίνεται ίση με $U = 12,5 \text{ J}$ για τέταρτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι ίση με τη χρονική στιγμή στην οποία το σώμα φτάνει για τέταρτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ σε ακραία θέση της ταλάντωσης του ($x = \pm A$).

$$\text{Είναι: } t = T + \frac{3T}{4} \quad \text{ή} \quad t = \frac{7T}{4} \quad \text{ή} \quad t = 0,7\pi \text{ s.}$$

54. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Έστω A_1 και A_2 τα πλάτη των ταλαντώσεων που εκτελούν τα σώματα (1) και (2) αντίστοιχα.

$$\text{Είναι: } E_2 = 4E_1 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}k_2A_2^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}k_1A_1^2 \quad \text{ή} \quad A_2 = A_1.$$

Οι μέγιστες δυνάμεις επαναφοράς που ασκούνται στα σώματα (1) και (2) δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις: $\Sigma F_{1(\max)} = k_1A_1$ (1) και $\Sigma F_{2(\max)} = k_2A_2$ (2). Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{\Sigma F_{1(\max)}}{\Sigma F_{2(\max)}} = \frac{k_1A_1}{k_2A_2} \quad \text{ή} \quad \frac{\Sigma F_{1(\max)}}{\Sigma F_{2(\max)}} = \frac{k_1A_1}{4k_1A_2}$$

$$\text{ή} \quad \frac{\Sigma F_{1(\max)}}{\Sigma F_{2(\max)}} = \frac{1}{4} \quad \text{ή} \quad \Sigma F_{2(\max)} = 4\Sigma F_{1(\max)}.$$

55. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Οι χρόνοι που απαιτούνται για να μεταβούν τα σώματα (1) και (2) από την ακραία θέση της ταλάντωσης τους στη θέση ισορροπίας τους για πρώτη φορά είναι $t_1 = \frac{T_1}{4}$ και $t_2 = \frac{T_2}{4}$

$$\text{αντίστοιχα. Ισχύει: } t_1 = 2t_2 \quad \text{ή} \quad \frac{T_1}{4} = 2 \cdot \frac{T_2}{4}$$

$$\text{ή } T_1 = 2T_2 \quad \text{ή} \quad 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} = 2 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} \quad \text{ή} \quad k_2 = 4k_1.$$

Οι ενέργειες των ταλαντώσεων που εκτελούν τα σώματα (1) και (2) δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις: $E_1 = \frac{1}{2}k_1A_1^2$ ή $E_1 = \frac{1}{2}k_1d^2$ (1)

$$\text{και } E_2 = \frac{1}{2}k_2A_2^2 \quad \text{ή} \quad E_2 = \frac{1}{2}k_2d^2 \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2), προκύπτει:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2}k_1d^2}{\frac{1}{2}k_2d^2} \quad \text{ή} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{4} \quad \text{ή} \quad E_1 = \frac{E_2}{4}.$$

56. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Έστω $\Delta\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος. Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή } w - F_{\epsilon\lambda} = 0 \quad \text{ή} \quad mg = k\Delta\ell \quad \text{ή} \quad \Delta\ell = \frac{mg}{k} \quad (1).$$

Εφόσον το σώμα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, το πλάτος της ταλάντωσης του είναι $A = \Delta\ell$ (2). Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται μέγιστη στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του σώματος.

$$\text{Επομένως, είναι: } U_{\epsilon\lambda(\max)} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_{\max})^2$$

$$\text{ή } U_{\epsilon\lambda(\max)} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell + A)^2 \quad \text{ή, λόγω της σχέσης}$$

$$(2): U_{ελ(max)} = \frac{1}{2}k(2\Delta\ell)^2 \text{ ή } U_{ελ(max)} = 2k(\Delta\ell)^2$$

$$\text{ή, λόγω της σχέσης (1): } U_{ελ(max)} = \frac{2m^2g^2}{k}.$$

57. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ_1 . Στη Θ.Ι. του σώματος Σ_1 , ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{ελ(1)} = 0$

$$\text{ή } m_1g = k_1\Delta\ell_1 \text{ ή } \Delta\ell_1 = \frac{m_1g}{k_1} \quad (1).$$

Εφόσον το σώμα Σ_1 αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί στη θέση όπου το ελατήριο Α έχει το φυσικό του μήκος, το πλάτος της ταλάντωσής του είναι: $A_1 = \Delta\ell_1$ ή $A_1 = \frac{m_1g}{k_1}$ (2).

Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ_2 . Στη Θ.Ι. του σώματος Σ_2 , ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_2 - F_{ελ(2)} = 0$

$$\text{ή } m_2g = k_2\Delta\ell_2 \text{ ή } \Delta\ell_2 = \frac{m_2g}{k_2} \quad (3).$$

Εφόσον το σώμα Σ_2 αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί στη θέση όπου το ελατήριο Β έχει το φυσικό του μήκος, το πλάτος της ταλάντωσης του είναι: $A_2 = \Delta\ell_2$ ή $A_2 = \frac{m_2g}{k_2}$ (4). Για

τις επιμηκύνσεις των δύο ελατηρίων ισχύει: $\Delta\ell_1 = 2\Delta\ell_2$ ή, λόγω των σχέσεων (1) και (3):

$$\frac{m_1g}{k_1} = \frac{2m_2g}{k_2} \text{ ή } \frac{m_1}{k_1} = 2\frac{m_2}{k_2} \text{ ή } \frac{m_1}{m_2} = 2\frac{k_1}{k_2} \quad (5).$$

Για τις ενέργειες των δύο ταλαντώσεων ισχύει:

$$E_2 = 2E_1 \text{ ή } \frac{1}{2}k_2A_2^2 = 2\frac{1}{2}k_1A_1^2$$

ή λόγω των σχέσεων (2) και (4):

$$k_2\frac{m_2^2g^2}{k_2^2} = 2k_1\frac{m_1^2g^2}{k_1^2} \text{ ή } \frac{m_2^2}{k_2} = 2\frac{m_1^2}{k_1}$$

$$\text{ή } \frac{k_1}{k_2} = 2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \text{ ή λόγω της σχέσης (5):}$$

$$\frac{k_1}{k_2} = 2\left(2\frac{k_1}{k_2}\right)^2 \text{ ή } \frac{k_1}{k_2} = 8\frac{k_1^2}{k_2^2} \text{ ή } \frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{8}.$$

58. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του συστήματος που αποτελείται από το σώμα Σ_1 και το σώμα μάζας m_2 . Στη Θ.Ι. του συστήματος ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{ολ} - F_{ελ} = 0$

$$\text{ή } (m_1 + m_2)g = k\Delta\ell_1 \text{ ή } \Delta\ell_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \quad (1).$$

Μετά την κοπή του νήματος που συνδέει το σώμα μάζας m_2 με το σώμα Σ_1 , το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A_1 που δίνεται από τη σχέση: $A_1 = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2$ (2), όπου $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ_1 . Στη Θ.Ι. του σώματος Σ_1 , ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{ελ(1)} = 0$

$$\text{ή } m_1g = k\Delta\ell_2 \text{ ή } \Delta\ell_2 = \frac{m_1g}{k} \quad (3).$$

Από τη σχέση (2), λόγω των σχέσεων (1) και (3) προκύπτει:

$$A_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} - \frac{m_1g}{k} \text{ ή } A_1 = \frac{m_2g}{k} \quad (4).$$

Η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του συστήματος που αποτελείται από το σώμα Σ_2 και το σώμα μάζας m_1 είναι ίση με $\Delta\ell_1$.

Μετά την κοπή του νήματος που συνδέει το σώμα μάζας m_1 με το σώμα Σ_2 , το σώμα Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A_2 που δίνεται από τη σχέση: $A_2 = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_3$ (5), όπου $\Delta\ell_3$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ_2 . Στη Θ.Ι. του σώματος Σ_2 ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_2 - F_{ελ(2)} = 0$

$$\text{ή } m_2 g = k \Delta \ell_3 \quad \text{ή } \Delta \ell_3 = \frac{m_2 g}{k} \quad (6).$$

Από τη σχέση (5), λόγω των σχέσεων (1) και

$$(6), \text{ προκύπτει: } A_2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} - \frac{m_2 g}{k}$$

$$\text{ή } A_2 = \frac{m_1 g}{k} \quad (7).$$

Οι ενέργειες E_1 και E_2 των ταλαντώσεων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 δίνονται, αντίστοιχα, από

$$\text{τις σχέσεις: } E_1 = \frac{1}{2} k A_1^2 \quad (8) \text{ και } E_2 = \frac{1}{2} k A_2^2 \quad (9).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (8) και

$$(9) \text{ προκύπτει: } \frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad \text{ή λόγω των σχέ-}$$

$$\text{σεων (4) και (7): } \frac{E_1}{E_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}.$$

59. A. Σωστή επιλογή είναι η α.

Έστω $\Delta \ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του δίσκου. Ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή } Mg = k \Delta \ell_1 \quad \text{ή } \Delta \ell_1 = \frac{Mg}{k} \quad (1).$$

Έστω $\Delta \ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του συστήματος δίσκος – σώμα. Στη Θ.Ι. του συστήματος δίσκος – σώμα, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή } (M + m)g = k \Delta \ell_2$$

$$\text{ή } \Delta \ell_2 = \frac{(M + m)g}{k} \quad (2).$$

Το πλάτος A της ταλάντωσης του συστήματος δίσκος – σώμα είναι: $A = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1$

$$\text{ή, λόγω των σχέσεων (1) και (2): } A = \frac{mg}{k} \quad (3).$$

Επομένως, η ενέργεια της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων είναι: $E = \frac{1}{2} k A^2$

ή, λόγω της σχέσης (3):

$$E = \frac{1}{2} k \frac{m^2 g^2}{k^2} \quad \text{ή } E = \frac{m^2 g^2}{2k}.$$

B. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Το σώμα μάζας m κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης δέχεται από τον δίσκο τη δύναμη επαφής $\vec{N}$. Θεωρούμε μια τυχαία θέση της τροχιάς του συστήματος δίσκος – σώμα πάνω από τη θέση ισορροπίας με απομάκρυνση x . Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά για την ταλάντωση του συστήματος δίσκος – σώμα τη φορά προς τα πάνω, τότε η αλγεβρική τιμή της δύναμης $\vec{N}$ σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας, υπολογίζεται από τη σχέση: $\Sigma F = -D_2 x$ ή $N - mg = -m \omega^2 x$

$$\text{ή } N = mg - m \frac{k}{M + m} x \quad \text{ή } N = mg - \frac{k}{2} x \quad (4).$$

Η επαφή του σώματος με τον δίσκο χάνεται όταν μηδενίζεται η δύναμη $\vec{N}$ ($N = 0$).

Από τη σχέση (4) για $N = 0$, προκύπτει:

$$0 = mg - \frac{k}{2} x \quad \text{ή } x = \frac{2mg}{k}.$$

Επειδή είναι $x > A$, η επαφή του σώματος με τον δίσκο δεν χάνεται κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων. Εφόσον η επαφή των δύο σωμάτων δεν χάνεται κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης, η ελάχιστη τιμή της δύναμης που δέχεται το σώμα από τον δίσκο προκύπτει από τη σχέση (4), αν θέσουμε σε αυτή όπου $x = +A$. Επομένως, είναι: $N_{\min} = mg - \frac{k}{2} A$ ή, λόγω της σχέσης (3):

$$N_{\min} = mg - \frac{k}{2} \frac{mg}{k} \quad \text{ή } N_{\min} = \frac{mg}{2}.$$

60. Σωστή επιλογή είναι η α.

Έστω $\vec{F}$ η δύναμη που ασκείται στο σώμα Σ_2 από το σώμα Σ_1 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων. Θεωρούμε μια τυχαία θέση της τροχιάς του

συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 πάνω από τη θέση ισορροπίας με απομάκρυνση x ($x > 0$).

Στη θέση αυτήν ισχύει:

$$\Sigma F_2 = -D_2 x \quad \text{ή} \quad F - w_{2x} = -m_2 \omega^2 x$$

$$\text{ή} \quad F - m_2 g \mu \theta = -m_2 \frac{k}{m_1 + m_2} x$$

$$\text{ή} \quad F = m_2 g \mu \theta - k \frac{m_2}{m_1 + m_2} x \quad (1).$$

Η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων χάνεται όταν $F = 0$. Από τη σχέση (1) για $F = 0$, προκύπτει:

$$x = \frac{(m_1 + m_2) g \mu \theta}{k} \quad (2). \text{ Για να μη χαθεί}$$

η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων πρέπει να ισχύει: $x > A$ ή, λόγω της σχέσης (2):

$$\frac{(m_1 + m_2) g \mu \theta}{k} > A \quad \text{ή} \quad (m_1 + m_2) g \mu \theta > kA.$$

61. Α. Σωστή επιλογή είναι η β.

Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι. (1), βλ. επόμενο σχήμα] ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_1 - F_{ελ(1)} = 0 \quad \text{ή} \quad m_1 g = k \Delta \ell_1$$

ή $\Delta \ell_1 = \frac{3mg}{k}$ (1). Το πλάτος A_1 της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 είναι:

$$A_1 = 2\Delta \ell_1 \quad \text{ή} \quad A_1 = \frac{6mg}{k} \quad (2).$$

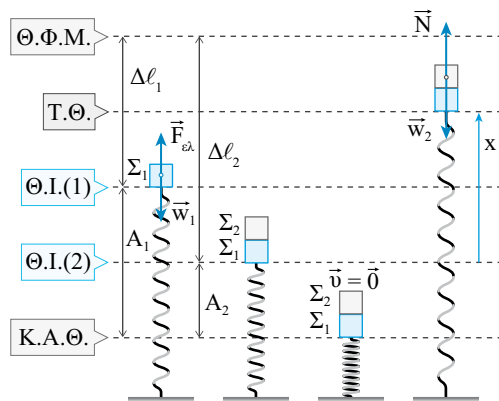
Έστω $\Delta \ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 [Θ.Ι. (2), στο επόμενο σχήμα]. Στη θέση αυτήν ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_{ολ} - F_{ελ} = 0$$

$$\text{ή} \quad (m_1 + m_2)g = k\Delta \ell_2 \quad \text{ή} \quad \Delta \ell_2 = \frac{4mg}{k} \quad (3).$$

Όπως προκύπτει από το επόμενο σχήμα, το πλάτος A_2 της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 υπολογίζεται

από τη σχέση: $A_2 = A_1 + \Delta \ell_1 - \Delta \ell_2$ ή λόγω των σχέσεων (1), (2) και (3): $A_2 = \frac{5mg}{k}$ (4).



Β. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Θεωρούμε την τυχαία θέση με απομάκρυνση x ($x > 0$) από τη Θ.Ι. του συστήματος των δύο σωμάτων που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Η αλγεβρική τιμή της δύναμης $\vec{N}$ που ασκείται στο σώμα Σ_2 από το σώμα Σ_1 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Sigma F_2 = -D_2 x \quad \text{ή} \quad N - m_2 g = -m_2 \omega^2 x \quad \text{ή}$$

$$N = m_2 g - m_2 \frac{k}{m_1 + m_2} x \quad \text{ή} \quad N = mg - \frac{k}{4} x \quad (5).$$

Για να χαθεί η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων πρέπει η δύναμη επαφής $\vec{N}$ να γίνει ίση με μηδέν ($N = 0$). Από τη σχέση (5) για $N = 0$,

προκύπτει ότι: $x = \frac{4mg}{k}$ ή λόγω της σχέσης

(3): $x = \Delta \ell_2$. Επομένως, η επαφή μεταξύ των

σωμάτων Σ_1 και Σ_2 χάνεται, όταν τα σώματα διέρχονται από τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα, ισχύει:

$$d = A_2 + \Delta \ell_2 \quad \text{ή} \quad d = \frac{9mg}{k}.$$

62. Σωστή επιλογή είναι η α.

Το σώμα Σ_2 τοποθετείται χωρίς αρχική ταχύτητα πάνω στο σώμα Σ_1 κάποια χρονική στιγμή στην οποία το σώμα Σ_1 βρίσκεται σε μία από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του. Επομένως, η συγκεκριμένη θέση είναι και μία από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 . Εφόσον η Θ.Ι. του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι η ίδια με τη Θ.Ι. του σώματος Σ_1 , το πλάτος A_2 της ταλάντωσης του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι: $A_2 = A$. Η αλγεβρική τιμή της δύναμης στατικής τριβής που δέχεται το σώμα Σ_2 από το σώμα Σ_1 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων υπολογίζεται από τη σχέση: $\Sigma F_2 = -D_2 x$ ή $T_{\sigma\tau} = -m_2 \omega^2 x$

$$\text{ή } T_{\sigma\tau} = -m_2 \frac{k}{m_1 + m_2} x \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$T_{\sigma\tau(\max)} = k \frac{m_2}{m_1 + m_2} A \quad (2).$$

Για να μην ολισθαίνει το σώμα Σ_2 σε σχέση με το σώμα Σ_1 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 , πρέπει να ισχύει: $T_{\sigma\tau(\max)} < T_{\text{op}}$ ή $T_{\sigma\tau(\max)} \leq \mu_s N$

$$\text{ή } T_{\sigma\tau(\max)} \leq \mu_s m_2 g \quad \text{ή } \mu_s \geq \frac{T_{\sigma\tau(\max)}}{m_2 g}$$

$$\text{ή λόγω της σχέσης (2): } \mu_s \geq \frac{kA}{(m_1 + m_2)g} \quad (3).$$

Από τη σχέση (3) προκύπτει:

$$\mu_{s(\min)} = \frac{kA}{(m_1 + m_2)g}.$$

63. Α. Σωστή επιλογή είναι η β.

Θεωρούμε μια τυχαία θέση με απομάκρυνση $x (x > 0)$ πάνω από τη θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 . Οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα Σ_2 είναι το βάρος του $\vec{w}_2$ και η τάση $\vec{T}$ από το νήμα. Επειδή το σώμα Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ισχύει: $\Sigma F_2 = -D_2 x$ ή $T - w_2 = -m_2 \omega^2 x$

$$\text{ή } T = m_2 g - m_2 \frac{k}{m_1 + m_2} x$$

$$\text{ή } T = 3mg - \frac{3}{4} kx \quad (1).$$

Το νήμα χαλαρώνει στη θέση όπου η τάση του νήματος μηδενίζεται ($T = 0$). Από τη σχέση (1) για $T = 0$ προκύπτει:

$$0 = 3mg - \frac{3}{4} kx \quad \text{ή } x = \frac{4mg}{k}.$$

Για να μη χαλαρώνει το νήμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 , πρέπει να ισχύει:

$$A < x \quad \text{ή } d < \frac{4mg}{k}.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η β.

Στην περίπτωση αυτήν το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με $A = d = \frac{2mg}{k}$ και το νήμα δεν χαλαρώνει κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 .

Από τη σχέση (1) για $x = +A = +\frac{2mg}{k}$ προ-

κύπτει: $T_{\min} = 1,5mg$. Από τη σχέση (1) για

$$x = -A = -\frac{2mg}{k} \quad \text{προκύπτει: } T_{\max} = 4,5mg.$$

Επομένως, είναι: $\frac{T_{\min}}{T_{\max}} = \frac{1}{3}.$

64. α. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Η μέγιστη ταχύτητα του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_{\max} = \omega A$ ή $v_{\max} = 5 \text{ m/s}$.

β. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

$$\text{ή } m\omega^2 A^2 = m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega A\right)^2 + m\omega^2 x^2$$

$$\text{ή } x = -\frac{A}{2} \text{ ή } x = -0,25 \text{ m.}$$

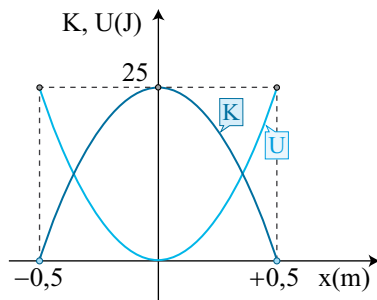
γ. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας του σώματος δίδεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \text{ ή } K = \frac{1}{2}m[v_{\max}\sin(\omega t)]^2$$

$$\text{ή } K = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \sin^2(\omega t)$$

$$\text{ή } K = 25\sin^2(10t) \text{ (S.I.)}$$

δ. Στο επόμενο διάγραμμα απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις της κινητικής ενέργειας του σώματος και της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x του σώματος από τη θέση ισορροπίας.



65. α. Η χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \text{ ή } K = \frac{1}{2}m[v_{\max}\sin(\omega t + \phi_0)]^2$$

$$\text{ή } K = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή } K = E\sin^2(\omega t + \phi_0) \text{ (1)}$$

Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $\omega = 10 \text{ rad/s}$ και $\phi_0 = 0$. Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m\omega^2 \text{ ή } D = 500 \text{ N/m.}$$

β. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με τη σχέση (1) προκύπτει ακόμη: $E = 10 \text{ J}$.

Το πλάτος A της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \text{ ή } A = \sqrt{\frac{2E}{D}} \text{ ή } A = 0,2 \text{ m.}$$

γ. Η χρονική εξίσωση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

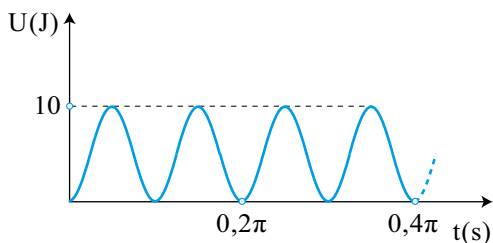
$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \text{ ή } U = \frac{1}{2}D[A\sin(\omega t + \phi_0)]^2$$

$$\text{ή } U = \frac{1}{2}DA^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή } U = E\eta\mu^2(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ή } U = 10\eta\mu^2(10t) \text{ (S.I.).}$$

Η περίοδος T της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ή $T = 0,2\pi$ s.

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο.



δ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } x = 0,2\eta\mu(10t) \text{ (S.I.) (2).}$$

Από τη σχέση (2) για $t = (\pi/40)$ s προκύπτει:

$$x = +0,1\sqrt{2} \text{ m.}$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$v = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ή } v = 2\sigma\upsilon\nu(10t) \text{ (S.I.) (3).}$$

Από τη σχέση (3) για $t = (\pi/40)$ s, προκύπτει:

$$v = +\sqrt{2} \text{ m/s.}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος τη χρονική στιγμή $t = (\pi/40)$ s υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F dx}{dt}$$

$$\text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -Dx \cdot v$$

$$\text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -100 \text{ J/s.}$$

66. α. Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } K = E - U \quad \text{ή} \quad K = E - \frac{1}{2}Dx^2 \quad (1).$$

Από τη σύγκριση της σχέσης (1) με τη δοθείσα σχέση προκύπτει: $E = 8 \text{ J}$.

β. Από τη σύγκριση της σχέσης (1) με τη δοθείσα σχέση προκύπτει ακόμη:

$$\frac{D}{2} = 50 \text{ N/m} \quad \text{ή} \quad D = 100 \text{ N/m.}$$

Το πλάτος A της ταλάντωσης του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \quad \text{ή} \quad A = 0,4 \text{ m.}$$

γ. Ισχύει: $D = m\omega^2$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Για την περίοδο της ταλάντωσης ισχύει:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad T = 0,2\pi \text{ s.}$$

Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της κινητικής ενέργειας του σώματος είναι: $t = \frac{T}{2}$ ή $t = 0,1\pi$ s.

δ. Έστω u το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης, έχουμε:

$$K + U = E \quad \text{ή} \quad K = E - U$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}mv^2 = E - U \quad \text{ή} \quad v = 2\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

ε. Τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $x = -0,2\sqrt{3} \text{ m}$, η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι: $U' = \frac{1}{2}Dx^2$ ή $U' = 6 \text{ J}$.

Το ζητούμενο έργο της δύναμης επαναφοράς που δέχεται το σώμα υπολογίζεται από τη σχέση: $W_{\Sigma F} = \Delta K$ ή $W_{\Sigma F} = -\Delta U$

$$\text{ή} \quad W_{\Sigma F} = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\epsilon\lambda} \quad \text{ή} \quad W_{\Sigma F} = U - U'$$

$$\text{ή} \quad W_{\Sigma F} = -4 \text{ J.}$$

67. α. Το διάστημα s που διανύει το σώμα σε χρόνο μίας περιόδου της ταλάντωσης είναι ίσο με $4A$, όπου A το πλάτος της ταλάντωσης. Επομένως, είναι: $s = 4A$ ή $A = 2 \text{ m}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = 2\pi f$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

β. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ισχύει: $K = \frac{1}{3}U$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης έχουμε: $E = K + U$ ή $E = \frac{4U}{3}$

$$\text{ή } \frac{1}{2}DA^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}Dx^2 \quad \text{ή } x = -\frac{\sqrt{3}A}{2}$$

ή $x = -\sqrt{3} \text{ m}$. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$ υπολογίζεται από τη σχέση: $K = \frac{1}{3}U$ ή $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}Dx^2$

$$\text{ή } mv^2 = \frac{1}{3}m\omega^2x^2 \quad \text{ή } |v| = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega|x|$$

$$\text{ή } |v| = 10 \text{ m/s}.$$

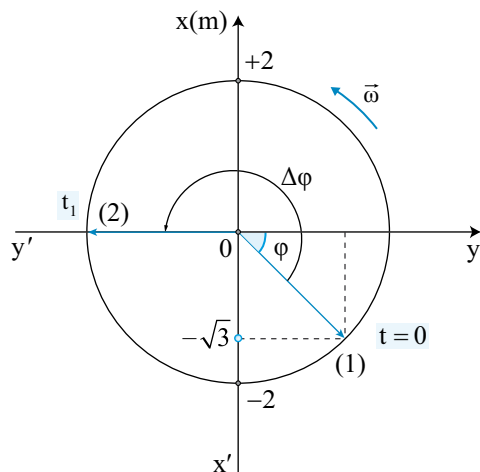
Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$ υπολογίζεται από τη σχέση: $\frac{dv}{dt} = a$ ή $\frac{dv}{dt} = -\omega^2x$

$$\text{ή } \frac{dv}{dt} = +100\sqrt{3} \text{ m/s}^2.$$

γ. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση: $\pi = \frac{K}{E} \cdot 100\%$ ή $\pi = \frac{E - U}{E} \cdot 100\%$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}DA^2} \cdot 100\% \quad \text{ή } \pi = 50\%.$$

δ. Η ζητούμενη χρονική στιγμή t_1 ισούται με το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\phi$ που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Η οξεία γωνία ϕ που σχηματίζει το περιστρεφόμενο διάνυσμα με τον άξονα $y'y$ τη χρονική στιγμή $t = 0$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\eta\mu\phi = \frac{|x|}{A} \quad \text{ή } \eta\mu\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή } \phi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}.$$

Η γωνία $\Delta\phi$ είναι:

$$\Delta\phi = \left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) \text{ rad} \quad \text{ή } \Delta\phi = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}.$$

$$\text{Είναι: } \omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad \text{ή } \Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega}$$

$$\text{ή } \Delta t = \frac{2\pi}{15} \text{ s} \quad \text{ή } t_1 = \frac{2\pi}{15} \text{ s}.$$

68. α. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η επιτάχυνση του σώματος είναι $a = 0$, η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας την ίδια χρονική στιγμή, σύμφωνα με τη σχέση $a = -\omega^2x$, είναι $x = 0$. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Το σώμα θα βρεθεί σε ακραία θέση της ταλάντωσης για πέμπτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ τη χρονική στιγμή $t = 9T/4$.

$$\text{Επομένως είναι: } \frac{9T}{4} = \frac{9\pi}{20} \text{ s} \quad \text{ή } T = 0,2\pi \text{ s}.$$

Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης είναι: $\Delta t = \frac{T}{2}$ ή $\Delta t = 0,1\pi$ s.

β. Το πλάτος A της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $E = \frac{1}{2}DA^2$ ή $E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$
ή $E = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A^2$ ή $A = 0,2$ m.

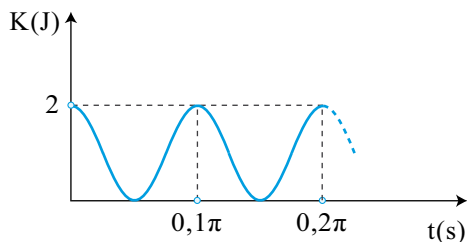
γ. Η χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{ή} \quad K = \frac{1}{2}m[v_{\max}\sin(\omega t + \phi_0)]^2$$

$$\text{ή} \quad K = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή} \quad K = E \sin^2(\omega t + \phi_0) \quad \text{ή} \quad K = 2 \sin^2(10t) \text{ (S.I.)}$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.



δ. Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{K}{U} = \frac{K}{E-K} \quad \text{ή} \quad \frac{K}{U} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{E - \frac{1}{2}mv^2} \quad \text{ή} \quad \frac{K}{U} = 3.$$

69. α. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει:

$$\frac{T}{2} = \left(\frac{4\pi}{15} - \frac{\pi}{15}\right) \text{ s} \quad \text{ή} \quad T = 0,4\pi \text{ s}.$$

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 5$ rad/s.

Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης είναι: $D = m\omega^2$ ή $D = 50$ N/m. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ακόμη: $v_{\max} = 1$ m/s. Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_{\max} = \omega A$ ή $A = 0,2$ m.

Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \quad \text{ή} \quad E = 1 \text{ J}.$$

γ. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητα του σώματος είναι: $v = +0,5\sqrt{3}$ m/s.

Έστω x η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας τη χρονική στιγμή $t = 0$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης,

$$\text{έχουμε: } E = K + U \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

$$\text{ή} \quad |x| = 0,1 \text{ m}.$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης έχουμε: $E = K + U$ ή $dE = dK + dU$

$$\text{ή} \quad 0 = dK + dU \quad \text{ή} \quad dU = -dK \quad \text{ή} \quad \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt}$$

$$\text{ή} \quad \frac{dU}{dt} = \Sigma F \cdot v.$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι: $\left|\frac{dU}{dt}\right| = |\Sigma F \cdot v|$

$$\text{ή} \quad \left|\frac{dU}{dt}\right| = D|x||v| \quad \text{ή} \quad \left|\frac{dU}{dt}\right| = 2,5\sqrt{3} \text{ J/s}.$$

δ. Από το διάγραμμα προκύπτει ότι η ζητούμενη χρονική στιγμή, είναι:

$$t = \frac{4\pi}{15} \text{ s} + \frac{T}{2} \quad \text{ή} \quad t = \frac{7\pi}{15} \text{ s}.$$

70. α. Η περίοδος της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ή $T = 0,1\pi$ s.

β. Η ενέργεια της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $E = \frac{1}{2}kA^2$ ή $E = 8 \text{ J}$.

γ. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \text{ ή } v_0 = 2 \text{ m/s.}$$

δ. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 20 \text{ rad/s}$.

Το σώμα ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσης του στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσης ($x = +A$).

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \text{ ή } U = \frac{1}{2}D[A\eta\mu(\omega t + \phi_0)]^2$$

$$\text{ή } U = \frac{1}{2}DA^2\eta\mu^2(\omega t + \phi_0) \text{ ή } U = E\eta\mu^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή } U = 8\eta\mu^2\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

71. α. Το πλάτος A της ταλάντωσης του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_{\max} = \omega A \text{ ή } A = 0,2 \text{ m.}$$

β. Η σταθερά του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $k = m\omega^2$

ή $k = 100 \text{ N/m}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης, έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } U = E - K$$

$$\text{ή } U = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \text{ ή } U = 1,5 \text{ J.}$$

γ. Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής της ορμής υπολογίζεται από τη σχέση: $\frac{dp}{dt} = -Dx$

$$\text{ή } \frac{dp}{dt} = -kx \text{ ή } \frac{dp}{dt} = +10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

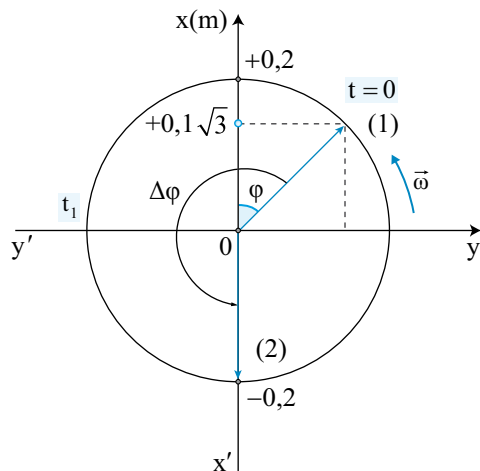
δ. Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή $t = 0$ υπολογίζεται από τη σχέση: $U = \frac{1}{2}Dx_1^2$

$$\text{ή } x_1 = \sqrt{\frac{2U}{k}} \text{ ή } x_1 = +0,1\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Η κινητική ενέργεια του σώματος μηδενίζεται στιγμιαία για δεύτερη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ στη θέση με απομάκρυνση:

$$x = -A \text{ ή } x = -0,2 \text{ m.}$$

Η ζητούμενη χρονική στιγμή t_1 ισούται με τον χρόνο Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\phi$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω ϕ η οξεία γωνία που σχηματίζει το περιστρεφόμενο διάνυσμα με τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή $t = 0$. Από το σχήμα προκύπτει,

$$\text{ότι: } \sin\phi = \frac{x_1}{A} \text{ ή } \sin\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή } \phi = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Η γωνία $\Delta\phi$ είναι:

$$\Delta\phi = \left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \Delta\phi = \frac{7\pi}{6} \text{ rad.}$$

$$\text{Είναι: } \omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{\Delta\phi}{\omega}$$

$$\text{ή} \quad t_1 = \frac{7\pi}{60} \text{ s.}$$

72. α. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m\omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης.

$$\text{Είναι: } v_0 = v_{\max} \quad \text{ή} \quad v_0 = \omega A \quad \text{ή} \quad A = 0,1\sqrt{2} \text{ m.}$$

β. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{ή} \quad K = \frac{1}{2}m[v_{\max}\sin(\omega t + \phi_0)]^2$$

$$\text{ή} \quad K = \frac{1}{2}mv_0^2\sin^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή} \quad K = 1\sin^2(10t) \text{ (S.I.).}$$

γ. Η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο γίνεται μέγιστη τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα φτάνει σε κάποια από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του.

$$\text{Είναι: } U_{\text{ελ(max)}} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_{\max})^2$$

$$\text{ή} \quad U_{\text{ελ(max)}} = \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{ή} \quad U_{\text{ελ(max)}} = 1 \text{ J.}$$

δ. Τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα ακινητοποιείται στιγμιαία η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του είναι $x = \pm A$. Τις παραπάνω χρονικές στιγμές ισχύει:

$$\left|\frac{dp}{dt}\right| = |\Sigma F| \quad \text{ή} \quad \left|\frac{dp}{dt}\right| = D|x| \quad \text{ή} \quad \left|\frac{dp}{dt}\right| = kA$$

$$\text{ή} \quad \left|\frac{dp}{dt}\right| = 10\sqrt{2} \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

73. α. Η ενέργεια που δαπανήσαμε για να θέσουμε το σώμα σε ταλάντωση είναι ίση με την ενέργεια της ταλάντωσης. Επομένως, ισχύει: $E = \frac{1}{2}kA^2$ ή $A = 0,08 \text{ m.}$

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $k = m\omega^2$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s.}$ Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι $x = +A$. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad.}$ Η χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας του σώματος δίνεται από τη σχέση: $K = E\sin^2(\omega t + \phi_0)$

$$\text{ή} \quad K = 0,64\sin^2\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ή} \quad T = 0,2\pi \text{ s.}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$

$$\text{ή} \quad x = 0,08\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) (1).}$$

Από τη σχέση (1) για $t = \frac{T}{12} = \frac{\pi}{60} \text{ s,}$ προκύπτει: $x = 0,08\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ m}$ ή $x = +0,04\sqrt{3} \text{ m.}$

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή $t = T/12$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dv}{dt} = -\omega^2 x \quad \text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = -4\sqrt{3} \text{ m/s}^2.$$

δ. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση ισορροπίας του είναι το βάρος του $\vec{w}$ και η δύναμη από το ελατήριο $\vec{F}_{ελ}$. Έστω ότι στη θέση ισορροπίας του σώματος το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell_1$. Στη θέση ισορροπίας του σώματος, ισχύει: $\vec{\Sigma F} = \vec{0}$ ή $w - F_{ελ} = 0$ ή $mg = k\Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,1 \text{ m}$. Επειδή είναι $A < \Delta\ell_1$, η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται ελάχιστη τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του.

Επομένως, είναι:

$$U_{ελ(\min)} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_1 - A)^2 \quad \text{ή} \quad U_{ελ(\min)} = 0,04 \text{ J.}$$

ε. Η ζητούμενη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$t_1 = \frac{T}{2} \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,1\pi \text{ s.}$$

74. α. Η περίοδος της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ή $T = 0,2\pi \text{ s}$.

β. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

γ. Έστω $\Delta\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος. Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει: $\vec{\Sigma F} = \vec{0}$ ή $w - F_{ελ} = 0$ ή $mg = k\Delta\ell$ ή $\Delta\ell = 0,1 \text{ m}$.

Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα διέρχεται από τη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος είναι $x = +\Delta\ell$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 \quad \text{ή} \quad A = 0,2 \text{ m.}$$

δ. Η ενέργεια που δαπανήσαμε για να θέσουμε το σώμα σε ταλάντωση είναι ίση με την ενέργεια της ταλάντωσης.

$$\text{Είναι: } E_{\delta\alpha\pi} = E \quad \text{ή} \quad E_{\delta\alpha\pi} = \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{ή} \quad E = 4 \text{ J.}$$

ε. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται μέγιστη τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του.

$$\text{Είναι: } U_{ελ(\max)} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell + A)^2 \quad \text{ή} \quad U_{ελ(\max)} = 9 \text{ J.}$$

75. α. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$

ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Το πλάτος A της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_0 = v_{\max} \quad \text{ή} \quad v_0 = \omega A \quad \text{ή} \quad A = 0,2 \text{ m.}$$

β. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι $x = 0$ και η ταχύτητά του είναι θετική, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{ή} \quad K = \frac{1}{2}m[\omega A \sin(\omega t + \phi_0)]^2$$

$$\text{ή} \quad K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή} \quad K = 2\sin^2(10t) \text{ (S.I.) (1).}$$

Η χρονική εξίσωση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

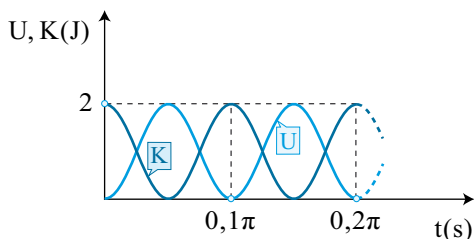
$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \quad \text{ή} \quad U = \frac{1}{2}k[A\eta\mu(\omega t + \phi_0)]^2$$

$$\text{ή} \quad U = \frac{1}{2}kA^2\eta\mu^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή} \quad U = 2\eta\mu^2(10t) \text{ (S.I.) (2).}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $T = 0,2\pi$ s. Οι γραφικές παραστάσεις των σχέσεων (1) και (2) απεικονίζονται στο ακόλουθο διάγραμμα:



γ. Είναι: $\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}} = m\vec{v}_{\text{τελ}} - m\vec{v}_{\text{αρχ}}$
ή $\Delta p = -2mv_0$ ή $\Delta p = -4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.

δ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας τη χρονική στιγμή t_1 .

Είναι: $\alpha = -\omega^2 x$ ή $x = -0,1 \text{ m}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης, έχουμε: $E = K + U$ ή $K = E - U$

ή $K = E - \frac{1}{2}Dx^2$ ή $K = 1,5 \text{ J}$.

Η θέση $x = -0,1 \text{ m}$ βρίσκεται κάτω από τη θέση ισορροπίας του σώματος. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη θέση αυτήν είναι:

$U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2}K(\Delta \ell_1 + |x|)^2$ (1), όπου $\Delta \ell_1$ η επιμή-

κυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος. Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F_{\text{ελ}} = 0$

ή $mg = k\Delta \ell_1$ ή $\Delta \ell_1 = 0,1 \text{ m}$.

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (1) προκύπτει: $U_{\text{ελ}} = 2 \text{ J}$.

76. α. Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης προκύπτει:

$E = K + U$ ή $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$ ή $E = 4 \text{ J}$.

β. Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του. Επομένως, τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά μετά την εκτόξευσή του κινούμενο με θετική ταχύτητα. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Το πλάτος A της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$E = \frac{1}{2}DA^2$ ή $A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$ ή $A = 0,2\sqrt{2} \text{ m}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$D = m\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$

ή $x = 0,2\sqrt{2}\eta\mu(10t) \text{ (S.I.)}$.

γ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας τις χρονικές στιγμές στις οποίες η κινητική του ενέργεια είναι $K = 3,5 \text{ J}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης έχουμε: $E = K + U$ ή $E = K + \frac{1}{2}kx^2$ ή $x = \pm 0,1 \text{ m}$.

Το μέτρο της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα τις παραπάνω χρονικές στιγμές, είναι: $|\Sigma F| = k|x|$ ή $|\Sigma F| = 10 \text{ N}$.

δ. Η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ ή $T = 0,2\pi \text{ s}$.

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται μέγιστη στην κάτω ακραία θέση της ταλάντω-

σης. Η χρονική στιγμή t_1 στην οποία η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι: $t_1 = \frac{3T}{4}$ ή $t_1 = 0,15\pi$ s.

77. α. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = 0$.

β. Έστω $\Delta\ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος. Στη θέση ισορροπίας του σώματος, ισχύει: $\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_x - F_{ελ} = 0$ ή $mg\eta\mu\varphi = k\Delta\ell$ ή $\Delta\ell = 0,2$ m.

Η πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης του σώματος είναι η θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Επομένως, το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = \Delta\ell$ ή $A = 0,2$ m.

γ. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m\omega^2 \text{ ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ ή } \omega = 5 \text{ rad/s.}$$

$$\text{Είναι: } v_0 = \omega A \text{ ή } v_0 = v_{\max} \text{ ή } v_0 = 1 \text{ m/s.}$$

δ. Η περίοδος της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ή $T = 0,4\pi$ s.

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μηδενίζεται στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Επομένως, η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι: $t = \frac{T}{4}$ ή $t = 0,1\pi$ s.

78. α. Το πλάτος A της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \text{ ή } A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \text{ ή } A = 0,4 \text{ m.}$$

β. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kd^2 \text{ ή } d = 0,2 \text{ m.}$$

γ. Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης γίνεται μέγιστη στις ακραίες θέσεις της τροχιάς του σώματος ($x = \pm A$). Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος στις ακραίες θέσεις της τροχιάς του είναι:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = |\Sigma F| \text{ ή } \left| \frac{dp}{dt} \right| = k|x| \text{ ή } \left| \frac{dp}{dt} \right| = kA$$

$$\text{ή } \left| \frac{dp}{dt} \right| = 40 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

δ. Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει $K = 3U$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης έχουμε: $E = K + U$ ή $E = 4U$ ή $x = \pm \frac{A}{2}$

ή $x = \pm 0,2$ m. Το σώμα αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ από τη θέση με απομάκρυνση: $x = +d$ ή $x = +0,2$ m κινούμενο με αρνητική ταχύτητα.

Επομένως, η κινητική ενέργεια του σώματος γίνεται τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα διέρχεται από τη θέση με απομάκρυνση $x = -0,2$ m, κινούμενο με αρνητική ταχύτητα. Δηλαδή, το σώμα τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται σε μια θέση πάνω από τη θέση ισορροπίας του. Επομένως, το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F_{ελ} = k(\Delta\ell_1 - |x|) \text{ ή } F_{ελ} = 0.$$

79. α. Σε μια τυχαία θέση με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει:

$$\Sigma F = -F_{ελ(1)} - F_{ελ(2)} \quad \text{ή} \quad \Sigma F = -kx - kx \\ \text{ή} \quad \Sigma F = -2kx.$$

Επομένως, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = 2k$.

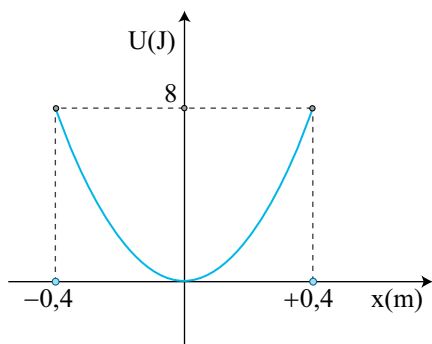
β. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι:

$E = 8 \text{ J}$ και $A = 0,4 \text{ m}$. Είναι:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2}2kA^2 \quad \text{ή} \quad k = 50 \text{ N/m}.$$

γ. Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης σε συνάρτηση με την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση: $U = \frac{1}{2}Dx^2$ ή $U = 50x^2$,

με $-0,4 \text{ m} \leq x \leq 0,4 \text{ m}$ (1). Η γραφική παράσταση της σχέσης (1) απεικονίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



δ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το μέτρο της δύναμης που δέχεται από το ελατήριο (1) είναι: $F_{ελ(1)} = 10 \text{ N}$. Είναι: $F_{ελ(1)} = k|x|$ ή $|x| = 0,2 \text{ m}$.

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2, \quad \text{όπου} \quad D = 2k,$$

$$\text{ή} \quad |v| = 2\sqrt{3} \text{ m/s}.$$

80. α. Σε μια τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας ισχύει: $\Sigma F = -F_{ελ(1)} - F_{ελ(2)}$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = -k_1x - k_2x \quad \text{ή} \quad \Sigma F = -(k_1 + k_2)x.$$

Επομένως, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς: $D = k_1 + k_2$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολο-

$$\text{γίζεται από τη σχέση: } D = m\omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \\ \text{ή} \quad \omega = 20 \text{ rad/s}.$$

β. Το πλάτος A της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $v = v_{\max}$ ή $v = \omega A$ ή $A = 0,2 \text{ m}$.

γ. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση από τη θέση ισορροπίας κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = 0$. Επομένως, ισχύει:

$$F_{ελ(1)} = -k_1x \quad \text{ή} \quad F_{ελ(1)} = -k_1A\eta\mu(\omega t) \\ \text{ή} \quad F_{ελ(1)} = -60\eta\mu(20t) \text{ (S.I.)}$$

δ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας τις χρονικές στιγμές στις οποίες η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου σταθεράς k_2 είναι $U_{ελ(2)} = 0,5 \text{ J}$ Είναι:

$$U_{ελ(2)} = \frac{1}{2}k_2\Delta\ell^2 \quad \text{ή} \quad U_{ελ(2)} = \frac{1}{2}k_2x^2$$

$$\text{ή} \quad x = \pm 0,1 \text{ m}.$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές είναι:

$$|a| = \omega^2|x| = 40 \text{ m/s}^2.$$

81. α. Βλέπε λύση βασικής άσκησης 7.

$$D_1 = 100 \text{ N/m}, D_2 = 300 \text{ N/m}.$$

$$\gamma. v_0 = 2 \text{ m/s}.$$

$$\delta. A' = 0,1 \text{ m}.$$

$$\epsilon. d = 0,571 \text{ m}.$$

82. α. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = (m_1 + m_2)\omega^2 \quad \text{ή} \quad k = (m_1 + m_2)\omega^2$$

$$\text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Η σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_1 είναι:

$$D_1 = m_1\omega^2 \quad \text{ή} \quad D_1 = 300 \text{ N/m.}$$

Η σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_2 είναι:

$$D_2 = m_2\omega^2 \quad \text{ή} \quad D_2 = 100 \text{ N/m.}$$

β. Η επαφή των δύο σωμάτων χάνεται σε μία θέση πάνω από τη θέση ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων. Στη θέση αυτήν η απομάκρυνση του συστήματος των δύο σωμάτων από τη θέση ισορροπίας είναι:

$$x = +\frac{g}{\omega^2} \quad \text{ή} \quad x = +0,1 \text{ m.}$$

(Βλέπε λύση βασικής άσκησης 6, ερώτημα γ).

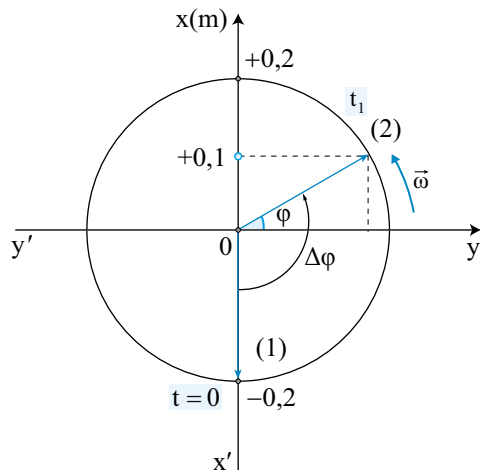
γ. Το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων είναι: $A = d$ ή $A = 0,2 \text{ m}$. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συστήματος των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία χάνεται η επαφή τους. Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{ή} \quad v = \sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $K_2 = \frac{1}{2}m_2v^2$ ή $K_2 = 1,5 \text{ J}$.

δ. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του συστήματος των δύο σωμάτων από τη θέση ισορροπίας είναι: $x = -A$ ή $x = -0,2 \text{ m}$. Η χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα Σ_2 χάνει την επαφή του με το σώμα Σ_1 είναι ίση με το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\phi$ που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Έστω ϕ η οξεία γωνία που σχηματίζει το περιστρεφόμενο διάνυσμα με τον άξονα $y'y$ τη χρονική στιγμή t_1 . Από το σχήμα προκύπτει,

$$\text{ότι: } \eta\mu\phi = \frac{x}{A} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\phi = \frac{0,1}{0,2} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\phi = \frac{1}{2}$$

$$\text{ή} \quad \phi = \frac{\pi}{6} \text{ rad.} \quad \text{Η γωνία } \Delta\phi \text{ είναι:}$$

$$\Delta\phi = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \Delta\phi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad.}$$

$$\text{Είναι: } \omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\pi}{15} \text{ s.}$$

83. α. Έστω $\Delta\ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του δίσκου [Θ.Ι.(1)].

$$\text{Στη } \Theta.Ι.(1) \text{ ισχύει: } \Sigma\vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w - F_{ελ} = 0$$

$$\text{ή} \quad Mg = k\Delta\ell_1 \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_1 = 0,06 \text{ m.}$$

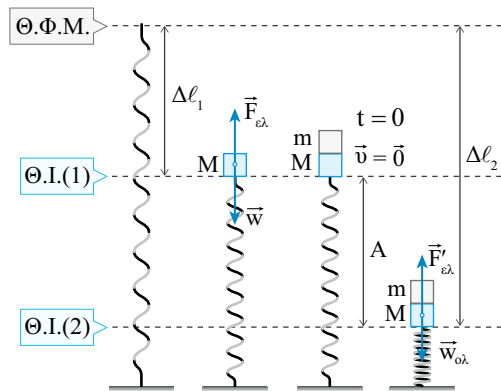
Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συστήματος δίσκος – σώμα Σ [Θ.Ι.(2)]. Στη Θ. Ι.(2) ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή} \quad w_{ολ} - F'_{ελ} = 0 \quad \text{ή} \quad (M + m)g = k\Delta\ell_2$$

$$\text{ή} \quad \Delta\ell_2 = 0,1 \text{ m}$$

Όπως φαίνεται από το επόμενο σχήμα το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος δίσκος – σώμα Σ , είναι:

$$A = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1 \quad \text{ή} \quad A = 0,04 \text{ m.}$$



β. Έστω $|a|$ το μέτρο της επιτάχυνσης του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 0$. Είναι: $|a| = a_{\max}$
ή $|a| = \omega^2 A$ ή $|a| = \frac{k}{M+m} A$ ή $|a| = 4 \text{ m/s}^2$.

γ. Βλέπε λύση βασικής άσκησης 8, ερώτημα γ.

δ. Είναι: $F_{\varepsilon\lambda(\min)} = k\Delta\ell_1$ ή $F_{\varepsilon\lambda(\min)} = 6 \text{ N}$
και $F_{\varepsilon\lambda(\max)} = k(\Delta\ell_2 + A)$ ή $F_{\varepsilon\lambda(\max)} = 14 \text{ N}$.

ε. Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά τη φορά προς τα πάνω, η αλγεβρική τιμή της δύναμης που ασκεί ο δίσκος στο σώμα Σ δίνεται από τη σχέση: $N = mg - m\omega^2 x$
ή $N = 4 - 40x$ (S.I.) (1).

(Βλέπε λύση βασικής άσκησης 8, ερώτημα γ).
Η μέγιστη τιμή της δύναμης που ασκεί ο δίσκος στο σώμα Σ προκύπτει από τη σχέση (1) για $x = -A$ ή $x = -0,04 \text{ m}$.

Επομένως, είναι: $N_{\max} = 5,6 \text{ N}$.

Η ελάχιστη τιμή της δύναμης που ασκεί ο δίσκος στο σώμα Σ προκύπτει από τη σχέση (1) για $x = +A$ ή $x = +0,04 \text{ m}$.

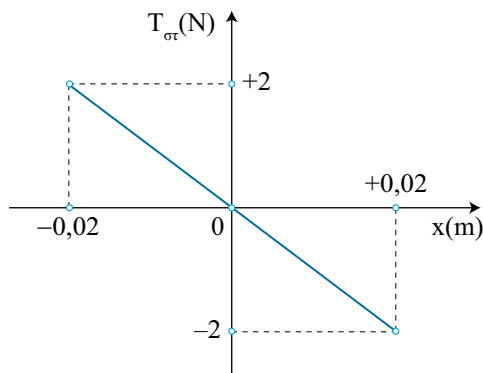
Είναι: $N_{\min} = 2,4 \text{ N}$.

84. α. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2)\omega^2$ ή $k = (m_1 + m_2)\omega^2$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Η σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_1 είναι: $D_1 = m_1\omega^2$ ή $D_1 = 300 \text{ N/m}$.

Η σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_2 είναι: $D_2 = m_2\omega^2$ ή $D_2 = 100 \text{ N/m}$.

β. Έστω μια τυχαία θέση με απομάκρυνση $x (x > 0)$ από τη θέση ισορροπίας του συστήματος. Η μοναδική δύναμη που δέχεται το σώμα Σ_2 στη διεύθυνση της κίνησής του είναι η στατική τριβή. Ισχύει: $\Sigma F_2 = -D_2 x$
ή $T_{\sigma\tau} = -D_2 x$ ή $T_{\sigma\tau} = -100x$ (S.I.) (1).
Η γραφική παράσταση της σχέσης (1) απεικονίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



γ. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 από τη θέση ισορροπίας είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή} \quad x = 0,02\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) (2).}$$

Από τη σχέση (1), λόγω της σχέσης (2), προκύπτει: $T_{στ} = -2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.).

δ. Για να μην ολισθαίνει το σώμα Σ_2 σε σχέση με το σώμα Σ_1 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συστήματός τους, πρέπει να ισχύει:

$$|\vec{T}_{στ}| \leq |\vec{T}_{op}| \quad \text{ή} \quad -|D_2x| \leq \mu_s N_2$$

$$\text{ή} \quad D_2|x| \leq \mu_s m_2 g \quad \text{ή} \quad |x| \leq \frac{\mu_s m_2 g}{D_2}$$

$$\text{ή} \quad |x| \leq 0,05 \text{ m.}$$

Επομένως, είναι: $A_{\max} = 0,05 \text{ m.}$

85. α. Έστω $\Delta\ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 . Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 ισχύει: $\Sigma\vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_x - F_{ελ} = 0$ ή $m_1 g \eta \mu \phi = k \Delta\ell_1$ (1).

Έστω μια τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος Σ_1 με απομάκρυνση x , η οποία βρίσκεται κάτω από τη θέση ισορροπίας του. Στη θέση αυτήν είναι: $\Sigma F = w_x - F'_{ελ}$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = m_1 g \eta \mu \phi - k(x + \Delta\ell_1)$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = m_1 g \eta \mu \phi - kx - k\Delta\ell_1$$

ή, λόγω της σχέσης (1): $\Sigma F = -kx$.

Επομένως, το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

β. Είναι: $\left|\frac{dp}{dt}\right|_{\max} = \Sigma F_{\max}$ ή $\left|\frac{dp}{dt}\right|_{\max} = DA$

$$\text{ή} \quad \left|\frac{dp}{dt}\right|_{\max} = 10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

γ. Έστω ω η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 . Για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ισχύει: $D = (m_1 + m_2)\omega^2$ ή $k = (m_1 + m_2)\omega^2$ ή $\omega = 5\sqrt{2} \text{ rad/s}$. Η σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D_2 = m_2 \omega^2 \quad \text{ή} \quad D_2 = 50 \text{ N/m.}$$

δ. Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\Delta\ell_1 = \frac{m_1 g \eta \mu \phi}{k} \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_1 = 0,05 \text{ m.}$$

Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 . Στη θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \quad \text{ή} \quad (m_1 + m_2) g \eta \mu \phi = k \Delta\ell_2$$

$$\text{ή} \quad \Delta\ell_2 = \frac{(m_1 + m_2) g \eta \mu \phi}{k} \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_2 = 0,1 \text{ m.}$$

Έστω $\vec{F}$ η δύναμη επαφής που ασκεί το σώμα Σ_1 στο σώμα Σ_2 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συστήματός τους. Θεωρούμε μια τυχαία θέση πάνω από τη θέση ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων με απομάκρυνση $x(x > 0)$. Είναι: $\Sigma F_2 = -D_2 x$

$$\text{ή} \quad F - m_2 g \eta \mu \phi = -D_2 x \quad \text{ή} \quad F = m_2 g \eta \mu \phi - D_2 x$$

$$\text{ή} \quad F = 5 - 50x \quad (\text{S.I.}) \quad (2).$$

Το σώμα Σ_2 χάνει την επαφή του με το σώμα Σ_1 στη θέση όπου $F = 0$. Από τη σχέση (2) για $F = 0$, προκύπτει: $x = +0,1 \text{ m}$.

Συνεπώς, τα σώματα χάνουν την επαφή τους σε μία θέση με απομάκρυνση x πάνω από τη θέση ισορροπίας τους. Αφού $x = \Delta\ell_2$, τα σώματα χάνουν την επαφή τους, όταν το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος για πρώτη φορά. Επομένως, η επαφή χάνεται σε απόσταση $0,3 \text{ m}$ από τη θέση όπου αφήσαμε τα σώματα ελεύθερα να κινηθούν.

86. α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος προκύπτει ότι $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Η σταθερά k του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $k = m\omega^2$ ή $k = 200 \text{ N/m}$.

β. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος προκύπτει ακόμη: $A = 0,4 \text{ m}$. Η ενέργεια της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \text{ ή } E = \frac{1}{2}kA^2 \text{ ή } E = 16 \text{ J.}$$

γ. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας είναι $x = -0,2\sqrt{3} \text{ m}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης, έχουμε: $E = K + U$ ή $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ ή $v = 2 \text{ m/s}$.

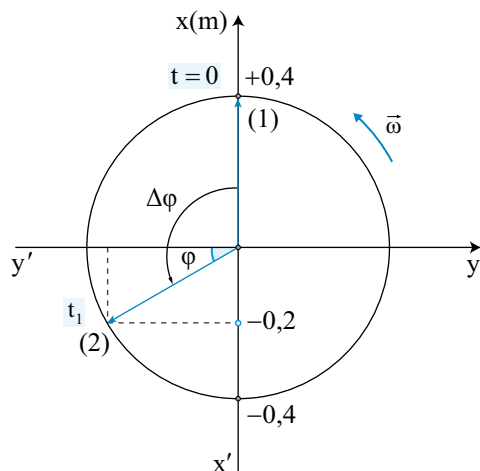
δ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τις χρονικές στιγμές στις οποίες η κινητική του ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης ($K = 3U$). Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης έχουμε: $E = K + U$ ή $E = 4U$ ή $\frac{1}{2}DA^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}Dx_1^2$ ή $x_1 = \pm \frac{A}{2}$.

Το μέτρο της επιτάχυνσης a του σώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές, είναι:

$$|a| = \omega^2|x_1| \text{ ή } |a| = \omega^2 \frac{A}{2} \text{ ή } |a| = 20 \text{ m/s}^2.$$

ε. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος, για $t = 0$ προκύπτει $x = +0,4 \text{ m}$. Δηλαδή, τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση μέγιστης θετι-

κής απομάκρυνσης. Συνεπώς, η θετική φορά για την ταλάντωση είναι η φορά προς τα δεξιά. Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση όπου το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $0,2 \text{ m}$, το σώμα βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $x = -0,2 \text{ m}$. Η χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με τον χρόνο Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\phi$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω ϕ η οξεία γωνία που σχηματίζει το περιστρεφόμενο διάνυσμα με τον άξονα $y'y$ τη χρονική στιγμή t_1 . Από το σχήμα προκύπτει

$$\text{ότι: } \eta\mu\phi = \frac{0,2}{0,4} \text{ ή } \eta\mu\phi = \frac{1}{2} \text{ ή } \phi = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

$$\text{Η γωνία } \Delta\phi \text{ είναι: } \Delta\phi = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \text{ rad}$$

$$\text{ή } \Delta\phi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad. Είναι: } \omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \text{ ή } \Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega}$$

$$\text{ή } \Delta t = \frac{\pi}{15} \text{ s ή } t_1 = \frac{\pi}{15} \text{ s.}$$

87. α. Το σώμα αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ από κάποια από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = (3\pi/20)$ s το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας για δεύτερη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$, ισχύει:

$$t = \frac{3T}{4} \quad \text{ή} \quad T = 0,2\pi \text{ s.}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 10 \text{ rad/s.}$

β. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης. Τη χρονική στιγμή $t = (3\pi/20)$ s, ισχύει:

$$v = v_{\max} \quad \text{ή} \quad v = \omega A \quad \text{ή} \quad A = 0,3 \text{ m.}$$

$$\gamma. \text{ Είναι: } E = \frac{1}{2}DA^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

$$\text{ή} \quad m = 2 \text{ kg.}$$

δ. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης έχουμε: $E = K + U$ ή $K = E - U$

$$\text{ή} \quad K = E - \frac{1}{2}Dx^2 \quad \text{ή} \quad K = 8 \text{ J.}$$

ε. Εφόσον τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα διέρχεται από μία θέση του θετικού ημιιάξονα επιβραδυνόμενο, η ταχύτητά του είναι θετική. Η ταχύτητα v του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{ή} \quad v = +2\sqrt{2} \text{ m/s.}$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης, έχουμε: $E = K + U$ ή $dE = dK + dU$

$$\text{ή} \quad 0 = dK + dU \quad \text{ή} \quad dU = -dK$$

$$\text{ή} \quad \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} \quad \text{ή} \quad \frac{dU}{dt} = -\Sigma Fv$$

$$\text{ή} \quad \frac{dU}{dt} = Dxv \quad \text{ή} \quad \frac{dU}{dt} = +40\sqrt{2} \text{ J/s.}$$

88. α. Έστω μια τυχαία θέση με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του σώματος. Στη θέση αυτήν ισχύει: $\Sigma F = -F_{ελ}$ ή $\Sigma F = -kx$. Επομένως, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ή $\omega = 5 \text{ rad/s.}$ Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ισχύει:

$$v = v_{\max} \quad \text{ή} \quad v = \omega A \quad \text{ή} \quad A = 1 \text{ m.}$$

β. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα αρχίζει να ταλαντώνεται από τη θέση ισορροπίας κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση: $v = \omega A \sin(\omega t + \phi_0)$

$$\text{ή} \quad v = 5 \sin(5t) \text{ (S.I.).}$$

γ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $U_{ελ} = 12,5 \text{ J.}$ Είναι:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 \quad \text{ή} \quad U_{ελ} = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{ή} \quad x = \pm 0,5 \text{ m.}$$

Το μέτρο της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα τις παραπάνω χρονικές στιγμές, είναι: $|\Sigma F| = D|x|$ ή $|\Sigma F| = 50 \text{ N.}$

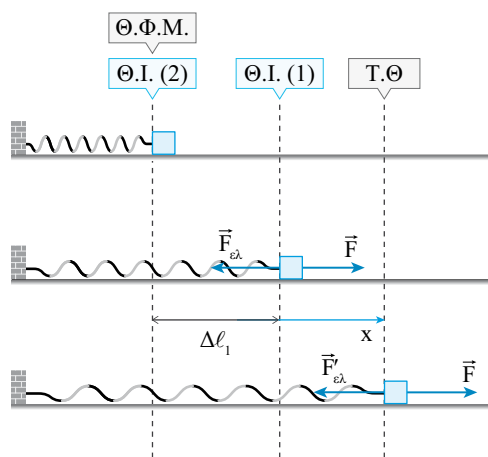
δ. Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα έχει διανύσει διάστημα: $s = 2,5 \text{ m}$ ή $s = 2,5A$, η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας είναι: $x = -\frac{A}{2}$ ή $x = -0,5 \text{ m}$ για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ και η ταχύτητά του v είναι αρνητική ($v < 0$). Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}D\left(\frac{A}{2}\right)^2$$

ή $v = -2,5\sqrt{3} \text{ m/s}$. Ο ζητούμενος ρυθμός υπολογίζεται από τη σχέση: $\frac{dK}{dt} = \Sigma Fv$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = -kxv \quad \text{ή } \frac{dK}{dt} = -125\sqrt{3} \text{ J/s.}$$

89. α. Το σώμα υπό τη δράση της δύναμης $\vec{F}$ εκτελεί ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας (1) [Θ.Ι.(1)] που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έστω ότι στη θέση ισορροπίας (1) το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell_1$.



Στη θέση ισορροπίας (1) ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad F - F_{\text{ελ}} = 0 \quad \text{ή} \quad F = k\Delta\ell_1 \quad (1).$$

Έστω η τυχαία θέση με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας (1) που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά τη φορά της απομάκρυνσης x έχουμε:

$$\Sigma F = F - F'_{\text{ελ}} \quad \text{ή} \quad \Sigma F = F - k(\Delta\ell_1 + x)$$

ή $\Sigma F = F - k\Delta\ell_1 - kx$ ή, λόγω της σχέσης (1): $\Sigma F = -kx$. Επομένως, το σώμα υπό τη δράση της δύναμης $\vec{F}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

β. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται ακίνητο στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, το πλάτος της

ταλάντωσης είναι $A = \Delta\ell_1$. Από τη σχέση (1) προκύπτει: $\Delta\ell_1 = 0,2 \text{ m}$.

Επομένως, είναι: $A = 0,2 \text{ m}$.

γ. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα υπό τη δράση της δύναμης $\vec{F}$ έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{ή } v = \sqrt{3} \text{ m/s.}$$

δ. i. Μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας τη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος (Θ.Ι.(2)). Αμέσως μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ η απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι. (2) είναι:

$$x_1 = +(\Delta\ell_1 + x) \quad \text{ή} \quad x_1 = +0,3 \text{ m} \quad \text{και} \quad \text{το μέτρο της ταχύτητάς του είναι } v = \sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας E' της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ έχουμε:

$$E' = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

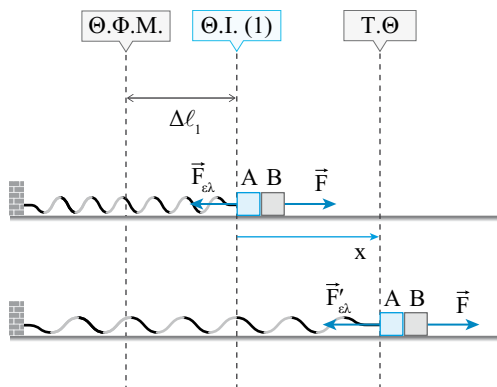
$$\text{ή } A' = 0,2\sqrt{3} \text{ m.}$$

ii. Το ζητούμενο έργο της δύναμης του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W_{F_{\text{ελ}}} = U_{\text{ελ(αρχ)}} - U_{\text{ελ(τελ)}}$$

$$\text{ή } W_{F_{\text{ελ}}} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}k(A')^2 \quad \text{ή} \quad W_{F_{\text{ελ}}} = -1,5 \text{ J.}$$

90. α. Το σύστημα των σωμάτων Α και Β εκτελεί ταλάντωση υπό τη δράση της δύναμης $\vec{F}$ γύρω από τη θέση ισορροπίας (1) [Θ.Ι.(1)] που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων Α και Β [Θ.Ι.(1)]. Στη Θ.Ι. (1) ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad F - F_{\text{ελ}} = 0 \quad \text{ή} \quad F = k\Delta\ell_1 \quad (1).$$

Έστω η τυχαία θέση με απομάκρυνση x από τη Θ.Ι.(1) που φαίνεται στο σχήμα.

Στη θέση αυτήν ισχύει: $\Sigma F = F - F'_{\text{ελ}}$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = F - k(\Delta\ell_1 + x) \quad \text{ή} \quad \Sigma F = F - k\Delta\ell_1 - kx$$

$$\text{ή λόγω της σχέσης (1): } \Sigma F = -kx.$$

Επομένως, το σύστημα των σωμάτων Α και Β εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σύστημα των δύο σωμάτων βρίσκεται ακίνητο στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = \Delta\ell_1$. Από τη σχέση (1) προκύπτει: $\Delta\ell_1 = 0,2 \text{ m}$.

Επομένως, είναι $A = 0,2 \text{ m}$.

β. Η περίοδος της ταλάντωσης υπολογίζεται

$$\text{από τη σχέση: } T = 2\pi \sqrt{\frac{m_A + m_B}{D}}$$

$$\text{ή } T = 2\pi \sqrt{\frac{m_A + m_B}{k}} \quad \text{ή } T = 0,2\pi \text{ s.}$$

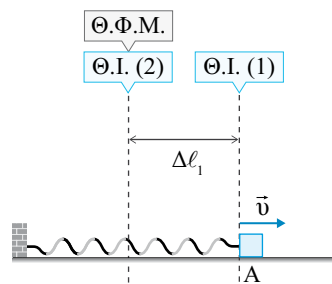
Επομένως, η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι:

$$t_1 = \frac{5T}{4} \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,25\pi \text{ s.}$$

γ. Είναι: $v_{\text{max}} = \omega A$ ή $v_{\text{max}} = \frac{2\pi}{T} A$

ή $v_{\text{max}} = 2 \text{ m/s}$.

δ.



Μετά την απόσπαση του σώματος Β, το σώμα Α εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας τη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος [Θ.Ι.(2)]. Αμέσως μετά την απόσπαση του σώματος Β το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Α είναι: $v = v_{\text{max}}$

ή $v = 2 \text{ m/s}$ και η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσής του από τη [Θ.Ι.(2)] είναι:

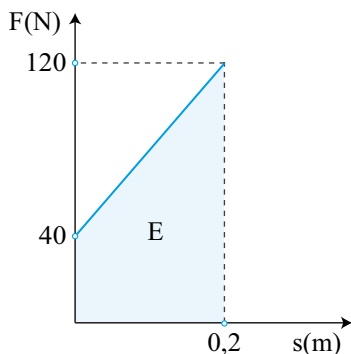
$$|x| = \Delta\ell_1 \quad \text{ή} \quad |x| = 0,2 \text{ m}.$$

Έστω A' το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Α, μετά την απόσπαση του σώματος Β. Από τη διατήρηση της ενέργειας E' της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Α μετά την απόσπαση του σώματος Β έχουμε: $E' = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}k(A')^2 = \frac{1}{2}m_A v^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{ή } A' = 0,1\sqrt{5} \text{ m}.$$

91. α. Στο επόμενο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση του μέτρου της δύναμης $\vec{F}$ σε συνάρτηση με την απόσταση s του σώματος από τη θέση ισορροπίας του.



Το ζητούμενο έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι αριθμητικά ίσο με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Είναι:

$$W_F = \frac{40+120}{2} \cdot 0,2 \text{ J} \quad \text{ή} \quad W_F = 16 \text{ J}.$$

β. Η ενέργεια που δαπανήσαμε μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$ ισούται με την ενέργεια E της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$. Δηλαδή, είναι: $W_F = E$ ή $E = 16 \text{ J}$. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$. Είναι:

$$E = \frac{1}{2} D A^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2} k A^2 \quad \text{ή} \quad A = 0,4 \text{ m}.$$

γ. Μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας τη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι $|x| = 0,2 \text{ m}$. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος αμέσως μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{ή} \quad v = 2\sqrt{3} \text{ m/s}.$$

δ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση: $x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$ (1).

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ στην οποία το σώμα ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του είναι $x = +A$. Από τη σχέση (1) για $x = +A$, έχουμε:

$$+A = A \eta \mu \varphi_0 \quad \text{ή} \quad \eta \mu \varphi_0 = 1 \quad \text{ή} \quad \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ή} \quad \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \text{με} \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (2).$$

Επειδή ισχύει $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$ προκύπτει: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Επομένως, η σχέση (1)

$$\text{γράφεται: } x = 0,4 \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{S.I.}).$$

92. α. Έστω ότι στη θέση ισορροπίας του σώματος το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta \ell_1$. Στη θέση ισορροπίας του σώματος, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F_{\text{ελ}} = 0$ ή $mg = k \Delta \ell_1$ (1).

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2} k \Delta \ell_1^2 \quad (2). \quad \text{Από τις σχέσεις (1) και (2)}$$

προκύπτει: $k = 100 \text{ N/m}$ και $\Delta \ell_1 = 0,1 \text{ m}$.

β. Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος είναι: $A = d$ ή $A = 0,2 \text{ m}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = (\pi/2)$ rad. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) (3).}$$

γ. Η απομάκρυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες διέρχεται από τη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος είναι $x = -\Delta\ell_1$.

Ο ζητούμενος λόγος της κινητικής ενέργειας του σώματος προς τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι: $\frac{K}{U} = \frac{E - U}{U}$

$$\text{ή } \frac{K}{U} = \frac{\frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}Dx^2} \quad \text{ή } \frac{K}{U} = \frac{A^2 - x^2}{x^2}$$

$$\text{ή } \frac{K}{U} = \frac{A^2 - \Delta\ell_1^2}{\Delta\ell_1^2} \quad \text{ή } \frac{K}{U} = 3.$$

δ. Η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ή } T = 0,2\pi \text{ s. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος τη χρονική στιγμή } t = T/6 \text{ ή } t = (\pi/30) \text{ s υπολογίζεται από τη σχέση: } \frac{dK}{dt} = \Sigma Fv \quad \text{ή } \frac{dK}{dt} = -Dxv$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = -kxv \text{ (4).}$$

Από τη σχέση (3) για $t = (\pi/30)$ s, προκύπτει:

$$x = 0,2\eta\mu\left(\frac{5\pi}{6}\right) \text{ m} \quad \text{ή } x = +0,1 \text{ m.}$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση $v = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } v = 2\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) (5).}$$

Από τη σχέση (5) για $t = (\pi/30)$ s, προκύπτει:

$$v = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad \text{ή } v = -\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (4) προκύπτει: $\frac{dK}{dt} = +10\sqrt{3} \text{ J/s.}$

ε. Το έργο της δύναμης επαναφοράς από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = T/6$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W_{\Sigma F} = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \quad \text{ή } W_{\Sigma F} = U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}}$$

$$\text{ή } W_{\Sigma F} = \frac{1}{2}kx_{\text{αρχ}}^2 - \frac{1}{2}kx_{\text{τελ}}^2$$

$$\text{ή } W_{\Sigma F} = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{ή } W_{\Sigma F} = 1,5 \text{ J.}$$

Το έργο της δύναμης του ελατηρίου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = T/6$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W_{F_{ελ}} = U_{\text{ελ(αρχ)}} - U_{\text{ελ(τελ)}}$$

$$\text{ή } W_{F_{ελ}} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_1 + A)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell_1 + x)^2$$

$$\text{ή } W_{F_{ελ}} = 2,5 \text{ J.}$$

93. α. Έστω ότι στη θέση ισορροπίας του σώματος το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell_1$. Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F_{\text{ελ}} = 0$ ή $mg = k\Delta\ell_1$

$$\text{ή } \Delta\ell_1 = 0,1 \text{ m.}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι: $|x| = \Delta\ell + \Delta\ell_1$

$$\text{ή } |x| = 0,2 \text{ m.}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης. Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης έχουμε: $E = K + U$ ή $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$$\text{ή } A = 0,4 \text{ m.}$$

β. Η επιτάχυνση του σώματος γίνεται ίση με μηδέν τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του.

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η επιτάχυνση του σώματος είναι ίση με μηδέν για πρώτη φορά μετά την εκτόξευσή του, η απομάκρυνσή του τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x = 0$ και η ταχύτητά του την ίδια χρονική στιγμή είναι θετική ($v > 0$). Επομένως, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $k = m\omega^2$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Η χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας του σώματος δίνεται από τη σχέση: $K = \frac{1}{2}mv^2$

$$\text{ή } K = \frac{1}{2}m[\omega A \sin(\omega t + \phi_0)]^2$$

$$\text{ή } K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή } K = 8 \sin^2(10t) \text{ (S.I.)}$$

γ. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μηδενίζεται στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Η απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά την εκτόξευσή του είναι:

$$x_1 = -\Delta\ell_1 \text{ ή } x_1 = -0,1 \text{ m}$$

Η ταχύτητα v_1 του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι θετική ($v > 0$). Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \text{ ή } v_1 = +\sqrt{15} \text{ m/s}$$

Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} \text{ ή } \frac{dU}{dt} = \Sigma Fv$$

$$\text{ή } \frac{dU}{dt} = Dx_1 v_1 \text{ ή } \frac{dU}{dt} = -10\sqrt{15} \text{ J/s}$$

δ. Έστω x_2 η απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι. τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $v_2 = 4 \text{ m/s}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \text{ ή } x_2 = 0.$$

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $U = \frac{1}{2}kx^2$ ή $U = 0$.

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2}k\Delta\ell_1^2$ ή $U_{\text{ελ}} = 0,5 \text{ J}$.

94. α. Οι θέσεις στις οποίες η κινητική ενέργεια του σώματος μηδενίζεται στιγμιαία είναι οι ακραίες θέσεις της ταλάντωσης του. Η απόσταση μεταξύ των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης είναι ίση με $2A$, όπου A το πλάτος της ταλάντωσης. Επομένως, είναι: $2A = 1,6 \text{ m}$ ή $A = 0,8 \text{ m}$.

β. Έστω ότι στη θέση ισορροπίας του σώματος το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell_1$. Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F_{\text{ελ}} = 0$ ή $mg = k\Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,4 \text{ m}$.

Η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την εκτόξευσή του είναι:

$|x| = \Delta\ell_1$ ή $|x| = 0,4 \text{ m}$. Επομένως, το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος τη χρονική στιγμή αμέσως μετά τη εκτό-

ξευσή του είναι: $\left| \frac{dp}{dt} \right| = |\Sigma F|$ ή $\left| \frac{dp}{dt} \right| = D|x|$

$$\text{ή } \left| \frac{dp}{dt} \right| = 40 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

γ. Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

$$\text{ή } kA^2 = mv_0^2 + k(\Delta\ell_1)^2 \quad \text{ή } v_0 = 2\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

δ. Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά μετά την εκτόξευση του σώματος στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του ($x = +A$). Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m\omega^2 \quad \text{ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ή } \omega = 5 \text{ rad/s.}$$

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή } \alpha = -20\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

ε. Έστω $\Delta\ell'$ η παραμόρφωση του ελατηρίου τις χρονικές στιγμές στις οποίες η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σε αυτό είναι $U_{ελ} = 32 \text{ J}$.

$$\text{Είναι: } U_{ελ} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell')^2 \quad \text{ή } \Delta\ell' = 0,8 \text{ m.}$$

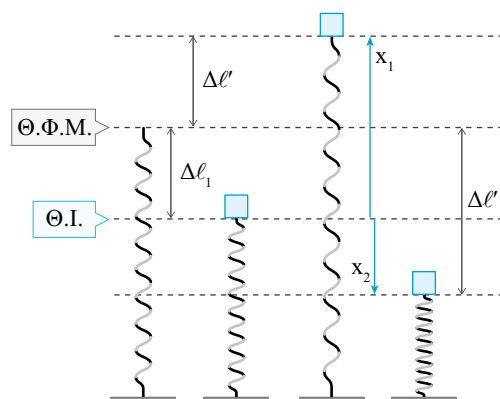
Έστω ότι το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell'$. Στη θέση όπου το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell'$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του, όπως προκύπτει από το επόμενο σχήμα, είναι:

$$x_1 = +(\Delta\ell_1 + \Delta\ell') \quad \text{ή } x_1 = +1,2 \text{ m} > A \text{ (άτοπο).}$$

Επομένως, το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell'$ τις χρονικές στιγμές στις οποίες η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη

σε αυτό είναι $U_{ελ} = 32 \text{ J}$. Επειδή είναι $\Delta\ell' > \Delta\ell_1$ το ελατήριο τις παραπάνω χρονικές στιγμές βρίσκεται σε μια θέση κάτω από τη θέση ισορροπίας του με απομάκρυνση x_2 . Όπως προκύπτει από το παρακάτω σχήμα, είναι:

$$|x_2| = \Delta\ell' - \Delta\ell_1 \quad \text{ή } |x_2| = 0,4 \text{ m.}$$



Επειδή η θετική φορά της ταλάντωσης είναι η φορά προς τα πάνω, ισχύει: $x_2 = -0,4 \text{ m}$.

Τη χρονική στιγμή στην οποία το σώμα διέρχεται από τη θέση x_2 για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητά του v είναι αρνητική ($v < 0$). Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης, έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx_2^2 \quad \text{ή } v = -2\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Ο ζητούμενος ρυθμός υπολογίζεται από τη σχέση: $\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} \quad \text{ή } \frac{dU}{dt} = Dx_2v$

$$\text{ή } \frac{dU}{dt} = +80\sqrt{3} \text{ J/s.}$$

95. α. Έστω A το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά την εκτόξευσή του. Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kd^2 \quad \text{ή } A = 0,6 \text{ m.}$$

β. Η δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο σώμα γίνεται ίση με μηδέν στη θέση ισορροπίας ($x = 0$). Τη χρονική στιγμή $t = 0$ στην οποία η δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο σώμα γίνεται ίση με μηδέν για πρώτη φορά μετά την εκτόξευσή του, το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα. Επομένως, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Η χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας του σώματος δίνεται από τη σχέση: $K = \frac{1}{2}mv^2$

$$\text{ή } K = \frac{1}{2}m[\omega A \sin(\omega t + \phi_0)]^2$$

$$\text{ή } K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή } K = 18 \sin^2(10t) \text{ (S.I.)}$$

γ. Έστω $\Delta \ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος. Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή } w - F_{\text{ελ}} = 0 \text{ ή } mg = k\Delta \ell_1 \text{ ή } \Delta \ell_1 = 0,1 \text{ m.}$$

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται μέγιστη στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης. Είναι: $U_{\text{ελ(max)}} = \frac{1}{2}k(\Delta \ell_1 + A)^2$

$$\text{ή } U_{\text{ελ(max)}} = 24,5 \text{ J.}$$

Εφόσον είναι $A > \Delta \ell_1$, η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται ελάχιστη στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος.

$$\text{Είναι: } U_{\text{ελ(min)}} = 0.$$

δ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή στην οποία διέρχεται από μια θέση του θετικού ημιιάξονα ($x > 0$) κινούμενο κατά τη θετική φορά ($v > 0$) και η κινητική του

ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης ($K = 3U$). Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης, έχουμε: $E = K + U$ ή $E = 4U$ ή $\frac{1}{2}DA^2 = 4\frac{1}{2}Dx^2$ ή $x = +\frac{A}{2}$ ή $x = +0,3 \text{ m}$.

Η ταχύτητα v του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση: $K = 3U$ ή $\frac{1}{2}mv^2 = 3\frac{1}{2}Dx^2$

$$\text{ή } mv^2 = 3m\omega^2 x^2 \text{ ή } v = +\sqrt{3}\omega x$$

$$\text{ή } v = +3\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Επομένως, ο ζητούμενος ρυθμός είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma Fv \text{ ή } \frac{dK}{dt} = -Dxv$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = -90\sqrt{3} \text{ J/s.}$$

ε. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο με θετική ταχύτητα. Το διάστημα που διανύει το σώμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $s = 0,3 \text{ m}$ ή $s = \frac{A}{2}$.

Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $x = +\frac{A}{2}$ ή $x = +0,3 \text{ m}$.

Το έργο της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $W_{\Sigma F} = \Delta K$ ή $W_{\Sigma F} = -\Delta U$

$$\text{ή } W_{\Sigma F} = \frac{1}{2}Dx_{\text{αρχ}}^2 - \frac{1}{2}Dx_{\text{τελ}}^2$$

$$\text{ή } W_{\Sigma F} = 0 - \frac{1}{2}kx^2 \text{ ή } W_{\Sigma F} = -4,5 \text{ J.}$$

Το έργο της δύναμης του ελατηρίου που ασκείται στο σώμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη

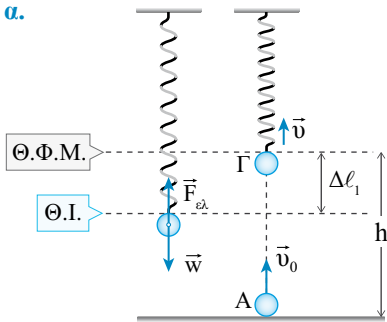
$$\text{σχέση: } W_{F_{ελ}} = U_{ελ(αρχ)} - U_{ελ(τελ)}$$

$$\text{ή } W_{F_{ελ}} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_{αρχ})^2 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell_{τελ})^2$$

$$\text{ή } W_{F_{ελ}} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_1)^2 - \frac{1}{2}k(x - \Delta\ell_1)^2$$

$$\text{ή } W_{F_{ελ}} = -1,5 \text{ J.}$$

96. α.



Έστω ότι στη θέση ισορροπίας του σώματος το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell_1$.

Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w - F_{ελ} = 0 \quad \text{ή} \quad mg = k\Delta\ell_1$$

ή $\Delta\ell_1 = 0,4 \text{ m}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι: $x = +\Delta\ell_1$ ή $x = +0,4 \text{ m}$.

Έστω Α το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα. Από τη διατήρηση της ενέργειας Ε της ταλάντωσης, έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{ή} \quad kA^2 = mv^2 + k(\Delta\ell_1)^2 \quad \text{ή} \quad A = 0,8 \text{ m.}$$

β. Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την κίνηση του σώματος από τη θέση Α στη θέση Γ έχουμε: $W_{\Sigma F} = K_{τελ} - K_{αρχ}$

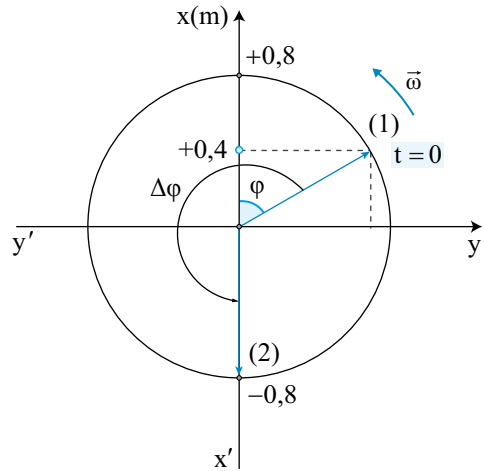
$$\text{ή} \quad -mgh = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \text{ή} \quad v_0 = 4 \text{ m/s.}$$

γ. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m\omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ή} \quad \omega = 5 \text{ rad/s.}$$

Το σώμα ακινητοποιείται στιγμιαία για δεύτερη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία φτάνει στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του ($x = -A$).

Η χρονική στιγμή t_1 ισούται με το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\phi$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω ϕ η οξεία γωνία που σχηματίζει το περιστρεφόμενο διάνυσμα με τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή $t = 0$. Από το σχήμα προκύπτει

$$\text{ότι: } \sin\phi = \frac{0,4}{0,8} \quad \text{ή} \quad \sin\phi = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \phi = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

Η γωνία $\Delta\phi$ είναι:

$$\Delta\phi = \left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \Delta\phi = \frac{4\pi}{3} \text{ rad.}$$

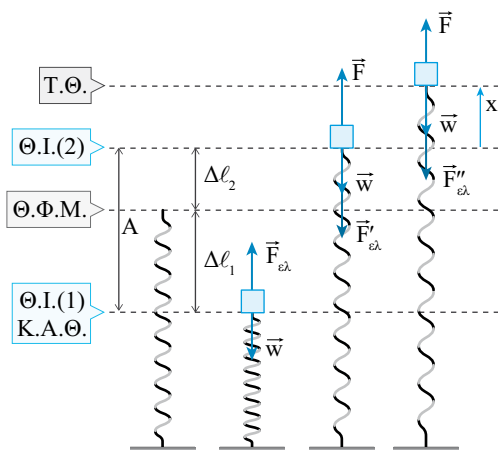
$$\text{Είναι: } \omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} \quad \text{ή} \quad \Delta\phi = \omega\Delta t$$

$$\text{ή} \quad \Delta t = \frac{4\pi}{15} \text{ s} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{4\pi}{15} \text{ s.}$$

δ. Η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας που αποθηκεύεται στο ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος είναι:

$$U_{ελ(max)} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_1 + A)^2 \quad \text{ή} \quad U_{ελ(max)} = 72 \text{ J.}$$

97. α. Αρχικά το σώμα ισορροπεί στη θέση ισορροπίας (1) [Θ.Ι.(1)] όπου το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell_1$. Με τη δράση της δύναμης $\vec{F}$ το σώμα εκτελεί ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας (2) [Θ.Ι.(2)]. Επειδή είναι: $F > w = mg$ στη θέση Θ.Ι.(2) το ελατήριο είναι επιμηκυμένο.



Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας (2). Στη Θ.Ι.(2) ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad F - w - F'_{ελ} = 0$$

$$\text{ή} \quad F = mg + k\Delta\ell_2 \quad (1).$$

Έστω η τυχαία θέση με απομάκρυνση x από τη Θ.Ι. (2), που φαίνεται στο σχήμα. Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά τη φορά της απομάκρυνσης x , τότε στην τυχαία θέση ισχύει:

$$\Sigma F = F - w - F''_{ελ} \quad \text{ή} \quad \Sigma F = F - mg - k(\Delta\ell_2 + x)$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = F - mg - k\Delta\ell_2 - kx$$

ή λόγω της σχέσης (1): $\Sigma F = -kx$.

Επομένως, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

β. Όπως προκύπτει από το σχήμα το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2$.

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\Delta\ell_2 = \frac{F - mg}{k} \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_2 = 0,1 \text{ m.}$$

Στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος [Θ.Ι.(1)] ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F_{ελ} = 0$

$$\text{ή} \quad mg = k\Delta\ell_1 \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_1 = 0,1 \text{ m.}$$

Επομένως, είναι: $A = 0,2 \text{ m}$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας (2) είναι $x = +A$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος στη Θ.Ι.(2) δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (1).

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = +A$, προκύπτει: $A = A\eta\mu\varphi_0$ ή $\eta\mu\varphi_0 = 1$ ή $\eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ή $\varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ (2).

Εφόσον είναι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$ προκύπτει $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Η χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας του σώματος δίνεται από τη σχέση: $K = \frac{1}{2}mv^2$

$$\text{ή} \quad K = \frac{1}{2}m\left[\omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)\right]^2$$

$$\text{ή} \quad K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή} \quad K = 6\sigma\upsilon\nu^2\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Το έργο της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ υπολογίζεται από τη σχέση: $W_{\Sigma F} = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}}$ ή $W_{\Sigma F} = 0$.

Το έργο της δύναμης του ελατηρίου που ασκείται στο σώμα από τη στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W_{F_{ελ}} = U_{ελ(αρχ)} - U_{ελ(τελ)}$$

$$\text{ή } W_{F_{ελ}} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_{\alphaρχ})^2 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell_{\text{τελ}})^2$$

$$\text{ή } W_{F_{ελ}} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_1)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2 + A)^2$$

$$\text{ή } W_{F_{ελ}} = -12 \text{ J.}$$

δ. Η δύναμη που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο μηδενίζεται στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή t_2 , ακριβώς πριν από την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ πριν από την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ έχουμε: $E = K + U$

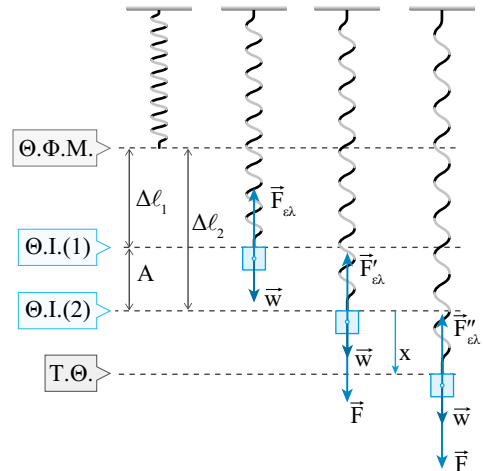
$$\text{ή } \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2)^2 \quad \text{ή } v = \sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη Θ.Ι.(1). Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας E' της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ έχουμε:

$$E' = K + U \quad \text{ή } \frac{1}{2}k(A')^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell_1)^2$$

$$\text{ή } A' = 0,2 \text{ m.}$$

98. α. Αρχικά το σώμα ισορροπεί στη θέση ισορροπίας (1) [Θ.Ι.(1)] όπου το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell_1$. Με τη δράση της δύναμης $\vec{F}$ το σώμα εκτελεί ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας (2) [Θ.Ι.(2)].



Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(2). Στη Θ.Ι.(2), ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή } F + w = F'_{ελ} \quad \text{ή } F + mg = k\Delta\ell_2 \quad (1).$$

Έστω η τυχαία θέση με απομάκρυνση x από τη Θ.Ι. (2), που φαίνεται στο σχήμα. Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά τη φορά της απομάκρυνσης x , τότε στην τυχαία θέση ισχύει:

$$\Sigma F = F + w - F''_{ελ} \quad \text{ή } \Sigma F = F + mg - k(\Delta\ell_2 + x)$$

$$\text{ή } \Sigma F = F + mg - k\Delta\ell_2 - kx$$

$$\text{ή λόγω της σχέσης (1): } \Sigma F = -kx.$$

Επομένως το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

β. Όπως προκύπτει από το σχήμα το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$.

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\Delta\ell_2 = \frac{F + mg}{k} \quad \text{ή } \Delta\ell_2 = 0,5 \text{ m.}$$

Στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος [Θ.Ι.(1)] ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή } w - F_{ελ} = 0$

$$\text{ή } mg = k\Delta\ell_1 \quad \text{ή } \Delta\ell_1 = 0,1 \text{ m.}$$

Επομένως, είναι: $A = 0,4 \text{ m}$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας (2) είναι $x = +A$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη Θ.Ι.(2) δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ (1).

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = +A$, προκύπτει: $A = A\eta\mu\phi_0$ ή $\eta\mu\phi_0 = 1$ ή $\eta\mu\phi_0 = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{ή } \phi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (2).$$

Εφόσον είναι $0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$ προκύπτει $\phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση: $a = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$

$$\text{ή } a = -40\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.}).$$

γ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι.(2) τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell = 0,7 \text{ m}$. Επειδή είναι $\Delta\ell > \Delta\ell_2$ το σώμα τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται σε μια θέση κάτω από τη Θ.Ι.(2). Είναι: $x_1 = -(\Delta\ell - \Delta\ell_2)$ ή $x_1 = -0,2 \text{ m}$.

Έστω v η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \quad \text{ή } v = +2\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται

$$\text{ται από τη σχέση: } \frac{dK}{dt} = \Sigma Fv \quad \text{ή } \frac{dK}{dt} = -Dxv$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = +40\sqrt{3} \text{ J/s.}$$

δ. Μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ το σώμα εκτελεί ταλάντωση γύρω από τη Θ.Ι.(1). Τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ η απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι.(1) είναι: $x_2 = -(A + |x_1|)$ ή $x_2 = -0,6 \text{ m}$.

Έστω E' η ενέργεια της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας E' της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ έχουμε:

$$E' = K + U \quad \text{ή } E' = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$

$$\text{ή } E' = 24 \text{ J.}$$

99. α. Οι θέσεις στις οποίες μηδενίζεται στιγμιαία η κινητική ενέργεια του σώματος είναι οι ακραίες θέσεις της ταλάντωσης ($x = \pm A$). Η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων είναι ίση με $2A$, όπου A το πλάτος της ταλάντωσης. Επομένως, είναι: $2A = 0,8 \text{ m}$ ή $A = 0,4 \text{ m}$.

Το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κάθε $T/2$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης. Είναι: $\frac{T}{2} = 0,2\pi \text{ s}$ ή $T = 0,4\pi \text{ s}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 5 \text{ rad/s}$.

Η σταθερά του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $k = m\omega^2$ ή $k = 100 \text{ N/m}$.

Έστω $\Delta\ell$ η συσπίρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος. Στη Θ.Ι. του σώματος

$$\text{ισχύει: } \Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_x - F_{ελ} = 0$$

$$\text{ή} \quad mgh_{\text{μφ}} = k\Delta\ell \quad \text{ή} \quad \Delta\ell = 0,2 \text{ m.}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι: $|x| = \Delta\ell$ ή $|x| = 0,2 \text{ m}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{ή} \quad |v_0| = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} \quad \text{ή} \quad |v_0| = \sqrt{3} \text{ m/s.}$$

β. Η κινητική ενέργεια του σώματος μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης ($x = +A$). Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \quad \text{ή} \quad U = \frac{1}{2}D[A\eta\mu(\omega t + \phi_0)]^2$$

$$\text{ή} \quad U = \frac{1}{2}kA^2\eta\mu^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή} \quad U = 8\eta\mu^2\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$U = 3K \text{ (1)} \quad \text{ή} \quad K = \frac{U}{3}.$$

Έστω x η απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι. τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad E = \frac{4U}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{4}{3}\frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{ή} \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A \quad \text{ή} \quad x = \pm 0,2\sqrt{3} \text{ m.}$$

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης γίνεται τριπλάσια από την κινητική ενέργεια του σώματος για δεύτερη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $x = -0,2\sqrt{3} \text{ m}$ κινούμενο με αρνητική ταχύτητα. Έστω v η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{1}{2}kx^2 = 3\frac{1}{2}mv^2 \quad \text{ή} \quad v = -\sqrt{\frac{k}{3m}}|x|$$

$$\text{ή} \quad v = -1 \text{ m/s.}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F dx}{dt}$$

$$\text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = \Sigma Fv \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -Dxv$$

$$\text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -kxv \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -20\sqrt{3} \text{ J/s.}$$

δ. Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης γίνεται μέγιστη στις ακραίες θέσεις ($x = \pm A$). Στην πάνω ακραία θέση ($x = +A$) η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}k(A - \Delta\ell)^2 \quad \text{ή} \quad U_{ελ} = 2 \text{ J.}$$

Στην κάτω ακραία θέση η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell + A)^2 \quad \text{ή} \quad U_{ελ} = 18 \text{ J.}$$

100. α. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης. Η ενέργεια που δαπανήσαμε για να θέσουμε το σώμα σε ταλάντωση είναι ίση με την ενέργεια της ταλάντωσης. Επομένως, είναι:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{ή} \quad A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \quad \text{ή} \quad A = 0,1 \text{ m.}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ή $\omega = 5 \text{ rad/s}$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι $x = +A = 0,1 \text{ m}$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη Θ.Ι. του δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ (1).

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = +A$ προκύπτει: $\eta\mu\phi_0 = 1$ ή $\eta\mu\phi_0 = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)$

ή $\phi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ (2).

Εφόσον ισχύει: $0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$ προκύπτει $\phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας του σώματος δίνεται από τη σχέση: $K = \frac{1}{2}mv^2$

ή $K = \frac{1}{2}m[v_{\max}\sin(\omega t + \phi_0)]^2$

ή $K = \frac{1}{2}mv_{\max}^2\sin^2(\omega t + \phi_0)$

ή $K = E\sin^2(\omega t + \phi_0)$

ή $K = 1\sin^2\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.).

β. Έστω $\Delta\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος. Στη Θ.Ι. του σώματος, ισχύει: $\Sigma\vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_x - F_{\epsilon\lambda} = 0$ ή $mg\eta\mu\phi = k\Delta\ell$ ή $\Delta\ell = 0,2 \text{ m}$.

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται μέγιστη στη κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης. Επομένως, είναι:

$U_{\epsilon\lambda(\max)} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell + A)^2$ ή $U_{\epsilon\lambda(\max)} = 9 \text{ J}$.

Εφόσον ισχύει: $A < \Delta\ell$, η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται ελάχιστη στην πάνω

ακραία θέση της ταλάντωσης. Επομένως, είναι: $U_{\epsilon\lambda(\min)} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell - A)^2$ ή $U_{\epsilon\lambda(\min)} = 1 \text{ J}$.

γ. Έστω $\Delta\ell'$ η παραμόρφωση του ελατηρίου σε σχέση με το φυσικό του μήκος και x_1 η απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι. τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $F_{\epsilon\lambda} = k\Delta\ell'$ ή $\Delta\ell' = 0,15 \text{ m}$. Αν το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_1 είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell'$, τότε η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας, είναι:

$|x_1| = \Delta\ell + \Delta\ell'$ ή $|x_1| = 0,35 \text{ m}$.

Επειδή είναι $|x_1| > A$, το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_1 δεν μπορεί να είναι συσπειρωμένο. Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell'$. Εφόσον ισχύει $\Delta\ell' < \Delta\ell$, το σώμα τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται σε μια θέση πάνω από τη θέση ισορροπίας, στην οποία ισχύει: $|x_1| = \Delta\ell - \Delta\ell'$

ή $|x_1| = 0,05 \text{ m}$ ή $x_1 = -0,05 \text{ m}$.

Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση με απομάκρυνση $x_1 = -0,05 \text{ m}$, η ταχύτητά του v_1 είναι αρνητική ($v_1 < 0$). Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης, έχουμε:

$E = K + U$ ή $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$

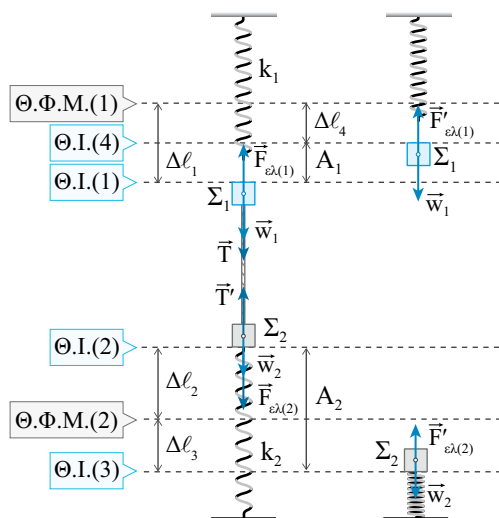
ή $v_1 = -\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x_1^2)}$ ή $v_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m/s}$.

δ. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης, έχουμε: $E = K + U$ ή $dE = dK + dU$ ή $dK + dU = 0$ ή $dU = -dK$

ή $\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt}$ ή $\frac{dU}{dt} = -\Sigma Fv$

ή $\frac{dU}{dt} = Dx_1v_1$ ή $\frac{dU}{dt} = +2,5\sqrt{3} \text{ J/s}$.

101. α. Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα Σ_1 και Σ_2 στις αρχικές θέσεις ισορροπίας τους Θ.Ι.(1) και Θ.Ι.(2) αντίστοιχα.



Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(1)]. Στη Θ.Ι.(1) ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad F_{\text{ελ}(1)} - w_1 - T = 0$$

$$\text{ή} \quad k_1 \Delta\ell_1 = m_1 g + T \quad \text{ή} \quad T = 40 \text{ N.}$$

β. Είναι: $T' = T$ ή $T' = 40 \text{ N}$.

Επειδή ισχύει $T' > w_2 = m_2 g$, το ελατήριο στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 [Θ.Ι.(2)] είναι επιμηκυμένο. Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(2). Στη Θ.Ι.(2) ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $T' - w_2 - F_{\text{ελ}(2)} = 0$ ή $T' = m_2 g + k_2 \Delta\ell_2$ ή $\Delta\ell_2 = 0,3 \text{ m}$.

Η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο (2) πριν από την κοπή του νήματος είναι:

$$U_{\text{ελ}(2)} = \frac{1}{2} k_2 (\Delta\ell_2)^2 \quad \text{ή} \quad U_{\text{ελ}(2)} = 4,5 \text{ J.}$$

γ. Μετά την κοπή του νήματος το σώμα Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη Θ.Ι.(3) που φαίνεται στο σχήμα. Έστω $\Delta\ell_3$ η συσπίρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(3). Στη Θ.Ι.(3) ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_2 - F'_{\text{ελ}(2)} = 0$ ή $m_2 g = k_2 \Delta\ell_3$ ή $\Delta\ell_3 = 0,1 \text{ m}$.

Όπως προκύπτει από το σχήμα, το πλάτος A_2 της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κοπή του νήματος, είναι:

$$A_2 = \Delta\ell_2 + \Delta\ell_3 \quad \text{ή} \quad A_2 = 0,4 \text{ m.}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ_2 από τη Θ.Ι.(3) είναι $x = +A_2$. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x = +A_2$, η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 είναι $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $k_2 = m_2 \omega_2^2$ ή $\omega_2 = 10 \text{ rad/s}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 από τη Θ.Ι.(3) δίνεται από τη σχέση: $x_2 = A_2 \eta \mu(\omega_2 t + \varphi_0)$

$$\text{ή} \quad x_2 = 0,4 \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{S.I.}).$$

δ. Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα Σ_2 από το ελατήριο (2) γίνεται μέγιστο στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 . Είναι:

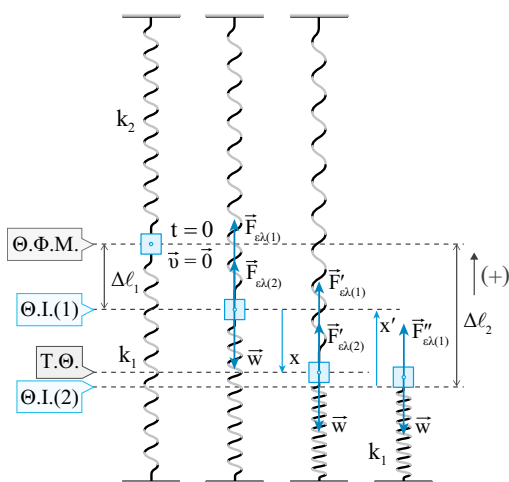
$$F_{\text{ελ}(\text{max})} = k_2 (\Delta\ell_3 + A_2) \quad \text{ή} \quad F_{\text{ελ}(\text{max})} = 50 \text{ N.}$$

ε. Μετά την κοπή του νήματος το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη Θ.Ι.(4) που φαίνεται στο σχήμα. Έστω $\Delta\ell_4$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(4). Στη Θ.Ι.(4) ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F'_{\text{ελ}(1)} = 0$ ή $m_1 g = k_1 \Delta\ell_4$ ή $\Delta\ell_4 = 0,1 \text{ m}$.

Όπως προκύπτει από το σχήμα το πλάτος A_1 της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κοπή του νήματος, είναι: $A_1 = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_4$ ή $A_1 = 0,1 \text{ m}$.

Εφόσον είναι $A_1 = \Delta\ell_4$, η πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 είναι η θέση όπου το ελατήριο (1) αποκτά το φυσικό του μήκος. Επομένως, η ελάχιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας που αποθηκεύεται στο ελατήριο (1) κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 είναι: $U_{\text{ελ}(\min)} = 0$.

102. α. Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση ισορροπίας του [Θ.Ι.(1)].



Έστω $\Delta\ell_1$ η παραμόρφωση των δύο ελατηρίων στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος [Θ.Ι.(1)]. Στη Θ.Ι.(1) ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \vec{w} - \vec{F}_{\text{ελ}(1)} - \vec{F}_{\text{ελ}(2)} = \vec{0}$$

$$\text{ή} \quad mg = k_1 \Delta\ell_1 + k_2 \Delta\ell_1 \quad (1).$$

Έστω η τυχαία θέση με απομάκρυνση x από τη Θ.Ι.(1), που φαίνεται στο σχήμα. Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά τη φορά του x , τότε στην τυχαία θέση ισχύει:

$$\Sigma F = w - F'_{\text{ελ}(1)} - F'_{\text{ελ}(2)}$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = mg - k_1(\Delta\ell_1 + x) - k_2(\Delta\ell_1 + x)$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = mg - k_1 \Delta\ell_1 - k_1 x - k_2 \Delta\ell_1 - k_2 x$$

$$\text{ή λόγω της σχέσης (1): } \Sigma F = -(k_1 + k_2)x.$$

Επομένως, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k_1 + k_2$.

Η περίοδος της ταλάντωσης υπολογίζεται

$$\text{από τη σχέση: } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad \text{ή} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

$$\text{ή} \quad T = 0,2\pi \text{ s}.$$

β. Επειδή το σώμα αφήνεται ελεύθερο στη θέση όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος, το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = \Delta\ell_1$. Από τη σχέση (1), έχουμε:

$$\Delta\ell_1 = \frac{mg}{k_1 + k_2} \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_1 = 0,1 \text{ m}.$$

Επομένως, είναι: $A = 0,1 \text{ m}$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι.(1) είναι $x = +A$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ (1).

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = +A$ προκύπτει: $A = A\eta\mu\phi_0$ ή $\eta\mu\phi_0 = 1$ ή $\eta\mu\phi_0 = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{ή} \quad \phi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (2).$$

Επειδή ισχύει $0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$ προκύπτει: $\phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s}.$$

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης δίνεται από τη σχέση: $a = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$

$$\text{ή} \quad a = -10\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.}).$$

γ. Έστω $\Delta\ell'$ η επιμήκυνση του ελατηρίου σταθεράς k_2 τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία η δυναμική του ενέργειας είναι $U_{\varepsilon\lambda(2)} = 1,5 \text{ J}$.

$$\text{Είναι: } U_{\varepsilon\lambda(2)} = \frac{1}{2}k_2(\Delta\ell')^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\ell' = 0,1 \text{ m.}$$

Εφόσον η επιμήκυνση του ελατηρίου σταθεράς k_2 είναι $\Delta\ell' = \Delta\ell_1$, το σώμα τη χρονική στιγμή t_1 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του. Επομένως, το μέτρο της ταχύτητας v του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$v = v_{\max} \quad \text{ή} \quad v = \omega A \quad \text{ή} \quad v = 1 \text{ m/s.}$$

δ. Μετά την αφαίρεση του ελατηρίου σταθεράς k_2 το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη Θ.Ι.(2) που φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα. Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου σταθεράς k_1 στη Θ.Ι.(2). Στη Θ.Ι.(2), ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F'_{\varepsilon\lambda(1)} = 0$ ή $mg = k_1\Delta\ell_2$ ή $\Delta\ell_2 = 0,4 \text{ m}$.

Η απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι.(2) τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά την αφαίρεση του ελατηρίου σταθεράς k_2 είναι:

$$x' = +(\Delta\ell_2 - \Delta\ell_1) \quad \text{ή} \quad x' = +0,3 \text{ m.}$$

Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά την αφαίρεση του ελατηρίου σταθεράς k_2 .

Από τη διατήρηση της ενέργειας E' της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά την αφαίρεση του ελατηρίου σταθεράς k_2 έχουμε:

$$E' = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}k_1A'^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k_1x'^2$$

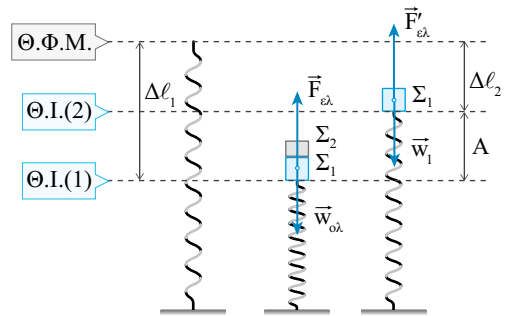
$$\text{ή} \quad A' = \sqrt{\frac{mv^2}{k_1} + x'^2} \quad \text{ή} \quad A' = 0,1\sqrt{13} \text{ m.}$$

Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας ταλάντωσης του σώματος μετά την αφαίρεση του ελατηρίου σταθεράς k_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v'_{\max} = \omega'A' \quad \text{ή} \quad v'_{\max} = \sqrt{\frac{k_1}{m}}A'$$

$$\text{ή} \quad v'_{\max} = 0,5\sqrt{13} \text{ m/s.}$$

103. α. Έστω $\Delta\ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 [Θ.Ι.(1)].



Στη Θ.Ι.(1) ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{\omega\lambda} - F_{\varepsilon\lambda} = 0$ ή $(m_1 + m_2)g = k\Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,3 \text{ m}$.

Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(2)].

Στη Θ.Ι.(2) ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F'_{\varepsilon\lambda} = 0$

$$\text{ή} \quad m_1g = k\Delta\ell_2 \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_2 = 0,1 \text{ m.}$$

Από το σχήμα προκύπτει ότι το πλάτος A της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 είναι:

$$A = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2 \quad \text{ή} \quad A = 0,2 \text{ m.}$$

Επομένως, η ενέργεια της ταλάντωσης είναι:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{ή} \quad E = 2 \text{ J.}$$

β. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη Θ.Ι.(2) γύρω από την οποία εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m\omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Η χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 δίνεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2} m_1 v^2 \quad \text{ή} \quad K = \frac{1}{2} m_1 [\omega A \sin(\omega t + \phi_0)]^2$$

$$\text{ή} \quad K = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή} \quad K = 2 \sin^2 \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I.).}$$

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $U = \frac{1}{2} D x^2$

$$\text{ή} \quad U = \frac{1}{2} k [A \sin(\omega t + \phi_0)]^2$$

$$\text{ή} \quad U = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή} \quad U = 2 \sin^2 \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I.).}$$

γ. Εφόσον είναι $A > \Delta \ell_2$, η ελάχιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου είναι $U_{\text{ελ}(\min)} = 0$ (τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα διέρχεται από τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος). Η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου είναι:

$$U_{\text{ελ}(\max)} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell_2 + A)^2 \quad \text{ή} \quad U_{\text{ελ}(\max)} = 4,5 \text{ J.}$$

δ. Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 μηδενίζεται στιγμιαία για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του. Το έργο της δύναμης επαφής που ασκείται στο σώμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W_{\Sigma F} = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \quad \text{ή} \quad W_{\Sigma F} = 0.$$

Το έργο της δύναμης του ελατηρίου που ασκείται στο σώμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $W_{F_{\text{ελ}}} = U_{\text{ελ}(\alphaρχ)} - U_{\text{ελ}(\text{τελ})}$

$$\text{ή} \quad W_{F_{\text{ελ}}} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell_1)^2 - \frac{1}{2} k (A - \Delta \ell_2)^2$$

$$\text{ή} \quad W_{F_{\text{ελ}}} = 4 \text{ J.}$$

104. α. Έστω $\Delta \ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(2) γύρω από την οποία εκτελεί ταλάντωση το σώμα (1) μετά την κοπή του νήματος. Στη Θ.Ι.(2) ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_1 - F'_{\text{ελ}} = 0 \quad \text{ή} \quad m_1 g = k \Delta \ell_2 \quad (1).$$

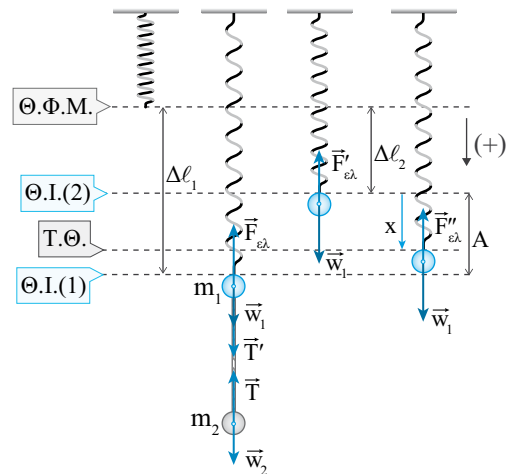
Στη τυχαία θέση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα ισχύει: $\Sigma F = w_1 - F'_{\text{ελ}}$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = m_1 g - k (\Delta \ell_2 + x)$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = m_1 g - k \Delta \ell_2 - kx$$

$$\text{ή} \quad \text{λόγω της σχέσης (1): } \Sigma F = -kx.$$

Επομένως το σώμα (1) εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαφής $D = k$.



β. Έστω $\Delta \ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων (1) και (2) [Θ.Ι.(1)]. Στη Θ.Ι.(1), ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad F_{ελ} - w_1 - T' + T - w_2 = 0$$

$$\text{ή} \quad (m_1 + m_2)g = k\Delta\ell_1 \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_1 = 0,2 \text{ m.}$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\Delta\ell_2 = \frac{m_1 g}{k} \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_2 = 0,1 \text{ m.}$$

Όπως προκύπτει από το σχήμα, το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα (1) μετά την κοπή του νήματος, είναι: $A = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2$

ή $A = 0,1 \text{ m}$. Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \quad \text{ή} \quad E = 0,5 \text{ J.}$$

γ. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος (1) από τη Θ.Ι.(2) είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ rad/s}$. Η χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας του σώματος (1) δίνεται από τη σχέση: $K = E \sin^2(\omega t + \phi_0)$ ή $K = 0,5 \sin^2\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$.

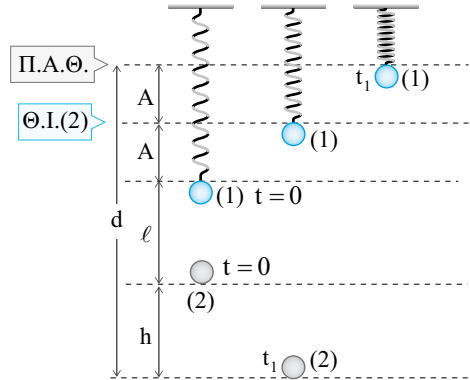
δ. Η χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα (1) ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι:

$$t_1 = \frac{T}{2} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{(2\pi/\omega)}{2} \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,1\pi \text{ s.}$$

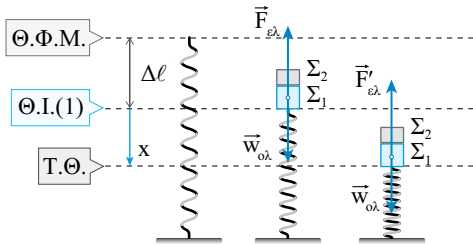
Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα (2) έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα προς τα κάτω από την αρχική του θέση κατά h . Είναι: $h = \frac{1}{2} g t_1^2$

ή $h = 0,5 \text{ m}$. Τη χρονική στιγμή t_1 η απομάκρυνση του σώματος (1) από τη θέση ισορροπίας του είναι: $x = -A$ ή $x = -0,1 \text{ m}$.

Όπως προκύπτει από το επόμενο σχήμα, η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $d = 2A + \ell + h$ ή $d = 1 \text{ m}$.



105. α. Το σύστημα των δύο σωμάτων αρχικά ισορροπεί [Θ.Ι.(1)] με το ελατήριο συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell$.



Στη θέση ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{ολ} - F_{ελ} = 0$ ή $(m_1 + m_2)g = k\Delta\ell$ (1).

Έστω η τυχαία θέση της τροχιάς του συστήματος των δύο σωμάτων που φαίνεται στο σχήμα, η οποία έχει απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας. Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά τη φορά του x , τότε στην τυχαία θέση ισχύει: $\Sigma F = w_{ολ} - F'_{ελ}$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = (m_1 + m_2)g - k(\Delta\ell + x)$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = (m_1 + m_2)g - k\Delta\ell - kx$$

$$\text{ή λόγω της σχέσης (1): } \Sigma F = -kx \text{ (2).}$$

Επομένως, το σύστημα των δύο σωμάτων εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

Η περίοδος της ταλάντωσης υπολογίζεται

$$\text{από τη σχέση: } T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}}$$

$$\text{ή } T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \quad \text{ή } T = 0,4\pi \text{ s.}$$

β. Το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων είναι $A = 0,2 \text{ m}$. Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων δίνεται από τη σχέση: $U = \frac{1}{2}Dx^2$ ή $U = \frac{1}{2}kx^2$ ή

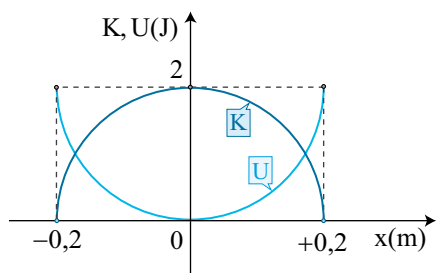
$$U = 50x^2 \text{ (S.I.)}, \text{ με } -0,2 \text{ m} \leq x \leq +0,2 \text{ m} \quad (2).$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης, έχουμε: $E = K + U$ ή $K = E - U$

$$\text{ή } K = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{ή } K = 2 - 50x^2 \text{ (S.I.)},$$

με $-0,2 \text{ m} \leq x \leq +0,2 \text{ m} \quad (3).$

Οι γραφικές παραστάσεις των σχέσεων (1) και (2) απεικονίζονται στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος.



γ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του συστήματος των δύο σωμάτων από τη θέση ισορροπίας τις χρονικές στιγμές στις οποίες η κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων είναι ίση με τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης ($K = U$). Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης, έχουμε: $E = K + U$ ή $E = 2U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}DA^2 = 2\frac{1}{2}Dx_1^2 \quad \text{ή } x_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}A$$

$$\text{ή } |x_1| = 0,1\sqrt{2} \text{ m.}$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_1 τις παραπάνω χρονικές στιγμές δίνεται από τη σχέση: $\left|\frac{dp}{dt}\right| = |\Sigma F_1|$

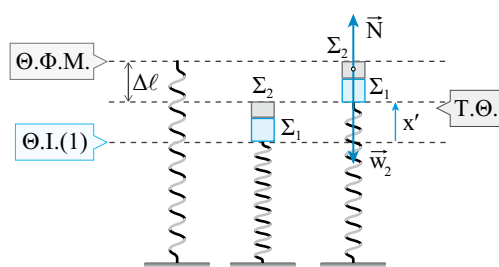
$$\text{ή } \left|\frac{dp}{dt}\right| = |-D_1x_1| \quad \text{ή } \left|\frac{dp}{dt}\right| = |-m_1\omega^2x_1|,$$

$$\text{όπου } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή } \omega = 5 \text{ rad/s,}$$

$$\text{ή } \left|\frac{dp}{dt}\right| = 2,5\sqrt{2} \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

δ. Το νέο πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος των σωμάτων είναι: $A' = 0,5 \text{ m}$.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του είναι το βάρος του $\vec{w}_2$ και η δύναμη επαφής $\vec{N}$ από το σώμα Σ_1 . Θεωρούμε την τυχαία θέση της τροχιάς του συστήματος των δύο σωμάτων με απομάκρυνση x' ($x' > 0$) από τη θέση ισορροπίας που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Επειδή το σώμα Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η συνισταμένη δύναμη ΣF_2 που δέχεται είναι της μορφής: $\Sigma F_2 = -D_2x'$
ή $N - w_2 = -D_2x'$ ή $N = m_2g - D_2x'$
ή $N = m_2g - m_2\omega^2x' \quad (4).$

Για να χαθεί η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων, πρέπει η δύναμη επαφής $\vec{N}$ να γίνει ίση με μηδέν ($N = 0$). Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο πάνω από τη θέση ισορροπίας, όπου $x > 0$. Επομένως από τη σχέση (4) για $N = 0$, προκύπτει: $0 = m_2 g - m_2 \omega^2 x'$ ή $x' = +\frac{g}{\omega^2}$ ή $x' = +0,4 \text{ m}$.

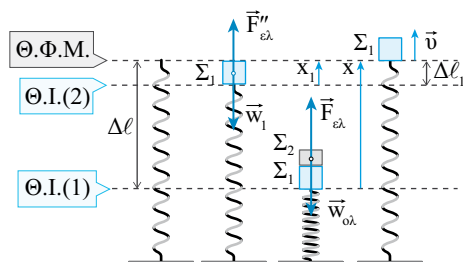
Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $\Delta \ell = 0,4 \text{ m}$. Εφόσον είναι $x' = \Delta \ell$, η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων χάνεται στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος.

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συστήματος των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν χαθεί η επαφή τους. Από τη διατήρηση της ενέργειας E' της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα των δύο σωμάτων, έχουμε: $E' = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k A'^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k x'^2$$

$$\text{ή } v = \sqrt{\frac{k(A'^2 - x'^2)}{m_1 + m_2}} \quad \text{ή } v = 1,5 \text{ m/s.}$$

Μετά την απώλεια της επαφής του σώματος Σ_2 με το σώμα Σ_1 , το σώμα Σ_1 συνεχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας (2) [Θ.Ι.(2)] που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αμέσως μετά την απώλεια της επαφής των δύο σωμάτων, το μέτρο της ταχύτητας του σώμα-

τος Σ_1 είναι $v = 1,5 \text{ m/s}$ και η απομάκρυνσή του από Θ.Ι.(2) είναι $x_1 = +\Delta \ell_1$, όπου $\Delta \ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(2). Στη Θ.Ι.(2) ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F'_{ελ} = 0$

$$\text{ή } m_1 g = k \Delta \ell_1 \quad \text{ή } \Delta \ell_1 = 0,1 \text{ m.}$$

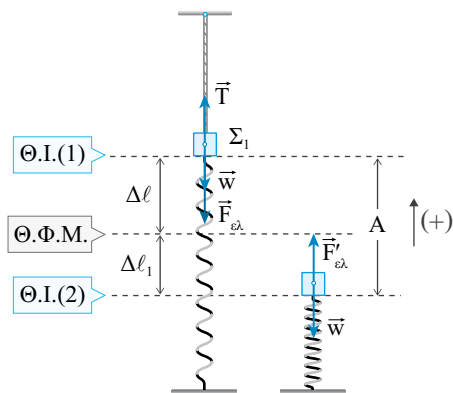
Επομένως, είναι: $x_1 = +0,1 \text{ m}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας E'' της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την απώλεια της επαφής του με το σώμα Σ_2 , έχουμε:

$$E'' = K + U \quad \text{ή } E'' = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} k x_1^2$$

$$\text{ή } E'' = 1,625 \text{ J.}$$

106. α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_1 στην αρχική θέση ισορροπίας του [Θ.Ι.(1)] είναι η τάση $\vec{T}$ από το νήμα, το βάρος του $\vec{w}$ και η δύναμη $\vec{F}_{ελ}$ από το ελατήριο. Στη Θ.Ι.(1) ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $T - w - F_{ελ} = 0$ ή $T = mg + k \Delta \ell$ ή $T = 80 \text{ N}$.



β. Μετά την κοπή του νήματος το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη Θ.Ι.(2) που φαίνεται στο σχήμα. Έστω $\Delta \ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(2). Στη Θ.Ι.(2) ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F'_{ελ} = 0$ ή $mg = k \Delta \ell_1$ ή $\Delta \ell_1 = 0,1 \text{ m}$.

Από το σχήμα προκύπτει ότι το πλάτος A της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κοπή του νήματος, είναι: $A = \Delta\ell + \Delta\ell_1$ ή $A = 0,8 \text{ m}$. Η γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m\omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s}.$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 από τη Θ.Ι.(2) δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (1).

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι.(2) είναι $x = +A$.

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = +A$, προκύπτει: $\eta\mu\varphi_0 = 1$ ή $\eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (2)

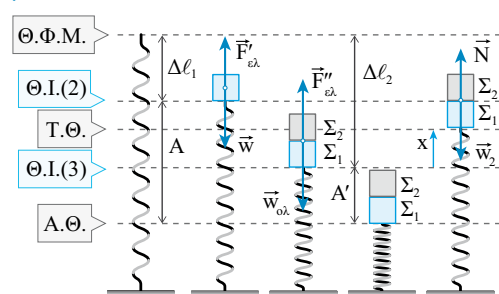
$$\text{ή} \quad \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \text{με} \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (2).$$

Επειδή ισχύει $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$ από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$ προκύπτει: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$$x = 0,8\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.}).$$

γ.



Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία τοποθετούμε το σώμα Σ_2 πάνω στο σώμα Σ_1 , το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του, οπότε η θέση αυτή θα είναι ακραία θέση και για την ταλάντωση του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 . Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπεί-

ρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 (Θ.Ι.(3)).

Στη Θ.Ι.(3) ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{\text{ολ}} - F_{\text{ελ}}'' = 0$

$$\text{ή} \quad (m_1 + m_2)g = k\Delta\ell_2 \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_2 = 0,4 \text{ m}.$$

Όπως προκύπτει από το σχήμα το πλάτος A' της ταλάντωσης του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 , είναι: $A' = A + \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2$ ή $A' = 0,5 \text{ m}$.

δ. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συστήματος των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 είναι:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega' = 5 \text{ rad/s}.$$

Θεωρούμε μια τυχαία θέση στον θετικό ημιάξονα με απομάκρυνση x ($x > 0$) από τη θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 [Θ.Ι.(3)] όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συστήματος είναι το βάρος του $\vec{w}_2$ και η δύναμη επαφής $\vec{N}$ από το σώμα Σ_1 . Για τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα Σ_2 στην τυχαία θέση με απομάκρυνση x ισχύει:

$$\Sigma F_2 = -D_2x \quad \text{ή} \quad \Sigma F_2 = -m_2\omega'^2x$$

$$\text{ή} \quad N - m_2g = -m_2\omega'^2x$$

$$\text{ή} \quad N = m_2g - m_2\omega'^2x \quad (1).$$

Για να χαθεί η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων, πρέπει να ισχύει $N = 0$. Από τη σχέση (1) για $N = 0$ προκύπτει: $0 = m_2g - m_2\omega'^2x$

$$\text{ή} \quad x = +\frac{g}{\omega'^2} \quad \text{ή} \quad x = +0,4 \text{ m}.$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συστήματος των δύο σωμάτων ακριβώς πριν το σώμα Σ_2 χάσει την επαφή του με το σώμα Σ_1 .

Από τη διατήρηση της ενέργειας E' της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 έχουμε: $E' = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2} kA'^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$\text{ή } v = 1,5 \text{ m/s.}$$

107. α. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 υπολογίζεται

$$\text{από τη σχέση: } D = m_1 \omega^2 \text{ ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$$

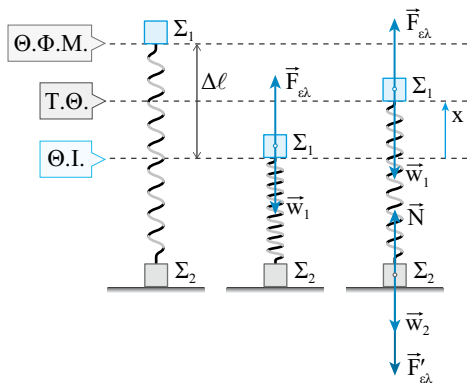
$$\text{ή } \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 . Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ισχύει: $v_0 = v_{\max}$ ή $v_0 = \omega A$ ή $A = 0,2 \text{ m}$.

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας είναι $x = 0$ και η ταχύτητα του είναι θετική, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση: $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } x = 0,2 \sin(10t) \text{ (S.I.).}$$

β. Θεωρούμε την τυχαία θέση με απομάκρυνση $x (x > 0)$ από τη θέση ισορροπίας που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εφόσον το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ισχύει: $\Sigma F_1 = -Dx$

$$\text{ή } F_{\epsilon\lambda} - w_1 = -kx \text{ ή } F_{\epsilon\lambda} = m_1 g - kx \text{ (1).}$$

Για τις δυνάμεις $\vec{F}_{\epsilon\lambda}$ και $\vec{F}'_{\epsilon\lambda}$, ισχύει:

$$\vec{F}_{\epsilon\lambda} = -\vec{F}'_{\epsilon\lambda} \text{ ή αλγεβρικά: } F'_{\epsilon\lambda} = -F_{\epsilon\lambda}.$$

Επειδή το σώμα Σ_2 ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_2 = \vec{0} \text{ ή } \vec{N} + \vec{w}_2 + \vec{F}'_{\epsilon\lambda} = \vec{0}$$

$$\text{ή αλγεβρικά: } N - w_2 + F'_{\epsilon\lambda} = 0$$

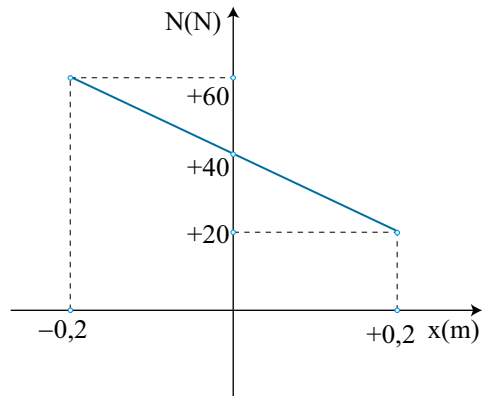
$$\text{ή } N = m_2 g - F'_{\epsilon\lambda} \text{ ή } N = m_2 g + F_{\epsilon\lambda}$$

ή λόγω της σχέσης (1):

$$N = m_2 g + m_1 g - kx \text{ ή } N = 40 - 100x \text{ (S.I.),}$$

$$\text{με } -0,2 \text{ m} \leq x \leq +0,2 \text{ m} \text{ (2).}$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης (2) απεικονίζεται στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος.



γ. Από τη σχέση (2) για $x = -A = -0,2 \text{ m}$ προκύπτει: $N_{\max} = 60 \text{ N}$. Από τη σχέση (2) για $x = +A = +0,2 \text{ m}$ προκύπτει: $N_{\min} = 20 \text{ N}$.

$$\text{Επομένως, είναι: } \frac{N_{\max}}{N_{\min}} = 3.$$

δ. Για να μην χάνει την επαφή το σώμα Σ_2 με το δάπεδο πρέπει να ισχύει: $N \geq 0$ ή, λόγω της σχέσης (2): $40 - 100x \geq 0$ ή $x \leq 0,4 \text{ m}$.

Επομένως, το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης που μπορεί να εκτελέσει το σώμα Σ_1 , ώστε το σώμα Σ_2 να μη χάσει την επαφή του με το

δάνεδο είναι: $A_{\max} = 0,4 \text{ m}$. Επομένως, είναι:

$$v_{0(\max)} = \omega A_{\max} \quad \text{ή} \quad v_{0(\max)} = 4 \text{ m/s}.$$

108. α. Το σύστημα των δύο σωμάτων εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = (m_1 + m_2)\omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

$$\text{ή} \quad \omega = 5 \text{ rad/s}.$$

Η σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D_1 = m_1\omega^2 \quad \text{ή} \quad D_1 = 25 \text{ N/m}.$$

Η σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_2 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$D_2 = m_2\omega^2 \quad \text{ή} \quad D_2 = 75 \text{ N/m}.$$

β. Το πλάτος της ταλάντωσης των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι: $A = d = 0,3 \text{ m}$.

Θεωρούμε μια τυχαία θέση του συστήματος των δύο σωμάτων με απομάκρυνση x ($x > 0$) πάνω από τη θέση ισορροπίας. Οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα Σ_2 στην τυχαία θέση είναι το βάρος του $\vec{w}_2$ και η τάση $\vec{T}$ του νήματος. Επειδή το σώμα Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς D_2 ,

$$\text{ισχύει: } \Sigma F_2 = -D_2x \quad \text{ή} \quad T - w_2 = -D_2x$$

$$\text{ή} \quad T = m_2g - D_2x \quad \text{ή} \quad T_2 = 30 - 75x \text{ (S.I.)},$$

$$\text{με } -0,3 \text{ m} \leq x \leq +0,3 \text{ m} \quad (1).$$

γ. Από τη σχέση (1) για $x = -0,3 \text{ m}$, προκύπτει: $T_{\max} = 52,5 \text{ N}$. Από τη σχέση (1) για $x = +0,3 \text{ m}$, προκύπτει: $T_{\min} = 7,5 \text{ N}$.

$$\text{Επομένως, είναι: } \frac{T_{\max}}{T_{\min}} = 7.$$

δ. Για να διατηρείται το νήμα τεντωμένο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συστήματος, πρέπει να ισχύει: $T \geq 0$ ή λόγω της σχέσης (1): $30 - 75x \geq 0$ ή $x \leq 0,4 \text{ m}$.

Επομένως, το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης που μπορεί να εκτελέσει το σύστημα των δύο σωμάτων, ώστε κατά τη διάρκειά της το νήμα να διατηρείται τεντωμένο, είναι: $A_{\max} = 0,4 \text{ m}$.

3.4 Απλή αρμονική ταλάντωση και Κρούσεις

ΘΕΜΑΤΑ Β

11. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή } mv_0 = (M + m)v \text{ ή } v_0 = 2v \text{ (1).}$$

Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 .

$$\text{Είναι: } \Sigma\vec{F} = \vec{0} \text{ ή } w_1 - F_{ελ} = 0 \text{ ή } Mg = k\Delta\ell_1$$

$$\text{ή } \Delta\ell_1 = \frac{Mg}{k} \text{ (2).}$$

Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Είναι: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή } w_{ολ} - F'_{ελ} = 0 \text{ ή } (M + m)g = k\Delta\ell_2$$

$$\text{ή } \Delta\ell_2 = \frac{(M + m)g}{k} \text{ ή } \Delta\ell_2 = \frac{2Mg}{k} \text{ (3).}$$

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$|x| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 \text{ ή, λόγω των σχέσεων (2) και (3): } |x| = \frac{Mg}{k}.$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(M + m)v^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{ή } kA^2 = (M + m)v^2 + k\frac{M^2g^2}{k^2}$$

$$\text{ή } v = \sqrt{\frac{k}{M + m}A^2 - \frac{M^2g^2}{k(M + m)}}$$

$$\text{ή } v = \sqrt{\frac{k}{2M}A^2 - \frac{Mg^2}{2k}} \text{ (4).}$$

Το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία στη θέση όπου μηδενίζεται η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, δηλαδή στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Επομένως, το πλάτος A της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα είναι:

$$A = \Delta\ell_2 \text{ ή } A = \frac{2Mg}{k} \text{ (5).}$$

Από τη σχέση (4), λόγω της σχέσης (5), προκύπτει:

$$v = \sqrt{\frac{3M}{2k}}g \text{ (6).}$$

Συνεπώς από τη σχέση (1), λόγω της σχέσης

$$(6), \text{ προκύπτει: } v_0 = 2\sqrt{\frac{3M}{2k}}g.$$

12. Σωστή επιλογή είναι η β .

Επειδή τα σώματα έχουν ίσες μάζες και η κρούση είναι μετωπική και ελαστική, κατά τη διάρκεια της κρούσης ανταλλάσσουν ταχύτητες. Επομένως, το μέτρο v'_1 της ταχύτητας που αποκτά το σώμα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση

$$\text{είναι: } v'_1 = v_2 \text{ ή } v'_1 = \sqrt{\frac{3k}{m_1}}A_1 \text{ (1).}$$

Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που

εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

ή $kA_2^2 = m_1v_1'^2 + kA_1^2$ ή λόγω της σχέσης (1):

$$kA_2^2 = 3kA_1^2 + kA_1^2 \quad \text{ή} \quad A_2 = 2A_1.$$

13. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Το πλάτος A_1 της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση είναι $A_1 = d$. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + 0$$

$$\text{ή} \quad v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}A_1.$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή} \quad mv_1 = 2mv \quad \text{ή} \quad v = \frac{v_1}{2} \quad \text{ή} \quad v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}A_1 \quad (1).$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}2mv^2 + 0$$

$$\text{ή, επειδή } D = 2k, \quad 2kA_2^2 = 2mv^2$$

$$\text{ή} \quad v = \sqrt{\frac{k}{m}}A_2 \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (1):}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}A_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}A_2 \quad \text{ή} \quad \frac{A_1}{A_2} = 2.$$

14. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \quad \text{ή} \quad m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$$

$$\text{ή} \quad 8m \cdot \frac{3}{8}\sqrt{\frac{3k}{m}}A_1 = 9mv \quad \text{ή} \quad v = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3k}{m}}A_1.$$

Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{ή} \quad kA_2^2 = 9m\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3k}{m}}A_1\right)^2 + kA_1^2$$

$$\text{ή} \quad A_2 = 2A_1.$$

15. α. Έστω v'_2 η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v'_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$ ή $v'_2 = +2 \text{ m/s}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση,

$$\text{έχουμε: } E = K + U \text{ ή } E = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + 0$$

$$\text{ή } E = 16 \text{ J.}$$

β. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Είναι:

$$E = \frac{1}{2} D A^2 \text{ ή } E = \frac{1}{2} k A^2 \text{ ή } A = 0,4 \text{ m.}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του υπολογίζεται από της σχέση:

$$D = m_2 \omega^2 \text{ ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \text{ ή } \omega = 5 \text{ rad/s.}$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος Σ_2 δίνεται από τη σχέση: $a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi_0)$
ή $a = -10 \sin(5t) \text{ (S.I.)}$.

γ. Είναι: $\left| \frac{dp}{dt} \right|_{\max} = \Sigma F_{\max}$ ή $\left| \frac{dp}{dt} \right|_{\max} = D A$

$$\text{ή } \left| \frac{dp}{dt} \right|_{\max} = k A \text{ ή } \left| \frac{dp}{dt} \right|_{\max} = 80 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

δ. Το σώμα Σ_2 διέρχεται για πρώτη φορά από τη Θ.Ι. μετά την κρούση τη χρονική στιγμή: $t_1 = \frac{T}{2}$ ή $t_1 = \frac{(2\pi/\omega)}{2}$ ή $t_1 = 0,2\pi \text{ s}$.

Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση έως τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_1 διανύει στο λείο οριζόντιο δάπεδο διάστημα

$$s_1. \text{ Είναι: } s_1 = |v'_1| t_1 \text{ ή } s_1 = \left| \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \right| t_1$$

$$\text{ή } s_1 = 1,884 \text{ m.}$$

Η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $d = s_1$ ή $d = 1,884 \text{ m}$.

16. α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος Σ_2 προκύπτει:

$$\omega = 10 \text{ rad/s} \text{ και } v_{\max} = 6 \text{ m/s.}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση.

$$\text{Είναι: } v_{\max} = \omega A \text{ ή } A = 0,6 \text{ m.}$$

Η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης του σώματος Σ_2 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης είναι: $a_{\max} = \omega^2 A$ ή $a_{\max} = 60 \text{ m/s}^2$.

β. Η μάζα m_2 του σώματος Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $D = k$ ή $m_2 \omega^2 = k$ ή $m_2 = 2 \text{ kg}$. Έστω v'_2 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Επειδή το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει: $v'_2 = v_{\max}$ ή $\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = v_{\max}$
ή $m_1 = 1 \text{ kg}$.

γ. Έστω v_1' η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση.

$$\text{Είναι: } v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_1' = -3 \text{ m/s.}$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } \pi = \frac{|\Delta K_1|}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\left| \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right|}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 88,89 \, \%.$$

δ. Το σώμα Σ_1 μετά την κρούση κινείται στο λείο οριζόντιο δάπεδο με σταθερή ταχύτητα $\bar{v}_1'$. Έστω t_1 η χρονική στιγμή στην οποία το σώμα έχει διανύσει διάστημα s_1 από τη θέση όπου έγινε η κρούση.

$$\text{Ισχύει: } s_1 = |v_1'| t_1 \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,05 \pi \text{ s.}$$

Η απομάκρυνση x_1 του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x_1 = A \sin(\omega t_1) \quad \text{ή} \quad x_1 = 0,6 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

$$\text{ή } x_1 = +0,6 \text{ m.}$$

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2 \quad \text{ή} \quad U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2} k x_1^2 \quad \text{ή} \quad U_{\text{ελ}} = 36 \text{ J.}$$

17. α. Το πλάτος A της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι: $A = \Delta \ell$ ή $A = 0,2 \text{ m.}$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_1 \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Το μέτρο της ταχύτητας $\bar{v}_1$ του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση ισούται με τη μέγιστη τιμή της ταχύτητας που αυτό αποκτά κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης που εκτελεί πριν από την κρούση. Συνεπώς, είναι:

$$|v_1| = v_{\text{max}} \quad \text{ή} \quad |v_1| = \omega A \quad \text{ή} \quad |v_1| = 2 \text{ m/s.}$$

Επειδή ως θετική φορά κίνησης έχουμε θεωρήσει τη φορά προς τα αριστερά, η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\bar{v}_1$ είναι:

$$v_1 = -2 \text{ m/s.}$$

β. Έστω v_1' και v_2' οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση. Είναι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_1' = +1 \text{ m/s.}$$

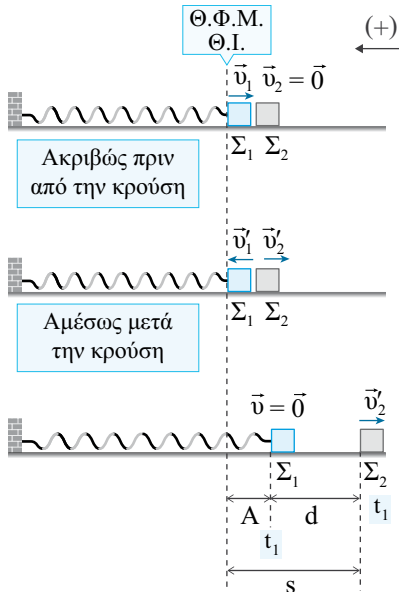
$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_2' = -1 \text{ m/s.}$$

γ. Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D A'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + 0$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} k A'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 \quad \text{ή} \quad A' = \sqrt{\frac{m_1 v_1'^2}{k}}$$

$$\text{ή} \quad A' = 0,1 \text{ m.}$$



Μετά την κρούση το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με την ίδια γωνιακή συχνότητα ω . Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση: $x = A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (1). Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι $x = 0$, Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = 0$ προκύπτει: $0 = A \eta\mu\varphi_0$

$$\eta\mu\varphi_0 = 0 \quad \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu 0 \quad (2).$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (2) είναι:

$$\varphi_0 = 2\kappa\pi, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (3),$$

$$\varphi_0 = 2\kappa\pi + \pi, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (4).$$

Επειδή ισχύει $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, από τις σχέσεις (3) και (4) για $\kappa = 0$ προκύπτει:

$$\varphi_0 = 0 \text{ και } \varphi_0 = \pi \text{ rad αντίστοιχα.}$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος Σ_1 μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (5).$$

Από τη σχέση (5) για $t = 0$ και $\varphi_0 = 0$ προκύπτει: $v = v_{\max} \sin 0 > 0$.

Από τη σχέση (5) για $t = 0$ και $\varphi_0 = \pi \text{ rad}$ προκύπτει: $v = v_{\max} \sin \pi < 0$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ_1 κινείται προς τα αριστερά, οπότε η ταχύτητά του είναι θετική. Επομένως, δεκτή λύση είναι η:

$\varphi_0 = 0$. Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$$x = 0,1\eta\mu(10t) \text{ (S.I.)}.$$

δ. Το σώμα Σ_1 ακινητοποιείται στιγμιαία για δεύτερη φορά μετά την κρούση τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία βρίσκεται στην ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσης ($x = -A$).

$$\text{Είναι: } t_1 = \frac{3T}{4} \quad \eta \quad t_1 = \frac{3}{4} \frac{2\pi}{\omega} \quad \eta \quad t_1 = 0,15\pi \text{ s.}$$

Το διάστημα s που διανύει το σώμα Σ_2 στο λείο οριζόντιο δάπεδο από τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$s = |v_2'| t_1 \quad \eta \quad s = 0,15\pi \text{ m} \quad \eta \quad s = 0,471 \text{ m.}$$

Η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $d = s - A'$

$$\eta \quad d = 0,371 \text{ m.}$$

18. α. Έστω A το πλάτος και ω η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 πριν από την κρούση. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 προκύπτει:

$$A = 0,4 \text{ m} \quad \text{και} \quad \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Έστω v_2 η ταχύτητα του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή $t = (\pi/20) \text{ s}$, ακριβώς πριν από την κρούση. Είναι: $v_2 = \omega A \sin(\omega t)$

$$\eta \quad v_2 = 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ m/s} \quad \eta \quad v_2 = 0.$$

β. Η μάζα m_2 του σώματος Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m_2 \omega^2$ ή $k = m_2 \omega^2$
ή $m_2 = 3 \text{ kg}$.

Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων v'_1 και v'_2 των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση υπολογίζονται από τις σχέσεις: $v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$ ή $v'_1 = -3 \text{ m/s}$

και $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$ ή $v'_2 = +3 \text{ m/s}$.

Επομένως, είναι $|v'_1| = |v'_2| = 3 \text{ m/s}$.

γ. Η απομάκρυνση x του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 , αν θέσουμε σε αυτήν όπου $t = (\pi/20) \text{ s}$.

Είναι: $x = 0,4 \text{ m} \left(\frac{\pi}{2} \right)$ ή $x = +0,4 \text{ m}$.

Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2} k A'^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{ή } A' = 0,5 \text{ m}.$$

δ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας τις χρονικές στιγμές μετά την κρούση στις οποίες η κινητική του ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης ($K = 3U$). Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } E = 4U \text{ ή } \frac{1}{2} k A'^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} k x_1^2$$

$$\text{ή } |x_1| = \frac{A'}{2} \text{ ή } |x_1| = 0,25 \text{ m}.$$

Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ_2 από το ελατήριο τις παραπάνω χρονικές στιγμές είναι: $|F_{ελ}| = k \Delta \ell$ ή $F_{ελ} = k|x_1|$

$$\text{ή } |F_{ελ}| = 75 \text{ N}.$$

19. α. Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση.

$$\text{Είναι: } v_0 = v_{\max} \text{ ή } v_0 = \omega A_1 \text{ ή } v_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} A_1$$

$$\text{ή } A_1 = 0,6\sqrt{2} \text{ m}.$$

β. Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα Σ_1 έχει διανύσει διάστημα $s_1 = 0,2\sqrt{2} \text{ m}$ από τη χρονική στιγμή που το εκτοξεύσαμε βρίσκεται σε μία θέση δεξιά από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, στην οποία η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης είναι $|x| = 0,2\sqrt{2} \text{ m}$. Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση, έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2} k A_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{ή } |v_1| = 8 \text{ m/s}.$$

γ. Θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά της ταχύτητας $\bar{v}_1$ ακριβώς πριν από την κρούση, οι αλγεβρικές τιμές v'_1 και v'_2 των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$v'_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή } v'_1 = -2 \text{ m/s} \text{ και}$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

$$\text{ή } v'_2 = +13 \text{ m/s}.$$

Επομένως, είναι $|v'_1| = 2 \text{ m/s}$ και $|v'_2| = 13 \text{ m/s}$.

δ. Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} k A_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{ή} \quad A_2 = 0,2\sqrt{3} \text{ m.}$$

20. α. Έστω v_2' η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Είναι: $v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$ ή $v_2' = +4 \text{ m/s}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_2 \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega = 5 \text{ rad/s.}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Επειδή τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει: $v_2' = v_{\max}$ ή $v_2' = \omega A$
ή $A = 0,8 \text{ m}$.

β. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι ίση με μηδέν ($\phi_0 = 0$).

Η χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα Σ_2 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$\Sigma F = -Dx \quad \text{ή} \quad \Sigma F = -DA\eta\mu(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = -80\eta\mu(5t) \text{ (S.I.)}$$

γ. Έστω $\Delta\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ_2 . Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_2 - F_{\text{ελ}} = 0 \quad \text{ή} \quad m_2 g = k \Delta\ell$$

ή $\Delta\ell = 0,4 \text{ m}$. Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα Σ_2 από το ελατήριο μεγιστοποιείται τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα Σ_2 φτάνει στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης. Επομένως, είναι:

$$F_{\text{ελ}(\max)} = k(\Delta\ell + A) \quad \text{ή} \quad F_{\text{ελ}(\max)} = 120 \text{ N.}$$

Εφόσον είναι $A > \Delta\ell$ το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα Σ_2 από το ελατήριο λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα Σ_2 διέρχεται από τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Επομένως, είναι: $F_{\text{ελ}(\min)} = 0$.

21. α. Έστω v_1' και v_2' οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση. Είναι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_1' = -4 \text{ m/s}$$

$$\text{ή} \quad |v_1'| = 4 \text{ m/s} \quad \text{και}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_2' = +4 \text{ m/s}$$

$$\text{ή} \quad |v_2'| = 4 \text{ m/s.}$$

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_2 \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega = 5 \text{ rad/s.}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Επειδή το σώμα Σ_2 τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει:

$$|v_2'| = v_{\max} \quad \text{ή} \quad |v_2'| = \omega A \quad \text{ή} \quad A = 0,8 \text{ m.}$$

γ. Επειδή το σώμα Σ_2 τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και κινείται κατά τη θετική φορά, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \phi_0) \quad \text{ή} \quad \alpha = -20\eta\mu(5t) \text{ (S.I.)}$$

δ. Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{U_{\varepsilon\lambda(\max)}}{U_{\text{ταλ}(\max)}} = \frac{\frac{1}{2}k(\Delta\ell + A)^2}{\frac{1}{2}DA^2} \quad (1),$$

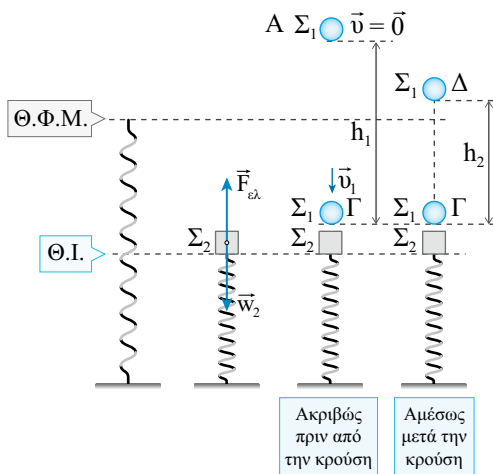
όπου $\Delta\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 . Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή } w_2 - F_{\varepsilon\lambda} = 0 \quad \text{ή } m_2 g = k\Delta\ell \quad \text{ή } \Delta\ell = 0,4 \text{ m.}$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών

$$\text{στη σχέση (1) προκύπτει: } \frac{U_{\varepsilon\lambda(\max)}}{U_{\text{ταλ}(\max)}} = 2,25.$$

22. α. Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 ακριβώς από την κρούση.



Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου – Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από

την κρούση από τη θέση Α στη θέση Γ, που φαίνονται στο σχήμα, έχουμε: $\Delta K = \Sigma W$

$$\text{ή } K_{\Gamma} - K_A = W_{w_1} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - 0 = m_1 g h$$

$$\text{ή } v_1 = \sqrt{2gh} \quad \text{ή } v_1 = 8 \text{ m/s.}$$

β. Έστω $\bar{v}'_1$ και $\bar{v}'_2$ οι ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση. Εφόσον η κρούση είναι μετωπική και ελαστική, οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων $\bar{v}'_1$ και $\bar{v}'_2$ υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_1 = -2 \text{ m/s}$$

$$\text{και } v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_2 = +6 \text{ m/s.}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_2 \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Έστω Α το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Επειδή το σώμα Σ_2 τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει:

$$v'_2 = v_{\max} \quad \text{ή} \quad v'_2 = \omega A \quad \text{ή} \quad A = 0,6 \text{ m.}$$

Επειδή το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας ($x = 0$) και κινείται κατά τη θετική φορά ($v > 0$), η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 από τη Θ.Ι. μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση: $x = A \eta\mu(\omega t + \phi_0)$

$$\text{ή } x = 0,6\eta\mu(10t) \text{ (S.I.)}$$

γ. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου – Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση

ση, μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία σε ύψος h_2 πάνω από τη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 , έχουμε:

$$\Delta K = \Sigma W \quad \text{ή} \quad K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_2}$$

$$\text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -m_1 g h_2 \quad \text{ή} \quad h_2 = 0,2 \text{ m.}$$

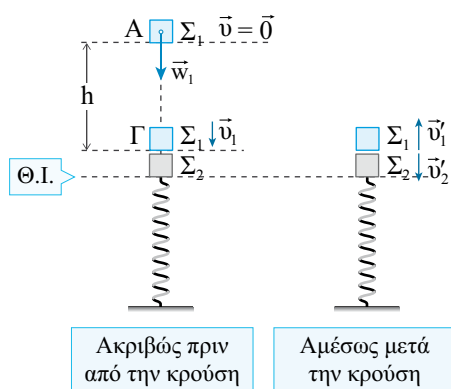
δ. Το σώμα Σ_2 ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την κρούση στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης ($x = +A$). Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την

$$\text{κρούση είναι: } \frac{dv}{dt} = a \quad \text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x$$

$$\text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \quad \text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = -60 \text{ m/s}^2.$$

23. α. Έστω $\vec{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση από τη θέση Α στη θέση Γ, που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, έχουμε: $K_\Gamma - K_A = W_{w_1}$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = m_1 g h \quad \text{ή} \quad |v_1| = 6 \text{ m/s.}$$



β. Έστω $\vec{v}_1'$ και $\vec{v}_2'$ οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση. Επειδή η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, ισχύουν οι σχέσεις:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_1' = -2 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_2' = +4 \text{ m/s.}$$

Επομένως, είναι: $|v_1'| = 2 \text{ m/s}$ και $|v_2'| = 4 \text{ m/s}$.

γ. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_2 \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega = 5 \text{ rad/s.}$$

Επειδή το σώμα Σ_2 τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει:

$$v_2' = v_{\text{max}} \quad \text{ή} \quad v_2' = \omega A \quad \text{ή} \quad A = 0,8 \text{ m.}$$

Επειδή το σώμα Σ_2 τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και κινείται κατά τη θετική φορά, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς που δέχεται το σώμα Σ_2 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $\Sigma F = -Dx$ ή $\Sigma F = -kA\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ ή $\Sigma F = -80\eta\mu(5t)$ (S.I.).

δ. Τη χρονική στιγμή $t = T/4$ το σώμα Σ_2 βρίσκεται στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσης ($x = +A$). Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή

$$t = T/4 \text{ είναι: } \frac{dp}{dt} = \Sigma F \quad \text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = -Dx$$

$$\text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = -kA \quad \text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = -80 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

24. α. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου – Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$\Delta K = \Sigma W \quad \text{ή} \quad K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = m_1 g h_1 \quad \text{ή} \quad |v_1| = 12 \text{ m/s.}$$

β. Έστω $\bar{v}'_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου – Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία σε ύψος h_2 πάνω από τη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 , έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_2}$

$$\text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -m_1 g h_2 \quad \text{ή} \quad |v'_1| = 4 \text{ m/s.}$$

γ. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\bar{v}'_1$ δίνεται από τη σχέση: $v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$

$$\text{ή} \quad -4 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} 12 \quad \text{ή} \quad m_1 = 1 \text{ kg.}$$

δ. Έστω $\bar{v}'_2$ η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\bar{v}'_2$ δίνεται από τη σχέση:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_2 = +8 \text{ m/s.}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Επειδή το σώμα Σ_2 τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει: $v'_2 = v_{\text{max}}$ ή $v'_2 = \omega A$

$$\text{ή} \quad v'_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} A \quad \text{ή} \quad A = 0,8 \text{ m.}$$

Το διάστημα s που διανύει το σώμα Σ_2 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακι-

νητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την κρούση είναι: $s = A$ ή $s = 0,8 \text{ m}$.

ε. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της επιτάχυνσής του είναι $a = 80 \text{ m/s}^2$.

$$\text{Είναι: } a = \omega^2 |x|, \text{ όπου } \omega = \frac{v'_2}{A} = 10 \text{ rad/s,}$$

$$\text{ή } |x| = 0,8 \text{ m} \quad \text{ή} \quad x = \pm 0,8 \text{ m.}$$

Επομένως, το σώμα Σ_2 βρίσκεται σε μία από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης. Έστω $\Delta \ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ_2 . Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_2 - F_{\text{ελ}} = 0$ ή $m_2 g = k \Delta \ell$ ή $\Delta \ell = 0,1 \text{ m}$.

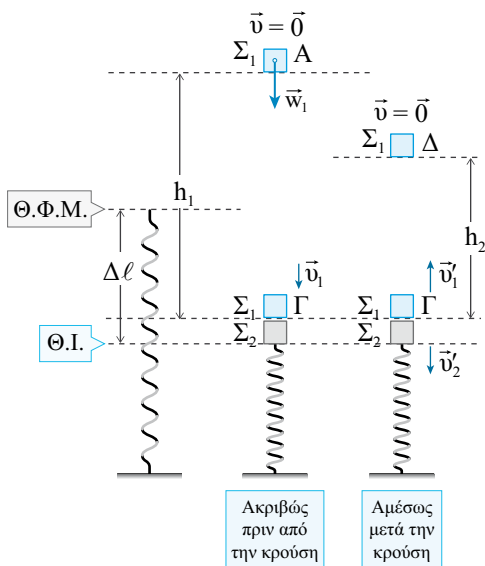
Τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $x = +0,8 \text{ m}$ το μέτρο της δύναμης που δέχεται από το ελατήριο είναι:

$$F_{\text{ελ}} = k(\Delta \ell + x) \quad \text{ή} \quad F_{\text{ελ}} = 180 \text{ N.}$$

Τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $x = -0,8 \text{ m}$ το μέτρο της δύναμης που δέχεται από το ελατήριο είναι: $F_{\text{ελ}} = k(|x| - \Delta \ell)$ ή $F_{\text{ελ}} = 140 \text{ N}$.

25. α. Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση από τη θέση A στη θέση Γ , που φαίνονται στο επόμενο σχήμα, έχουμε: $K_{\Gamma} - K_A = W_{w_1}$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = m_1 g h_1 \quad \text{ή} \quad |v_1| = 6 \text{ m/s.}$$



β. Έστω $\vec{v}'_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 μετά την κρούση από τη θέση Γ στη θέση Δ , που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα, έχουμε: $K_\Delta - K_\Gamma = W_{w_1}$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 = -m_1 g h_2 \quad \text{ή } |v_1'| = 2 \text{ m/s.}$$

γ. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\vec{v}'_1$ του σώματος Σ_1 αμέσως μετά από την κρούση δίνεται από τη σχέση: $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$

$$\text{ή } -2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} 6 \quad \text{ή } m_2 = 2m_1 \quad \text{ή } m_2 = 4 \text{ kg.}$$

δ. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\vec{v}'_2$ του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή } v_2' = +4 \text{ m/s.}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_2 \omega^2 \quad \text{ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \text{ή } \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Είναι:

$$v_2' = v_{\max} \quad \text{ή } v_2' = \omega A \quad \text{ή } A = 0,4 \text{ m.}$$

ε. Τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα Σ_2 διέρχεται από τη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης x του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι $|x| = \Delta\ell$, όπου $\Delta\ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή } w_2 - F_{\epsilon\lambda} = 0 \quad \text{ή } m_2 g = k \Delta\ell \quad \text{ή } \Delta\ell = 0,1 \text{ m.}$$

Επομένως, το μέτρο της επιτάχυνσης a του σώματος Σ_2 τις παραπάνω χρονικές στιγμές, είναι: $|a| = \omega^2 |x|$ ή $|a| = \omega^2 \Delta\ell$ ή $|a| = 10 \text{ m/s}^2$.

26. α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος Σ_2 προκύπτει:

$$\omega = 10 \text{ rad/s} \quad \text{και} \quad v_{\max} = 4 \text{ m/s.}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση.

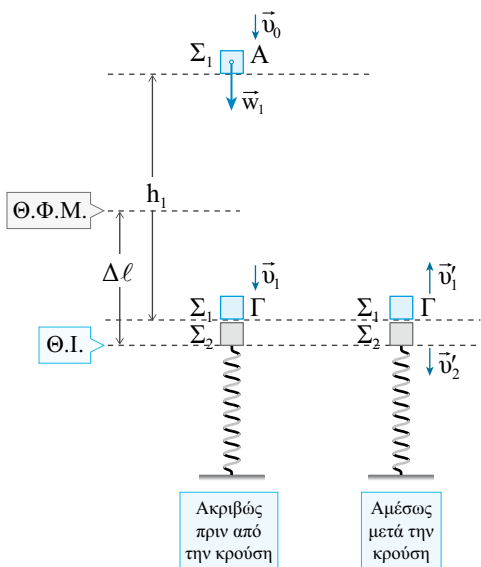
$$\text{Είναι: } v_{\max} = \omega A \quad \text{ή } A = 0,4 \text{ m.}$$

β. Επειδή τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\vec{v}'_2$ του σώματος Σ_2 μετά την κρούση, είναι: $v_2' = +v_{\max}$ ή $v_2' = +4 \text{ m/s.}$

Έστω $\vec{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\vec{v}'_2$ του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή } v_1 = +10 \text{ m/s}$$

$$\text{ή } |v_1| = 10 \text{ m/s.}$$



γ. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση από τη θέση Α στη θέση Γ, που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα, έχουμε:

$$K_\Gamma - K_A = W_{w_1} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = m_1 g h$$

ή $|v_0| = 6 \text{ m/s}$.

δ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $x = A \eta \mu(\omega t)$

$$\text{ή} \quad x = A \eta \mu\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) για $t = 3T/4$, προκύπτει:

$$x = A \eta \mu\left(\frac{2\pi}{T} \frac{3T}{4}\right) \quad \text{ή} \quad x = A \eta \mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\text{ή} \quad x = -A \quad \text{ή} \quad x = -0,4 \text{ m}.$$

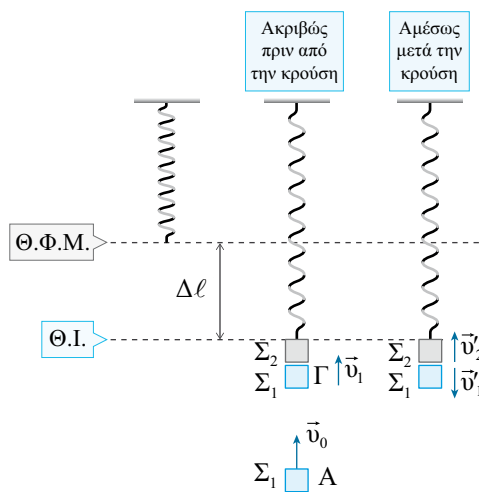
Επομένως, το σώμα Σ_2 τη χρονική στιγμή $t = 3T/4$ βρίσκεται στη πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης. Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t = 3T/4$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$U = \frac{1}{2} D x^2 \quad \text{ή} \quad U = \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{ή} \quad U = 16 \text{ J}.$$

Έστω $\Delta \ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 . Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

ή $w_2 - F_{ελ} = 0$ ή $m_2 g = k \Delta \ell$ ή $\Delta \ell = 0,4 \text{ m}$.
Επειδή είναι $A = \Delta \ell$ τη χρονική στιγμή $t = 3T/4$ το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Επομένως, η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου τη χρονική στιγμή $t = 3T/4$ είναι: $U_{ελ} = 0$.

27. α. Έστω $\vec{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση.



Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου - Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση από τη θέση Α στη θέση Γ, που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα, έχουμε:

$$\Delta K = \Sigma W \quad \text{ή} \quad K_\Gamma - K_A = W_{w_1}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -m_1 g h \quad \text{ή} \quad |v_1| = 6 \text{ m/s}.$$

β. Έστω $\vec{v}_1'$ και $\vec{v}_2'$ οι ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την

κρούση. Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων $\vec{v}_1'$ και $\vec{v}_2'$ υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_1' = 0.$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_2' = +6 \text{ m/s}$$

$$\text{ή} \quad |\vec{v}_2'| = 6 \text{ m/s}.$$

γ. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_2 \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s}.$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Είναι:

$$v_2' = v_{\max} \quad \text{ή} \quad v_2' = \omega A \quad \text{ή} \quad A = 0,6 \text{ m}.$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $x = A \sin(\omega t + \phi_0)$

$$\text{ή} \quad x = 0,6 \sin(10t) \text{ (S.I.)}.$$

δ. Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 μηδενίζεται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την κρούση τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία φτάνει για πρώτη φορά στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσης ($x = +A$). Είναι:

$$t_1 = \frac{T}{4} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{(2\pi/\omega)}{4} \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,05\pi \text{ s}.$$

Το σώμα Σ_1 μετά την κρούση εκτελεί ελεύθερη πτώση. Η μετατόπιση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \text{ή} \quad h = 0,125 \text{ m}.$$

Η απόσταση μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $d = h + A$

$$\text{ή} \quad d = 0,725 \text{ m}.$$

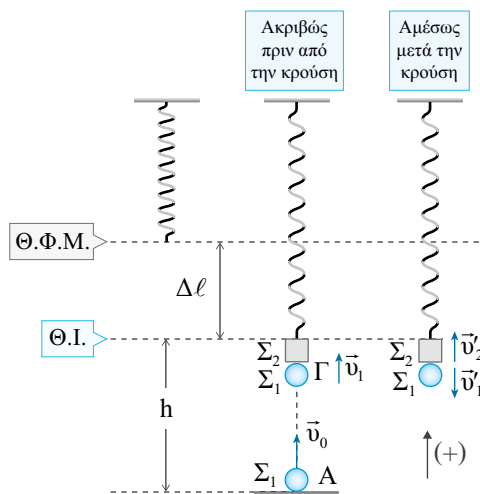
ε. Έστω $\Delta \ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 .

Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή} \quad w_2 - F_{\text{ελ}} = 0 \quad \text{ή} \quad m_2 g = k \Delta \ell \quad \text{ή} \quad \Delta \ell = 0,1 \text{ m}.$$

Εφόσον είναι $A > \Delta \ell$, η ελάχιστη τιμή του μέτρου που ασκεί το ελατήριο στο σώμα Σ_2 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης είναι $F_{\text{ελ}(\min)} = 0$.

28. α. Έστω $\vec{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση.



Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση από τη θέση A στη θέση Γ , που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα, έχουμε:

$$\Delta K = \Sigma W \quad \text{ή} \quad K_{\Gamma} - K_A = W_{w_1}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -m_1 g h \quad \text{ή} \quad v_1 = +4 \text{ m/s}.$$

Έστω $\vec{v}_1'$ και $\vec{v}_2'$ οι ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση.

Επειδή η κρούση είναι κεντρική και ελαστική,

οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων $\bar{v}'_1$ και $\bar{v}'_2$ υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_1 = -2 \text{ m/s}$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_2 = +2 \text{ m/s}.$$

β. Έστω Α το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Επειδή το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει: $v'_2 = v_{\max}$ ή $v'_2 = \omega A$ (1).

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_2 \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s}.$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (1) προκύπτει: $A = 0,2 \text{ m}$. Εφόσον το σώμα Σ_2 τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος Σ_2 μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση: $v = \omega A \sin(\omega t + \phi_0)$

$$\text{ή} \quad v = 2 \sin(10t) \text{ (S.I.)}.$$

γ. Έστω $\Delta \ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 .

$$\text{Από τη συνθήκη ισορροπίας, έχουμε: } \Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_2 - F_{\text{ελ}} = 0 \quad \text{ή} \quad m_2 g = k \Delta \ell \quad \text{ή} \quad \Delta \ell = 0,1 \text{ m}.$$

Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα Σ_2 διέρχεται για πρώτη φορά μετά την κρούση από τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι:

$x = +\Delta \ell$ ή $x = +0,1 \text{ m}$ (2). Έστω v η ταχύτητα του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$ ή $\frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} k x^2$ ή $v = +\sqrt{3} \text{ m/s}$.

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F v \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -kx v \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -30\sqrt{3} \text{ J/s}.$$

δ. Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα Σ_2 από το ελατήριο γίνεται μέγιστο τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα Σ_2 βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης ($x = -A$). Η χρονική στιγμή t_1 στην οποία το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα Σ_2 από το ελατήριο γίνεται μέγιστο για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι: $t_1 = \frac{3T}{4}$ ή $t_1 = \frac{3}{4} \frac{2\pi}{\omega}$ ή $t_1 = 0,15\pi \text{ s}$.

29. α. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι:

$A_1 = d$ ή $A_1 = 0,4 \text{ m}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_1 \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s}.$$

Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή $t = 0$, ακριβώς πριν από την κρούση.

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$, ακριβώς πριν από την κρούση, το σώμα Σ_1 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας, ισχύει: $v_1 = v_{\max}$ ή $v_1 = \omega A_1$ ή $v_1 = 4 \text{ m/s}$.

β. Έστω v_1' το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Επειδή τα σώματα έχουν ίσες μάζες και η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, ανταλλάσσουν ταχύτητες κατά την κρούση. Συνεπώς για τα μέτρα των ταχυτήτων v_1' και v_2' , ισχύει:

$$v_1' = v_2 \quad \text{ή} \quad v_1' = 2 \text{ m/s.}$$

Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση είναι ίση με τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί πριν από την κρούση. Επειδή το σώμα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει:

$$v_1' = \omega A_2 \quad \text{ή} \quad A_2 = 0,2 \text{ m.}$$

γ. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, το σώμα Σ_1 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί μετά την κρούση είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$x = A_2 \eta \mu(\omega t + \phi_0) \quad \text{ή} \quad x = 0,2 \eta \mu(10t) \text{ (S.I.).}$$

δ. Έστω $\Delta \ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 .

Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{ελ} = 0$ ή $m_1 g = k \Delta \ell$ ή $\Delta \ell = 0,1 \text{ m}$. Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο σώμα Σ_1 λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του μετά την κρούση τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης ($x = +A_2$). Είναι: $F_{ελ(max)} = k(\Delta \ell + A_2)$ ή $F_{ελ(max)} = 60 \text{ N}$.

30. α. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι:

$$A_1 = d \quad \text{ή} \quad A_1 = 0,5 \text{ m.}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_1 \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$, ακριβώς πριν από την κρούση, το σώμα Σ_1 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει: $|v_1| = v_{\max}$ ή $|v_1| = \omega A_1$ ή $|v_1| = 5 \text{ m/s}$.

β. Θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα κάτω, η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v_2' του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

$$\text{ή} \quad v_2' = \left[2 \cdot \frac{4}{5}(-5) + \frac{1-4}{5}(+10) \right] \text{ m/s}$$

$$\text{ή} \quad v_2' = -14 \text{ m/s.}$$

Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2 εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2(\text{μετά})} - \vec{p}_{2(\text{πριν})} \quad \text{ή} \quad \text{αλγεβρικά:}$$

$$\Delta p_2 = m_2 v_2' - m_2 v_2 \quad \text{ή} \quad \Delta p_2 = -24 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\text{ή} \quad |\Delta p_2| = 24 \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$$

γ. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v_1' του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή} \quad v_1' = \left[\frac{2 \cdot 1}{5}(+10) + \frac{4-1}{5}(-5) \right] \text{ m/s}$$

ή $v_1' = +1 \text{ m/s}$ ή $|v_1'| = 1 \text{ m/s}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση είναι ίση με τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί πριν από την κρούση.

Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση. Επειδή το σώμα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει: $|v_1'| = \omega A_2$ ή $A_2 = 0,1 \text{ m}$.

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, το σώμα Σ_1 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος Σ_1 μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση: $a = -\omega^2 A_2 \sin(\omega t + \varphi_0)$

ή $a = -10\eta\mu(10t)$ (S.I.).

δ. Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ_1 γίνεται μέγιστο μετά την κρούση τις χρονικές στιγμές στις οποίες βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης. Έστω $\Delta\ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 . Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{ελ} = 0$

ή $m_1 g = k \Delta\ell$ ή $\Delta\ell = 0,1 \text{ m}$.

Τις χρονικές στιγμές μετά την κρούση στις οποίες το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης, η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας είναι:

$x_1 = +A_2$ ή $x_1 = +0,1 \text{ m}$.

Η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2} k (\Delta\ell + |x_1|)^2 \quad \text{ή} \quad U_{ελ} = 8 \text{ J}.$$

Τις χρονικές στιγμές μετά την κρούση στις οποίες το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης, η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας είναι:

$x_2 = -A_2$ ή $x_2 = -0,1 \text{ m}$.

Η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$U'_{ελ} = \frac{1}{2} k (\Delta\ell - |x_2|)^2 \quad \text{ή} \quad U'_{ελ} = 0.$$

31. α. Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την εκτόξευσή του μέχρι τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση, έχουμε: $\Delta K = \Sigma W$ ή $K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w_1}$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = m_1 g \eta \mu \varphi_s \quad \text{ή} \quad |v_1| = 10 \text{ m/s}.$$

β. Έστω $\bar{v}_1'$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\bar{v}_1'$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_1' = -2 \text{ m/s}.$$

Έστω s' το διάστημα που διανύει το σώμα Σ_1 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία μετά την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται στιγ-

μιαία, έχουμε: $\Delta K = \Sigma W$ ή $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1}$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -m_1 g h \mu \phi \sigma' \quad \text{ή } s' = 0,4 \text{ m.}$$

Συνεπώς, το σώμα Σ_1 ακινητοποιείται στιγμιαία μετά την κρούση σε ένα σημείο Γ του κεκλιμένου επιπέδου, το οποίο απέχει από το σημείο Α απόσταση ίση με: $d = s - s' \quad \text{ή } d = 6 \text{ m.}$

γ. Έστω $\bar{v}_2'$ η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\bar{v}_2'$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή } v_2' = +8 \text{ m/s.}$$

Επειδή το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m_2 \omega^2 \quad \text{ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$

ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$
ή $E = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + 0 \quad \text{ή } E = 96 \text{ J.}$

Η χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση: $K = E \sin^2(\omega t + \phi_0)$
ή $K = 96 \sin^2(10t) \text{ (S.I.)}$.

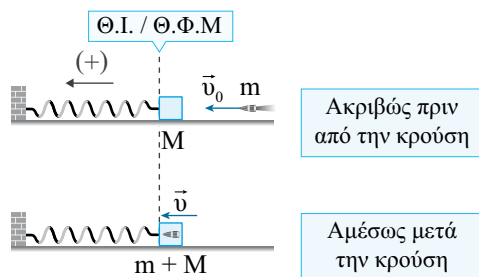
δ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F v \quad \text{ή } \frac{dK}{dt} = -D x v \quad (1). \text{ Σύμφωνα με}$$

τη σχέση (1), για να μηδενιστεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 πρέπει να ισχύει: $x = 0 \quad \text{ή } v = 0$.

Εφόσον το σώμα Σ_2 τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση, αρχίζει να ταλαντώνεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο με θετική ταχύτητα, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά την κρούση τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία ($v = 0$) για πρώτη φορά στη θέση με απομάκρυνση $x = +A$. Επομένως η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι: $t_1 = \frac{T}{4} \quad \text{ή } t_1 = \frac{(2\pi/\omega)}{4}$
ή $t_1 = 0,05\pi \text{ s.}$

32. α. Έστω $\bar{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα αριστερά, έχουμε: $\bar{p}_{\text{ολ. (πριν)}} = \bar{p}_{\text{ολ. (μετά)}}$
ή $m v_0 = (M + m) v \quad \text{ή } v = 10 \text{ m/s.}$



β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (M + m) \omega^2$

$$\text{ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{M + m}} \quad \text{ή } \omega = 20 \text{ rad/s.}$$

Έστω Α το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Επειδή αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει: $v = v_{\text{max}} \quad \text{ή } v = \omega A \quad \text{ή } A = 0,5 \text{ m.}$

γ. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ή} \quad x = 0,5\eta\mu(20t) \text{ (S.I.)}$$

δ. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{E}{K_{\beta\lambda(\text{αρχ})}} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2}DA^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = 10\%.$$

33. α. Έστω $\bar{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα αριστερά, έχουμε:

$$\bar{p}_{\text{ολ}(\pi\rho\iota\nu)} = \bar{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$$

$$\text{ή} \quad m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v \quad \text{ή} \quad v = 3 \text{ m/s.}$$

β. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{K_{l(\pi\rho\iota\nu)} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})}}{K_{l(\pi\rho\iota\nu)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = 75\%.$$

γ. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = (m_1 + m_2)\omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

$$\text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει:

$$v = v_{\max} \quad \text{ή} \quad v = \omega A \quad \text{ή} \quad A = 0,3 \text{ m.}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (1).$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης ($x = 0$). Συνεπώς, από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = 0$ προκύπτει:

$$0 = 0,3\eta\mu\varphi_0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_0 = 0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu 0 \quad (2).$$

Επειδή ισχύει $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, οι λύσεις της εξίσωσης (2) είναι: $\varphi_0 = 0$ και $\varphi_0 = \pi \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του συσσωματώματος μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση: $v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (3).$

Για $t = 0$ και $\varphi_0 = 0$, από τη σχέση (3) προκύπτει: $v = v_{\max} \sin 0 > 0$.

Για $t = 0$ και $\varphi_0 = \pi \text{ rad}$, από τη σχέση (3) προκύπτει: $v = v_{\max} \sin \pi < 0$.

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το συσσωμάτωμα κινείται κατά τη θετική φορά, δεκτή λύση είναι η $\varphi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F \quad \text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = -kx$$

$$\text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = -kA\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = -120\eta\mu(10t) \text{ (S.I.)}$$

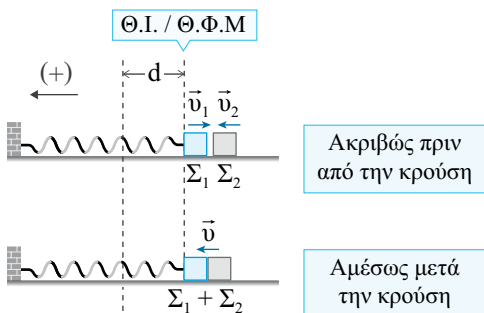
δ. Η μεταβολή της ορμής του συσσωματώματος από τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $\Delta \vec{p} = \vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ}$
 ή $\Delta p = -(m_1 + m_2)v - (m_1 + m_2)u$
 ή $\Delta p = -2(m_1 + m_2)u$ ή $\Delta p = -24 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
 ή $|\Delta p| = 24 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.

34. α. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι $A_1 = d = 0,4 \text{ m}$. Η γωνιακή συχνότητα ω_1 της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D_1 = m_1 \omega_1^2 \quad \text{ή} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 10 \text{ rad/s}.$$

Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ ακριβώς πριν από την κρούση το σώμα Σ_1 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει:

$$v_1 = v_{\max} \quad \text{ή} \quad v_1 = \omega_1 A_1 \quad \text{ή} \quad v_1 = 4 \text{ m/s}.$$



β. Έστω $\bar{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική φορά προς τα αριστερά, έχουμε: $\bar{p}_{ολ(πριν)} = \bar{p}_{ολ(μετά)}$

ή $m_2 v_2 - m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u$ ή $u = +2 \text{ m/s}$.
 Επομένως, το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου $|u| = 2 \text{ m/s}$.

γ. Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 + 0 \quad \text{ή} \quad E = 8 \text{ J}.$$

δ. Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.

$$\text{Είναι: } E = \frac{1}{2} D A_2^2 \quad \text{ή} \quad A_2 = 0,4 \text{ m}.$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = 0$. Η γωνιακή συχνότητα ω_2 της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = (m_1 + m_2)\omega_2^2 \quad \text{ή} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

ή $\omega_2 = 5 \text{ rad/s}$. Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του συσσωματώματος δίνεται από τη σχέση: $a = -\omega_2^2 A_2 \eta \mu(\omega_2 t + \varphi_0)$

$$\text{ή} \quad a = -10 \eta \mu(5t) \text{ (S.I.)}.$$

35. α. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2$$

$$\text{ή} \quad v_1 = + \sqrt{\frac{k(A^2 - x_1^2)}{m_1}} \quad \text{ή} \quad v_1 = +2 \text{ m/s}.$$

β. Έστω $\bar{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας $\bar{v}_1$, έχουμε: $\bar{p}_{ολ(πριν)} = \bar{p}_{ολ(μετά)}$ ή, αλγεβρικά, $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$ ή $v = -1 \text{ m/s}$.

Επομένως, το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου $|v| = 1 \text{ m/s}$. Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τη σχέση: $E_{απωλ} = K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή } E_{απωλ} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2$$

$$\text{ή } E_{απωλ} = 12 \text{ J.}$$

γ. Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2 εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\Delta \bar{p}_2 = \bar{p}_{2(μετά)} - \bar{p}_{2(πριν)}$

$$\text{ή, αλγεβρικά, } \Delta p_2 = m_2 v - m_2 v_2$$

$$\text{ή } \Delta p_2 = +6 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \quad \text{ή } |\Delta p_2| = 6 \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$$

δ. Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας E' της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E' = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k A'^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k x_1^2$$

$$\text{ή } A' = 0,4 \text{ m.}$$

36. α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του συσσωματώματος μετά την κρούση προκύπτει: $\omega = 10 \text{ rad/s}$, $\varphi_0 = 0$

$$\text{και } \alpha_{\max} = 20 \text{ m/s}^2.$$

Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.

$$\text{Είναι: } \alpha_{\max} = \omega^2 A_2 \quad \text{ή } A_2 = 0,2 \text{ m.}$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Επειδή το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει: $v = v_{\max}$ ή $v = \omega A_2$ ή $v = 2 \text{ m/s}$.

β. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση έχουμε:

$$\bar{p}_{ολ(πριν)} = \bar{p}_{ολ(μετά)} \quad \text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$$

ή $v_1 = 8 \text{ m/s}$. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{K_{l(πριν)} - K_{ολ(μετά)}}{K_{l(πριν)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 75\%.$$

γ. Η σταθερά k του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2) \omega^2$

$$\text{ή } k = (m_1 + m_2) \omega^2 \quad \text{ή } k = 400 \text{ N/m.}$$

Η γωνιακή συχνότητα ω_1 της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_1 \omega_1^2 \quad \text{ή } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{ή } \omega_1 = 20 \text{ rad/s.}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι $A_1 = d$.

Επειδή το σώμα Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει: $v_1 = v_{\max}$ ή $v_1 = \omega_1 A_1$ ή $v_1 = \omega_1 d$ ή $d = 0,4 \text{ m}$.

δ. Το χρονικό διάστημα κίνησης του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή στην οποία αφέθηκε ελεύθερο να ταλαντωθεί μέχρι τη χρονική

στιγμή $t = 0$, ακριβώς πριν από την κρούση,

$$\text{είναι: } \Delta t_1 = \frac{T_1}{4} \quad \text{ή} \quad \Delta t_1 = \frac{(2\pi/\omega_1)}{4}$$

$$\text{ή } \Delta t_1 = 0,025\pi \text{ s.}$$

Το χρονικό διάστημα κίνησης του συσσωματώματος από τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την κρούση είναι:

$$\Delta t_2 = \frac{T_2}{4} \quad \text{ή} \quad \Delta t_2 = \frac{(2\pi/\omega)}{4} \quad \text{ή} \quad \Delta t_2 = 0,05\pi \text{ s.}$$

Επομένως, το ζητούμενο χρονικό διάστημα είναι: $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ ή $\Delta t = 0,075\pi \text{ s.}$

37. α. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι $A_1 = d$. Η γωνιακή συχνότητα ω_1 της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_1\omega_1^2 \quad \text{ή} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 5 \text{ rad/s.}$$

Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Ισχύει:

$$v_1 = v_{\max} \quad \text{ή} \quad v_1 = \omega_1 A_1 \quad \text{ή} \quad v_1 = \omega_1 d \quad \text{ή} \quad v_1 = 2 \text{ m/s.}$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $x'Ox$ κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας $\bar{v}_1$, έχουμε:

$$\bar{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \bar{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})} \quad \text{ή} \quad m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή } v = 0,5 \text{ m/s.}$$

β. Η γωνιακή συχνότητα ω_2 της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = (m_1 + m_2)\omega_2^2 \quad \text{ή} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

ή $\omega_2 = 2,5 \text{ rad/s}$. Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Επειδή αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει:

$$v = v'_{\max} \quad \text{ή} \quad v = \omega_2 A_2 \quad \text{ή} \quad A_2 = 0,2 \text{ m.}$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κινούμενο με θετική ταχύτητα η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη Θ.Ι. δίνεται από τη σχέση: $x = A_2 \eta\mu(\omega_2 t + \phi_0)$ ή $x = 0,2\eta\mu(2,5t)$ (S.I.).

γ. Το χρονικό διάστημα κίνησης του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή στην οποία αφέθηκε ελεύθερο να κινηθεί μέχρι τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση είναι:

$$\Delta t = \frac{3T_1}{4} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{3}{4} \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{ή} \quad \Delta t = 0,3\pi \text{ s.}$$

Στο χρονικό διάστημα Δt το σώμα Σ_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση. Συνεπώς, ισχύει:

$$h = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 \quad \text{ή} \quad h = 4,5 \text{ m.}$$

δ. Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση.

$$\text{Είναι: } v_2 = g\Delta t \quad \text{ή} \quad v_2 = 3\pi \text{ m/s.}$$

Το ποσό θερμότητας που παράγεται κατά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

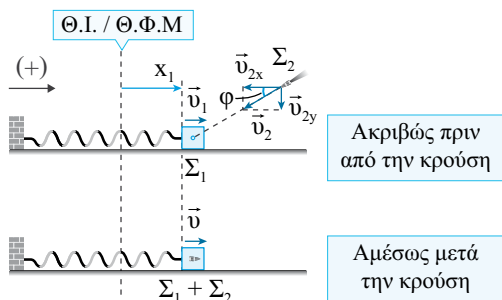
$$Q = K_{\text{ολ}(\text{πριν})} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})}$$

$$Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2$$

$$\text{ή } Q = 546 \text{ J.}$$

38. α. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \quad \text{ή } v_1 = +2 \text{ m/s.}$$



Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}_2$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες $\vec{v}_{2x}$ και $\vec{v}_{2y}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $x'Ox$ κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα δεξιά, έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ,x(πριν)} = \vec{p}_{ολ,x(μετά)}$$

$$\text{ή } m_1v_1 - m_2v_{2x} = (m_1 + m_2)v$$

$$\text{ή } m_1v_1 - m_2v_2\sin\phi = (m_1 + m_2)v$$

$$\text{ή } v = -1,5 \text{ m/s.}$$

Επομένως, το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου: $|v| = 1,5 \text{ m/s}$.

β. Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

$$\text{ή } A_2 = 0,1\sqrt{21} \text{ m.}$$

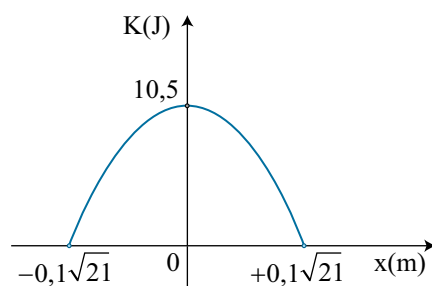
γ. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του συσσωματώματος, έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή } K = \frac{1}{2}kA_2^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{ή } K = 10,5 - 50x^2 \text{ (S.I.),}$$

$$\text{με } -0,1\sqrt{21} \text{ m} \leq x \leq +0,1\sqrt{21} \text{ m (1).}$$

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται η γραφική παράσταση της σχέσης (1).



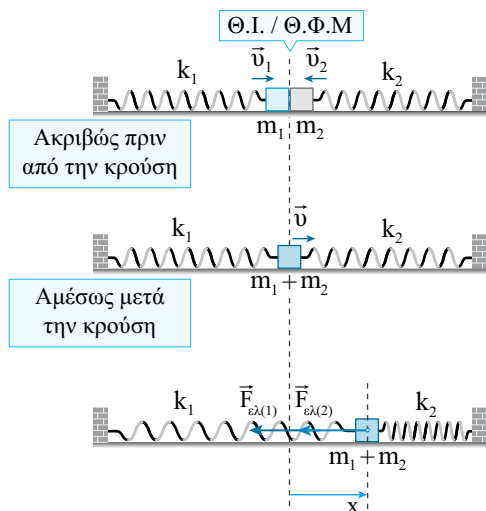
δ. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από

$$\text{τη σχέση: } \pi = \frac{K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)}}{K_{ολ(πριν)}} \cdot 100\% \quad \text{ή}$$

$$\pi = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 95,41\%.$$

39. α. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί ταλάντωση, με θέση ισορροπίας τη θέση όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος.



Έστω η τυχαία θέση της τροχιάς του συσσωματώματος που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Στη θέση αυτήν ισχύει:

$$\Sigma F = -F_{ελ(1)} - F_{ελ(2)} = -k_1 x - k_2 x$$

$$\text{ή } \Sigma F = -(k_1 + k_2)x \text{ ή } \Sigma F = -2kx.$$

Επομένως, το συσσωμάτωμα μετά την κρούση εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = 2k$.

β. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα m_1 πριν από την κρούση είναι $A_1 = \Delta \ell = 0,4 \text{ m}$. Η γωνιακή συχνότητα ω_1 της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα m_1 πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D_1 = m_1 \omega_1^2 \text{ ή } \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \text{ ή } \omega_1 = 5 \text{ rad/s.}$$

Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος m_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Επειδή τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση το σώμα m_1 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, ισχύει: $v_1 = v_{\max}$ ή $v_1 = \omega_1 A_1$ ή $v_1 = \omega_1 \Delta \ell$ ή $v_1 = 2 \text{ m/s}$.

Έστω $\bar{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα δεξιά, έχουμε: $\bar{p}_{ολ(πριν)} = \bar{p}_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) \bar{v} \text{ ή } \bar{v} = 1 \text{ m/s.}$$

Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2) \omega_2^2$

$$\text{ή } \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m_1 + m_2}} \text{ ή } \omega_2 = 5 \text{ rad/s.}$$

Επειδή αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει: $v = v'_{\max}$ ή $v = \omega_2 A_2$ ή $A_2 = 0,2 \text{ m}$.

γ. Έστω t_1 η χρονική στιγμή στην οποία το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την κρούση.

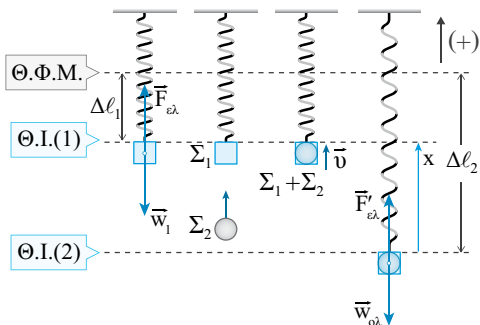
$$\text{Είναι: } t_1 = \frac{T_2}{4} \text{ ή } t_1 = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega_2} \text{ ή } t_1 = 0,1\pi \text{ s.}$$

$$\delta. \text{ Είναι: } \left| \frac{dp}{dt} \right|_{\max} = \Sigma F_{\max} \text{ ή } \left| \frac{dp}{dt} \right|_{\max} = D A_2$$

$$\text{ή } \left| \frac{dp}{dt} \right|_{\max} = 2k A_2 \text{ ή } \left| \frac{dp}{dt} \right|_{\max} = 20 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

40. α. Έστω $\bar{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε: $\bar{p}_{ολ(πριν)} = \bar{p}_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή } m v_0 = (M + m) \bar{v} \text{ ή } \bar{v} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s.}$$



β. Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{ελ} = 0$ ή $Mg = k\Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,05$ m.

Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας, έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{ολ} - F'_{ελ} = 0$ ή $(M+m)g = k\Delta\ell_2$ ή $\Delta\ell_2 = 0,1$ m.

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη Θ.Ι.(2) αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$ ή $|x| = 0,05$ m.

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του συσσωματώματος έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

$$\text{ή } kA^2 = (M+m)v^2 + kx^2 \quad \text{ή } A = 0,1 \text{ m.}$$

γ. Το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την κρούση στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης ($x = +A$). Επομένως, τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] είναι $x = +A$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυν-

σης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (1). Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = +A$, προκύπτει: $\eta\mu\varphi_0 = 1$

$$\text{ή } \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ή } \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},$$

με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ (2).

Επειδή είναι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ rad, από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$ προκύπτει $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad.

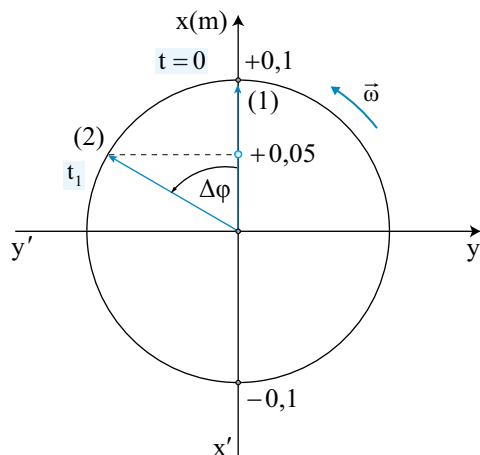
Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2)\omega^2$

$$\text{ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad \text{ή } \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Επομένως, η σχέση (1), γράφεται:

$$x = 0,1\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

δ. Η χρονική στιγμή t_1 στην οποία το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση όπου πραγματοποιήθηκε η κρούση για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι ίση με το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\varphi$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Από το σχήμα προκύπτει:

$$\text{συν}\Delta\varphi = \frac{0,05}{0,1} \quad \text{ή} \quad \text{συν}\Delta\varphi = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

$$\text{Είναι: } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\pi}{30} \text{ s}$$

$$\text{ή} \quad t_1 = \frac{\pi}{30} \text{ s.}$$

41. α. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}} \quad \text{ή} \quad m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή} \quad v = 1,5 \text{ m/s. Συνεπώς είναι:}$$

$$p_{\text{συσσωμ}} = (m_1 + m_2) v \quad \text{ή} \quad p_{\text{συσσωμ}} = 12 \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$$

β. Έστω $\Delta\ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_2 - F_{\text{ελ}} = 0$ ή $m_2 g = k \Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,1 \text{ m.}$

Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{\text{ολ}} - F'_{\text{ελ}} = 0$ ή $(m_1 + m_2)g = k \Delta\ell_2$ ή $\Delta\ell_2 = 0,4 \text{ m.}$

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη Θ.Ι.(2) αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$ ή $|x| = +0,3 \text{ m.}$ Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{ή} \quad E = 18 \text{ J.}$$

γ. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

$$\text{Είναι: } E = \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{ή} \quad A = 0,3\sqrt{2} \text{ m.}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1).$$

Η επιτάχυνση του συσσωματώματος γίνεται ίση με μηδέν τις χρονικές στιγμές στις οποίες το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)].

Επομένως, τη χρονική στιγμή $t = 0$ στην οποία η επιτάχυνση του συσσωματώματος γίνεται ίση με μηδέν για πρώτη φορά μετά την κρούση, η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι ίση με μηδέν ($x = 0$) και η ταχύτητά του είναι θετική ($v > 0$).

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = 0$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2)\omega^2$

$$\text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega = 5 \text{ rad/s.}$$

Η χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος δίνεται από τη σχέση: $K = E \sin^2(\omega t + \varphi_0)$ ή $K = 18 \sin^2(5t)$ (S.I.).

δ. Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το συσσωμάτωμα βρίσκεται για πρώτη φορά μετά την κρούση στη θέση με απομάκρυνση

$$x = +A. \text{ Είναι: } t_1 = \frac{T}{4} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{ή} \quad t_1 = 0,1\pi \text{ s.}$$

42. α. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1}$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = m_1 g h \quad \text{ή } v_1 = 2\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Επομένως, η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση, είναι:

$$K_{1(\text{πριν})} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \text{ή } K_{1(\text{πριν})} = 12 \text{ J.}$$

β. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα κάτω, έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$

$$\text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v \quad \text{ή } v = \sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } \pi = \frac{K_{1(\text{πριν})} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})}}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 50\%.$$

γ. Έστω $\Delta \ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή } w_2 - F_{\text{ελ}} = 0 \quad \text{ή } m_2 g = k \Delta \ell_1$$

$$\text{ή } \Delta \ell_1 = 0,2 \text{ m.}$$

Έστω $\Delta \ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή } w_{\text{ολ}} - F'_{\text{ελ}} = 0$

$$\text{ή } (m_1 + m_2) g = k \Delta \ell_2 \quad \text{ή } \Delta \ell_2 = 0,4 \text{ m.}$$

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x| = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1 \quad \text{ή } |x| = 0,2 \text{ m.}$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{ή } A = 0,4 \text{ m.}$$

δ. Η μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που ασκείται στο συσσωμάτωμα από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης είναι:

$$F_{\text{ελ}(\text{max})} = k(\Delta \ell_2 + A) \quad \text{ή } F_{\text{ελ}(\text{max})} = 80 \text{ N.}$$

Επειδή είναι $A = \Delta \ell_2$ η ελάχιστη τιμή της δύναμης που ασκείται στο συσσωμάτωμα από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης είναι $F_{\text{ελ}(\text{min})} = 0$ (στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος).

43. α. Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_2 πριν από την κρούση, από τη χρονική στιγμή στην οποία αφέθηκε ελεύθερο να κινηθεί μέχρι τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση, έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_2}$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - 0 = m_2 g h \quad \text{ή } v_2 = 8 \text{ m/s.}$$

β. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$

$$\text{ή } m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \quad \text{ή } v = 1 \text{ m/s.}$$

γ. Έστω $\Delta\ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας, έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{ελ} = 0$

$$\text{ή } m_1g = k\Delta\ell_1 \text{ ή } \Delta\ell_1 = 0,7 \text{ m.}$$

Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{ολ} - F'_{ελ} = 0$

$$\text{ή } (m_1 + m_2)g = k\Delta\ell_2 \text{ ή } \Delta\ell_2 = 0,8 \text{ m.}$$

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$ ή $|x| = 0,1 \text{ m}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

$$\text{ή } kA^2 = (m_1 + m_2)v^2 + kx^2 \text{ ή } A = 0,3 \text{ m.}$$

δ. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται μέγιστη τις χρονικές στιγμές στις οποίες το συσσωμάτωμα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης. Είναι:

$$U_{ελ(max)} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2 + A)^2 \text{ ή } U_{ελ(max)} = 60,5 \text{ J.}$$

44. α. Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_2 πριν από την κρούση, από τη χρονική στιγμή στην οποία αφέθηκε ελεύθερο να κινηθεί μέχρι τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση, έχουμε: $K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w_2}$

$$\text{ή } \frac{1}{2}m_2v_2^2 - 0 = m_2gh \text{ ή } v_2 = 2 \text{ m/s.}$$

β. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$
ή $m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$ ή $v = 1,5 \text{ m/s}$.

γ. Έστω $\Delta\ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{ελ} = 0$ ή $m_1g = k\Delta\ell_1$

$$\text{ή } \Delta\ell_1 = \frac{1}{30} \text{ m.}$$

Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{ολ} - F'_{ελ} = 0$

$$\text{ή } (m_1 + m_2)g = k\Delta\ell_2 \text{ ή } \Delta\ell_2 = \frac{4}{30} \text{ m.}$$

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$ ή $|x| = 0,1 \text{ m}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

$$\text{ή } kA^2 = (m_1 + m_2)v^2 + kx^2 \text{ ή } A = 0,2 \text{ m.}$$

Η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης που αποκτά το συσσωμάτωμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης, είναι: $a_{max} = \omega^2A$ ή $a_{max} = \frac{k}{m_1 + m_2}A$
ή $a_{max} = 15 \text{ m/s}^2$.

δ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του συσσωματώματος τις χρονικές στιγμές στις οποίες η κι-

νητική του ενέργεια γίνεται τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης ($K = 3U$). Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του συσσωματώματος έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad E = 4U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}DA^2 = 4\frac{1}{2}Dx_1^2$$

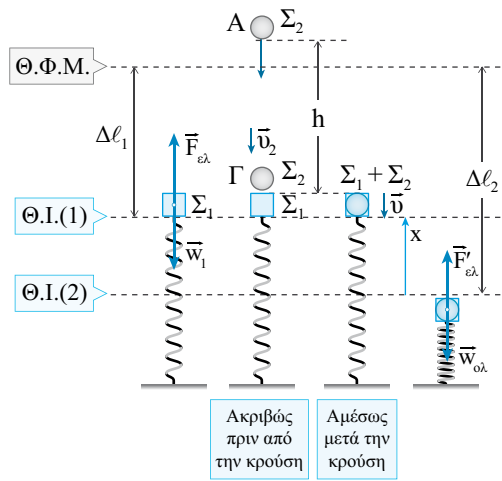
$$\text{ή} \quad x_1 = \pm \frac{A}{2} \quad \text{ή} \quad x_1 = \pm 0,1 \text{ m.}$$

Αν θεωρήσουμε ως θετική τη φορά προς τα πάνω, τότε τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση $x = +0,1 \text{ m}$ και κινείται με αρνητική ταχύτητα ($v < 0$). Επομένως, η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος γίνεται τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης για πρώτη φορά μετά την κρούση τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι $x_1 = -0,1 \text{ m}$ και η ταχύτητά του είναι αρνητική ($v < 0$). Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 το συσσωμάτωμα βρίσκεται σε μια θέση κάτω από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)]. Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο συσσωμάτωμα από το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $F_{ελ} = k(\Delta\ell_2 + |x_1|)$ ή $F_{ελ} = 70 \text{ N}$.

45. α. Οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα Σ_1 στην αρχική θέση ισορροπίας του [Θ.Ι.(1)] είναι το βάρος $\vec{w}_1$ και η δύναμη από το ελατήριο $\vec{F}_{ελ}$. Στη Θ.Ι.(1) ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{ελ} = 0$ ή $m_1g = F_{ελ}$ ή $m_1 = 1 \text{ kg}$. Η περίοδος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση είναι:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}} \quad \text{ή} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$$

$$\text{ή} \quad T = 0,2\pi\sqrt{2} \text{ s.}$$



β. Έστω $\Delta\ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(1). Ισχύει: $F_{ελ} = k\Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,1 \text{ m}$. Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Στη Θ.Ι.(2) ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{ολ} - F'_{ελ} = 0$ ή $(m_1 + m_2)g = k\Delta\ell_2$ ή $\Delta\ell_2 = 0,2 \text{ m}$.

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] είναι:

$$|x| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 \quad \text{ή} \quad |x| = 0,1 \text{ m.}$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

$$\text{ή} \quad kA^2 = (M + m)v^2 + kx^2 \quad \text{ή} \quad v = 2 \text{ m/s.}$$

γ. Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2

κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή } m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u \text{ ή } v_2 = 4 \text{ m/s.}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_2 πριν από την κρούση από τη θέση Α στη θέση Γ, που φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα, έχουμε:

$$K_\Gamma - K_A = W_{w_2} \text{ ή } \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - 0 = m_2 g h$$

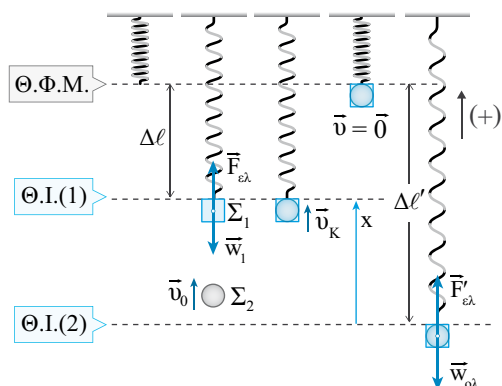
$$\text{ή } h = 0,8 \text{ m.}$$

δ. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται ίση με μηδέν τις χρονικές στιγμές στις οποίες το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές είναι:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = |\Sigma F| \text{ ή } \left| \frac{dp}{dt} \right| = D|x| \text{ ή } \left| \frac{dp}{dt} \right| = k\Delta\ell_2$$

$$\text{ή } \left| \frac{dp}{dt} \right| = 20 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

46. α.



Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(1)], ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{ελ} = 0$ ή $m_1 g = k\Delta\ell$ ή $k = 200 \text{ N/m}$.

Έστω $\Delta\ell'$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{ολ} - F'_{ελ} = 0$

$$\text{ή } (m_1 + m_2)g = k\Delta\ell' \text{ ή } \Delta\ell' = 0,1 \text{ m.}$$

Επειδή το συσσωμάτωμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης φτάνει μέχρι τη θέση στην οποία το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, η θέση αυτή είναι η πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης. Επομένως, το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι:

$$A = \Delta\ell' \text{ ή } A = 0,1 \text{ m.}$$

β. Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$|x| = \Delta\ell' - \Delta\ell \text{ ή } |x| = 0,05 \text{ m.}$$

Έστω v_k το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του συσσωματώματος έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{ή } v_k = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s.}$$

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα πάνω, έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \text{ ή } m_2 v_0 = (m_1 + m_2) v_k$$

$$\text{ή } v_0 = \sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση είναι:

$$K = \frac{1}{2} m v_0^2 \text{ ή } K = 1,5 \text{ J.}$$

γ. Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2 κατά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2(\text{μετά})} - \vec{p}_{2(\text{πριν})} \quad \text{ή} \quad \Delta \vec{p}_2 = m_2 v_K - m_2 v_0$$

$$\Delta p_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Επομένως, η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2 εξαιτίας της κρούσης έχει φορά προς τα πάνω και το μέτρο της είναι:

$$|\Delta p_2| = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

δ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη Θ.Ι.(2) τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία η επιτάχυνσή του είναι $a = +5 \text{ m/s}^2$.

$$\text{Είναι: } a = -\omega^2 x_1 \quad \text{ή} \quad a = -\frac{k}{m_1 + m_2} x_1$$

$$\text{ή } x_1 = -0,05 \text{ m}.$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι $x = +0,05 \text{ m}$ και η ταχύτητά του είναι θετική. Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση με απομάκρυνση x_1 για πρώτη φορά μετά την κρούση η ταχύτητά του είναι αρνητική. Έστω $\vec{v}_1$ η ταχύτητα του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του συσσωματώματος, έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_1^2 + \frac{1}{2} D x_1^2$$

$$\text{ή } v_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_1

$$\text{υπολογίζεται από τη σχέση: } \frac{dK}{dt} = \Sigma F v$$

$$\text{ή } \frac{dK}{dt} = -D x_1 v_1 \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -5\sqrt{3} \text{ J/s}.$$

47. α. Έστω T η περίοδος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Είναι: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}}$

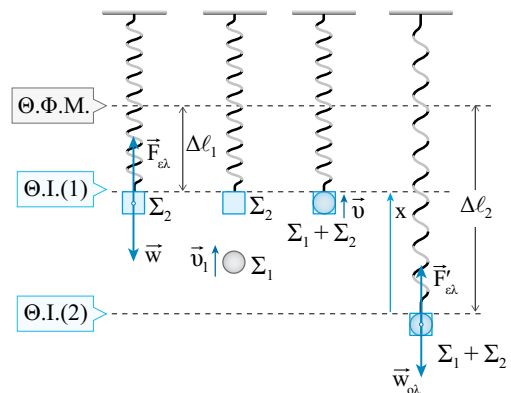
$$\text{ή } T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \quad \text{ή} \quad T = 0,4\pi \text{ s}.$$

Το χρονικό διάστημα Δt μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \quad \text{ή} \quad \Delta t = 0,2\pi \text{ s}.$$

β. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.

$$\text{Είναι: } E = \frac{1}{2} k A^2 \quad \text{ή} \quad A = 0,1\sqrt{2} \text{ m}.$$



Έστω $\Delta \ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_2 - F_{ελ} = 0 \quad \text{ή} \quad m_2 g = k \Delta \ell_1$$

$$\text{ή } \Delta \ell_1 = 0,3 \text{ m}.$$

Έστω $\Delta \ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_{ολ} - F'_{ελ} = 0$$

$$\text{ή } (m_1 + m_2)g = k \Delta \ell_2 \quad \text{ή} \quad \Delta \ell_2 = 0,4 \text{ m}.$$

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη Θ.Ι.(2) αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$ ή $|x| = 0,1 \text{ m}$.

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{ή } v = 0,5 \text{ m/s.}$$

γ. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα πάνω, έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}} \quad \text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v$$

$$\text{ή } v_1 = 2 \text{ m/s.}$$

Η απώλεια της μηχανική ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_{\text{απωλ}} = K_{\text{ολ(πριν)}} - K_{\text{ολ(μετά)}}$$

$$\text{ή } E_{\text{απωλ}} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

$$\text{ή } E_{\text{απωλ}} = 1,5 \text{ J.}$$

δ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος γίνεται ίση με τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης ($K = U$) για πρώτη φορά μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του συσσωματώματος έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή } E = 2U \quad \text{ή } \frac{1}{2}DA^2 = 2\frac{1}{2}Dx_1^2$$

$$\text{ή } x_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}A \quad \text{ή } x_1 = \pm 0,1 \text{ m.}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας

της ταλάντωσης είναι $x_1 = +0,1 \text{ m}$ και η ταχύτητά του είναι θετική. Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι $x_1 = +0,1 \text{ m}$ και η ταχύτητά του είναι αρνητική. Η ταχύτητα v' του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $K = U$ ή $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 = \frac{1}{2}Dx_1^2$

$$\text{ή } v' = -0,5 \text{ m/s.}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma Fv \quad \text{ή } \frac{dK}{dt} = -Dx_1 v' \quad \text{ή } \frac{dK}{dt} = +5 \text{ J/s.}$$

48. α. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση, από τη χρονική στιγμή στην οποία το εκτοξεύσαμε έως τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση, έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_1 v_0^2 = -m_1 gh$$

$$\text{ή } v_1 = \sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά προς τα πάνω, έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}}$

$$\text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v \quad \text{ή } v = 0,5\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

β. Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2

[Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_2 - F_{ελ} = 0 \quad \text{ή} \quad m_2 g = k \Delta \ell_1$$

$$\text{ή} \quad \Delta \ell_1 = 0,05 \text{ m.}$$

Έστω $\Delta \ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας, έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{ολ} - F'_{ελ} = 0$

$$\text{ή} \quad (m_1 + m_2)g = k \Delta \ell_2 \quad \text{ή} \quad \Delta \ell_2 = 0,1 \text{ m.}$$

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$|x| = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1 \quad \text{ή} \quad |x| = +0,05 \text{ m.}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

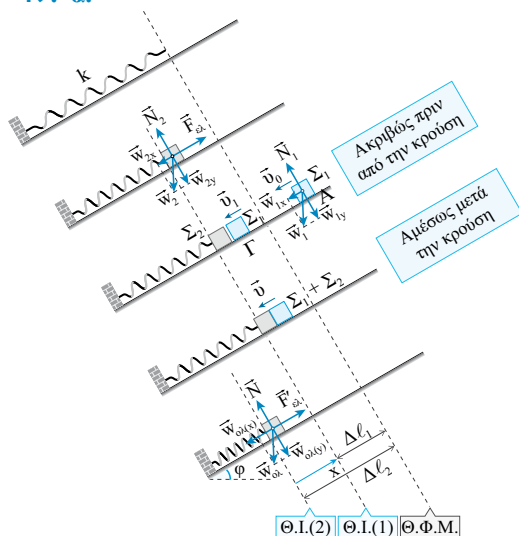
$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{ή} \quad A = 0,1 \text{ m.}$$

γ. Επειδή είναι $A = \Delta \ell_2$, η πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι η θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Επομένως, η ελάχιστη δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι: $U_{ελ(min)} = 0$ (στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος).

δ. Τις χρονικές στιγμές στις οποίες η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται ελάχιστη η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι $x = +A$. Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές είναι: $\frac{dp}{dt} = \Sigma F$ ή $\frac{dp}{dt} = -Dx$

$$\text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = -kA \quad \text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = -20 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

49. α.



Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση από τη θέση A στη θέση Γ , που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα, έχουμε:

$$K_\Gamma - K_A = W_{w_1} + W_{N_1}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = m_1 g \eta \mu \phi s + 0$$

$$\text{ή} \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2g\eta \mu \phi s} \quad \text{ή} \quad v_1 = 2\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

β. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Το ποσό θερμότητας που παράγεται εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q = K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)}$$

$$\text{ή} \quad Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \quad (1).$$

Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά της ταχύτητας $\bar{v}_1$, έχουμε: $\bar{p}_{ολ(πριν)} = \bar{p}_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v \quad \text{ή } v = \sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (1) προκύπτει: $Q = 12 \text{ J}$.

γ. Έστω $\Delta \ell_1$ η συσπίρωση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_{2x} - F_{ελ} = 0$ ή $m_2 g \eta \mu \phi = k \Delta \ell_1$
ή $\Delta \ell_1 = 0,4 \text{ m}$.

Έστω $\Delta \ell_2$ η συσπίρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_{ολ(x)} - F'_{ελ} = 0$
ή $(m_1 + m_2) g \eta \mu \phi = k \Delta \ell_2$ ή $\Delta \ell_2 = 0,8 \text{ m}$.

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] αμέσως μετά την κρούση, είναι: $|x| = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1$ ή $|x| = 0,4 \text{ m}$. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

ή $A = 0,8 \text{ m}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2) \omega^2$

$$\text{ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad \text{ή } \omega = 2,5 \text{ rad/s.}$$

Η μέγιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας του συσσωματώματος κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης είναι:

$$\left(\frac{dv}{dt} \right)_{\max} = \alpha_{\max} \quad \text{ή} \quad \left(\frac{dv}{dt} \right)_{\max} = \omega^2 A$$

$$\text{ή} \quad \left(\frac{dv}{dt} \right)_{\max} = 5 \text{ m/s}^2.$$

δ. Θεωρούμε μια τυχαία θέση της τροχιάς του συσσωματώματος με απομάκρυνση $x (x > 0)$.

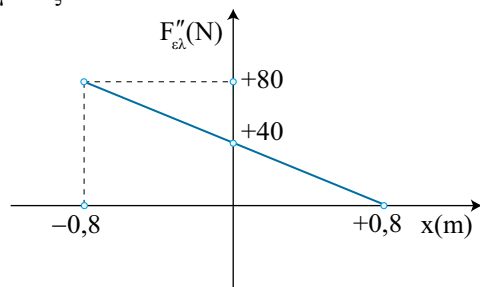
$$\text{Είναι: } \Sigma F = -Dx \quad \text{ή} \quad F''_{ελ} - w_{ολ(x)} = -kx$$

$$\text{ή} \quad F''_{ελ} = (m_1 + m_2) g \eta \mu \phi - kx$$

$$\text{ή} \quad F''_{ελ} = 40 - 50x \text{ (S.I.),}$$

$$\text{με } -0,8 \text{ m} \leq x \leq +0,8 \text{ m} \quad (2).$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης (2) απεικονίζεται στο διάγραμμα του επόμενου σχήματος.



50. α. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε: $K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w_1} + W_{N_1}$
ή $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -m_1 g \eta \mu \phi s + 0$
ή $v_1 = 2 \text{ m/s}$. Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση είναι:

$$K_{I(\text{πριν})} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \text{ή} \quad K_{I(\text{πριν})} = 8 \text{ J.}$$

β. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{ολ(\text{πριν})} = \vec{p}_{ολ(\text{μετά})}$
ή $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$ ή $v = 0,5 \text{ m/s}$.

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{K_{l(\text{πριν})} - K_{\text{ολ(μετά)}}}{K_{l(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 75\%.$$

γ. Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_{2x} - F_{ελ} = 0$ ή $m_2 g \eta \mu \phi = k \Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,6 \text{ m}$.

Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_{\text{ολ}(x)} - F'_{ελ} = 0$ ή $(m_1 + m_2)g \eta \mu \phi = k \Delta\ell_2$ ή $\Delta\ell_2 = 0,8 \text{ m}$.

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$|x| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 \text{ ή } |x| = 0,2 \text{ m}.$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{ή } A = 0,2\sqrt{2} \text{ m}.$$

Η γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης του συσσωματώματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = (m_1 + m_2)\omega^2 \text{ ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

$$\text{ή } \omega = 2,5 \text{ rad/s}.$$

Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας που αποκτά το συσσωμάτωμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης είναι: $v_{\max} = \omega A$ ή $v_{\max} = 0,5\sqrt{2} \text{ m/s}$.

δ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης τις χρονικές στιγμές στις οποίες η επιτάχυνσή του είναι $a = +1,25 \text{ m/s}^2$.

$$\text{Είναι: } a = -\omega^2 x_1 \text{ ή } x_1 = -0,2 \text{ m}.$$

Τις παραπάνω χρονικές στιγμές το συσσωμάτωμα βρίσκεται σε μια θέση κάτω από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] και η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη θέση αυτήν είναι: $U_{ελ} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2 + |x_1|)^2$ ή $U_{ελ} = 50 \text{ J}$.

51. α. Το σώμα Σ_1 μετά την κρούση κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα μέτρου v_1' εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Επομένως, ισχύει: $v_1' = \frac{s}{t_1}$ ή $v_1' = 1 \text{ m/s}$.

Έστω v_2' το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα αριστερά, έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}} \text{ ή } m_1v_1 = -m_1v_1' + m_2v_2' \text{ ή } v_2' = 3 \text{ m/s}.$$

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m_2\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$

$$\text{ή } \omega = 10 \text{ rad/s}.$$

Επειδή το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι με $\phi_0 = 0$. Έστω

Α το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Είναι: $v'_2 = v_{\max}$

$$\text{ή } v'_2 = \omega A \quad \text{ή } A = 0,3 \text{ m.}$$

Η χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 μετά την κρούση δίνεται από

$$\text{τη σχέση: } K = \frac{1}{2} m_2 \left[v_{\max} \sin(\omega t + \phi_0) \right]^2$$

$$\text{ή } K = \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή } K = 13,5 \sin^2(10t) \text{ (S.I.).}$$

γ. Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων ακριβώς πριν από την κρούση είναι: $K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ ή $K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = 32 \text{ J.}$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$K_{\text{ολ}(\text{μετά})} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad \text{ή } K_{\text{ολ}(\text{μετά})} = 14 \text{ J.}$$

Εφόσον ισχύει $K_{\text{ολ}(\text{πριν})} \neq K_{\text{ολ}(\text{μετά})}$,

η κρούση είναι ανελαστική.

δ. Έστω $\Delta \ell$ η παραμόρφωση του ελατηρίου τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο είναι $U_{\text{ελ}} = 3,375 \text{ J}$ για δεύτερη φορά μετά την κρούση.

$$\text{Είναι: } U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2 \quad \text{ή } \Delta \ell = 0,15 \text{ m.}$$

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας κινούμενο με θετική ταχύτητα, τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση όπου το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta \ell = 0,15 \text{ m}$ κινούμενο με αρνητική ταχύτητα.

Η απομάκρυνση του σώματος Σ_2 από τη Θ.Ι. τη χρονική στιγμή t_1 είναι $x = +0,15 \text{ m}$ (1). Έστω v η ταχύτητα του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας

της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{ή } v = -1,5\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή } dE = dK + dU$$

$$\text{ή } 0 = dK + dU \quad \text{ή } dK = -dU$$

$$\text{ή } \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} \quad \text{ή } \frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{\Sigma F}}{dt}$$

$$\text{ή } \frac{dU}{dt} = -\frac{\Sigma F dx}{dt} \quad \text{ή } \frac{dU}{dt} = -\Sigma F v$$

$$\text{ή } \frac{dU}{dt} = -(-Dx)v \quad \text{ή } \frac{dU}{dt} = kxv$$

$$\text{ή } \frac{dU}{dt} = -67,5\sqrt{3} \text{ J/s.}$$

52. α. Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το Σ_1 πριν από την κρούση.

$$\text{Είναι: } E = \frac{1}{2} k A_1^2 \quad \text{ή } A_1 = 0,4 \text{ m.}$$

Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας μετά την κρούση προκύπτει ότι η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση είναι $\omega_2 = 10 \text{ rad/s.}$

Η γωνιακή συχνότητα ω_1 της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι ίση με τη γωνιακή συχνότητα ω_2 της ταλάντωσης που εκτελεί μετά την κρούση.

$$\text{Επομένως, είναι: } \omega_1 = \omega_2 \quad \text{ή } \omega_1 = 10 \text{ rad/s.}$$

Επειδή η κρούση γίνεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, το μέτρο v_1 της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση είναι: $v_1 = v_{\max}$ ή $v_1 = \omega_1 A_1$ ή $v_1 = 4 \text{ m/s.}$

Από τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση είναι $A_2 = 0,2 \text{ m}$. Επειδή το σώμα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης το μέτρο v'_1 της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση είναι: $v'_1 = v_{\max}$ ή $v'_1 = \omega_2 A_2$ ή $v'_1 = 2 \text{ m/s}$.

Συνεπώς ισχύει:

$$\frac{K_{1(\pi\rho\nu)}}{K_{1(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})}} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1'^2}{\frac{1}{2}m_1v_1'^2} \quad \text{ή} \quad \frac{K_{1(\pi\rho\nu)}}{K_{1(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})}} = 4.$$

β. Επειδή η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση είναι $\phi_0 = 0$, το σώμα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου v'_1 . Έστω v'_2 η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα δεξιά, έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ}(\pi\rho\nu)} = \vec{p}_{\text{ολ}(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})}$ ή $m_2v_2 - m_1v_1 = m_1v'_1 + m_2v'_2$ (1).

Η μάζα m_1 του σώματος Σ_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m_1\omega_1^2$ ή $k = m_1\omega_1^2$ ή $m_1 = 4 \text{ kg}$. Με αντικατάσταση των τιμών στη σχέση (1) προκύπτει: $v'_2 = -4 \text{ m/s}$. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{\Delta K_2}{K_{2(\pi\rho\nu)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2}m_2v_2'^2 - \frac{1}{2}m_2v_2^2}{\frac{1}{2}m_2v_2^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \left[\left(\frac{v_2'}{v_2} \right)^2 - 1 \right] \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 300\%.$$

γ. Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων ακριβώς πριν από την κρούση

$$\text{είναι: } K_{\text{ολ}(\pi\rho\nu)} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$\text{ή} \quad K_{\text{ολ}(\pi\rho\nu)} = 40 \text{ J}.$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$K_{\text{ολ}(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

$$\text{ή} \quad K_{\text{ολ}(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} = 40 \text{ J}.$$

Εφόσον είναι $K_{\text{ολ}(\pi\rho\nu)} = K_{\text{ολ}(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})}$, η κρούση είναι ελαστική.

δ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη Θ.Ι. τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι $U = 8 \text{ J}$ για τρίτη φορά μετά την κρούση.

$$\text{Είναι: } U = \frac{1}{2}Dx^2 \quad \text{ή} \quad x = \pm \sqrt{\frac{2U}{k}}$$

$$\text{ή} \quad x = \pm 0,2 \text{ m} \quad \text{ή} \quad x = \pm A_2.$$

Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_1 βρίσκεται σε μία από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης για τρίτη φορά μετά την κρούση. Εφόσον το σώμα Σ_1 τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, βρίσκεται στη θέση ισορροπίας κινούμενο με θετική ταχύτητα, τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία βρίσκεται για τρίτη φορά σε ακραία θέση της ταλάντωσης μετά την κρούση η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας είναι $x = +0,2 \text{ m}$. Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_1 βρίσκεται δεξιά από τη θέση ισορροπίας σε απόσταση $|x| = 0,2 \text{ m}$ από αυτήν. Η χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$t_1 = \frac{5}{4}T_2 \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{5}{4} \frac{2\pi}{\omega_2} \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,25\pi \text{ s.}$$

Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_2 κινείται στο λείο οριζόντιο δάπεδο προς τα αριστερά με σταθερή ταχύτητα $\bar{v}'_2$, διανύοντας διάστημα s_2 . Είναι: $s_2 = |\bar{v}'_2|t_1$ ή $s_2 = \pi \text{ m}$ ή $s_2 = 3,14 \text{ m}$. Επομένως, η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $d = s_2 + |x|$ ή $d = 3,34 \text{ m}$.

53. α. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ πριν από την έκρηξη-διάσπαση, είναι:

$$D = m\omega_1^2 \quad \text{ή} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 5 \text{ rad/s.}$$

Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ πριν από την έκρηξη-διάσπαση. Είναι: $v_0 = \omega_1 A_1$ ή $A_1 = 0,8 \text{ m}$.

β. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί πριν από την έκρηξη-διάσπαση είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση:

$$x = A_1 \eta \mu(\omega_1 t + \phi_0) \quad \text{ή} \quad x = A_1 \eta \mu(\omega_1 t) \quad (1)$$

$$\text{ή} \quad x = 0,8 \eta \mu(5t) \text{ (S.I.)}$$

γ. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος Σ δίνεται από τη σχέση:

$$v = \omega_1 A_1 \sigma \nu \nu(\omega_1 t + \phi_0)$$

$$\text{ή} \quad v = 4 \sigma \nu \nu\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \text{ (S.I.)} \quad (2).$$

Έστω u η ταχύτητα του σώματος Σ τη χρονική στιγμή $t = T/6$.

Από τη σχέση (2) για $t = T/6$ προκύπτει:

$$v = 4 \sigma \nu \nu\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad v = 2 \text{ m/s.}$$

δ. Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = T/6$ υπολογίζεται από τη σχέση:

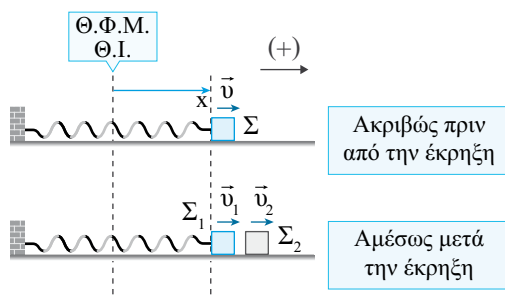
$$\Delta \bar{p} = \bar{p}_{\text{τελ}} - \bar{p}_{\text{αρχ}} \quad \text{ή} \quad \Delta p = mv - mv_0$$

$$\text{ή} \quad \Delta p = -8 \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$$

ε. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ από τη Θ.Ι. τη χρονική στιγμή $t = T/6$. Από τη σχέση (1) για $t = T/6$ προκύπτει:

$$x = A_1 \eta \mu\left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{6}\right) \quad \text{ή} \quad x = A_1 \eta \mu\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{ή} \quad x = +0,4\sqrt{3} \text{ m.}$$



Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την έκρηξη. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά τη διάρκεια της διάσπασης έχουμε: $\bar{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \bar{p}_{\text{ολ(μετά)}}$ ή $m v = m_1 v_1 + m_2 v_2$ ή $v_1 = 2 \text{ m/s}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη έχουμε: $E = K + U$ ή $E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} k x^2$ ή $E = 26 \text{ J}$.

54. α. Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του συστήματος σώμα – πουλί μηδενίζεται κάθε $T/2$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης

του συστήματος. Επομένως, ισχύει:

$$\frac{T}{2} = 0,5 \text{ s} \quad \text{ή} \quad T = 1 \text{ s}.$$

Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας του συστήματος σώμα – πουλί είναι $v_{\max} = 0,4\pi \text{ m/s}$. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος σώμα – πουλί. Είναι: $v_{\max} = \omega A$ ή $v_{\max} = \frac{2\pi}{T} A$ ή $A = 0,2 \text{ m}$.

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά το πέταγμα του πουλιού είναι: $\omega' = 2,5\pi \text{ rad/s}$. Η σταθερά k του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m_1 \omega'^2$ ή $k = m_1 \omega'^2$ ή $k = 90 \text{ N/m}$.

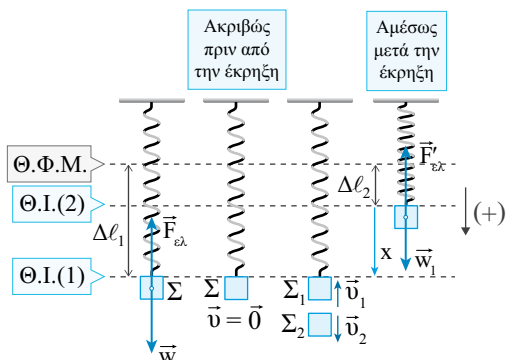
γ. Επειδή το πουλί πετά κατακόρυφα τη χρονική στιγμή στην οποία το σύστημα σώμα – πουλί διέρχεται από την ακραία θέση της ταλάντωσης, η ταχύτητα του συστήματος ακριβώς πριν από το πέταγμα του πουλιού είναι $v_1 = 0$. Έστω $\vec{v}$ η ταχύτητα του σώματος αμέσως μετά το πέταγμα του πουλιού. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα σώμα - πουλί στον άξονα $x'Ox$ προκύπτει: $\vec{p}_{\text{ολ},x(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ},x(\text{μετά})}$ ή $(m_1 + m_2)v_1 = m_1 v$ ή $v = 0$.

Επομένως, αμέσως μετά το πέταγμα του πουλιού το σώμα εξακολουθεί να βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσης. Επειδή η Θ.Ι. της ταλάντωσης δεν μεταβάλλεται μετά το πέταγμα του πουλιού, το πλάτος A' της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά το πέταγμα του πουλιού είναι: $A' = A$ ή $A' = 0,2 \text{ m}$.

Η μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά το πέταγμα του πουλιού υπολογίζεται από τη σχέση: $v'_{\max} = \omega' A'$ ή $v'_{\max} = 0,5\pi \text{ m/s}$.

δ. Η μάζα του πουλιού υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2)\omega^2$ ή $k = (m_1 + m_2)\omega^2$ ή $k = (m_1 + m_2)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ ή $m_2 = 0,81 \text{ kg}$.

55. α. Για τις μάζες m_1 και m_2 των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα ισχύει ότι: $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$.



Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την έκρηξη. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την έκρηξη, θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά προς τα κάτω, έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ},x(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ},x(\text{μετά})}$ ή $0 = m_2 v_2 - m_1 v_1$ ή $v_1 = \sqrt{3} \text{ m/s}$.

β. Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F_{\text{ελ}} = 0$ ή $Mg = k\Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,2 \text{ m}$. Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F'_{\text{ελ}} = 0$ ή $m_1 g = k\Delta\ell_2$ ή $\Delta\ell_2 = 0,1 \text{ m}$.

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] αμέσως μετά την έκρηξη είναι:

$$|x| = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2 \quad \text{ή} \quad |x| = 0,1 \text{ m}.$$

Έστω Α το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$\text{ή} \quad A = 0,2 \text{ m.}$$

γ. Η ενέργεια που εκλύθηκε από την έκρηξη του σώματος Σ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_{\text{εκλ.}} = K_{\text{ολ(μετά)}} - K_{\text{ολ(πριν)}}$$

$$\text{ή} \quad E_{\text{εκλ.}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - 0 \quad \text{ή} \quad E_{\text{εκλ.}} = 3 \text{ J.}$$

δ. Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα Σ_1 διέρχεται από τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος για πρώτη φορά μετά την έκρηξη, η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] είναι $x_1 = -\Delta\ell_2$ και η ταχύτητά του είναι αρνητική. Έστω $\bar{v}$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} D x_1^2$$

$$\text{ή} \quad k A^2 = m_1 v^2 + k (\Delta\ell_2)^2 \quad \text{ή} \quad v = -\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 , είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F v \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -D x_1 v$$

$$\text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -10\sqrt{3} \text{ J/s.}$$

56. α. Έστω T_2 η περίοδος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση. Το σώμα Σ_1 μετά την κρούση διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κάθε $T_2/2$.

$$\text{Είναι: } \frac{T_2}{2} = 0,1\pi \text{ s} \quad \text{ή} \quad T_2 = 0,2\pi \text{ s.}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση είναι:

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} \quad \text{ή} \quad \omega_2 = 10 \text{ rad/s.}$$

Η μάζα m_1 του σώματος Σ_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m_1\omega_2^2$ ή $k = m_1\omega_2^2$ ή $m_1 = 1 \text{ kg}$.

Η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης που αποκτά το σώμα Σ_1 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης που εκτελεί μετά την κρούση είναι $a_{\max} = 40 \text{ m/s}^2$.

Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση.

$$\text{Είναι: } a_{\max} = \omega_2^2 A_2 \quad \text{ή} \quad A_2 = 0,4 \text{ m.}$$

Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Το μέτρο της δύναμης επαναφοράς που δέχεται το σώμα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση: $|\Sigma F| = D|x|$ ή $|x| = \frac{\Sigma F}{k}$

$$\text{ή} \quad |x| = 0,2\sqrt{3} \text{ m.}$$

$$\text{ή} \quad |x| = 0,2\sqrt{3} \text{ m.}$$

Έστω $\bar{v}'_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} k A_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \bar{v}'_1{}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{ή} \quad |\bar{v}'_1| = 2 \text{ m/s.}$$

β. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ακριβώς πριν από την κρούση, η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας τη ταλάντωσης ($K = 3U$). Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad E = 3U + U$$

$$\text{ή} \quad E = 4U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} k A_1^2 = 4 \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{ή} \quad A_1 = 2|x| \quad \text{ή} \quad A_1 = 0,4\sqrt{3} \text{ m.}$$

γ. Το μέτρο της ταχύτητας $\bar{v}_1$ του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $K = 3U$ ή $\frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1^2 = 3 \frac{1}{2} k x^2$

$$\text{ή} \quad |\bar{v}_1| = 6 \text{ m/s.}$$

Επειδή είναι $m_1 < m_2$ και η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα $\bar{v}'_1$. Από τη σχέση που δίνει την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\bar{v}'_1$ του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση έχουμε:

$$\bar{v}'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \bar{v}_1 \quad \text{ή} \quad -2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} 6$$

$$\text{ή} \quad m_2 = 2m_1 \quad \text{ή} \quad m_2 = 2 \text{ kg.}$$

δ. Έστω $\bar{v}'_2$ η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\bar{v}'_2$ δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{v}'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \bar{v}_1 \quad \text{ή} \quad \bar{v}'_2 = +4 \text{ m/s.}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_1 διέρχεται από τη θέση όπου πραγματοποιήθηκε η κρούση

κινούμενο προς τα αριστερά. Από τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, έως τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_2 διανύει διάστημα s_2 πάνω στο λείο οριζόντιο δάπεδο κινούμενο προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα $\bar{v}'_2$. Επομένως, η απόσταση μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$d = s_2 \quad \text{ή} \quad d = |\bar{v}'_2| t_1 \quad \text{ή} \quad t_1 = 2\pi s.$$

Το ζητούμενο πλήθος N των πλήρων ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $N = \frac{t_1}{T_2}$

ή $N = 10$ πλήρεις ταλαντώσεις.

57. α. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι:

$A_1 = d$ ή $A_1 = 0,2 \text{ m}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_1 \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{ή} \quad \omega = 20 \text{ rad/s}.$$

Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση.

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$, ακριβώς πριν από την κρούση, το σώμα Σ_1 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, ισχύει:

$$v_1 = v_{\max} \quad \text{ή} \quad v_1 = \omega A \quad \text{ή} \quad v_1 = 4 \text{ m/s}.$$

β. Έστω v'_1 και v'_2 οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση. Θεωρώντας έως θετική τη φορά της ταχύτητας $\bar{v}_1$, έχουμε:

$$v'_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\text{ή} \quad v'_1 = \left[\frac{6}{4}(-4) + \frac{1-3}{4}(+4) \right] \text{ m/s}$$

ή $v'_1 = -8 \text{ m/s}$ και

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

$$\text{ή} \quad v'_2 = \left[\frac{2}{4}(+4) + \frac{2}{4}(-4) \right] \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad v'_2 = 0.$$

γ. Αμέσως μετά την κρούση το σώμα Σ_2 ακινητοποιείται, ενώ το σώμα Σ_1 συνεχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με την ίδια περίοδο T . Επομένως, τα δύο σώματα συγκρούονται και δεύτερη φορά τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα Σ_1 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης για πρώτη φορά μετά την κρούση. Συνεπώς, ισχύει:

$$t_1 = \frac{T}{2} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,05\pi \text{ s}.$$

δ. Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα Σ_1 συγκρούεται για δεύτερη φορά κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ_2 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης με ταχύτητα μέτρου $|\bar{v}'_1| = 8 \text{ m/s}$ κινούμενο προς τα δεξιά, ενώ το σώμα Σ_2 είναι ακίνητο. Έστω $\bar{v}_1''$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 αμέσως μετά τη δεύτερη κρούση. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\bar{v}_1''$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v'_1 \quad \text{ή} \quad v'_1 = -4 \text{ m/s}.$$

Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά τη δεύτερη κρούση με το σώμα Σ_2 . Είναι: $|\bar{v}'_1| = \omega A'$ ή $A' = 0,2 \text{ m}$. Η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας που αποθηκεύεται στο ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά τη δεύτερη κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $U_{\text{ελ(max)}} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell_{\max})^2$

$$\text{ή} \quad U_{\text{ελ(max)}} = \frac{1}{2} k A'^2 \quad \text{ή} \quad U_{\text{ελ(max)}} = 8 \text{ J}.$$

58. α. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι $A_1 = d = 0,5 \text{ m}$. Η γωνιακή συχνότητα και η περίοδος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι η ίδια με τη γωνιακή συχνότητα και την περίοδο της ταλάντωσης που εκτελεί μετά την κρούση. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 προκύπτει: $\omega = 20 \text{ rad/s}$.

Επειδή η κρούση πραγματοποιείται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, η αλγεβρική τιμή v_1 της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση είναι: $v_1 = -v_{\max}$

$$\text{ή } v_1 = -\omega A_1 \text{ ή } v_1 = -10 \text{ m/s.}$$

Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης προκύπτει: $A_2 = 0,2 \text{ m}$.

Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 προκύπτει ακόμη ότι η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση είναι $\phi_0 = 0$. Επομένως, το σώμα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κινούμενο με θετική ταχύτητα. Έστω v'_1 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Επειδή αμέσως μετά την κρούση το σώμα Σ_1 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κινούμενο με θετική ταχύτητα, είναι: $v'_1 = +v'_{\max}$

$$\text{ή } v'_1 = +\omega A_2 \text{ ή } v'_1 = +4 \text{ m/s.}$$

β. Η μάζα m_1 του σώματος Σ_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m_1 \omega^2$ ή $k = m_1 \omega^2$
ή $m_1 = 1 \text{ kg}$.

Επειδή είναι $m_1 = m_2$ και η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες κατά την κρούση. Έστω v_2 και v'_2 οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν και αμέσως μετά την κρούση, αντίστοιχα. Είναι: $v_2 = v'_1$

$$\text{ή } v_2 = +4 \text{ m/s και } v'_2 = v_1 \text{ ή } v'_2 = -10 \text{ m/s.}$$

Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2 εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2(\text{μετά})} - \vec{p}_{2(\text{πριν})} \text{ ή αλγεβρικά:}$$

$$\Delta p_2 = m_2 v'_2 - m_2 v_2 \text{ ή } \Delta p_2 = -14 \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$$

γ. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται μέγιστη στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης. Έστω t_1 η χρονική στιγμή στην οποία η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά μετά την κρούση. Είναι:

$$t_1 = \frac{T}{4} \text{ ή } t_1 = \frac{(2\pi/\omega)}{4} \text{ ή } t_1 = 0,025\pi \text{ s.}$$

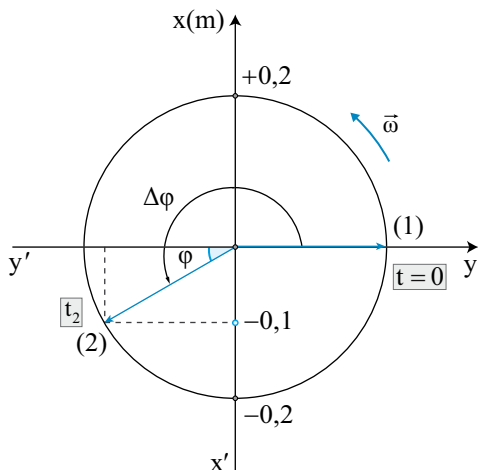
δ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη Θ.Ι. του τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία η κινητική του ενέργεια είναι $K = 6 \text{ J}$ για τρίτη φορά μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } U = E - K$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA_2^2 - K \text{ ή } x = \pm 0,1 \text{ m.}$$

Επειδή το σώμα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κινούμενο με θετική ταχύτητα, η κινητική του ενέργεια γίνεται ίση με 6 J για τρίτη φορά μετά την κρούση τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας είναι $x = -0,1 \text{ m}$ για πρώτη φορά μετά την κρούση.

Η χρονική στιγμή t_2 είναι ίση με το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\phi$ που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω ϕ η οξεία γωνία που σχηματίζει το περιστρεφόμενο διάνυσμα με τον άξονα $y'y$ τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι:

$$\eta\mu\phi = \frac{|x|}{A_2} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\phi = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \phi = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Η γωνία $\Delta\phi$ που διαγράφει το περιστρεφόμενο διάνυσμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$\Delta\phi = \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \Delta\phi = \frac{7\pi}{6} \text{ rad.}$$

$$\text{Ισχύει: } \omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega}$$

$$\text{ή} \quad \Delta t = \frac{7\pi}{120} \text{ s} \quad \text{ή} \quad t_2 = \frac{7\pi}{120} \text{ s.}$$

Μετά την κρούση το σώμα Σ_2 κινείται προς τα αριστερά με σταθερή ταχύτητα $\bar{v}_2'$.

Το διάστημα s_2 που διανύει το σώμα Σ_2 από τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, έως τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από

τη σχέση: $s_2 = |\bar{v}_2'| t_2$ ή $s_2 = 1,83 \text{ m}$. Η απόσταση d μεταξύ των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή t_2 είναι $d = s_2 - |x|$ ή $d = 1,73 \text{ m}$.

59. α. Τα πλάτη A_1 και A_2 των ταλαντώσεων που εκτελούν τα σώματα Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα πριν συγκρουστούν για πρώτη φορά είναι: $A_1 = d_1 = 0,3 \text{ m}$ και $A_2 = d_2 = 0,5 \text{ m}$.

Οι γωνιακές συχνότητες ω_1 και ω_2 των ταλαντώσεων που εκτελούν τα σώματα Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα πριν συγκρουστούν για πρώτη φορά υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$D_1 = m_1 \omega_1^2 \quad \text{ή} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 10 \text{ rad/s.}$$

$$D_2 = m_2 \omega_2^2 \quad \text{ή} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega_2 = 10 \text{ rad/s.}$$

Έστω t_1 η χρονική στιγμή στην οποία το σώμα Σ_1 διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας του.

$$\text{Είναι: } t_1 = \frac{T_1}{4} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,05\pi \text{ s.}$$

Έστω t_2 η χρονική στιγμή στην οποία το σώμα Σ_2 διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας του.

$$\text{Είναι: } t_2 = \frac{T_2}{4} \quad \text{ή} \quad t_2 = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega_2} \quad \text{ή} \quad t_2 = 0,05\pi \text{ s.}$$

Επειδή είναι $t_1 = t_2$, τα σώματα Σ_1 και Σ_2 συγκρούονται τη χρονική στιγμή στην οποία διέρχονται για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας τους.

Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Αν θεωρήσουμε ως θετική τη φορά προς τα δεξιά, τότε η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\bar{v}_1$ είναι: $v_1 = +v_{\max}$ ή $v_1 = +\omega_1 A_1$ ή $v_1 = +3 \text{ m/s}$ ή $|v_1| = 3 \text{ m/s}$.

Έστω $\bar{v}_2$ η ταχύτητα του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\bar{v}_2$ είναι: $v_2 = -v_{\max}$ ή $v_2 = -\omega_2 A_2$ ή $v_2 = -5 \text{ m/s}$ ή $|v_2| = 5 \text{ m/s}$.

β. Έστω v'_1 και v'_2 οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση. Επειδή τα σώματα έχουν ίσες μάζες και η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, ανταλλάσσουν ταχύτητες κατά την κρούση. Συνεπώς, ισχύει: $v'_2 = v_1$ ή $v'_2 = +3 \text{ m/s}$ ή $|v'_2| = 3 \text{ m/s}$ και $v'_1 = v_2$ ή $v'_1 = -5 \text{ m/s}$ ή $|v'_1| = 5 \text{ m/s}$.

γ. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 ταλαντώνονται μετά από κάθε κρούση με την ίδια γωνιακή συχνότητα ω και την ίδια περίοδο.

Επομένως, οι κρούσεις πραγματοποιούνται κάθε φορά που τα σώματα Σ_1 και Σ_2 διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους. Το χρονικό διάστημα Δt μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων ισούται με το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 από τη θέση ισορροπίας τους. Δηλαδή, είναι: $\Delta t = \frac{T}{2}$ ή $\Delta t = \frac{(2\pi/\omega)}{2}$ ή $\Delta t = 0,1\pi \text{ s}$.

δ. Επειδή όλες οι κρούσεις μεταξύ των δύο σωμάτων είναι κεντρικές και ελαστικές και τα σώματα έχουν ίσες μάζες, τα σώματα σε κάθε κρούση ανταλλάσσουν ταχύτητες. Επειδή όλες οι κρούσεις γίνονται στη θέση ισορροπίας των δύο σωμάτων, μετά από κάθε κρούση τα σώματα ανταλλάσσουν και πλάτη. Δηλαδή, μετά την πρώτη κρούση τα πλάτη των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι $A'_1 = 0,5 \text{ m}$ και $A'_2 = 0,3 \text{ m}$ αντίστοιχα, ενώ μετά τη δεύτερη κρούση είναι: $A_1 = 0,3 \text{ m}$ και $A_2 = 0,5 \text{ m}$ αντίστοιχα.

Επομένως, μετά την τέταρτη διαδοχική κρούση μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 τα πλάτη τους είναι: $A_1 = 0,3 \text{ m}$ και $A_2 = 0,5 \text{ m}$, αντίστοιχα.

60. α. Έστω $\bar{v}'_2$ η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\bar{v}'_2$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_2 = +2 \text{ m/s}.$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$ ή $E = \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 + 0$ ή $E = 6 \text{ J}$.

β. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_2 \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s}.$$

Η χρονική εξίσωση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$U = \frac{1}{2} D x^2 \quad \text{ή} \quad U = \frac{1}{2} k [A \eta \mu(\omega t + \phi_0)]^2$$

$$\text{ή} \quad U = E \eta \mu^2(\omega t + \phi_0) \quad \text{ή} \quad U = 6 \eta \mu^2(10t) \text{ (S.I.)}.$$

γ. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 μετά την κρούση. Είναι:

$$E = \frac{1}{2} D A^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2} k A^2 \quad \text{ή} \quad A = 0,2 \text{ m}.$$

Η απομάκρυνση x του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x = A\eta\mu(\omega t_1) \quad \text{ή} \quad x = 0,2\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) \text{ m}$$

$$\text{ή} \quad x = -0,2 \text{ m.}$$

Επομένως, το σώμα Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του. Έστω $\Delta\ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 . Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_2 - F_{ελ} = 0 \quad \text{ή} \quad m_2g = F_{ελ}$$

$$\text{ή} \quad m_2g = k\Delta\ell \quad \text{ή} \quad \Delta\ell = 0,1 \text{ m.}$$

Εφόσον είναι $|x| > \Delta\ell$, τη χρονική στιγμή t_1 το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά:

$$\Delta\ell' = |x| - \Delta\ell \quad \text{ή} \quad \Delta\ell' = 0,1 \text{ m.}$$

Ο ζητούμενος λόγος προκύπτει:

$$\frac{U_{(t_1)}}{U_{ελ(t_1)}} = \frac{\frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}k(\Delta\ell')^2} \quad \text{ή} \quad \frac{U_{(t_1)}}{U_{ελ(t_1)}} = 4.$$

δ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του είναι $\frac{dp}{dt} = +30 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$ για πρώτη φορά μετά την κρούση. Είναι:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F \quad \text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = -Dx_1 \quad \text{ή} \quad x_1 = -0,1 \text{ m} \quad (1).$$

Έστω v η ταχύτητα του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή t_2 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad E = \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \quad \text{ή} \quad v = \pm\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία το σώμα Σ_2 διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση με απομάκρυνση $x = -0,1 \text{ m}$, η ταχύτητά του είναι αρνητική. Επομένως, είναι: $v = -\sqrt{3} \text{ m/s} \quad (2).$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma Fv$$

$$\text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -kx_1v \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -30\sqrt{3} \text{ J/s.}$$

61. α. Έστω $\Delta\ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 . Ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_2 - F_{ελ} = 0 \quad \text{ή} \quad m_2g = k\Delta\ell$ ή $\Delta\ell = 0,1 \text{ m}$. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$U_{ελ(\max)} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell + A)^2 \quad (1), \text{ όπου } A \text{ το πλάτος της ταλάντωσης. Από τη σχέση (1) προκύπτει: } A = 0,1 \text{ m.}$$

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_2\omega_2^2 \quad \text{ή} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega_2 = 10 \text{ rad/s.}$$

Έστω v'_2 η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Επειδή το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη Θ.Ι. της ταλάντωσης, η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v'_2 είναι: $v'_2 = +v_{\max}$ ή $v'_2 = +\omega A$ ή $v'_2 = +1 \text{ m/s}$. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v'_2 δίνεται από τη σχέση:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 \quad \text{ή} \quad m_1 = 0,8 \text{ kg.}$$

γ. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση: $\pi = \frac{\Delta K_2}{K_{I(\text{πριν})}} \cdot 100\%$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2}m_2v_2'^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 55,55\%.$$

δ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (1).$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κινούμενο με θετική ταχύτητα. Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = 0$, προκύπτει: $0 = A\eta\mu\varphi_0$

$$\text{ή } \eta\mu\varphi_0 = 0 \text{ ή } \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu 0 \quad (2).$$

Επειδή ισχύει $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, οι λύσεις της εξίσωσης (2) είναι: $\varphi_0 = 0, \varphi_0 = \pi \text{ rad}$.

Η ταχύτητα του σώματος Σ_1 μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση: $v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \quad (3)$.

Από τη σχέση (3) για $t = 0$ και $\varphi_0 = 0$ προκύπτει: $v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu 0 > 0$.

Από τη σχέση (3) για $t = 0$ και $\varphi_0 = \pi \text{ rad}$ προκύπτει: $v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\pi < 0$.

Δεκτή λύση είναι η $\varphi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος Σ_2 μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = -\alpha_{\max} \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \text{ ή } \alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \\ \text{ή } \alpha = -10\eta\mu(10t) \text{ (S.I.)}$$

ε. Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα Σ_2 από το ελατήριο γίνεται μέγιστο τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα Σ_2 βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης ($x = +A$). Επομένως, η ζητούμενη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο γίνεται μέγιστο για δεύτερη φορά μετά την κρούση είναι: $t_1 = \frac{5T}{4}$ ή $t_1 = \frac{5 \cdot 2\pi}{4 \cdot \omega}$ ή $t_1 = 0,25\pi \text{ s}$.

62. α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας προκύπτει ότι η γωνιακή συχνό-

τητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση είναι $\omega = 5 \text{ rad/s}$. Επειδή, όπως προκύπτει από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 , η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = 0$, το σώμα Σ_2 τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη Θ.Ι. κινούμενο με θετική ταχύτητα. Επομένως, το σώμα Σ_2 ακινητοποιείται στιγμιαία για δεύτερη φορά μετά την κρούση τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία η απομάκρυνσή του είναι $x = -A$.

$$\text{Είναι: } t_2 = \frac{3T}{4} \text{ ή } t_2 = \frac{3 \cdot 2\pi}{4 \cdot \omega} \text{ ή } t_2 = 0,3\pi \text{ s.}$$

β. Έστω $\bar{v}'_2$ η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μηδενίζεται στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Εφόσον το σώμα Σ_2 ακινητοποιείται στιγμιαία στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος, το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = \Delta\ell$, όπου $\Delta\ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 . Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \text{ ή } w_2 - F_{\epsilon\lambda} = 0 \text{ ή } m_2 g = k\Delta\ell$$

$$\text{ή } m_2 g = m_2 \omega^2 \Delta\ell \text{ ή } \Delta\ell = \frac{g}{\omega^2} \text{ ή } \Delta\ell = 0,4 \text{ m.}$$

Επομένως, είναι: $A = 0,4 \text{ m}$.

Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\bar{v}'_2$ είναι: $v'_2 = +v_{\max}$ ή $v'_2 = +\omega A$ ή $v'_2 = +2 \text{ m/s}$

$$\text{ή } |\bar{v}'_2| = 2 \text{ m/s.}$$

Έστω $\bar{v}'_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Το σώμα Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 , κινείται προς τα πάνω επιβραδυνόμενο με επιβράδυνση μέτρου $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Συνεπώς, ισχύει: $h_2 = |v_1'| \Delta t - \frac{1}{2} g (\Delta t)^2$

$$\text{ή } h_2 = |v_1'| t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \text{ή } |v_1'| = 2 \text{ m/s.}$$

γ. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\tilde{v}_1'$ του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση είναι: $v_1' = -2 \text{ m/s}$. Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την κρούση δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1) \quad \text{και} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και

$$(2) \text{ έχουμε: } \frac{v_1'}{v_2'} = \frac{m_1 - m_2}{2m_1} \quad \text{ή} \quad -1 = \frac{m_1 - m_2}{2m_1}$$

$$\text{ή } \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3} \quad (3).$$

δ. Από τη σχέση (2), λόγω της σχέσης (3), προκύπτει $v_1 = 4 \text{ m/s}$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή στην οποία αφέθηκε ελεύθερο να κινηθεί μέχρι τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση, έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1}$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = m_1 g h_1 \quad \text{ή } h_1 = 0,8 \text{ m.}$$

ε. Από τη σχέση (3) προκύπτει: $m_2 = 3m_1$
ή $m_2 = 4 \text{ kg}$. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας τις χρονικές στιγμές στις οποίες η κινητική του ενέργεια είναι ίση με τα $3/4$ της ενέργειας ταλάντωσης $\left(K = \frac{3}{4} E \right)$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά

την κρούση έχουμε: $E = K + U$ ή $E = \frac{3}{4} E + U$

$$\text{ή } U = \frac{1}{4} E \quad \text{ή } \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} D A^2 \quad \text{ή } |x| = \frac{A}{2}$$

$$\text{ή } |x| = 0,2 \text{ m.}$$

Η σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D_2 = m_2 \omega^2 \quad \text{ή} \quad D_2 = 100 \text{ N/m.}$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_2 τις παραπάνω χρονικές στιγ-

μές υπολογίζεται από τη σχέση: $\left| \frac{dp}{dt} \right|_2 = |\Sigma F_2|$

$$\text{ή } \left| \frac{dp}{dt} \right|_2 = D_2 |x| \quad \text{ή} \quad \left| \frac{dp}{dt} \right|_2 = 20 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

63. α. Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$ ή $K = E - U$

$$\text{ή } K = \frac{1}{2} D A^2 - \frac{1}{2} D x^2 \quad (1).$$

Από τη σύγκριση της εξίσωσης (1) με τη δοθείσα εξίσωση προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{2} D = 100 \text{ N/m} \quad \text{ή} \quad D = 200 \text{ N/m}$$

$$\text{και } \frac{1}{2} D A^2 = 36 \text{ J} \quad \text{ή} \quad A = 0,6 \text{ m.}$$

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_2 \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Επειδή το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη Θ.Ι. κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$U = \frac{1}{2} D x^2 \quad \text{ή} \quad U = \frac{1}{2} D [A \eta \mu(\omega t + \phi_0)]^2$$

$$\text{ή } U = \frac{1}{2} D A^2 \eta \mu^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή } U = 36 \eta \mu^2(10t) \text{ (S.I.).}$$

γ. Έστω $\bar{v}_2$ η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\bar{v}_2$ είναι: $v_2' = +v_{\max}$ ή $v_2' = +\omega A$ ή $v_2' = +6 \text{ m/s}$ (1).

Έστω v_1 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή στην οποία αφέθηκε ελεύθερο να κινηθεί έως τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1}$ ή $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = m_1 g h_1$ ή $v_1 = +9 \text{ m/s}$ (2).

Επειδή η κρούση είναι κεντρική και ελαστική ισχύει: $v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$ ή λόγω των σχέσεων (1) και (2): $m_1 = 1 \text{ kg}$.

δ. Έστω $\Delta \ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ_2 . Από τη συνθήκη ισορροπίας, έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_2 - F_{\text{ελ}} = 0$ ή $m_2 g = k \Delta \ell$ ή $\Delta \ell = 0,1 \text{ m}$.

Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{\Sigma F_{\max}}{F_{\text{ελ}(\max)}} = \frac{DA}{k(\Delta \ell + A)} \quad \text{ή} \quad \frac{\Sigma F_{\max}}{F_{\text{ελ}(\max)}} = \frac{6}{7}.$$

64. α. Έστω $\Delta \ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ_2 . Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_2 - F_{\text{ελ}} = 0$ ή $m_2 g = k \Delta \ell$ (1). Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ_2 δίνεται από τη σχέση: $U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2$ (2).

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτει: $k = 100 \text{ N/m}$ και $\Delta \ell = 0,4 \text{ m}$. Η δύναμη που ασκείται στο σώμα Σ_2 από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης

μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα Σ_2 διέρχεται από τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Επειδή στη θέση αυτήν το σώμα Σ_2 ακινητοποιείται στιγμιαία, το πλάτος A της ταλάντωσης είναι: $A = \Delta \ell$ ή $A = 0,4 \text{ m}$.

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_2 \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega = 5 \text{ rad/s}.$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\varphi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα Σ_2 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$\Sigma F = -Dx \quad \text{ή} \quad \Sigma F = -kA \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = -40 \eta \mu(5t) \text{ (S.I.)}$$

γ. Έστω v_2' η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

$$\text{Είναι: } v_2' = +v_{\max} \quad \text{ή} \quad v_2' = +\omega A$$

$$\text{ή} \quad v_2' = +2 \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad |v_2'| = 2 \text{ m/s}.$$

Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Επειδή η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, ισχύει:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_1 = +5 \text{ m/s}.$$

Έστω v_1' η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Είναι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v_1' = -3 \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad |v_1'| = 3 \text{ m/s}.$$

δ. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή στην οποία εκτοξεύεται από

το σημείο Α μέχρι τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -m_1 g h$$

$$\text{ή} \quad |v_0| = 10 \text{ m/s} \quad (2).$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } \pi = \frac{\Delta K_2}{K_{\text{I(αρχ)}}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 16\%.$$

65. α. Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση. Είναι $A_1 = d = 0,3 \text{ m}$. Έστω $\Delta \ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ_1 .

$$\text{Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: } \Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή} \quad w_1 - F_{\text{ελ}} = 0 \quad \text{ή} \quad m_1 g = k \Delta \ell \quad \text{ή} \quad \Delta \ell = 0,1 \text{ m}.$$

Έστω v_1 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} D A_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} D x^2$$

$$\text{ή} \quad k A_1^2 = m_1 v_1^2 + k (\Delta \ell)^2$$

$$\text{ή} \quad v_1 = +2\sqrt{2} \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad |v_1| = 2\sqrt{2} \text{ m/s}.$$

β. Έστω v_1' και v_2' οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση. Επειδή η κρούση είναι κεντρική και ελαστική και τα σώματα έχουν ίσες μάζες, ανταλλάσσουν ταχύτητες κατά την κρούση. Είναι:

$$v_1' = v_2 \quad \text{ή} \quad v_1' = -\sqrt{3} \text{ m/s} \quad \text{και}$$

$$v_2' = v_1 \quad \text{ή} \quad v_2' = +2\sqrt{2} \text{ m/s}.$$

γ. Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} k A_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2$$

$$\text{ή} \quad A_2 = 0,2 \text{ m}.$$

δ. Η δύναμη που ασκείται στο σώμα Σ_1 από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης που εκτελεί μετά την κρούση μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές στις οποίες το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος.

Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία η δύναμη που ασκείται στο σώμα Σ_1 από το ελατήριο μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά την κρούση το σώμα Σ_1 βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $x = +\Delta \ell = +0,1 \text{ m}$ του κινούμενου με ταχύτητα: $v = -v_1' = +\sqrt{3} \text{ m/s}$. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος

$$\Sigma_1 \text{ τη χρονική στιγμή } t_1 \text{ είναι: } \frac{dK}{dt} = \Sigma F v$$

$$\text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -D x v \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -10\sqrt{3} \text{ J/s}.$$

66. α. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_2 \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s}.$$

Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 πριν από την κρούση.

$$\text{Είναι: } v_0 = v_{\text{max}} \quad \text{ή} \quad v_0 = \omega A_1 \quad \text{ή} \quad A_1 = 0,2 \text{ m}.$$

β. Το σώμα Σ_2 ακινητοποιείται στιγμιαία για τέταρτη φορά μετά την χρονική στιγμή στην οποία το εκτοξεύσαμε στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης. Συνεπώς, η ταχύτητα του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση εί-

ναι $v_2 = 0$ και η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσής του από τη Θ.Ι. είναι: $|x| = A_1$ ή $|x| = 0,2 \text{ m}$. Έστω v'_2 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

Αν θεωρήσουμε ως θετική τη φορά της ταχύτητας $\bar{v}_1$ του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση, έχουμε: $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$

$$\text{ή } v'_2 = +2 \text{ m/s} \quad \text{ή } |v'_2| = 2 \text{ m/s.}$$

γ. Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Επειδή η θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του δεν μεταβάλλεται μετά την κρούση, τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι $|x| = 0,2 \text{ m}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} k A_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{ή } A_2 = 0,2\sqrt{2} \text{ m.}$$

δ. Έστω $\Delta \ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ_2 . Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_2 - F_{ελ} = 0$ ή $m_2 g = k \Delta \ell$ ή $\Delta \ell = 0,1 \text{ m}$.

Έστω $\Delta \ell'$ η παραμόρφωση του ελατηρίου τις χρονικές στιγμές μετά την κρούση στις οποίες το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα Σ_2 από το ελατήριο είναι $F_{ελ} = 40 \text{ N}$.

$$\text{Είναι: } F_{ελ} = k \Delta \ell' \quad \text{ή} \quad \Delta \ell' = 0,1 \text{ m.}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Έστω ότι το ελατήριο τις παραπάνω χρονικές στιγμές είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta \ell'$. Επειδή είναι $\Delta \ell' = \Delta \ell$, το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας ($x = 0$) και το

μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του είναι: $\left| \frac{dp}{dt} \right| = \Sigma F$ ή $\left| \frac{dp}{dt} \right| = D|x|$ ή $\left| \frac{dp}{dt} \right| = 0$.

2η περίπτωση: Έστω ότι το ελατήριο τις παραπάνω χρονικές στιγμές είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta \ell'$. Στην περίπτωση αυτή η απόλυτη τιμή της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας είναι: $|x| = \Delta \ell + \Delta \ell'$ ή $|x| = 0,2 \text{ m}$. Τότε, το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_2 είναι:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = |\Sigma F| \quad \text{ή} \quad \left| \frac{dp}{dt} \right| = D|x| \quad \text{ή} \quad \left| \frac{dp}{dt} \right| = 80 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

67. α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 πριν από την κρούση είναι $A_1 = 0,3 \text{ m}$ και η γωνιακή της συχνότητα είναι $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Επιπλέον, η μάζα m_2 του σώματος Σ_2 προκύπτει: $D = m_2 \omega^2$ ή $m_2 = \frac{k}{\omega^2} = 2 \text{ kg}$.

Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή $t = 0,2\pi \text{ s}$, ακριβώς πριν από την κρούση. Από τη δοθείσα εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 για $t = 0,2\pi \text{ s}$ προκύπτει: $x = 0,3\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$ ή $x = +0,3 \text{ m}$.

Επομένως, το σώμα Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης. Η ταχύτητα του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση είναι $v_2 = 0$.

β. Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0,2\pi \text{ s}$ το σώμα Σ_2 βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης, το διάστημα που διανύει το σώμα Σ_1 από τη χρονική

στιγμή που αφέθηκε ελεύθερο μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 0,2\pi$ s, ακριβώς πριν από την κρούση, είναι: $s = h + A_1$ ή $s = 1,8$ m.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή στην οποία αφέθηκε ελεύθερο μέχρι τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση, έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1}$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = m_1 g s \quad \text{ή } |v_1| = 6 \text{ m/s.}$$

γ. Έστω $\bar{v}_2'$ η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Η απομάκρυνση του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αμέσως μετά την κρούση είναι $x = +0,3$ m, ενώ το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση είναι $A_2 = 0,5$ m. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k A_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{ή } |v_2'| = 4 \text{ m/s.}$$

δ. Εφόσον η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\bar{v}_2'$ δίνεται από τη σχέση: $v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$

$$\text{ή } 4 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} 6 \quad \text{ή } m_2 = 2m_1 \quad \text{ή } m_1 = 1 \text{ kg.}$$

Έστω $\bar{v}_1'$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\bar{v}_1'$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή } v_1' = -2 \text{ m/s.}$$

Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\Delta \bar{p}_1 = \bar{p}_{1(\text{μετά})} - \bar{p}_{1(\text{πριν})}$ ή, αλγεβρικά:

$$\Delta p_1 = m_1 v_1' - m_1 v_1 \quad \text{ή } \Delta p_1 = -8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\text{ή } |\Delta p_1| = 8 \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$$

ε. Έστω $\Delta \ell'$ η παραμόρφωση του ελατηρίου τις χρονικές στιγμές στις οποίες η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σε αυτό είναι: $U_{\text{ελ}} = 16 \text{ J}$.

$$\text{Είναι: } U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell')^2 \quad \text{ή } \Delta \ell' = 0,4 \text{ m.}$$

Έστω $\Delta \ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 . Από τη συνθήκη ισορροπίας, έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή } w_2 - F_{\text{ελ}} = 0 \quad \text{ή } m_2 g = k \Delta \ell \quad \text{ή } \Delta \ell = 0,1 \text{ m.}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Έστω ότι το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta \ell'$. Επειδή είναι $\Delta \ell' > \Delta \ell$, το σώμα βρίσκεται σε μία θέση με απομάκρυνση x κάτω από τη θέση ισορροπίας για την οποία ισχύει: $|x| = \Delta \ell' - \Delta \ell$ ή $|x| = 0,3$ m. Επομένως, το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας του σώματος Σ_2 είναι:

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = |\alpha| \quad \text{ή} \quad \left| \frac{dv}{dt} \right| = \omega^2 |x| \quad \text{ή} \quad \left| \frac{dv}{dt} \right| = 30 \text{ m/s}^2.$$

2η περίπτωση: Έστω ότι το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta \ell'$. Σε αυτήν την περίπτωση το σώμα Σ_2 βρίσκεται σε μία θέση με απομάκρυνση x' πάνω από τη θέση ισορροπίας για την οποία ισχύει: $|x'| = \Delta \ell' + \Delta \ell$

ή $|x'| = 0,5$ m. Επομένως, το σώμα βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του και το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητάς του είναι: $\left| \frac{dv}{dt} \right| = |\alpha|$ ή $\left| \frac{dv}{dt} \right| = \omega^2 |x'|$

$$\text{ή } \left| \frac{dv}{dt} \right| = 50 \text{ m/s}^2.$$

68. α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση είναι $A = 0,2$ m και

η γωνιακή της συχνότητα είναι $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 προκύπτει ακόμη ότι η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Εφόσον η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι ίση με μηδέν, το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας κινούμενο με θετική ταχύτητα. Έστω v'_2 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Είναι: $v'_2 = +v_{\max}$ ή $v'_2 = +\omega A$ ή $v'_2 = +2 \text{ m/s}$ ή $|v'_2| = 2 \text{ m/s}$. Έστω v'_1 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Εφόσον τα σώματα Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την κρούση αποκτούν αντίθετες ταχύτητες, ισχύει: $v'_1 = -v'_2$ ή $v'_1 = -2 \text{ m/s}$ ή $|v'_1| = 2 \text{ m/s}$.

β. Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την κρούση δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1) \quad \text{και} \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1)

$$\text{και (2) προκύπτει: } \frac{v'_1}{v'_2} = \frac{m_1 - m_2}{2m_1}$$

$$\text{ή } -1 = \frac{m_1 - m_2}{2m_1} \quad \text{ή} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3} \quad (3).$$

γ. Από τη σχέση (3) προκύπτει: $m_2 = 3m_1$. Από τη σχέση (2) για $m_2 = 3m_1$ προκύπτει:

$v_1 = +4 \text{ m/s}$. Για να υπολογίσουμε το μέτρο v_0 της αρχικής ταχύτητας του σώματος Σ_1 εφαρμόζουμε το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση από τη χρονική στιγμή στην οποία το εκτοξεύσαμε από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου μέχρι τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση. Είναι: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1}$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -m_1 g \eta \mu \phi \quad \text{ή} \quad v_0 = 5 \text{ m/s}.$$

δ. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από

$$\text{τη σχέση: } \pi = \frac{\Delta K_2}{K_{1(\text{αρχ})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 48\%.$$

69. α. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή που αφέθηκε ελεύθερο να κινηθεί στο κεκλιμένο επίπεδο μέχρι τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_2}$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - 0 = m_2 g \eta \mu \phi \quad s$$

$$\text{ή } |v_2| = \sqrt{2g\eta\mu\phi \quad s} \quad \text{ή} \quad |v_2| = 0,5\pi \text{ m/s}.$$

β. Έστω α το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα Σ_2 κατά τη διάρκεια της κίνησής του στο κεκλιμένο επίπεδο πριν από την κρούση. Είναι: $\Sigma F_x = m_2 \alpha$ ή $w_{2x} = m_2 \alpha$ ή $m_2 g \eta \mu \phi = m_2 \alpha$ ή $\alpha = 5 \text{ m/s}^2$. Έστω Δt το χρονικό διάστημα κίνησης του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή στην οποία αφέθηκε ελεύθερο να κινηθεί μέχρι τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση.

$$\text{Είναι: } s = \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2 \quad \text{ή} \quad \Delta t = 0,1\pi \text{ s}.$$

Το σώμα Σ_1 στο χρονικό διάστημα Δt εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση κινούμενο απευθείας από την κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης στη θέση ισορροπίας.

Επομένως, ισχύει: $\Delta t = \frac{T}{4} \quad (1)$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1

πριν από την κρούση. Από τη σχέση (1) προκύπτει: $T = 4\Delta t$ ή $T = 0,4\pi$ s.

γ. Επειδή τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν ίσες μάζες και η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, ανταλλάσσουν ταχύτητες κατά την κρούση. Έστω v'_1 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Αν θεωρήσουμε ως θετική τη φορά της ταχύτητας $\bar{v}_2$ του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση, ισχύει: $v'_1 = v_2$ ή $v'_1 = +0,5\pi$ m/s.

Η περίοδος T' της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση είναι ίση με την περίοδο της ταλάντωσης που εκτελεί πριν από την κρούση. Επομένως, ισχύει:

$T' = T = 0,4\pi$ s. Εφόσον το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη Θ.Ι. της ταλάντωσης, το πλάτος A' της ταλάντωσης που εκτελεί μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $|v'_1| = \omega' A'$ ή $|v'_1| = \frac{2\pi}{T'} A'$

ή $A' = 0,1\pi$ m.

δ. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, το σώμα Σ_1 βρίσκεται στη Θ.Ι. της ταλάντωσης κινούμενο με θετική ταχύτητα. Επομένως, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$x = A'\eta\mu(\omega't + \phi_0) \quad \text{ή} \quad x = A'\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T'} + \phi_0\right)$$

ή $x = 0,1\pi\eta\mu(5t)$ (S.I.).

ε. Έστω $\bar{v}'_2$ η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, μέχρι τη χρονική

στιγμή στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία, έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_2}$

$$\text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = -m_2 g \eta \mu \phi_s' \quad \text{ή} \quad |v_2'| = 1 \text{ m/s}$$

Εφόσον τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες κατά την κρούση, ισχύει: $v_1 = v_2'$

ή $v_1 = -1$ m/s ή $|v_1| = 1$ m/s. Το πλάτος A της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$|v_1| = v_{\text{max}} \quad \text{ή} \quad |v_1| = \frac{2\pi}{T} A \quad \text{ή} \quad A = 0,2 \text{ m.}$$

70. α. Το συσσωμάτωμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη Θ.Ι. της ταλάντωσης. Έστω T_2 η περίοδος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0,3\pi$ s το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία για δεύτερη φορά μετά την κρούση, ισχύει: $t = \frac{3T_2}{4}$ ή $T_2 = 0,4\pi$ s.

Επομένως, το χρονικό διάστημα Δt μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι: $\Delta t = \frac{T_2}{2}$ ή $\Delta t = 0,2\pi$ s.

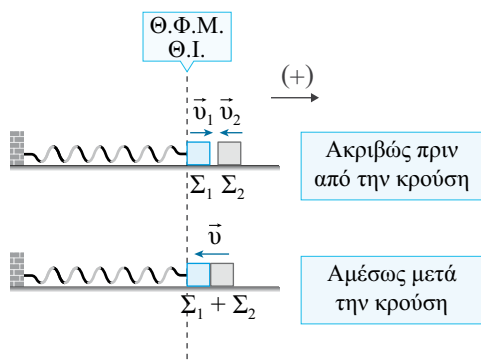
β. Εφόσον το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία για δεύτερη φορά μετά την κρούση στη θέση όπου το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell$, το πλάτος A_2 της ταλάντωσης που εκτελεί μετά την κρούση είναι: $A_2 = \Delta\ell$ ή $A_2 = 0,1$ m. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Είναι: $v = v_{\text{max}}$ ή $v = \frac{2\pi}{T_2} A_2$ ή $v = 0,5$ m/s.

γ. Η μάζα m_2 του σώματος Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}} \quad \text{ή} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$$

$$\text{ή } m_2 = 6 \text{ kg.}$$

Εφόσον το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία για δεύτερη φορά μετά την κρούση στη θέση όπου το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell$, τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση κινείται προς τα αριστερά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση.



Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα δεξιά, έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$$

$$\text{ή } m_1 v_1 - m_2 v_2 = -(m_1 + m_2) v \quad \text{ή } v_1 = 4 \text{ m/s.}$$

Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1(μετά)} - \vec{p}_{1(πριν)} \quad \text{ή} \quad \Delta p_1 = -m_1 v - m_1 v_1$$

$$\text{ή } \Delta p_1 = -9 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \quad \text{ή} \quad |\Delta p_1| = 9 \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$$

δ. Έστω ω_1 η γωνιακή ταχύτητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την

$$\text{κρούση. Είναι: } D = m_1 \omega_1^2 \quad \text{ή} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$$

$$\text{ή } \omega_1 = 10 \text{ rad/s.}$$

Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση. Είναι: $v_1 = v_{\max(πριν)} \quad \text{ή} \quad v_1 = \omega_1 A_1 \quad \text{ή} \quad A_1 = 0,4 \text{ m.}$

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k A_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + \frac{1}{2} k d^2 \quad \text{ή } v_0 = 2\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

71. α. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι $A_1 = d$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_1 \omega_1^2 \quad \text{ή} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 20 \text{ rad/s.}$$

Έστω v_1 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Αν θεωρήσουμε ως θετική τη φορά προς τα δεξιά, ισχύει: $v_1 = v_{\max} \quad \text{ή} \quad v_1 = +\omega_1 A_1$

$$\text{ή } v_1 = +10 \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad |v_1| = 10 \text{ m/s.}$$

β. Έστω v_2 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφόσον οι ταχύτητες των δύο σωμάτων ακριβώς πριν από την κρούση είναι αντίθετες, ισχύει: $v_2 = -v_1 \quad \text{ή} \quad v_2 = -10 \text{ m/s.}$

Έστω v η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \quad \text{ή αλγεβρικά:}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \quad \text{ή} \quad v = -5 \text{ m/s.}$$

Επομένως, το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη Θ.Ι. της ταλάντωσης κινούμενο προς τα αριστερά με ταχύτητα

μέτρου $|v| = 5 \text{ m/s}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = (m_1 + m_2)\omega_2^2 \quad \text{ή} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

ή $\omega_2 = 10 \text{ rad/s}$. Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Είναι:

$$|v| = v'_{\max} \quad \text{ή} \quad |v| = \omega_2 A_2 \quad \text{ή} \quad A_2 = 0,5 \text{ m.}$$

γ. Έστω Δt_1 το χρονικό διάστημα κίνησης του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ στην οποία αφέθηκε ελεύθερο να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Είναι:

$$\Delta t_1 = \frac{3}{4}T_1 \quad \text{ή} \quad \Delta t_1 = \frac{3}{4}\frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{ή} \quad t_1 - 0 = 0,075\pi \text{ s}$$

$$\text{ή} \quad t_1 = 0,075 \pi \text{ s.}$$

Έστω Δt_2 το χρονικό διάστημα κίνησης του συσσωματώματος από τη χρονική στιγμή t_1 , αμέσως μετά την κρούση, μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία για δεύτερη φορά μετά την κρούση. Είναι:

$$\Delta t_2 = \frac{3}{4}T_2 \quad \text{ή} \quad \Delta t_2 = \frac{3}{4}\frac{2\pi}{\omega_2} \quad \text{ή} \quad t_2 - t_1 = \frac{3}{4}\frac{2\pi}{\omega_2}$$

$$\text{ή} \quad t_2 = 0,225\pi \text{ s.}$$

δ. Έστω x η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης τις χρονικές στιγμές στις οποίες η κινητική του ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί μετά την κρούση ($K = 3U$). Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του συσσωματώματος έχουμε: $E = K + U$ ή $E = 3U + U$ ή $E = 4U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}kA_2^2 = 4\frac{1}{2}kx^2 \quad \text{ή} \quad x = \pm \frac{A_2}{2} \quad \text{ή} \quad |x| = 0,25 \text{ m.}$$

Τις παραπάνω χρονικές στιγμές το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_1

$$\text{υπολογίζεται από τη σχέση:} \quad \left| \frac{dp}{dt} \right|_{\Sigma_1} = |-D_1 x|$$

$$\text{ή} \quad \left| \frac{dp}{dt} \right|_{\Sigma_1} = m_1 \omega_2^2 |x| \quad \text{ή} \quad \left| \frac{dp}{dt} \right|_{\Sigma_1} = 25 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

72. α. Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση. Τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση στην οποία το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ_1 γίνεται μέγιστο για δεύτερη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσης του, το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην ακραία θέση της τροχιάς του όπου το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά A_1 . Επομένως, η ταχύτητα του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση είναι $v_1 = 0$. Έστω $\bar{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα αριστερά, έχουμε:

$$\bar{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \bar{p}_{\text{ολ(μετά)}} \quad \text{ή} \quad m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \bar{v}$$

$$\text{ή} \quad \bar{v} = 1,5 \text{ m/s.}$$

Το ποσό θερμότητας που εκλύεται στο περιβάλλον εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τη σχέση: $Q = K_{\text{ολ(πριν)}} - K_{\text{ολ(μετά)}}$

$$\text{ή} \quad Q = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \bar{v}^2 \quad \text{ή} \quad Q = 1,5 \text{ J.}$$

β. Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Για τις ενέργειες E_1 και E_2 των ταλαντώσεων που εκτελούν το σώμα Σ_1 και το συσσωμάτωμα πριν και μετά την κρούση αντίστοιχα,

$$\text{ισχύει: } E_2 = 2E_1 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kA_2^2 = 2\frac{1}{2}kA_1^2$$

$$\text{ή} \quad A_2 = \sqrt{2}A_1.$$

Τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι $|x| = A_1$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D A_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} D x^2$$

$$\text{ή} \quad k A_2^2 = (m_1 + m_2) v^2 + k A_1^2$$

$$\text{ή} \quad 2k A_1^2 = (m_1 + m_2) v^2 + k A_1^2$$

$$\text{ή} \quad A_1 = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} v \quad \text{ή} \quad A_1 = 0,3 \text{ m.}$$

Επομένως, το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι:

$$A_2 = \sqrt{2} A_1 \quad \text{ή} \quad A_2 = 0,3\sqrt{2} \text{ m.}$$

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F v \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -D x v \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -45 \text{ J/s.}$$

δ. Το μέτρο της αρχικής ταχύτητας v_0 του σώματος Σ_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_0 = v_{\max} \quad \text{ή} \quad v_0 = \omega A_1 \quad \text{ή} \quad v_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} A_1$$

$$\text{ή} \quad v_0 = 3 \text{ m/s.}$$

Η ζητούμενη μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}} \quad \text{ή} \quad \Delta p_1 = m_1 v - (-m_1 v_0)$$

$$\text{ή} \quad \Delta p_1 = +4,5 \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$$

73. α. Έστω x η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αμέσως μετά την κρούση.

$$\text{Είναι: } \alpha = -\omega^2 x \quad \text{ή} \quad x = +0,2\sqrt{3} \text{ m.}$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{ή} \quad v = -\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2} (A^2 - x^2)}$$

$$\text{ή} \quad v = -\omega \sqrt{A^2 - x^2} \quad \text{ή} \quad v = -1 \text{ m/s.}$$

β. Η σταθερά του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2) \omega^2$

$$\text{ή} \quad k = (m_1 + m_2) \omega^2 \quad \text{ή} \quad k = 400 \text{ N/m.}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F v \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -D x v \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -k x v$$

$$\text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = +80\sqrt{3} \text{ J/s.}$$

γ. Τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση ισχύει: $U = 3K$ ή $K = \frac{U}{3}$ (1).

Επειδή η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι η ίδια με τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση, η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση είναι $x = +0,2\sqrt{3} \text{ m}$. Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από

την κρούση έχουμε: $E = K + U$ ή $E = \frac{U}{3} + U$

$$\text{ή} \quad E = \frac{4U}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} k A_1^2 = \frac{4}{3} \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{ή} \quad A_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} |x| \quad \text{ή} \quad A_1 = 0,4 \text{ m.}$$

δ. Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\text{ή } \frac{1}{2} kx^2 = 3 \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \text{ή } v_1 = + \sqrt{\frac{k}{3m_1}} |x|$$

$$\text{ή } v_1 = +2 \text{ m/s.}$$

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας $\bar{v}_1$, έχουμε:

$$\bar{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \bar{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})} \quad \text{ή} \quad \text{αλγεβρικά}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \quad \text{ή} \quad v_2 = -2 \text{ m/s.}$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } \pi = \frac{K_{\text{ολ}(\text{πριν})} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})}}{K_{\text{ολ}(\text{πριν})}} \cdot 100\% \quad \text{ή}$$

$$\pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = 75\%.$$

74. α. Έστω $\bar{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Εφόσον το ποσοστό (π) απώλειας της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων εξαιτίας της πλαστικής κρούσης είναι το μέγιστο δυνατό, ισχύει: $\pi = 100\%$

$$\text{ή } \frac{K_{\text{ολ}(\text{πριν})} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})}}{K_{\text{ολ}(\text{πριν})}} \cdot 100\% = 100\%$$

$$\text{ή } K_{\text{ολ}(\text{μετά})} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = 0 \quad \text{ή} \quad v = 0.$$

Επομένως, τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα βρίσκεται στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσης που εκτελεί μετά την κρούση. Έστω T_2 η περίοδος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Επειδή τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,15\pi \text{ s}$ το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας για δεύτερη φορά μετά την κρούση, ισχύει:

$$t_1 = \frac{3}{4} T_2 \quad \text{ή} \quad T_2 = 0,2\pi \text{ s.} \quad \text{Η σταθερά } k \text{ του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση:}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}} \quad \text{ή} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$$

$$\text{ή } k = 400 \text{ N/m.}$$

β. Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση. Το διάστημα s που διανύει το συσσωμάτωμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση έως τη χρονική στιγμή t_1 ισούται με: $s = 3A_2$ ή $A_2 = 0,3 \text{ m}$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του είναι $x = +A_2$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$x = A_2 \eta \mu(\omega_2 t + \phi_0) \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = +A_2$ προκύπτει: $\eta \mu \phi_0 = 1$ ή $\eta \mu \phi_0 = \eta \mu \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad (2).$

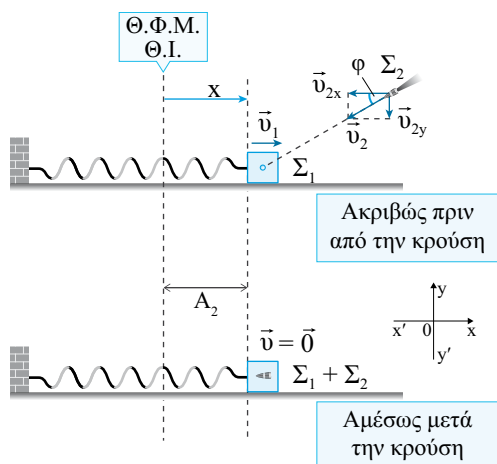
Επειδή είναι $0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$, η λύση της εξίσωσης (2) είναι η: $\phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση είναι: $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$ ή $\omega_2 = 10 \text{ rad/s}$. Η χρονική

εξίσωση της ταχύτητας του συσσωματώματος δίνεται από τη σχέση: $v = \omega_2 A_2 \sigma \nu \nu(\omega_2 t + \phi_0)$

$$\text{ή } v = 3 \sigma \nu \nu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{S.I.}).$$

γ. Αναλύουμε την ταχύτητα $\bar{v}_2$ του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες $\bar{v}_{2x}$ και $\bar{v}_{2y}$, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $x'Ox$ κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα δεξιά, έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ,x(πριν)} = \vec{p}_{ολ,x(μετά)}$$

$$\text{ή } m_1 v_1 - m_2 v_{2x} = 0 \quad \text{ή } m_1 v_1 = m_2 v_2 \sin \varphi$$

$$\text{ή } v_1 = 8 \text{ m/s.}$$

Η ορμή του σώματος Σ_1 μεταβάλλεται εξαιτίας της κρούσης μόνο στον άξονα $x'Ox$.

Συνεπώς, ισχύει: $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1x(μετά)} - \vec{p}_{1x(πριν)}$

$$\text{ή } \Delta p_1 = 0 - m_1 v_1 \quad \text{ή } \Delta p_1 = -8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\text{ή } |\Delta p_1| = 8 \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$$

Η ορμή του σώματος Σ_2 εξαιτίας της κρούσης μεταβάλλεται και στους δύο άξονες $x'Ox$ και $y'Oy$. Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2 στον άξονα $x'Ox$ εξαιτίας της κρούσης είναι:

$$\Delta \vec{p}_{2(x)} = \vec{p}_{2x(μετά)} - \vec{p}_{2x(πριν)}$$

$$\text{ή } \Delta \vec{p}_{2(x)} = 0 - (-m_2 v_{2x}) \quad \text{ή } \Delta p_{2x} = +m_2 v_2 \sin \varphi$$

$$\text{ή } \Delta p_{2x} = +8 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \quad \text{ή } |\Delta p_{2(x)}| = 8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2 στον άξονα $y'Oy$ εξαιτίας της κρούσης είναι: $\Delta \vec{p}_{2(y)} = \vec{p}_{2y(μετά)} - \vec{p}_{2y(πριν)}$ ή θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα κάτω:

$$\Delta p_{2(y)} = 0 - m_2 v_{2y} \quad \text{ή } \Delta p_{2(y)} = -m_2 v_2 \sin \varphi$$

$$\text{ή } \Delta p_{2(y)} = -8\sqrt{3} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\text{ή } |\Delta p_{2(y)}| = 8\sqrt{3} \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_2 εξαιτίας της κρούσης είναι:

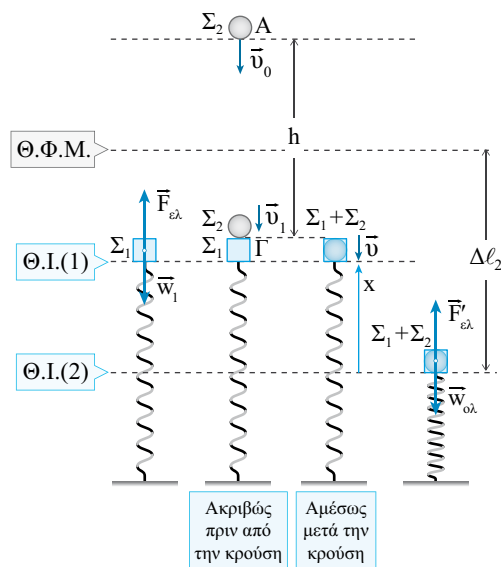
$$|\Delta p_2| = \sqrt{\Delta p_{2(x)}^2 + \Delta p_{2(y)}^2} \quad \text{ή } |\Delta p_2| = 16 \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$$

δ. Η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t = 0$, ακριβώς πριν από την κρούση, είναι $x = +A_2$. Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} k A_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{ή } k A_1^2 = m_1 v_1^2 + k A_2^2 \quad \text{ή } A_1 = 0,5 \text{ m.}$$

75. α. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση.



Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_2 πριν από την κρούση μεταξύ των θέσεων Α και Γ, που φαίνονται στο προηγούμενο σχήμα, έχουμε:

$$K_{\Gamma} - K_A = W_{w_2} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$$

$$\text{ή} \quad v_1 = 4\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα κάτω, έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή} \quad mv_1 = (M + m)v \quad \text{ή} \quad v = \sqrt{3} \text{ m/s.}$$

β. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από

$$\text{τη σχέση: } \pi = \frac{Q_{\kappa\rho}}{E_{\mu\eta\chi(αρχ)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}(M + m)v^2}{mgh + \frac{1}{2}mv_0^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = 75\%.$$

γ. Έστω $\Delta\ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_1 - F_{ελ} = 0 \quad \text{ή} \quad Mg = k\Delta\ell_1$$

$$\text{ή} \quad \Delta\ell_1 = \frac{Mg}{k} \quad (1).$$

Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_{ολ} - F'_{ελ} = 0$

$$\text{ή} \quad (M + m)g = k\Delta\ell_2 \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_2 = \frac{(M + m)g}{k} \quad (2).$$

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αμέσως μετά την κρούση υπολογίζε-

ται από τη σχέση: $|x| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$ ή, λόγω των σχέσεων (1) και (2):

$$|x| = \frac{mg}{k} \quad \text{ή} \quad |x| = \frac{40}{k} \quad (\text{S.I.}) \quad (3).$$

Έστω Α το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}(M + m)v^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

$$\text{ή} \quad kA^2 = (M + m)v^2 + kx^2 \quad (4).$$

Η μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που ασκείται στο συσσωμάτωμα από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $F_{ελ(max)} = k(\Delta\ell_2 + A)$

$$\text{ή} \quad F_{ελ(max)} = k\Delta\ell_2 + kA \quad \text{ή} \quad \text{λόγω της σχέσης (2):}$$

$$F_{ελ(max)} = (M + m)g + kA$$

$$\text{ή} \quad A = \frac{F_{ελ(max)} - (M + m)g}{k}$$

$$\text{ή} \quad A = \frac{80}{k} \quad (\text{S.I.}) \quad (5).$$

Από τη σχέση (4), λόγω των σχέσεων (3) και (5), προκύπτει στο (S.I.):

$$\frac{6400}{k} = 48 + \frac{1600}{k} \quad \text{ή} \quad k = 100 \text{ N/m.}$$

δ. Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά την κρούση στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης. Επομένως, τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι $x = +A$. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι $x = +A$, η αρχι-

κή φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = (\pi/2)$ rad. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = (m_1 + m_2)\omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

ή $\omega = 2,5$ rad/s. Από τη σχέση (5) για

$k = 100$ N/m προκύπτει $A = 0,8$ m.

Επομένως, η χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο συσσωμάτωμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $\Sigma F = -Dx$ ή $\Sigma F = -kA\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = -80\eta\mu\left(2,5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

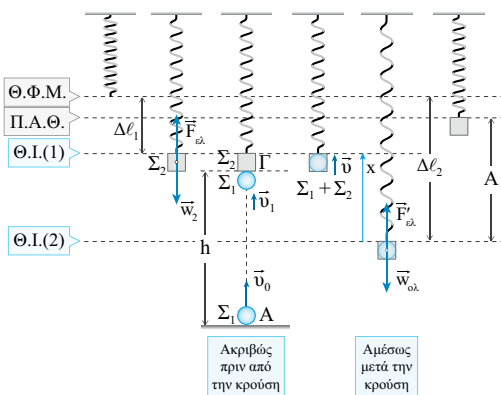
ε. Από τη σχέση (2) προκύπτει: $\Delta\ell_2 = 1,6$ m. Εφόσον είναι $A < \Delta\ell_2$, το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο συσσωμάτωμα από το ελατήριο γίνεται ελάχιστο τις χρονικές στιγμές στις οποίες βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης. Έστω t_1 η χρονική στιγμή στην οποία το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο συσσωμάτωμα από το ελατήριο γίνεται ελάχιστο για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$. Είναι:

$$t_1 = \frac{T}{2} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,4\pi \text{ s.}$$

76. α. Επειδή η ελάχιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας που αποθηκεύεται στο ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι $U_{\epsilon\lambda} = 2 \text{ J} \neq 0$, το συσσωμάτωμα μετά την κρούση δεν φτάνει μέχρι τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος (θέση όπου μηδενίζεται η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου). Επομένως, η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο γίνεται ελάχιστη στην πάνω ακραία θέση

της ταλάντωσης. Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση [Θ.Ι.(2)].

Είναι: $U_{\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2 - A)^2$ (1) όπου A το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.



Στη Θ.Ι. (2) ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{\alpha\lambda} - F'_{\epsilon\lambda} = 0$
ή $(M + m)g = k\Delta\ell_2$ ή $\Delta\ell_2 = 0,4 \text{ m}$ (2).

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\Delta\ell_2 - A = \sqrt{\frac{2U_{\epsilon\lambda(\min)}}{k}} \quad \text{ή} \quad A = \Delta\ell_2 - \sqrt{\frac{2U_{\epsilon\lambda(\min)}}{k}}$$

ή $A = 0,2 \text{ m}$.

β. Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_2 - F_{\epsilon\lambda} = 0$ ή $Mg = k\Delta\ell_1$
ή $\Delta\ell_1 = 0,3 \text{ m}$. Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$ ή $|x| = 0,1 \text{ m}$. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\eta \quad \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} (M+m) v^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$\eta \quad v = 0,5\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

γ. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα πάνω, έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$
 $\eta \quad mv_1 = (M+m)v \quad \eta \quad v_1 = 2\sqrt{3} \text{ m/s.}$
 Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση από τη θέση Α στη θέση Γ, που φαίνονται στο προηγούμενο σχήμα, έχουμε:

$$K_{\Gamma} - K_A = W_{w_1} \quad \eta \quad \frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = -mgh$$

$$\eta \quad v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2gh} \quad \eta \quad v_0 = 4 \text{ m/s.}$$

δ. Επειδή $A < \Delta \ell_2$, το μέτρο της δύναμης που δέχεται το συσσωμάτωμα από το ελατήριο γίνεται ελάχιστο τις χρονικές στιγμές στις οποίες το συσσωμάτωμα βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης. Συνεπώς το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{U_{ταλ}}{K_{αρχ}} \cdot 100\% \quad \eta \quad \pi = \frac{\frac{1}{2} kA^2}{\frac{1}{2} mv_0^2} \cdot 100\%$$

$$\eta \quad \pi = 25\%.$$

77. α. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 πριν από την κρούση είναι:

$$A_1 = d \quad \eta \quad A_1 = 0,4 \text{ m.}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_2 \omega_1^2 \quad \eta \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \eta \quad \omega_1 = 10 \text{ rad/s.}$$

Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση. Επειδή το σώμα Σ_2 τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, ισχύει: $v_2 = v_{\max}$ ή $v_2 = \omega_1 A_1$ ή $v_2 = 4 \text{ m/s.}$
 Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή στην οποία αφέθηκε ελεύθερο να κινηθεί έως τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση έχουμε: $K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w_1}$

$$\eta \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = m_1 gh \quad \eta \quad v_1 = 4 \text{ m/s.}$$

β. Έστω $\bar{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση, έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$
 $\eta \quad m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \bar{v} \quad \eta \quad \bar{v} = +2 \text{ m/s.}$
 Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)}}{K_{ολ(πριν)}} \cdot 100\% \quad \eta$$

$$\pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \bar{v}^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2} \cdot 100\%$$

$$\eta \quad \pi = 75\%.$$

γ. Έστω $\Delta \ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_2 - F_{ελ} = 0$ ή $m_2 g = k \Delta \ell_1$
 $\eta \quad \Delta \ell_1 = 0,1 \text{ m.}$

Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση [Θ.Ι.(2)].

Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή } w_{\text{ολ}} - F'_{\text{ελ}} = 0 \quad \text{ή } (m_1 + m_2)g = k\Delta\ell_2$$

ή $\Delta\ell_2 = 0,4 \text{ m}$. Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$ ή $|x| = 0,3 \text{ m}$.

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{ή } A = 0,5 \text{ m}.$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2)\omega^2$

$$\text{ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad \text{ή } \omega = 5 \text{ rad/s}.$$

Η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης που αποκτά το συσσωμάτωμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης που εκτελεί μετά την κρούση είναι:

$$a_{\text{max}} = \omega^2 A \quad \text{ή } a_{\text{max}} = 12,5 \text{ m/s}^2.$$

δ. Έστω $\Delta\ell'$ η παραμόρφωση του ελατηρίου τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της δύναμης που δέχεται το συσσωμάτωμα από το ελατήριο είναι $F_{\text{ελ}} = 40 \text{ N}$.

$$\text{Είναι: } F_{\text{ελ}} = k\Delta\ell' \quad \text{ή } \Delta\ell' = 0,1 \text{ m}.$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Έστω ότι το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell' = 0,1 \text{ m}$.

Εφόσον είναι $\Delta\ell' < \Delta\ell_2$, σε αυτή την περίπτωση το συσσωμάτωμα βρίσκεται σε μία θέση ανάμεσα στη Θ.Ι.(2) και στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος, οπότε η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης έχει μέτρο: $|x_1| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell'$ ή $|x_1| = 0,3 \text{ m}$. Συνεπώς, ισχύει:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = D|x_1| \quad \text{ή} \quad \left| \frac{dp}{dt} \right| = 120 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

2η περίπτωση: Έστω ότι το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell' = 0,1 \text{ m}$. Σε αυτήν την περίπτωση το μέτρο της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη Θ.Ι. (2) είναι:

$$|x_2| = \Delta\ell_2 + \Delta\ell' \quad \text{ή} \quad |x_2| = 0,5 \text{ m}.$$

Συνεπώς, ισχύει:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = D|x_2| \quad \text{ή} \quad \left| \frac{dp}{dt} \right| = 200 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

78. α. Έστω T_1 η περίοδος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση. Έστω Δt ο χρόνος κίνησης του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή στην οποία αφέθηκε ελεύθερο να ταλαντωθεί μέχρι τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση. Είναι:

$$\Delta t = \frac{T_1}{4} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{1}{4} 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} \quad \text{ή} \quad \Delta t = 0,05\pi \text{ s}.$$

Στον ίδιο χρόνο Δt το σώμα Σ_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος h πάνω από τη Θ.Ι. του σώματος Σ_1 , οπότε ισχύει:

$$h = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \quad \text{ή} \quad h = 125 \cdot 10^{-4} \pi^2 \text{ m}.$$

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_1 \omega_1^2 \quad \text{ή} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 10 \text{ rad/s}.$$

Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι:

$$A_1 = d \text{ ή } A_1 = 0,15\pi \text{ m.}$$

Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση.

$$\text{Είναι: } v_1 = v_{\max} \text{ ή } v_1 = \omega_1 A_1 \text{ ή } v_1 = 1,5\pi \text{ m/s.}$$

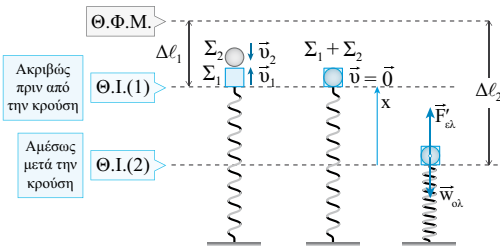
Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση.

$$\text{Είναι: } v_2 = g\Delta t \text{ ή } v_2 = 0,5\pi \text{ m/s.}$$

Έστω $\bar{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα πάνω, έχουμε: $\bar{p}_{\text{ολ}}(\text{πριν}) = \bar{p}_{\text{ολ}}(\text{μετά})$

$$\text{ή } m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \text{ ή } v = 0.$$

γ. Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης. Επομένως, η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά της κρούση είναι: $x = +A$, όπου A το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.



Έστω $\Delta\ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F'_{\text{ελ}} = 0$ ή $m_1 g = k\Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,1 \text{ m.}$

Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{\text{ολ}} - F'_{\text{ελ}} = 0$

$$\text{ή } (m_1 + m_2)g = k\Delta\ell_2 \text{ ή } \Delta\ell_2 = 0,4 \text{ m.}$$

Η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αμέσως μετά την κρούση είναι: $x = +(\Delta\ell_2 - \Delta\ell_1)$ ή $x = +0,3 \text{ m.}$ Επομένως, είναι $A = 0,3 \text{ m.}$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση είναι $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad.}$ Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = (m_1 + m_2)\omega_2^2 \text{ ή } \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

$$\text{ή } \omega_2 = 5 \text{ rad/s.}$$

Επομένως, η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη Θ.Ι.(2) δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega_2 t + \phi_0)$

$$\text{ή } x = 0,3\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

δ. Έστω T_2 η περίοδος της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές στις οποίες το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)]. Επομένως, η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι ίση με:

$$t = \frac{3T_2}{4} \text{ ή } t = \frac{3}{4} \frac{2\pi}{\omega_2} \text{ ή } t = 0,3\pi \text{ s.}$$

79. α. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή στην οποία αφέθηκε ελεύ-

θερο να κινηθεί έως τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_2} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - 0 = m_2 g h$$

$$\text{ή} \quad v_2 = 8 \text{ m/s.}$$

β. Η γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

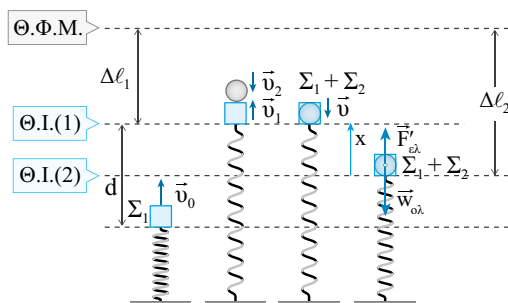
$$D = (m_1 + m_2) \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

$$\text{ή} \quad \omega = 5\sqrt{2} \text{ rad/s.}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.

$$\text{Είναι: } a_{\text{max}} = \omega^2 A \quad \text{ή} \quad A = 0,3 \text{ m.}$$

γ.



Έστω $\Delta \ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_1 - F_{\text{ελ}} = 0 \quad \text{ή} \quad m_1 g = k \Delta \ell_1$$

$$\text{ή} \quad \Delta \ell_1 = 0,1 \text{ m.}$$

Έστω $\Delta \ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{\text{ολ}} - F'_{\text{ελ}} = 0$

$$\text{ή} \quad (m_1 + m_2)g = k \Delta \ell_2 \quad \text{ή} \quad \Delta \ell_2 = 0,2 \text{ m.}$$

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη Θ.Ι.(2) αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x| = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1$ ή $|x| = 0,1 \text{ m.}$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{ή} \quad v = 2 \text{ m/s.}$$

δ. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα κάτω, έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}}$

$$\text{ή} \quad m_2 v_2 - m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$$

$$\text{ή} \quad v_1 = \frac{m_2 v_2 - (m_1 + m_2) v}{m_1} \quad \text{ή} \quad v_1 = 4 \text{ m/s.}$$

Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση.

$$\text{Είναι: } v_1 = v_{\text{max}} \quad \text{ή} \quad v_1 = \omega_1 A_1 \quad \text{ή} \quad v_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} A_1$$

$$\text{ή} \quad A_1 = 0,4 \text{ m.}$$

ε. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} k A_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + \frac{1}{2} k d^2 \quad \text{ή} \quad d = 0,2 \text{ m.}$$

80. α. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που εκτελεί πριν από την κρούση. Τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση ισχύει:

$$K = 3U(1) \quad \text{ή} \quad U = \frac{K}{3}.$$

Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση

$$\begin{aligned} \text{έχουμε: } E &= K + U \quad \text{ή} \quad E = K + \frac{K}{3} \quad \text{ή} \quad E = \frac{4}{3}K \\ \text{ή} \quad E &= \frac{4}{3} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \text{ή} \quad v_1 = 2\sqrt{3} \text{ m/s.} \end{aligned}$$

β. Έστω $\bar{u}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα πάνω, έχουμε: $\bar{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \bar{p}_{\text{ολ(μετά)}}$

$$\begin{aligned} \text{ή} \quad m_2 v_2 - m_1 v_1 &= (m_1 + m_2) u \\ \text{ή} \quad u &= +\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad |u| = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ m/s.} \end{aligned}$$

γ. Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 3 \frac{1}{2} kx^2 \quad \text{ή} \quad |x| = 0,2 \text{ m.}$$

Έστω $\Delta \ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(1)].

$$\text{Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: } \Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_1 - F_{\text{ελ}} = 0 \quad \text{ή} \quad m_1 g = k \Delta \ell_1 \quad \text{ή} \quad \Delta \ell_1 = 0,1 \text{ m.}$$

Έστω $\Delta \ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_{\text{ολ}} - F'_{\text{ελ}} = 0$

$$\text{ή} \quad (m_1 + m_2)g = k \Delta \ell_2 \quad \text{ή} \quad \Delta \ell_2 = 0,3 \text{ m.}$$

Επειδή είναι $|x| > \Delta \ell_1$ η κρούση γίνεται σε μία θέση πάνω από τη Θ.Ι.(1) όπου το ελατήριο είναι συσπειρωμένο σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Το μέτρο της απομάκρυνσης x_1 του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x_1| = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1 + |x| \quad \text{ή} \quad |x_1| = 0,4 \text{ m.}$ Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} k A_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k x_1^2$$

$$\text{ή} \quad A_2 = 0,4\sqrt{2} \text{ m.}$$

δ. Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση κινείται προς τα πάνω. Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά την κρούση τη χρονική στιγμή $t = 0$, στην οποία φτάνει στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης. Επομένως, τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι: $x_2 = +0,4\sqrt{2} \text{ m.}$ Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2)\omega^2$

$$\text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s.}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$x = A_2 \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \quad (1). \text{ Από τη σχέση (1) για } t = 0 \text{ και } x = x_2 = +0,4\sqrt{2} \text{ m προκύπτει:}$$

$$+0,4\sqrt{2} = 0,4\sqrt{2} \eta \mu \varphi_0 \quad \text{ή} \quad \eta \mu \varphi_0 = 1$$

$$\text{ή} \quad \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad \text{ή} \quad \varphi_0 = 2\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots (2).$$

Επειδή είναι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ rad, από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$ προκύπτει: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$

Η χρονική εξίσωση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης του συσσωματώματος δίνεται από τη σχέση:

$$U = \frac{1}{2} D x^2 \quad \text{ή} \quad U = \frac{1}{2} k [A_2 \eta \mu(\omega t + \varphi_0)]^2$$

$$\text{ή} \quad U = \frac{1}{2} k A_2^2 \eta \mu^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{ή} \quad U = 16 \eta \mu^2 \left(\frac{10\sqrt{3}}{3} t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{S.I.}).$$

81. α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι $A_1 = 0,2 \text{ m}$, η γωνιακή της συχνότητα είναι $\omega_1 = 5\sqrt{2} \text{ rad/s}$ και η αρχική της φάση είναι $\phi_0 = 0$. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 για $t = t_1 = 0,15\sqrt{2}\pi \text{ s}$ προκύπτει:

$$x = 0,2\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) \text{ m} \quad \text{ή} \quad x = -0,2 \text{ m}.$$

Επομένως, το σώμα Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης που εκτελεί πριν από την κρούση.

β. Επειδή είναι $x = -A_1$, η ταχύτητα του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την κρούση είναι: $v_1 = 0$.

γ. Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Η σταθερά k του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m_1\omega_1^2$ ή $k = m_1\omega_1^2$ ή $k = 100 \text{ N/m}$. Το μέτρο του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης που εκτελεί μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$\left|\frac{dp}{dt}\right|_{\max} = \Sigma F_{\max} \quad \text{ή} \quad \left|\frac{dp}{dt}\right|_{\max} = kA_2 \quad \text{ή} \quad A_2 = 0,4 \text{ m}.$$

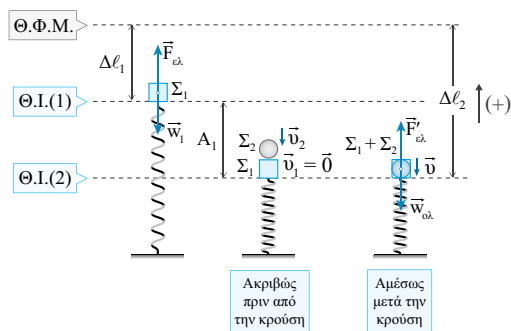
Η γωνιακή συχνότητα ω_2 της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2)\omega_2^2$

$$\text{ή} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega_2 = 5 \text{ rad/s}.$$

Η μέγιστη επιτάχυνση που αποκτά το συσσωμάτωμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a_{\max} = \omega_2^2 A_2 \quad \text{ή} \quad a_{\max} = 10 \text{ m/s}^2.$$

δ. Έστω $\Delta\ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{\epsilon\lambda} = 0$ ή $m_1 g = k\Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,2 \text{ m}$. Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{\text{ολ}} - F'_{\epsilon\lambda} = 0$ ή $(m_1 + m_2)g = k\Delta\ell_2$ ή $\Delta\ell_2 = 0,4 \text{ m}$. Επειδή ισχύει: $\Delta\ell_2 = \Delta\ell_1 + A_1$, το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)].



Επομένως, το μέτρο v της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $v = v_{\max}$ ή $v = \omega_2 A_2$ ή $v = 2 \text{ m/s}$. Για το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}_2$ του σώματος Σ_2 εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα πάνω: $\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}}$ ή $-m_2 v_2 = -(m_1 + m_2)v$ ή $v_2 = 4 \text{ m/s}$.

δ. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το συσσωμάτωμα από το ελατήριο γίνεται μέγιστο στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης.

Επομένως, είναι: $F_{ελ(max)} = k(\Delta\ell_2 + A_2)$

ή $F_{ελ(max)} = 80 \text{ N}$.

Επειδή είναι $A_2 = \Delta\ell_2$ η πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι η θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Επομένως, η ελάχιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που δέχεται το συσσωμάτωμα από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης είναι: $F_{ελ(min)} = 0$.

82. α. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι:

$A_1 = d$ ή $A_1 = 0,2\sqrt{3} \text{ m}$.

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μηδενίζεται στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Έστω $\Delta\ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{ελ} = 0$

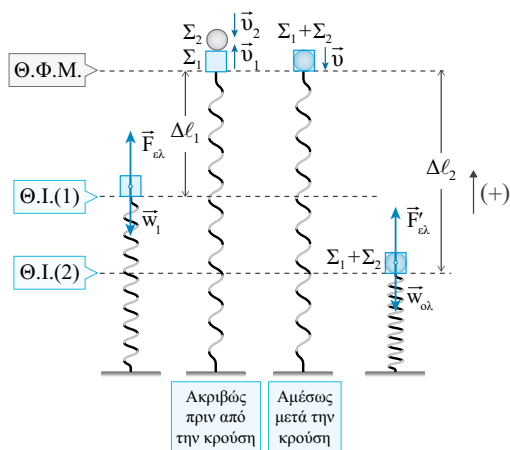
ή $m_1g = k\Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,2 \text{ m}$.

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση είναι $|x| = \Delta\ell_1$. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}DA_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

$$\text{ή } kA_1^2 = m_1v_1^2 + k(\Delta\ell_1)^2 \quad \text{ή } v_1 = 2 \text{ m/s.}$$

β. Επειδή είναι $d > \Delta\ell_1$ το σώμα Σ_1 αφήνεται ελεύθερο να ταλαντωθεί σε μια θέση όπου το ελατήριο είναι επιμηκυμένο. Τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση το σώμα Σ_1 διέρχεται από τη θέση όπου η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μηδενίζεται για δεύτερη φορά μετά τη χρονική στιγμή στην οποία αφέθηκε ελεύθερο να ταλαντωθεί. Επομένως, τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση το σώμα Σ_1 διέρχεται από τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος κινούμενο προς τα πάνω με ταχύτητα $\vec{v}_1$.



Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{ολ} - F'_{ελ} = 0$ ή $(m_1 + m_2)g = k\Delta\ell_2$ ή $\Delta\ell_2 = 0,4 \text{ m}$.

Το μέτρο της απομάκρυνσης x' του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$|x'| = \Delta\ell_2 \quad \text{ή } |x'| = 0,4 \text{ m.}$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που

εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση, έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}Dx'^2$$

$$\text{ή } E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2)^2$$

$$\text{ή } v = 2 \text{ m/s.}$$

γ. Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα κάτω, έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$
ή $m_2v_2 - m_1v_1 = (m_1 + m_2)v$ ή $v_2 = 6 \text{ m/s}$.
Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων κατά τη κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_{\text{απωλ}} = K_{\text{ολ}(\text{πριν})} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})}$$

$$\text{ή } E_{\text{απωλ}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

$$\text{ή } E_{\text{απωλ}} = 64 \text{ J.}$$

δ. Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.

$$\text{Ισχύει: } E = \frac{1}{2}kA_2^2 \text{ ή } A_2 = 0,4\sqrt{2} \text{ m.}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ισχύει:

$$\frac{dK}{dt} = 0 \text{ ή } \Sigma Fv = 0 \text{ ή } -Dxv = 0 \text{ (1).}$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι: $x = 0$ ή $v = 0$.

Επειδή τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κινείται προς τα κάτω τη χρονική στιγμή $t = 0$ στην οποία ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά την κρούση διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης ($x = 0$) κινούμενο με θετική ταχύτητα.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$x = A_2\eta\mu(\omega_2 t + \phi_0) \text{ (2).}$$

Από τη σχέση (2) για $t = 0$ και $x = 0$ προκύπτει:

$$0 = A_2\eta\mu\phi_0 \text{ ή } \eta\mu\phi_0 = 0 \text{ ή } \eta\mu\phi_0 = \eta\mu 0 \text{ (3).}$$

Επειδή είναι: $0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$ οι λύσεις της εξίσωσης (3) είναι οι: $\phi_0 = 0$ και $\phi_0 = \pi \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του συσσωματώματος δίνεται από τη σχέση:

$$v = v_{\text{max}}\sigma\upsilon\nu(\omega_2 t + \phi_0) \text{ (4).}$$

Από τη σχέση (4) για $t = 0$ και $\phi_0 = 0$ προκύπτει: $v = v_{\text{max}}\sigma\upsilon\nu 0 > 0$.

Από τη σχέση (4) για $t = 0$ και $\phi_0 = \pi \text{ rad}$ προκύπτει: $v = v_{\text{max}}\sigma\upsilon\nu\pi < 0$.

Επομένως, δεκτή λύση είναι η $\phi_0 = 0$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = (m_1 + m_2)\omega_2^2 \text{ ή } \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

ή $\omega_2 = 5 \text{ rad/s}$. Επομένως, η σχέση (2) γράφεται: $x = 0,4\sqrt{2}\eta\mu(5t) \text{ (S.I.)}$.

83. α. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $\alpha_{\text{max}} = \omega^2 A$ ή $\omega = 5 \text{ rad/s}$. Η μάζα του συσσωματώματος υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2)\omega^2$ ή $m_1 + m_2 = 4 \text{ kg}$.

Έστω $\bar{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$, ακριβώς μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση, έχουμε: $E = K + U$

$$\eta \quad \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + U$$

$$\eta \quad |v| = \sqrt{3} \text{ m/s.}$$

β. Έστω x η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] ακριβώς μετά την κρούση.

$$\text{Είναι: } U = \frac{1}{2}Dx^2 \quad \eta \quad x = +0,2 \text{ m.}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $\frac{dK}{dt} = \Sigma Fv$

$$\eta \quad \frac{dK}{dt} = -kxv \quad \eta \quad \frac{dK}{dt} = -20\sqrt{3} \text{ J/s.}$$

γ. Έστω $\Delta \ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \eta \quad w_{o\lambda} - F_{e\lambda} = 0$

$$\eta \quad (m_1 + m_2)g = k\Delta \ell_2 \quad \eta \quad \Delta \ell_2 = 0,4 \text{ m.}$$

Έστω $\Delta \ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας Θ.Ι. του σώματος Σ_2 [Θ.Ι.(1)]. Είναι: $|x| = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1$

$$\eta \quad \Delta \ell_1 = \Delta \ell_2 - |x| \quad \eta \quad \Delta \ell_1 = 0,2 \text{ m.}$$

Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 [Θ.Ι.(1)] ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \eta \quad w_2 - F'_{e\lambda} = 0 \quad \eta \quad m_2g = k\Delta \ell_1$
 $\eta \quad m_2 = 2 \text{ kg.}$ Επομένως, είναι $m_1 = 2 \text{ kg.}$

δ. Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα πάνω, έχουμε: $\bar{p}_{o\lambda, x(\text{πριν})} = \bar{p}_{o\lambda, x(\text{μετά})}$
 $\eta \quad m_1|v_1| = (m_1 + m_2)|v| \quad \eta \quad |v_1| = 2\sqrt{3} \text{ m/s.}$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1}$

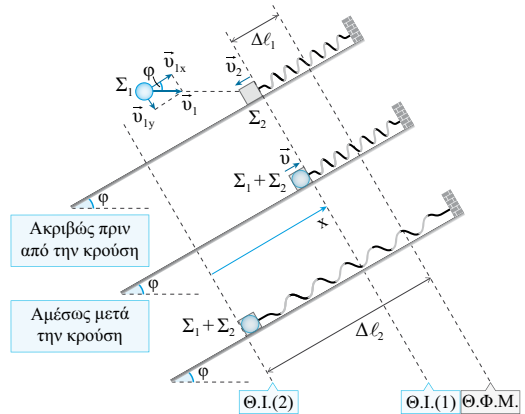
$$\eta \quad \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_1v_0^2 = -m_1gh$$

$$\eta \quad v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2gh} \quad \eta \quad v_0 = 6 \text{ m/s.}$$

84. α. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 πριν από την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\eta \quad E = \frac{1}{2}m_2v_2^2 + 0 \quad \eta \quad v_2 = 1 \text{ m/s.}$$

β. Αναλύουμε την ταχύτητα $\bar{v}_1$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες $\bar{v}_{1x}$ και $\bar{v}_{1y}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω $\bar{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Ο. στον άξονα $x'x$ για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά από τη βάση προς την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου, έχουμε:

$$\bar{p}_{o\lambda, x(\text{πριν})} = \bar{p}_{o\lambda, x(\text{μετά})}$$

$$\eta \quad m_1v_{1x} - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$$

$$\eta \quad m_1v_1\sin\varphi - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$$

$$\eta \quad v = -\frac{1}{4} \text{ m/s.}$$

Το ποσό θερμότητας που παράγεται εξαιτίας της κρούσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q = K_{\text{ολ(πριν)}} - K_{\text{ολ(μετά)}}$$

$$\text{ή } Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2$$

$$\text{ή } Q = 9,375 \text{ J.}$$

γ. Έστω $\Delta \ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ_2 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$

$$\text{ή } w_{2x} - F_{\text{ελ}} = 0 \text{ ή } m_2 g \eta \mu \phi = k \Delta \ell_1$$

$$\text{ή } \Delta \ell_1 = 0,15\sqrt{3} \text{ m.}$$

Έστω $\Delta \ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_{\text{ολ}(x)} - F'_{\text{ελ}} = 0$

$$\text{ή } (m_1 + m_2) g \eta \mu \phi = k \Delta \ell_2 \text{ ή } \Delta \ell_2 = 0,2\sqrt{3} \text{ m.}$$

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη Θ.Ι.(2) αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x| = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1$ ή $x = 0,05\sqrt{3} \text{ m.}$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας E' που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε:

$$E' = K + U \text{ ή } \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{ή } A = 0,1 \text{ m.}$$

δ. Για να μην εκτελέσει ταλάντωση το συσσωμάτωμα μετά την κρούση, πρέπει η ταχύτητα του αμέσως μετά την κρούση να είναι ίση με μηδέν και η κρούση να πραγματοποιηθεί στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος. Έστω v'_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Το μέτρο της απομάκρυνσης x' του σώματος Σ_2 από τη Θ.Ι.(1) τη χρονική

στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση είναι:

$$|x'| = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1 \text{ ή } |x'| = 0,05\sqrt{3} \text{ m.}$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας E της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 πριν από την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } E = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2} k x'^2 \text{ ή } v_2' = 0,5\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $x'x$ κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ},x(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ},x(\text{μετά})}$ ή $m_1 v_{1x} - m_2 v_2' = 0$

$$\text{ή } m_1 v_1' \sigma \nu \eta \phi = m_2 v_2' \text{ ή } v_1' = 3\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

85. α. Έστω $\bar{v}_2$ η ταχύτητα του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή στην οποία αφέθηκε ελεύθερο να κινηθεί μέχρι τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_2}$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - 0 = m_2 g h \text{ ή } |v_2| = 6 \text{ m/s.}$$

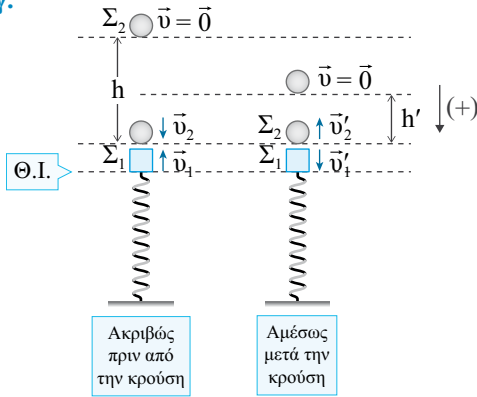
β. Έστω A_2 το πλάτος, ω_2 η γωνιακή συχνότητα και ϕ_0 η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας προκύπτει: $A_2 = 0,1 \text{ m}$, $\omega_2 = 10 \text{ rad/s}$ και $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος Σ_1 μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση: $v = \omega_2 A_2 \sigma \nu \eta (\omega t + \phi_0)$ ή $v = 1 \sigma \nu \eta (10t) (1)$.

Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v_1' του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση προκύπτει από τη σχέση (1), αν θέσουμε σε αυτήν όπου $t = 0$, είναι: $v_1' = +1 \text{ m/s}$ ή $|v_1'| = 1 \text{ m/s.}$

Έστω $\bar{v}_2'$ η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα

Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία σε ύψος h' πάνω από τη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_2}$
 ή $0 - \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = -m_2 g h'$ ή $|v_2'| = 3 \text{ m/s}$.

γ.



Η μάζα m_1 του σώματος Σ_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m_1 \omega_2^2$ ή $k = m_1 \omega_2^2$ ή $m_1 = 1 \text{ kg}$. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα κάτω, έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$$

$$\text{ή } m_2 |v_2| - m_1 |v_1| = -m_2 |v_2'| + m_1 |v_1'|$$

$$\text{ή } |v_1| = 8 \text{ m/s}.$$

Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι $A_1 = d$, ενώ η γωνιακή της συχνότητα είναι $\omega_1 = \omega_2$. Επειδή το σώμα Σ_1 τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης ισχύει:

$$|v_1| = v_{\text{max}} \text{ ή } |v_1| = \omega_1 A_1 \text{ ή } |v_1| = \omega_2 d$$

$$\text{ή } d = 0,8 \text{ m}.$$

δ. Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση είναι:

$$K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \text{ ή } K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = 50 \text{ J}.$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση είναι: $K_{\text{ολ}(\text{μετά})} = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$

$$\text{ή } K_{\text{ολ}(\text{μετά})} = 5 \text{ J}.$$

Εφόσον είναι $K_{\text{ολ}(\text{πριν})} \neq K_{\text{ολ}(\text{μετά})}$,

η κρούση είναι ανελαστική.

ε. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$ ή $dE = dK + dU$

$$\text{ή } 0 = dK + dU \text{ ή } dU = -dK \text{ ή } \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt}$$

$$\text{ή } \frac{dU}{dt} = -(-Dx)v \text{ ή } \frac{dU}{dt} = kxv \text{ (2)}.$$

Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας τη χρονική στιγμή $t = (\pi/40) \text{ s}$. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 για $t = (\pi/40) \text{ s}$ προκύπτει:

$$x = 0,1 \eta \mu \left(\frac{\pi}{4} \right) \text{ m} \text{ ή } x = +0,05\sqrt{2} \text{ m}.$$

Έστω v η ταχύτητα του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή $t = (\pi/40) \text{ s}$. Από τη σχέση (1) για $t = (\pi/40) \text{ s}$ προκύπτει:

$$v = 1 \sigma \nu \eta \mu \left(\frac{\pi}{4} \right) \text{ m/s} \text{ ή } v = +\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m/s}.$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (2) προκύπτει: $\frac{dU}{dt} = +5 \text{ J/s}$.

86. α. Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση

του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

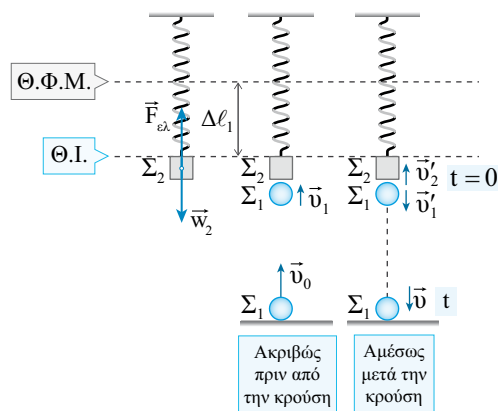
$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -m_1 g h \quad \text{ή } |v_1| = 8 \text{ m/s.}$$

Συνεπώς είναι:

$$|p_1| = m_1 |v_1| \quad \text{ή } |p_1| = 8 \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$$

β. Έστω $\vec{v}'_1$ και $\vec{v}'_2$ οι ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την κρούση.



Το σώμα Σ_1 στο χρονικό διάστημα Δt , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 0,6 \text{ s}$ στην οποία φτάνει στο έδαφος, κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω με επιτάχυνση μέτρου $g = 10 \text{ m/s}^2$.

$$\text{Επομένως, ισχύει: } h = |v'_1| \Delta t + \frac{1}{2} g (\Delta t)^2$$

$$\text{ή } h = |v'_1| t + \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{ή } |v'_1| = 0.$$

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα πάνω, έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}} \quad \text{ή } m_1 |v_1| = m_2 |v'_2|$$

$$\text{ή } |v'_2| = 8 \text{ m/s.}$$

γ. Είναι: $K_{\text{ολ(πριν)}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \text{ή } K_{\text{ολ(πριν)}} = 32 \text{ J}$

$$K_{\text{ολ(μετά)}} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad \text{ή } K_{\text{ολ(μετά)}} = 32 \text{ J.}$$

$$\text{Εφόσον είναι } K_{\text{ολ(πριν)}} = K_{\text{ολ(μετά)}},$$

η κρούση είναι ελαστική.

δ. Το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κινούμενο με θετική ταχύτητα. Επομένως, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_2 \omega^2 \quad \text{ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \text{ή } \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Είναι:

$$|v'_2| = v_{\text{max}} \quad \text{ή } |v'_2| = \omega A \quad \text{ή } A = 0,8 \text{ m.}$$

Η χρονική εξίσωση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$U = \frac{1}{2} D x^2 \quad \text{ή } U = \frac{1}{2} D [A \sin(\omega t + \phi_0)]^2$$

$$\text{ή } U = 32 \eta \mu^2(10t) \text{ (S.I.).}$$

ε. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται μέγιστη τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα Σ_2 βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης ($x = -A$). Η χρονική στιγμή t_1 στην οποία η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά μετά την κρούση είναι: $t_1 = 3 \frac{T}{4}$ ή $t_1 = \frac{3}{4} \frac{2\pi}{\omega}$ ή $t_1 = 0,15\pi \text{ s.}$

Η κατακόρυφη μετατόπιση h' του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 υπολο-

$$\text{γίζεται από τη σχέση: } h' = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2$$

$$\text{ή } h' = \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \text{ή } h' = 1,125 \text{ m.}$$

Συνεπώς η απόσταση d μεταξύ των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με:

$$d = h' - A \quad \text{ή} \quad d = 0,325 \text{ m.}$$

87. α. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ πριν από την έκρηξη-διάσπαση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = M\omega_1^2 \quad \text{ή} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 5 \text{ rad/s.}$$

Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ πριν από την έκρηξη.

$$\text{Είναι: } v_0 = \omega_1 A_1 \quad \text{ή} \quad A_1 = 0,4 \text{ m.}$$

Έστω $\Delta \ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ [Θ.Ι.(1)].

$$\text{Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: } \Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{ή } w - F_{\epsilon\lambda} = 0 \quad \text{ή} \quad Mg = k\Delta \ell_1 \quad \text{ή} \quad \Delta \ell_1 = 0,4 \text{ m.}$$

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την έκρηξη-διάσπαση είναι $|x| = \Delta \ell_1$.

Έστω $\bar{v}$ η ταχύτητα του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την έκρηξη-διάσπαση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ πριν από την έκρηξη-διάσπαση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} D A_1^2 = \frac{1}{2} M \bar{v}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{ή} \quad k A_1^2 = M \bar{v}^2 + k (\Delta \ell_1)^2 \quad \text{ή} \quad \bar{v} = 0.$$

β. Είναι: $M = m_1 + m_2$ ή $M = 4m_1$ ή $m_1 = 1 \text{ kg}$.

Επομένως, η μάζα του σώματος Σ_2 είναι:

$$m_2 = 3m_1 \quad \text{ή} \quad m_2 = 3 \text{ kg.}$$

Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 αμέσως μετά την έκρηξη-διάσπαση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή t_1 , αμέσως μετά την έκρηξη-διάσπαση, μέχρι τη χρονική

στιγμή στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία σε ύψος $h = (1/60) \text{ m}$ πάνω από το σημείο όπου έγινε η έκρηξη-διάσπαση, έχουμε:

$$K_{\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{w_2} \quad \text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = -m_2 g h$$

$$\text{ή} \quad v_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m/s.}$$

γ. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την έκρηξη-διάσπαση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την έκρηξη, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα πάνω, έχουμε:

$$\bar{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \bar{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})} \quad \text{ή} \quad 0 = m_2 v_2 - m_1 v_1$$

$$\text{ή} \quad v_1 = \sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Η ενέργεια που ελευθερώθηκε από την έκρηξη-διάσπαση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_{\epsilon\lambda\epsilon\upsilon\theta} = K_{\text{ολ}(\text{μετά})} - K_{\text{ολ}(\text{πριν})}$$

$$\text{ή} \quad E_{\epsilon\lambda\epsilon\upsilon\theta} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - 0 \quad \text{ή} \quad E_{\epsilon\lambda\epsilon\upsilon\theta} = 2 \text{ J.}$$

δ. Έστω $\Delta \ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη-διάσπαση. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_1 - F'_{\epsilon\lambda} = 0 \quad \text{ή} \quad m_1 g = k \Delta \ell_2$$

$$\text{ή} \quad \Delta \ell_2 = 0,1 \text{ m.}$$

Το μέτρο της απομάκρυνσης x' του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] αμέσως μετά την έκρηξη-διάσπαση είναι: $|x'| = \Delta \ell_2$ ή $|x'| = 0,1 \text{ m}$. Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη-διάσπαση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D A_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} D x'^2$$

$$\text{ή} \quad k A_2^2 = m_1 v_1^2 + k (\Delta \ell_2)^2 \quad \text{ή} \quad A = 0,2 \text{ m.}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη-διάσπαση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_1 \omega_2^2 \quad \text{ή} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{ή} \quad \omega_2 = 10 \text{ rad/s.}$$

Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας που αποκτά το σώμα Σ_1 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης που εκτελεί μετά την έκρηξη-διάσπαση είναι:

$$v'_{\max} = \omega_2 A_2 \quad \text{ή} \quad v'_{\max} = 2 \text{ m/s.}$$

88. α. Η μάζα του σώματος Σ_1 υπολογίζεται από τη σχέση $D = m_1 \omega^2$ ή $k = m_1 \omega^2$

ή $m_1 = 1 \text{ kg}$. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αμέσως μετά την έκρηξη-διάσπαση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη-διάσπαση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} D x^2$$

$$\text{ή} \quad k A^2 = m_1 v_1^2 + k x^2 \quad \text{ή} \quad x = +0,3 \text{ m.}$$

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την έκρηξη είναι:

$$\frac{dv}{dt} = a \quad \text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x \quad \text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = -30 \text{ m/s}^2.$$

β. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την έκρηξη-διάσπαση το σώμα Σ_2 αρχίζει να κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου v_2 και τη χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$ φτάνει στο έδαφος. Επομένως, είναι:

$$h = v_2 \Delta t + \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 \quad \text{ή} \quad h = v_2 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$\text{ή} \quad v_2 = 3 \text{ m/s.}$$

γ. Έστω $\Delta \ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που

εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη-διάσπαση [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{\epsilon\lambda} = 0$

$$\text{ή} \quad m_1 g = k \Delta \ell_1 \quad \text{ή} \quad \Delta \ell_1 = 0,1 \text{ m.}$$

Έστω $\Delta \ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ πριν την έκρηξη-διάσπαση [Θ.Ι.(1)]. Είναι: $|x| = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1$ ή $\Delta \ell_2 = |x| + \Delta \ell_1$

$$\text{ή} \quad \Delta \ell_2 = 0,4 \text{ m.} \quad \text{Στη} \quad \Theta.Ι. \quad (1) \quad \text{ισχύει:}$$

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w - F'_{\epsilon\lambda} = 0 \quad \text{ή} \quad Mg = k \Delta \ell_2$$

$$\text{ή} \quad M = 4 \text{ kg.}$$

$$\delta. \text{ Είναι: } M = m_1 + m_2 \quad \text{ή} \quad m_2 = 3 \text{ kg.}$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ ακριβώς πριν από την έκρηξη-διάσπαση.

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την έκρηξη, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα κάτω, έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}} \quad \text{ή} \quad Mv = -m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\text{ή} \quad v = 1,5 \text{ m/s.}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ πριν από την έκρηξη-διάσπαση είναι $A_1 = d$. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ ακριβώς πριν από την έκρηξη-διάσπαση το σώμα Σ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης ισχύει: $v = v_{\max}$ ή $v = \omega_1 A_1$, όπου

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 5 \text{ rad/s,} \quad \text{οπότε} \quad d = 0,3 \text{ m.}$$

89. α. Είναι: $M = m_1 + m_2$ ή $M = 5m_1$ ή $m_1 = 2 \text{ kg}$. Επομένως, είναι: $m_2 = 8 \text{ kg}$. Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}_2$ του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την έκρηξη σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες $\vec{v}_{2x}$ (παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο) και $\vec{v}_{2y}$ (κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο). Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα

των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 στον άξονα $x'x$ κατά την έκρηξη έχουμε: $\vec{p}_{ολ,x(πριν)} = \vec{p}_{ολ,x(μετά)}$
 ή $0 = m_1 v_1 - m_2 v_{2x}$ ή $m_1 v_1 = m_2 v_2 \eta \mu \phi$
 ή $v_1 = 2 \text{ m/s}$.

β. Η ενέργεια που ελευθερώθηκε από την έκρηξη-διάσπαση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_{ελευθ} = K_{ολ(μετά)} - K_{ολ(πριν)}$$

$$\text{ή } E_{ελευθ} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - 0 \quad \text{ή } E_{ελευθ} = 8 \text{ J}.$$

γ. Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ [Θ.Ι.(1)] ισχύει: $\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_x - F_{ελ} = 0$

$$\text{ή } Mg \eta \mu \phi = k \Delta \ell \quad \text{ή } \Delta \ell = 0,25 \text{ m}.$$

Έστω $\Delta \ell'$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \quad \text{ή } w_{1x} - F'_{ελ} = 0$$

$$\text{ή } m_1 g \eta \mu \phi = k \Delta \ell' \quad \text{ή } \Delta \ell' = 0,05 \text{ m}.$$

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του σώματος Σ_1 από τη Θ.Ι.(2) αμέσως μετά την έκρηξη είναι: $|x| = \Delta \ell - \Delta \ell' \quad \text{ή } |x| = 0,2 \text{ m}.$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη-διάσπαση.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη-διάσπαση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{ή } A = 0,2\sqrt{2} \text{ m}.$$

δ. Το μέτρο της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη-διάσπαση γίνεται μέγιστο τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα Σ_1 βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης.

Επομένως, τη χρονική στιγμή $t = 0$ στην οποία το μέτρο της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα Σ_1 γίνεται μέγιστο για πρώτη

φορά μετά την έκρηξη-διάσπαση, το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης ($x = +A$). Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη-διάσπαση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_1 \omega^2 \quad \text{ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{ή } \omega = 10 \text{ rad/s}.$$

Η χρονική εξίσωση του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας του σώματος Σ_1 μετά την έκρηξη-διάσπαση δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dv}{dt} = a \quad \text{ή } \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \eta \mu \left(\omega t + \phi_0 \right)$$

$$\text{ή } \frac{dv}{dt} = -20\sqrt{2} \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I.).}$$

3.5 Φθίνουσες ταλαντώσεις

ΘΕΜΑΤΑ Α

Θέματα πολλαπλής επιλογής

4. γ	5. α	6. δ	7. α	8. γ	9. α	10. δ	11. δ	12. α
13. γ	14. γ	15. γ	16. δ	17. β	18. δ	19. δ	20. α	

Θέματα του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

21.	α. Σ	β. Λ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Σ
22.	α. Σ	β. Λ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Σ
23.	α. Λ	β. Λ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Σ
24.	α. Σ	β. Λ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Σ
25.	α. Σ	β. Σ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Λ
26.	α. Σ	β. Σ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Σ
27.	α. Λ	β. Σ	γ. Σ	δ. Λ	ε. Λ

28. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Όταν αυξάνουμε τη σταθερά απόσβεσης b , ο ρυθμός μείωσης του πλάτους αυξάνεται και το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται ταχύτερα. Όπως προκύπτει από το δοθέν διάγραμμα το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται ταχύτερα, όταν η σταθερά απόσβεσης είναι ίση με b_2 . Επομένως, είναι: $b_2 > b_1$.

29. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Από τη δοθείσα εξίσωση του πλάτους για $A = 0,1 \text{ m}$ και $t = 2 \text{ s}$ προκύπτει:

$$0,1 = 0,4e^{-2\Lambda} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{4} = e^{-2\Lambda} \quad \text{ή} \quad 4 = e^{2\Lambda}$$

$$\text{ή} \quad \ell n 4 = \ell n e^{2\Lambda} \quad \text{ή} \quad 2\ell n 2 = 2\Lambda \quad \text{ή} \quad \Lambda = \ell n 2 \text{ s}^{-1}.$$

30. Α. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Η ενέργεια της φθίνουσας ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $E = \frac{1}{2}DA^2$ (1). Επειδή ισχύει $A = A_0e^{-\Lambda t}$, η σχέση (1) γράφεται:

$$E = \frac{1}{2}D(A_0e^{-\Lambda t})^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2}DA_0^2e^{-2\Lambda t}$$

$$\text{ή} \quad E = E_0e^{-2\Lambda t} \quad (2).$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Από τη σχέση (2) για $t = \frac{\ln 2}{\Lambda}$, προκύπτει:

$$E = E_0e^{-2\Lambda \frac{\ell n 2}{\Lambda}} \quad \text{ή} \quad E = E_0e^{-2\ell n 2} \quad \text{ή} \quad E = \frac{E_0}{e^{2\ell n 2}}$$

$$\text{ή} \quad E = \frac{E_0}{e^{\ell n 2^2}} \quad \text{ή} \quad E = \frac{E_0}{4}.$$

Η απώλεια της ενέργειας του ταλαντωτή στο χρονικό διάστημα από $t_0 = 0$ έως $t = \frac{\ln 2}{\Lambda}$

$$\text{είναι: } E_{\text{απώλ}} = E_0 - E \quad \text{ή} \quad E_{\text{απώλ}} = E_0 - \frac{E_0}{4}$$

$$\text{ή} \quad E_{\text{απώλ}} = \frac{3E_0}{4}.$$

31. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Επειδή το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο, στο χρονικό

$$\text{διάστημα } \Delta t_1 \text{ ισχύει: } \frac{A_0}{4} = \frac{A_0}{2}e^{-\Lambda \Delta t_1}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} = e^{-\Lambda \Delta t_1} \quad \text{ή} \quad 2 = e^{\Lambda \Delta t_1} \quad \text{ή} \quad \ell n 2 = \ell n e^{\Lambda \Delta t_1}$$

$$\text{ή} \quad \ell n 2 = \Lambda \Delta t_1 \quad \text{ή} \quad \Delta t_1 = \frac{\ell n 2}{\Lambda} \quad (1).$$

Επειδή το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο στο χρονικό

$$\text{διάστημα } \Delta t_2 \text{ ισχύει: } \frac{A_0}{8} = \frac{A_0}{4}e^{-\Lambda \Delta t_2}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} = e^{-\Lambda \Delta t_2} \quad \text{ή} \quad 2 = e^{\Lambda \Delta t_2} \quad \text{ή} \quad \ell n 2 = \ell n e^{\Lambda \Delta t_2}$$

$$\text{ή} \quad \ell n 2 = \Lambda \Delta t_2 \quad \text{ή} \quad \Delta t_2 = \frac{\ell n 2}{\Lambda} \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\Delta t_1 = \Delta t_2.$$

32. Α. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης για $t = \frac{2\ell n 2}{\Lambda}$,

$$\text{προκύπτει: } A = A_0e^{-\Lambda \frac{2\ell n 2}{\Lambda}} \quad \text{ή} \quad A = A_0e^{-2\ell n 2}$$

$$\text{ή} \quad A = \frac{A_0}{e^{2\ell n 2}} \quad \text{ή} \quad A = \frac{A_0}{e^{\ell n 4}} \quad \text{ή} \quad A = \frac{A_0}{4} \quad (1).$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi\% = \frac{E_0 - E}{E_0} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi\% = \frac{\frac{1}{2}DA_0^2 - \frac{1}{2}DA^2}{\frac{1}{2}DA_0^2} \cdot 100\%$$

ή λόγω της σχέσης (1) $\pi = 93,75\%$.

33. Σωστή επιλογή είναι η β.

Έστω T η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης. Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα έχει πραγματοποιήσει $N_1 = 20$ πλήρεις ταλαντώσεις ισχύει: $t_1 = N_1 T$ ή $t_1 = 20T$.

Τη χρονική στιγμή t_1 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης είναι $A_1 = \frac{A_0}{2}$.

Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης για $A = A_1$ και

$$t = t_1 \text{ προκύπτει: } A_1 = A_0 e^{-\Lambda t_1} \text{ ή } \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t_1}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t_1} \text{ ή } 2 = e^{\Lambda t_1} \text{ ή } \ln 2 = \Lambda t_1$$

$$\text{ή } \ln 2 = \Lambda t_1 \text{ ή } \Lambda = \frac{\ln 2}{20T}$$

Τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία το σώμα έχει πραγματοποιήσει $N_2 = 60$ πλήρεις ταλαντώσεις ισχύει: $t_2 = N_2 T$ ή $t_2 = 60T$.

Έστω A_2 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_2 . Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης για $t = t_2$ έχουμε: $A_2 = A_0 e^{-\Lambda t_2}$

$$\text{ή } A_2 = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{20T} \cdot 60T} \text{ ή } A_2 = A_0 e^{-3 \ln 2}$$

$$\text{ή } A = \frac{A_0}{e^{3 \ln 2}} \text{ ή } A = \frac{A_0}{e^{\ln 2^3}} \text{ ή } A = \frac{A_0}{8}$$

34. Σωστή επιλογή είναι η α.

Όταν κατά τη διάρκεια της φθίνουσας ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα η δύναμη αντίστασης που δέχεται είναι της μορφής

$F'_{(1)} = -0,3v$ (S.I.), η σταθερά απόσβεσης είναι $b_1 = 0,3$ kg/s. Όταν κατά τη διάρκεια της φθίνουσας ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα η δύναμη αντίστασης που δέχεται είναι της μορφής $F'_{(2)} = -0,5v$ (S.I.), η σταθερά απόσβεσης είναι $b_2 = 0,5$ kg/s.

Όταν αυξάνεται η σταθερά απόσβεσης, το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται ταχύτερα. Εφόσον είναι $b_2 > b_1$, στη δεύτερη περίπτωση το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης θα μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής σε χρόνο μικρότερο από 10 s.

35. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Το πλάτος A της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t = 2T$ υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } A = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} 2T} \text{ ή } A = A_0 e^{-2 \ln 2}$$

$$\text{ή } A = \frac{A_0}{e^{2 \ln 2}} \text{ ή } A = \frac{A_0}{e^{\ln 2^2}} \text{ ή } A = \frac{A_0}{4} \quad (1).$$

Το ζητούμενο έργο είναι: $W_{F'} = E_{\text{τελ}} - E_{\text{αρχ}}$

$$\text{ή } W_{F'} = E - E_0 \text{ ή } W_{F'} = \frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}DA_0^2$$

$$\text{ή λόγω της σχέσης (1): } W_{F'} = \frac{1}{2}D \frac{A_0^2}{16} - \frac{1}{2}DA_0^2$$

$$\text{ή } W_{F'} = -\frac{15}{16} \frac{1}{2}DA_0^2 \text{ ή } W_{F'} = -\frac{15}{16}E_0.$$

36. Σωστή επιλογή είναι η β.

Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης προκύπτει ότι το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης είναι $A_0 = 0,4$ m. Το πλάτος A της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$A = A_0 - \frac{75}{100}A_0 \text{ ή } A = \frac{A_0}{4} \text{ ή } A = 0,1 \text{ m.}$$

Από τη δοθείσα εξίσωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης για $A = 0,1 \text{ m}$ και $t = t_1$

$$\text{προκύπτει: } 0,1 = 0,4e^{-(\ell n 2)t_1} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{4} = e^{-(\ell n 2)t_1}$$

$$\text{ή} \quad 4 = e^{(\ell n 2)t_1} \quad \text{ή} \quad \ell n 4 = \ell n e^{(\ell n 2)t_1}$$

$$\text{ή} \quad 2\ell n 2 = (\ell n 2)t_1 \quad \text{ή} \quad t_1 = 2 \text{ s.}$$

Το πλήθος N των πλήρων ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } t_1 = NT \quad \text{ή} \quad N = \frac{t_1}{T}$$

ή $N = 20$ πλήρεις ταλαντώσεις.

37. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Έστω A_2 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_2 = 2T$. Επειδή τα πλάτη A_0 , A_1 και A_2 αποτελούν διαδοχικά πλάτη της φθίνουσας ταλάντωσης, ισχύει:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \quad \text{ή} \quad A_2 = \frac{A_1^2}{A_0} \quad \text{ή} \quad A_2 = \frac{A_0}{16}.$$

Το ζητούμενο ποσοστό μείωσης του πλάτους κατά τη διάρκεια της δεύτερης περιόδου της φθίνουσας ταλάντωσης υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } \pi = \frac{A_1 - A_2}{A_1} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{A_0}{4} - \frac{A_0}{16}}{\frac{A_0}{4}} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 75\%.$$

38. Σωστή επιλογή είναι η β .

Έστω E_0 η αρχική ενέργεια και A_0 το αρχικό πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης. Έστω E η ενέργεια και A το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_1 .

$$\text{Είναι: } E = E_0 - \frac{75}{100} E_0 \quad \text{ή} \quad E = \frac{25}{100} E_0$$

$$\text{ή} \quad E = \frac{1}{4} E_0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} DA^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} DA_0^2 \quad \text{ή} \quad A = \frac{A_0}{2}.$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } \pi = \frac{A_0 - A}{A_0} \quad \text{ή} \quad \pi = \frac{A_0 - \frac{A_0}{2}}{A_0} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = 50\%.$$

39. α. Έστω t_1 η χρονική στιγμή στην οποία το σώμα έχει εκτελέσει N_1 ταλαντώσεις.

Είναι: $t_1 = N_1 T$ ή $t_1 = 3$ s. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης για $A = A_{10} = 0,16$ m και $t = t_1 = 3$ s έχουμε: $0,16 = 0,32e^{-\Lambda \cdot 3}$

$$\text{ή } \frac{1}{2} = e^{-3\Lambda} \quad \text{ή } 2 = e^{3\Lambda} \quad \text{ή } \ln 2 = \ln e^{3\Lambda}$$

$$\text{ή } 3\Lambda = \ln 2 \quad \text{ή } \Lambda = \frac{\ln 2}{3} \text{ s}^{-1}.$$

β. Η χρονική στιγμή t_2 στην οποία το σώμα έχει εκτελέσει N_2 ταλαντώσεις είναι: $t_2 = N_2 T$ ή $t_2 = 9$ s. Έστω A_{30} το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_2 . Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης για $t = t_2 = 9$ s έχουμε:

$$A_{30} = 0,32e^{-\Lambda \cdot 9} \text{ m} \quad \text{ή} \quad A_{30} = 0,32e^{-\frac{\ln 2}{3} \cdot 9} \text{ m}$$

$$\text{ή} \quad A_{30} = 0,32e^{-3 \ln 2} \text{ m} \quad \text{ή} \quad A_{30} = \frac{0,32}{e^{\ln 2^3}} \text{ m}$$

$$\text{ή} \quad A = 0,04 \text{ m}.$$

γ. Η ενέργεια της φθίνουσας ταλάντωσης

$$\text{δίνεται από τη σχέση: } E = \frac{1}{2} D A^2$$

$$\text{ή} \quad E = \frac{1}{2} D (A_0 e^{-\Lambda t})^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\Lambda t}$$

$$\text{ή} \quad E = E_0 e^{-2\Lambda t} \quad (1).$$

Έστω t_3 η χρονική στιγμή στην οποία η ενέργεια της φθίνουσας ταλάντωσης έχει μειωθεί στο μισό της αρχικής τιμής της $\left(E = \frac{E_0}{2}\right)$.

Από τη σχέση (1) για $E = \frac{E_0}{2}$ και $t = t_3$ έχουμε:

$$\frac{E_0}{2} = E_0 e^{-2\Lambda t_3} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} = e^{-2\Lambda t_3} \quad \text{ή} \quad 2 = e^{2\Lambda t_3}$$

$$\text{ή} \quad \ln 2 = 2\Lambda t_3 \quad \text{ή} \quad t_3 = 1,5 \text{ s}.$$

δ. Έστω E' η ενέργεια της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t = 6$ s. Από τη σχέση (1) για

$$t = 6 \text{ s} \text{ έχουμε: } E' = E_0 e^{-2\Lambda \cdot 6} \quad \text{ή} \quad E' = E_0 e^{-\frac{2 \ln 2}{3} \cdot 6}$$

$$\text{ή} \quad E' = E_0 e^{-4 \ln 2} \quad \text{ή} \quad E' = \frac{E_0}{e^{\ln 2^4}} \quad \text{ή} \quad E' = \frac{E_0}{16}.$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{E_0 - E'}{E_0} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 93,75\%.$$

40. α. Έστω A_2 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης στο τέλος της δεύτερης περιόδου ($t = 2T$). Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης για $t = 2T = 1$ s έχουμε: $A_2 = 0,8e^{-\frac{\ln 2}{2}}$

$$\text{ή} \quad A_2 = \frac{0,8}{e^{\ln 4}} \quad \text{ή} \quad A_2 = 0,2 \text{ m}.$$

β. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης προκύπτει: $A_0 = 0,8$ m. Έστω A_1 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης στο τέλος της πρώτης περιόδου. Για τα διαδοχικά πλάτη $A_0, A_1,$

$$A_2 \text{ ισχύει: } \frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \quad \text{ή} \quad A_1 = 0,4 \text{ m}.$$

Η ενέργεια της φθίνουσας ταλάντωσης στο τέλος της πρώτης περιόδου υπολογίζεται από

$$\text{τη σχέση: } E = \frac{1}{2} D A_1^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2} m \omega^2 A_1^2$$

$$\text{ή} \quad E = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 A_1^2 \quad \text{ή} \quad E = 12,8 \text{ J}.$$

γ. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης προκύπτει ότι $\Lambda = 2\ell n2 \text{ s}^{-1}$. Η χρονική εξίσωση της ενέργειας της φθίνουσας ταλάντωσης προκύπτει από τη σχέση: $E = \frac{1}{2}DA^2$

$$\text{ή } E = \frac{1}{2}D(A_0 e^{-\Lambda t})^2 \text{ ή } E = \frac{1}{2}D(A_0 e^{-\Lambda t})^2$$

$$\text{ή } E = \frac{1}{2}DA_0^2 e^{-2\Lambda t} \text{ ή } E = E_0 e^{-2\Lambda t} \quad (1).$$

Έστω t_1 η χρονική στιγμή στην οποία η ενέργεια της φθίνουσας ταλάντωσης είναι $E = \frac{E_0}{64}$.

Από τη σχέση (1) για $E = \frac{E_0}{64}$ και $t = t_1$ έχουμε:

$$\frac{E_0}{64} = E_0 e^{-2\Lambda t_1} \text{ ή } 64 = e^{2\Lambda t_1} \text{ ή } \ell n 64 = \ell n e^{2\Lambda t_1}$$

$$\text{ή } 6\ell n 2 = 2\Lambda t_1 \text{ ή } t_1 = 1,5 \text{ s. Συνεπώς, είναι:}$$

$$t_1 = NT \text{ ή } N = 3 \text{ πλήρεις ταλαντώσεις.}$$

δ. Το έργο της δύναμης αντίστασης που δέχεται το σώμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 1,5 \text{ s}$ υπολογίζεται από

$$\text{τη σχέση: } W_{F'} = E - E_0 \text{ ή } W_{F'} = \frac{E_0}{64} - E_0$$

$$\text{ή } W_{F'} = -\frac{63}{64}E_0 \text{ ή } W_{F'} = -\frac{63}{64} \cdot \frac{1}{2}DA_0^2$$

$$\text{ή } W_{F'} = -\frac{63}{128}m\omega^2 A_0^2$$

$$\text{ή } W_{F'} = -\frac{63}{128}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A_0^2 \text{ ή } W_{F'} = -50,4 \text{ J.}$$

41. α. Έστω A_1 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t = T$, όπου T η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης. Είναι:

$$A_1 = \frac{25}{100}A_0 \text{ ή } A_1 = \frac{A_0}{4} \text{ ή } A_1 = 0,16 \text{ m.}$$

Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης για $A = 0,16 \text{ m}$

$$\text{και } t = T \text{ προκύπτει: } 0,16 = 0,64e^{-\frac{\ell n 2}{2}T}$$

$$\text{ή } \frac{1}{4} = e^{-\frac{\ell n 2}{2}T} \text{ ή } 4 = e^{\frac{\ell n 2}{2}T} \text{ ή } 2\ell n 2 = \frac{\ell n 2}{2}T$$

$$\text{ή } T = 4 \text{ s.}$$

β. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους προκύπτει: $A_0 = 0,64 \text{ m}$. Η ενέργεια της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t = 0$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_0 = \frac{1}{2}DA_0^2 \text{ ή } E_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2$$

$$\text{ή } E_0 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A_0^2 \text{ ή } E_0 = 1,024 \text{ J.}$$

γ. Έστω A_2 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης στο τέλος της δεύτερης περιόδου ($t = 2T$). Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους για $t = 2T = 8 \text{ s}$ έχουμε:

$$A_2 = 0,64e^{-\frac{\ell n 2}{2} \cdot 8} \text{ m ή } A_2 = 0,64e^{-4\ell n 2} \text{ m}$$

$$\text{ή } A_2 = \frac{0,64}{e^{\ell n 2^4}} \text{ m ή } A_2 = 0,04 \text{ m.}$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{A_1 - A_2}{A_1} \cdot 100\% \text{ ή } \pi = 75\%.$$

δ. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης προκύπτει:

$$\Lambda = \frac{\ell n 2}{2} \text{ s}^{-1}. \text{ Η χρονική εξίσωση της ενέργειας}$$

της φθίνουσας ταλάντωσης προκύπτει από τη

$$\text{σχέση: } E = \frac{1}{2}DA^2 \text{ ή } E = \frac{1}{2}D(A_0 e^{-\Lambda t})^2$$

$$\text{ή } E = \frac{1}{2}DA_0^2 e^{-2\Lambda t} \text{ ή } E = E_0 e^{-2\Lambda t} \quad (1).$$

Έστω t_1 η χρονική στιγμή στην οποία η ενέργεια της φθίνουσας ταλάντωσης είναι ίση με

$$\text{το } 50\% \text{ της αρχικής τιμής της } \left(E = \frac{E_0}{2}\right).$$

Από τη σχέση (1) για $E = \frac{E_0}{2}$ και $t = t_1$ προ-

$$\text{κύπτει: } \frac{E_0}{2} = E_0 e^{-2\lambda t_1} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} = e^{-2\lambda t_1}$$

$$\text{ή } 2 = e^{2\lambda t_1} \quad \text{ή} \quad \ln 2 = 2 \frac{\ell n 2}{2} t_1 \quad \text{ή} \quad t_1 = 1 \text{ s.}$$

42. α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους προκύπτει ότι $A_0 = 0,27 \text{ m}$. Έστω A_2 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_2 = 2T$. Επειδή το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο, για τα διαδοχικά πλάτη A_0, A_1, A_2 ισχύει: $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2}$ ή $A_2 = 0,03 \text{ m}$.

β. Έστω A_8 και A_9 τα πλάτη της φθίνουσας ταλάντωσης τις χρονικές στιγμές $t_3 = 8T$ και $t_4 = 9T$ αντίστοιχα.

$$\text{Είναι: } \frac{A_8}{A_9} = \frac{A_0}{A_1} \quad \text{ή} \quad \frac{A_8}{A_9} = 3.$$

γ. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση: $\pi = \frac{E_8 - E_9}{E_8} \cdot 100\%$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2} D A_8^2 - \frac{1}{2} D A_9^2}{\frac{1}{2} D A_8^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{A_8^2 - A_9^2}{A_8^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 88,89\%.$$

43. α. Έστω A_1 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης για $t = t_1 = 1 \text{ s}$ προκύπτει: $A_1 = 0,32 e^{-2\ell n 2} \text{ m}$ ή $A_1 = \frac{0,32}{e^{\ell n 2^2}} \text{ m}$ ή $A_1 = 0,08 \text{ m}$.

β. Το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_2 είναι $A_2 = 0,04 \text{ m}$. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους για $A = A_2 = 0,04 \text{ m}$ και $t = t_2$ έχουμε:

$$0,04 = 0,32 e^{-(2\ell n 2)t_2} \quad \text{ή} \quad e^{-(2\ell n 2)t_2} = \frac{1}{8}$$

$$\text{ή} \quad e^{(2\ell n 2)t_2} = 8 \quad \text{ή} \quad \ell n e^{(2\ell n 2)t_2} = \ell n 8$$

$$\text{ή} \quad 2(\ell n 2)t_2 = 3\ell n 2 \quad \text{ή} \quad t_2 = 1,5 \text{ s.}$$

Έστω N το ζητούμενο πλήθος των ταλαντώσεων. Είναι: $f = \frac{N}{t_2}$ ή $N = f t_2$

$$\text{ή} \quad N = 15 \text{ πλήρεις ταλαντώσεις.}$$

γ. Η γωνιακή συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης είναι: $\omega = 2\pi f$ ή $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$.

Η σταθερά επαναφοράς της φθίνουσας ταλάντωσης είναι: $D = m\omega^2$ ή $D = 400 \text{ N/m}$.

Έστω A_3 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_3 = 2 \text{ s}$. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους για $t = t_3 = 2 \text{ s}$

$$\text{έχουμε: } A_3 = 0,32 e^{-(2\ell n 2)^2} \quad \text{ή} \quad A_3 = \frac{0,32}{e^{4\ell n 2}} \text{ m}$$

$$\text{ή} \quad A_3 = \frac{0,32}{e^{\ell n 2^4}} \text{ m} \quad \text{ή} \quad A_3 = 0,02 \text{ m.}$$

Το έργο της δύναμης αντίστασης που δέχεται το σώμα από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W_{F'} = E_{\text{τελ}} - E_{\text{αρχ}} \quad \text{ή} \quad W_{F'} = \frac{1}{2} D A_3^2 - \frac{1}{2} D A_1^2$$

$$\text{ή} \quad W_{F'} = \frac{1}{2} D (A_3^2 - A_1^2) \quad \text{ή} \quad W_{F'} = -1,2 \text{ J.}$$

δ. Η χρονική εξίσωση της ενέργειας της φθίνουσας ταλάντωσης προκύπτει από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2} D A^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2} D (A_0 e^{-\lambda t})^2$$

$$\text{ή} \quad E = \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\lambda t} \quad \text{ή} \quad E = E_0 e^{-2\lambda t} \quad (1).$$

Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους προκύπτει: $\Lambda = 2 \ln 2 \text{ s}^{-1}$. Από τη σχέση (1)

για $E = \frac{E_0}{2}$ και $t = t_4$ προκύπτει:

$$\frac{E_0}{2} = E_0 e^{-2\Lambda t_4} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} = e^{-2\Lambda t_4}$$

$$\text{ή} \quad e^{2\Lambda t_4} = 2 \quad \text{ή} \quad \ln e^{2\Lambda t_4} = \ln 2$$

$$\text{ή} \quad 2\Lambda t_4 = \ln 2 \quad \text{ή} \quad t_4 = 0,25 \text{ s.}$$

44. α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας προκύπτει: $A_0 = 0,8 \text{ m}$ και $\omega = 10\pi \text{ rad/s}$. Συνεπώς, είναι: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ή $T = 0,2 \text{ s}$. Η σταθερά επαναφοράς της φθίνουσας ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $D = 1.000 \text{ N/m}$.

β. Έστω t_1 η χρονική στιγμή στην οποία το σώμα έχει εκτελέσει N_1 πλήρεις ταλαντώσεις. Είναι: $t_1 = N_1 T$ ή $t_1 = 30T$ ή $t_1 = 6 \text{ s}$. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας προκύπτει ότι το πλάτος A τη φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο t σύμφωνα με τη σχέση: $A = 0,8e^{-(\ell n 2)t}$ (S.I.) (1)

Έστω A_1 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη σχέση (1) για $t = t_1 = 6 \text{ s}$ έχουμε: $A_1 = 0,8e^{-(\ell n 2)6} \text{ m}$

$$\text{ή } A_1 = \frac{0,8}{e^{\ell n 2^6}} \text{ m} \quad \text{ή } A_1 = 0,0125 \text{ m}.$$

γ. Έστω t_2 η χρονική στιγμή στην οποία το σώμα έχει εκτελέσει N_2 πλήρεις ταλαντώσεις. Είναι: $t_2 = N_2 T$ ή $t_2 = 10 T$ ή $t_2 = 2 \text{ s}$.

Έστω A_2 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_2 . Από τη σχέση (1) για $t = t_2 = 2 \text{ s}$ έχουμε: $A_2 = 0,8e^{-(\ell n 2)^2} \text{ m}$

$$\text{ή } A_2 = \frac{0,8}{e^{\ell n 2^2}} \text{ m} \quad \text{ή } A_2 = 0,2 \text{ m}.$$

Η ενέργεια E_2 της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_2 = \frac{1}{2} D A_2^2 \quad \text{ή } E_2 = 20 \text{ J}.$$

$$\delta. \text{ Είναι: } E_{\text{απολ}} = \frac{75}{100} E_0 \quad \text{ή } E_0 - E = \frac{3}{4} E_0$$

$$\text{ή } E = \frac{1}{4} E_0 \quad \text{ή } \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{2} D A_0^2$$

$$\text{ή } A = \frac{A_0}{2} \quad \text{ή } A = 0,4 \text{ m}.$$

Έστω t_3 η χρονική στιγμή στην οποία το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης είναι $A = 0,4 \text{ m}$.

Από τη σχέση (1) για $A = 0,4 \text{ m}$ και $t = t_3$ έχουμε:

$$0,4 = 0,8e^{-(\ell n 2)t_3} \quad \text{ή } \frac{1}{2} = e^{-(\ell n 2)t_3}$$

$$\text{ή } 2 = e^{(\ell n 2)t_3} \quad \text{ή } \ell n 2 = (\ell n 2)t_3 \quad \text{ή } t_3 = 1 \text{ s}.$$

Έστω N το πλήθος των πλήρων ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_3 . Είναι: $t_3 = NT$

ή $N = 5$ πλήρεις ταλαντώσεις.

45. α. Το αρχικό πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης είναι: $A_0 = d$ ή $A_0 = 0,4 \text{ m}$.

Η ενέργεια της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t = 0$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_0 = \frac{1}{2} D A_0^2 \quad \text{ή } E_0 = \frac{1}{2} k d^2 \quad \text{ή } E_0 = 8 \text{ J}.$$

β. Τη χρονική στιγμή t_1 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης είναι: $A_1 = \frac{A_0}{2}$.

Συνεπώς, ισχύει: $A_1 = A_0 e^{-\Lambda t_1}$

$$\text{ή } \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t_1} \quad \text{ή } \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t_1} \quad \text{ή } 2 = e^{\Lambda t_1}$$

$$\text{ή } \ell n 2 = \Lambda t_1 \quad \text{ή } \Lambda = \frac{\ell n 2}{t_1} \text{ s}^{-1}.$$

γ. Η γωνιακή συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

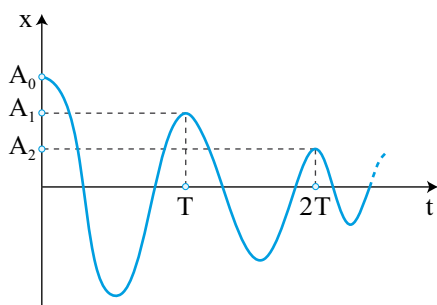
$$D = m\omega^2 \quad \text{ή } k = m\omega^2 \quad \text{ή } \omega = 10 \text{ rad/s}.$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι $x = +A_0$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = (\pi/2)$ rad. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$

$$\text{ή } x = A_0 e^{-\Lambda t} \eta\mu(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{ή } x = 0,4e^{-\frac{\ln 2}{\pi}t} \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται (ποιοτικά) η γραφική παράσταση της χρονικής εξίσωσης απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας.



δ. Έστω ότι στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell_1$. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{ελ} = 0$ ή $mg = k\Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,1$ m. Η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο στη Θ.Ι. του σώματος είναι: $U_{ελ} = \frac{1}{2}k\Delta\ell_1^2$ ή $U_{ελ} = 0,5$ J.

Έστω t_1 η χρονική στιγμή στην οποία η ενέργεια της φθίνουσας ταλάντωσης είναι:

$$E = U_{ελ} \text{ ή } E = 0,5 \text{ J.}$$

Η χρονική εξίσωση της ενέργειας της φθίνουσας ταλάντωσης προκύπτει από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \text{ ή } E = \frac{1}{2}D(A_0 e^{-\Lambda t})^2$$

$$\text{ή } E = \frac{1}{2}DA_0^2 e^{-2\Lambda t} \text{ ή } E = 8e^{-\frac{\ln 2}{\pi}t} \text{ (S.I.) (1).}$$

Από τη σχέση (1) για $E = 0,5$ J και $t = t_1$ έχουμε:

$$0,5 = 8e^{-\frac{\ln 2}{\pi}t_1} \text{ ή } e^{-\frac{\ln 2}{\pi}t_1} = \frac{1}{16}$$

$$\text{ή } e^{\frac{2\ln 2}{\pi}t_1} = 16 \text{ ή } \ell n e^{\frac{2\ln 2}{\pi}t_1} = \ell n 16$$

$$\text{ή } 2\frac{\ell n 2}{\pi}t_1 = 4\ell n 2 \text{ ή } t_1 = 2\pi \text{ s.}$$

Επειδή η περίοδος T της φθίνουσας ταλάντωσης είναι ίση με την περίοδο της αμείωτης τα-

λάντωσης, ισχύει ότι: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ή $T = 0,2\pi$ s.

Έστω N το πλήθος των πλήρων ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $t_1 = NT$

ή $N = 10$ πλήρεις ταλαντώσεις.

Επομένως, η ενέργεια της φθίνουσας ταλάντωσης είναι ίση με τη δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας στο τέλος της δέκατης περιόδου.

46. α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης προκύπτει ότι το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $A_0 = 0,4$ m. Έστω A_1 και A_2 τα πλάτη της φθίνουσας ταλάντωσης τις χρονικές στιγμές $t = T$ και $t = 2T$ αντίστοιχα, όπου T η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης. Επειδή το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο για τα διαδοχικά πλάτη A_0, A_1, A_2 ισχύει:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \text{ ή } A_1^2 = A_0 A_2 \text{ ή } A_1 = \sqrt{A_0 A_2} \text{ (1).}$$

Το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης στο τέλος της δεύτερης περιόδου είναι:

$$A_2 = A_0 - \frac{75}{100} A_0 \quad \text{ή} \quad A_2 = \frac{25}{100} A_0$$

$$\text{ή} \quad A_2 = \frac{A_0}{4} \quad (2).$$

Από τη σχέση (1), λόγω της σχέσης (2) προκύπτει: $A_1 = \frac{A_0}{2}$ ή $A_1 = 0,2 \text{ m}$.

β. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τον τύπο: $\pi = \frac{E_0 - E_1}{E_0} \cdot 100\%$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2} D A_0^2 - \frac{1}{2} D A_1^2}{\frac{1}{2} D A_0^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{A_0^2 - A_1^2}{A_0^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 75\%.$$

γ. Έστω A_5 και A_6 τα πλάτη της φθίνουσας ταλάντωσης τις χρονικές στιγμές $t = 5T$ και $T = 6T$ αντίστοιχα. Είναι:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_5}{A_6} \quad \text{ή} \quad \frac{A_5}{A_6} = 2 \quad \text{ή} \quad A_5 = 2A_6 \quad (3).$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{A_5 - A_6}{A_5} \cdot 100\%$$

ή λόγω της σχέσης (3): $\pi = 50\%$.

δ. Είναι: $E = E_0 - \frac{93,75}{100} E_0$ ή $E = 0,0625 E_0$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} D A^2 = 625 \cdot 10^{-4} \frac{1}{2} D A_0^2 \quad \text{ή} \quad A = \frac{A_0}{4}.$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{A_0 - A}{A_0} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 75\%.$$

47. α. Έστω $\Delta \ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή} \quad w - F_{\text{ελ}} = 0 \quad \text{ή} \quad mg = k \Delta \ell_1 \quad \text{ή} \quad \Delta \ell_1 = 0,4 \text{ m}.$$

Επειδή το σώμα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί από τη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, το αρχικό πλάτος A_0 της φθίνουσας ταλάντωσης είναι: $A_0 = \Delta \ell_1$ ή $A_0 = 0,4 \text{ m}$.

Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα ακινητοποιείται στιγμιαία για δεύτερη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του, έχοντας ολοκληρώσει μία πλήρη ταλάντωση. Τη χρονική στιγμή t_1 το ελατήριο, σύμφωνα με την εκφώνηση, είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta \ell = 0,2 \text{ m}$. Επομένως, το πλάτος A_1 της φθίνουσας ταλάντωσης στο τέλος της πρώτης περιόδου είναι: $A_1 = \Delta \ell_1 - \Delta \ell$ ή $A_1 = 0,2 \text{ m}$.

Έστω A_2 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης στο τέλος της δεύτερης περιόδου. Επειδή το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο, για τα διαδοχικά πλάτη A_0, A_1, A_2 ισχύει:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \quad \text{ή} \quad A_2 = \frac{A_1^2}{A_0} \quad \text{ή} \quad A_2 = 0,1 \text{ m}.$$

Επομένως η επιμήκυνση $\Delta \ell'$ του ελατηρίου στο τέλος της δεύτερης περιόδου της ταλάντωσης, είναι: $\Delta \ell' = \Delta \ell_1 - A_2$ ή $\Delta \ell' = 0,3 \text{ m}$.

β. Η περίοδος T της φθίνουσας ταλάντωσης είναι ίση με την περίοδο της αμείωτης ταλάντωσής του σώματος. Επομένως, είναι:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{ή} \quad T = 0,4\pi \text{ s}.$$

Το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο t σύμφωνα με τη σχέση:

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \quad \text{ή} \quad A = 0,4 e^{-\Lambda t} \quad (\text{S.I.}) \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) για $t = T = 0,4\pi$ s και $A = A_1 = 0,2$ m προκύπτει: $0,2 = 0,4e^{-0,4\pi\Lambda}$

$$\text{ή } e^{-0,4\pi\Lambda} = \frac{1}{2} \quad \text{ή } e^{0,4\pi\Lambda} = 2 \quad \text{ή } \ln e^{0,4\pi\Lambda} = \ln 2$$

$$\text{ή } 0,4\pi\Lambda = \ln 2 \quad \text{ή } \Lambda = \frac{2,5}{\pi} \ln 2 \text{ s}^{-1}.$$

γ. Η γωνιακή συχνότητα της αμείωτης ταλά-
ντωσης είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 5$ rad/s.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του
σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από
τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } x = A_0 e^{-\Lambda t} \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (2).$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση
του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι
 $x = +A_0$. Επομένως από τη σχέση (1) για $t = 0$
και $x = +A_0$, προκύπτει: $\eta\mu\varphi_0 = 1$

$$\text{ή } \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ή } \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},$$

με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ (3).

Επειδή είναι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ rad, από τη σχέση
(3) για $\kappa = 0$, προκύπτει ότι: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad.

Συνεπώς, η σχέση (1) γράφεται:

$$x = 0,4e^{-\left(\frac{2,5}{\pi} \ln 2\right)t} \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

δ. Έστω $\Delta\ell''$ η επιμήκυνση του ελατηρίου
τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το μέτρο της
δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελα-
τήριο είναι $F_{ελ} = 35$ N. Είναι: $F_{ελ} = k\Delta\ell''$
ή $\Delta\ell'' = 0,35$ m. Το πλάτος της φθίνουσας
ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$A = \Delta\ell_1 - \Delta\ell'' \quad \text{ή } A = 0,05 \text{ m.}$$

Από τη σχέση (1) για $A = 0,05$ m και $t = t_1$

$$\text{έχουμε: } 0,05 = 0,4e^{-\Lambda t_1} \quad \text{ή } \frac{1}{8} = e^{-\Lambda t_1}$$

$$\text{ή } 8 = e^{\Lambda t_1} \quad \text{ή } \ln 8 = \Lambda t_1$$

$$\text{ή } 3\ln 2 = \left(\frac{2,5}{\pi} \ln 2\right)t_1 \quad \text{ή } t_1 = 1,2\pi \text{ s}$$

$$\text{ή } t_1 = 3T.$$

Επομένως, το μέτρο της δύναμης που δέχεται
το σώμα από το ελατήριο γίνεται ίσο με 35 N
στο τέλος της τρίτης περιόδου.

ε. Το ποσό θερμότητας που εκλύεται στο πε-
ριβάλλον από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη
χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$Q = E_{αρχ} - E_{τελ} \quad \text{ή } Q = \frac{1}{2}DA_0^2 - \frac{1}{2}DA^2$$

$$\text{ή } Q = \frac{1}{2}k(A_0^2 - A^2) \quad \text{ή } Q = 7,875 \text{ J.}$$

3.6 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

ΘΕΜΑΤΑ Α

Θέματα πολλαπλής επιλογής

3. γ	4. α	5. γ	6. β	7. β	8. β	9. γ	10. β	11. β
12. δ	13. β	14. γ	15. β	16. δ	17. γ	18. δ	19. γ	20. β

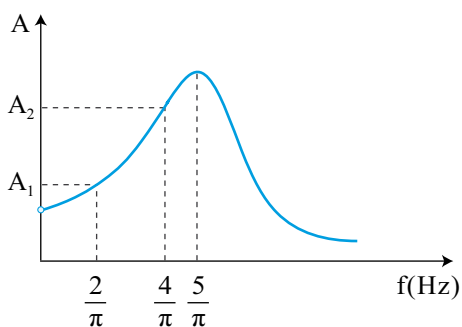
Θέματα του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

21.	α. Σ	β. Σ	γ. Λ	δ. Λ	ε. Σ	
22.	α. Λ	β. Σ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Σ	
23.	α. Σ	β. Σ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Σ	
24.	α. Σ	β. Σ	γ. Σ	δ. Λ	ε. Λ	
25.	α. Σ	β. Λ	γ. Σ	δ. Λ	ε. Λ	
26.	α. Σ	β. Σ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Λ	στ. Σ

27. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος υπολογίζεται από τη σχέση: $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ ή $f_0 = \frac{5}{\pi}$ Hz.

Όταν αυξάνουμε τη συχνότητα της εξωτερικής περιοδικής δύναμης από την τιμή $f_1 = (2/\pi)$ Hz στην τιμή $f_2 = (4/\pi)$ Hz, τότε, όπως προκύπτει από το ακόλουθο διάγραμμα, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης αυξάνεται.



28. **A.** Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Η νέα συχνότητα περιστροφής του τροχού είναι: $f_2 = f_1 + \frac{25}{100} f_1$ ή $f_2 = \frac{5}{\pi}$ Hz.

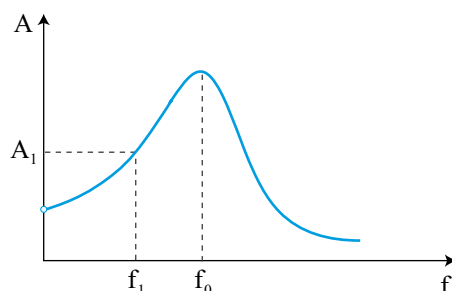
Όταν η συχνότητα περιστροφής του τροχού είναι ίση με f_2 , το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Συνεπώς, ισχύει:

$$f_2 = f_0 \text{ ή } f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ ή } k = 100 \text{ N/m.}$$

B. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Αν με αφετηρία τη συχνότητα f_1 αρχίσουμε να αυξάνουμε τη συχνότητα περιστροφής του

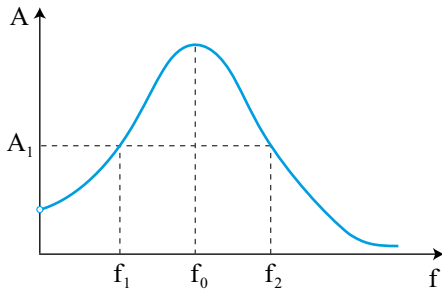
τροχού, τότε, όπως προκύπτει από το ακόλουθο διάγραμμα, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης αρχικά θα αυξηθεί και στη συνέχεια θα μειωθεί.



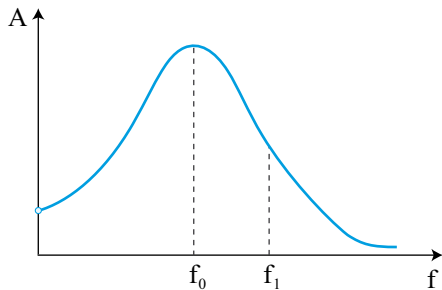
29. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Αν με αφετηρία τη συχνότητα f_1 μειώσουμε τη συχνότητα περιστροφής του τροχού T , το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης μειώνεται. Επομένως, όπως προκύπτει από το επόμενο διάγραμμα, η συχνότητα f_1 είναι μικρότερη της ιδιοσυχνότητας f_0 του συστήματος. Επειδή για τις συχνότητες f_1 και f_2 του τροχού T το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι το ίδιο, η συχνότητα f_2 είναι μεγαλύτερη της ιδιοσυχνότητας f_0 .

Επομένως, σύμφωνα με το επόμενο διάγραμμα, αν με αφετηρία τη συχνότητα f_2 αυξήσουμε τη συχνότητα περιστροφής του τροχού T , το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης μειώνεται.

**30.** Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Αν με αφετηρία τη συχνότητα f_1 αρχίσουμε να αυξάνουμε σταδιακά τη συχνότητα της εξωτερικής περιοδικής δύναμης, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης μειώνεται. Επομένως, σύμφωνα με το ακόλουθο διάγραμμα, η συχνότητα f_1 είναι μεγαλύτερη από την ιδιοσυχνότητα f_0 του συστήματος.



Συνεπώς, για να φέρουμε το σύστημα σε συντονισμό, ενώ αυτό ταλαντώνεται με συχνότητα f_1 , πρέπει να αυξήσουμε την ιδιοσυχνότητα f_0 , ώστε να γίνει ίση με τη συχνότητα f_1 . Από τη σχέση $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ προκύπτει ότι για να αυξήσουμε την ιδιοσυχνότητα του συστήματος, πρέπει να μειώσουμε τη μάζα του.

31. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Για να φέρουμε το σύστημα σε κατάσταση συντονισμού, χωρίς να μεταβάλουμε τη συχνότητα περιστροφής του τροχού και τη μάζα του σώματος Σ , πρέπει να αντικαταστήσουμε το ελατήριο με ένα άλλο σταθεράς k_2 , ώστε

$$\text{να ισχύει: } f_1 = f'_0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k_1}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

$$\text{ή } k_2 = 4k_1.$$

32. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Επειδή η σταθερά απόσβεσης του συστήματος είναι πολύ μικρή και το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού, η συχνότητα του διεγέρτη θεωρείται ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του συστήματος. Αν αυξήσουμε τη σταθερά απόσβεσης b , χωρίς να μεταβάλουμε τη συχνότητα του διεγέρτη, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης θα μειωθεί και η συχνότητα συντονισμού του συστήματος θα γίνει μικρότερη από την ιδιοσυχνότητά του. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα το σύστημα να μη βρίσκεται πλέον σε κατάσταση συντονισμού.

33. Α. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος προκύπτει ότι $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Το σύστημα ελατήριο – σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα f η οποία είναι ίση με τη συχνότητα της εξωτερικής περιοδικής δύναμης.

$$\text{Είναι: } \omega = 2\pi f \quad \text{ή} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{ή} \quad f = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}.$$

B. Σωστή επιλογή είναι η **γ**.

Εφόσον το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού για τη γωνιακή συχνότητα ω' της εξαναγκασμένης ταλάντωσης ισχύει:

$$\omega' = \omega_0 \quad \text{ή} \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ή} \quad \omega' = 20 \text{ rad/s}$$

Έστω A το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, όταν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Είναι: $v_{\max} = \omega' A$

$$\text{ή} \quad A = 0,5 \text{ m} \quad \text{ή} \quad A_{\max} = 0,5 \text{ m}.$$

34. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του συστήματος εξαρτάται από την απόλυτη τιμή της διαφοράς ανάμεσα στη συχνότητα f του διεγέρτη και στην ιδιοσυχνότητα f_0 του συστήματος ($|f - f_0|$). Όταν η απόλυτη τιμή της παραπάνω διαφοράς μειώνεται, το σύστημα βρίσκεται πιο κοντά προς την κατάσταση συντονισμού και το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης αυξάνεται. Επειδή το σύστημα ταλαντώνεται με συχνότητα f_1 μικρότερη της ιδιοσυχνότητας f_0 του συστήματος ($f_1 < f_0$), η απόλυτη τιμή της διαφοράς ανάμεσα στη συχνότητα του διεγέρτη και την ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι:

$$|f_1 - f_0| = f_0 - f_1 \quad (1).$$

Από τη σχέση που δίνει την ιδιοσυχνότητα του συστήματος: $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ προκύπτει ότι, αν μειώσουμε τη μάζα του συστήματος η ιδιοσυχνότητα του f_0 θα αυξηθεί, οπότε, σύμφωνα με τη σχέση (1), η απόλυτη τιμή της διαφοράς ανάμεσα στη συχνότητα του διεγέρτη και την ιδιοσυχνότητα του συστήματος θα αυξηθεί.

Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης θα μειωθεί.

35. Σωστή επιλογή είναι η **α**.

Έστω f_2 η νέα συχνότητα της εξωτερικής περιοδικής δύναμης. Είναι:

$$f_2 = f_1 - \frac{50}{100} f_1 \quad \text{ή} \quad f_2 = \frac{f_1}{2} \quad \text{ή} \quad f_2 = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}.$$

Όταν η συχνότητα της εξωτερικής περιοδικής δύναμης είναι ίση με f_2 το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Επομένως,

$$\text{ισχύει: } f_2 = f_0 \quad \text{ή} \quad f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ή} \quad k = 100 \text{ N/m}.$$

36. Σωστή επιλογή είναι η **β**.

Η ιδιοσυχνότητα f_{01} της εξαναγκασμένης ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 είναι:

$$f_{01} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{ή} \quad f_{01} = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}.$$

Η ιδιοσυχνότητα f_{02} της εξαναγκασμένης ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 είναι:

$$f_{02} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \text{ή} \quad f_{02} = \frac{5}{2\pi} \text{ Hz}.$$

Αρχικά τα δύο σώματα εκτελούν εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με την ίδια συχνότητα $f = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}$. Επειδή ισχύει ότι $f = f_{01}$ και $f \neq f_{02}$ το σύστημα του ελατηρίου (1) και του σώματος Σ_1 βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού και ταλαντώνεται με το μέγιστο δυνατό πλάτος, ενώ το σύστημα του ελατηρίου (2) και του σώματος Σ_2 δεν βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Αν μειώσουμε τη συχνότητα της δοκού κατά 50%, τότε τα δύο σώματα εκτελούν εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με συχνό-

$$\text{τητα: } f' = f - \frac{50}{100}f \quad \text{ή} \quad f' = \frac{f}{2} \quad \text{ή} \quad f' = \frac{5}{2\pi} \text{ Hz.}$$

Επειδή ισχύει ότι $f' \neq f_{01}$ και $f' = f_{02}$, σε αυτή την περίπτωση το σύστημα του ελατηρίου (2) και του σώματος Σ_2 θα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού και το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσής του θα αυξηθεί, ενώ το σύστημα του ελατηρίου (1) και του σώματος Σ_1 δεν θα βρίσκεται πλέον σε κατάσταση συντονισμού και το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του θα μειωθεί.

37. Σωστή επιλογή είναι η α.

Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας προκύπτει ότι η γωνιακή συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης που εκτελεί είναι $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Για να βρίσκεται το σύστημα σε κατάσταση συντονισμού πρέπει η συχνότητα f της εξαναγκασμένης ταλάντωσης να είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του συστήματος.

$$\text{Δηλαδή είναι: } f = f_0 \quad \text{ή} \quad \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \text{ή} \quad \omega = \omega_0$$

$$\text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ή} \quad m = \frac{k}{\omega^2} \quad \text{ή} \quad m = 2 \text{ kg.}$$

38. Σωστή επιλογή είναι η α.

Για να βρεθεί το σύστημα σε κατάσταση συντονισμού, πρέπει η συχνότητα του διεγέρτη να γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του συστήματος. Έστω f' η συχνότητα του διεγέρτη, όταν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση

$$\text{συντονισμού. Είναι: } f' = f_0 \quad \text{ή} \quad f' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \text{ή} \quad f' = \frac{5}{2\pi} \text{ Hz.}$$

Επομένως, το ζητούμενο ποσοστό είναι:

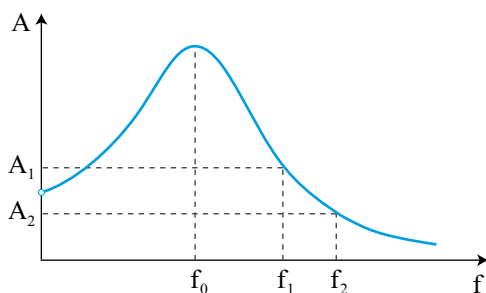
$$\pi = \frac{f' - f}{f} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 25\%.$$

39. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Έστω f_1 η αρχική συχνότητα του διεγέρτη.

$$\text{Είναι: } T_1 < \frac{1}{f_0} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{f_1} < \frac{1}{f_0} \quad \text{ή} \quad f_1 > f_0.$$

Αν η περίοδος του διεγέρτη μειωθεί, τότε η συχνότητά του θα αυξηθεί.



Όπως προκύπτει από το παραπάνω διάγραμμα, όταν αυξάνεται η συχνότητα του διεγέρτη, ξεκινώντας από την τιμή f_1 , το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης μειώνεται.

40. α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος προκύπτει ότι $\omega = 10 \text{ rad/s}$, $v_{\max} = 4 \text{ m/s}$ και $\varphi_0 = 0$.

Έστω A το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης. Είναι: $v_{\max} = \omega A$ ή $A = 0,4 \text{ m}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$\text{ή } x = 0,4\eta\mu(10t) \text{ (S.I.)}$$

β. Η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ ή } f = \frac{5}{\pi} \text{ Hz.}$$

Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος υπολογίζεται από τη σχέση: $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ ή $f_0 = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}$.

Επειδή ισχύει $f = f_0$, το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού και το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι το μέγιστο δυνατό.

γ. Επειδή το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού ισχύει: $F_{\varepsilon\xi} = -F'$

$$\text{ή } F_{\varepsilon\xi} = 0,02v \text{ (S.I.) ή } F_{\varepsilon\xi} = 0,08\sigma\upsilon\nu(10t) \text{ (S.I.)}$$

δ. Έστω v η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = (\pi/15) \text{ s}$. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της ταχύτητας για $t = (\pi/15) \text{ s}$ προκύπτει: $v = 4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ m/s}$ ή $v = -2 \text{ m/s}$.

Ο ζητούμενος ρυθμός υπολογίζεται από τη σχέση: $\frac{dW_{F'}}{dt} = -F'v$ ή $\frac{dW_{F'}}{dt} = -0,02v^2 \text{ (S.I.)}$

$$\text{ή } \frac{dW_{F'}}{dt} = -0,08 \text{ J/s.}$$

41. α. Έστω T η περίοδος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης. Είναι: $\frac{T}{2} = 0,1\pi \text{ s}$

ή $T = 0,2\pi \text{ s}$. Συνεπώς, η συχνότητα f της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι:

$$f = \frac{1}{T} \text{ ή } f = \frac{5}{\pi} \text{ Hz.}$$

β. Εφόσον το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = 0$. Η γωνιακή συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι:

$\omega = 2\pi f$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση: $v = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t)$ ή $v = 2\sigma\upsilon\nu(10t) \text{ (S.I.)}$.

γ. Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ ή } f_0 = \frac{10}{\pi} \text{ Hz.}$$

Επειδή είναι $f \neq f_0$, το σύστημα δεν βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού.

Ο ζητούμενος λόγος είναι:

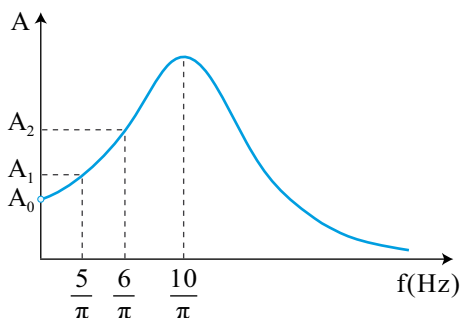
$$\frac{K_{\max}}{U_{\max}} = \frac{\frac{1}{2}mv_{\max}^2}{\frac{1}{2}DA^2} \text{ ή } \frac{K_{\max}}{U_{\max}} = \frac{m(\omega A)^2}{kA^2}$$

$$\text{ή } \frac{K_{\max}}{U_{\max}} = \frac{m\omega^2}{k} \text{ ή } \frac{K_{\max}}{U_{\max}} = \frac{1}{4}.$$

δ. Έστω f' η νέα συχνότητα του διεγέρτη. Είναι: $f' = f + \frac{20}{100}f$ ή $f' = 1,2f$ ή $f' = \frac{6}{\pi} \text{ Hz}$.

Επειδή αυξάνουμε τη συχνότητα του διεγέρτη από την τιμή $f = (5/\pi) \text{ Hz}$ στην τιμή

$f' = (6/\pi)$ Hz, η οποία είναι μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα f_0 του συστήματος, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης αυξάνεται, όπως φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



42. α. Η συχνότητα περιστροφής του τροχού T είναι ίση με τη συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης. Αρχικά η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι ίση με f_1 . Αν αυξήσουμε τη συχνότητα f_1 κατά 25%, τότε το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του συστήματος γίνεται το μέγιστο δυνατό. Έστω f_2 η νέα συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης.

Είναι: $f_2 = f_1 + \frac{25}{100}f_1$ ή $f_2 = 1,25f_1$.

Όταν η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι ίση με f , το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Επομένως, ισχύει:

$$f_2 = f_0 \text{ ή } 1,25f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{m}} \text{ ή } f_1 = \frac{4}{\pi} \text{ Hz.}$$

β. Η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του συστήματος του ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k_2 και του σώματος μάζας m_2 είναι: $f_2 = 2f_1$ ή $f_2 = \frac{8}{\pi}$ Hz.

Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος $k_2 - m_2$ είναι: $f'_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ ή $f'_0 = \frac{2,5}{\pi}$ Hz.

Επειδή είναι $f_2 \neq f'_0$, το σύστημα ($k_2 - m_2$) δεν βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού.

γ. Για να επιτευχθεί η κατάσταση συντονισμού πρέπει η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης να γίνει ίση με: $f_3 = f'_0$

ή $f_3 = \frac{2,5}{\pi}$ Hz. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{f_3 - f_2}{f_2} \cdot 100\% \text{ ή } \pi = -68,75\%.$$

43. α. Αν το σύστημα εκτελούσε απλή αρμονική ταλάντωση, η περίοδος της θα ήταν ίση με την ιδιοπερίοδο T_0 του συστήματος και ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων του σώματος από τη θέση ισορροπίας θα ήταν ίσος με $T_0/2$. Έστω T_1 η περίοδος και f_1 η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα. Είναι:

$$\frac{T_0}{2} = T_1 \text{ ή } \frac{1}{2f_0} = \frac{1}{f_1} \text{ ή } f_1 = 2f_0.$$

Επειδή $f_1 \neq f_0$, το σύστημα δεν βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού.

β. Για να βρεθεί το σύστημα σε κατάσταση συντονισμού, πρέπει η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης να γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του συστήματος. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{f_{\text{τελ}} - f_{\text{αρχ}}}{f_{\text{αρχ}}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{f_0 - f_1}{f_1} \cdot 100\% \text{ ή } \pi = -50\%.$$

γ. Σωστή επιλογή είναι η ii.

Έστω m' ($m' > m$) η νέα μάζα και f'_0 η νέα ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

Είναι: $f'_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m'}}$ (1).

Η αρχική ιδιοσυχνότητα του συστήματος δίνεται από τη σχέση: $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ (2).

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και

(2) έχουμε: $\frac{f'_0}{f_0} = \sqrt{\frac{m}{m'}}$ (3).

Εφόσον είναι $m' > m$, από τη σχέση (3) προκύπτει ότι: $f'_0 < f_0$. Αρχικά, η απόλυτη τιμή της διαφοράς ανάμεσα στη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης και στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι: $|f_1 - f_0| = f_1 - f_0$ (4).

Αν αυξήσουμε τη μάζα του συστήματος χωρίς να μεταβάλλουμε τη συχνότητα f_1 της διεγείρουσας δύναμης, τότε η απόλυτη τιμή της διαφοράς ανάμεσα στη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης και την ιδιοσυχνότητα του συστήματος γίνεται: $|f_1 - f'_0| = f_1 - f'_0$ (5).

Όσο μικρότερη είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς ανάμεσα στη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης και στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος, τόσο μεγαλύτερο είναι το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης. Επειδή είναι $f'_0 < f_0$, όπως προκύπτει από τις σχέσεις (4) και (5), η απόλυτη τιμή της διαφοράς ανάμεσα στη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης και στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος αυξάνεται. Επομένως, αν αυξήσουμε τη μάζα του συστήματος, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης μειώνεται.

44. α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος προκύπτει ότι η γωνιακή συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι $\omega = 10\pi \text{ rad/s}$, το πλάτος της επιτάχυνσης του σώματος είναι $a_{\max} = 80 \text{ m/s}^2$ και η αρχική φάση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Έστω A το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης.

Είναι: $a_{\max} = \omega^2 A$ ή $A = 0,08 \text{ m}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$

ή $x = 0,08\eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.)}$.

β. Έστω f η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης. Είναι: $\omega = 2\pi f$ ή $f = 5 \text{ Hz}$.

Επειδή το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι μέγιστο, το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Επομένως,

ισχύει: $f = f_0$ ή $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ ή $k = 100 \text{ N/m}$.

γ. Επειδή το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού, ισχύει: $F_{\epsilon\xi} = -F'$ ή $F_{\epsilon\xi} = b v$.

Ο ζητούμενος ρυθμός υπολογίζεται από τη

σχέση: $\frac{dW_{F_{\epsilon\xi}}}{dt} = F_{\epsilon\xi} v$ ή $\frac{dW_{F_{\epsilon\xi}}}{dt} = b v^2$

ή $\frac{dW_{F_{\epsilon\xi}}}{dt} = b v_{\max}^2$ ή $\frac{dW_{F_{\epsilon\xi}}}{dt} = b(\omega A)^2$

ή $\frac{dW_{F_{\epsilon\xi}}}{dt} = 0,64 \text{ J/s}$.

δ. Στο χρονικό διάστημα Δt_1 , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 1 \text{ s}$, το σώμα εκτελεί N πλήρεις ταλαντώσεις, οι

οποίες υπολογίζονται από τη σχέση: $N_1 = f \Delta t_1$ ή $N_1 = 5$ πλήρεις ταλαντώσεις.

Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται στιγμιαία 2 φορές σε κάθε πλήρη ταλάντωση. Επομένως, στο χρονικό διάστημα Δt_1 η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται στιγμιαία 10 φορές. Στο χρονικό διάστημα Δt_2 , από τη χρονική στιγμή $t = 1 \text{ s}$ έως τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$, η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται στιγμιαία άλλες 8 φορές, οπότε το πλήθος των πλήρων ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα στο χρονικό διάστημα Δt_2 είναι: $N_2 = 4$ πλήρεις ταλαντώσεις. Έστω f' η νέα συχνότητα περιστροφής

του τροχού T . Είναι: $f' = \frac{N_2}{\Delta t_2}$ ή $f' = 4 \text{ Hz}$.

Το πλάτος A' της εξαναγκασμένης ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά τη μεταβολή της συχνότητας του τροχού T είναι:

$A' = A - \frac{25}{100} A$ ή $A' = 0,06 \text{ m}$.

Η μέγιστη ταχύτητα με την οποία ταλαντώνεται το σώμα μετά τη μεταβολή της συχνότητας περιστροφής του τροχού T υπολογίζεται από τη σχέση: $v_{\max} = \omega' A'$ ή $v'_{\max} = 2\pi f' A'$

ή $v'_{\max} = 0,48\pi \text{ m/s}$.

45. α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας προκύπτει: $\omega_1 = 6 \text{ rad/s}$.

Είναι: $\omega_1 = 2\pi f_1$ ή $f_1 = \frac{3}{\pi} \text{ Hz}$.

Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος προκύπτει: $\omega_2 = 16 \text{ rad/s}$.

Είναι: $\omega_2 = 2\pi f_2$ ή $f_2 = \frac{8}{\pi} \text{ Hz}$.

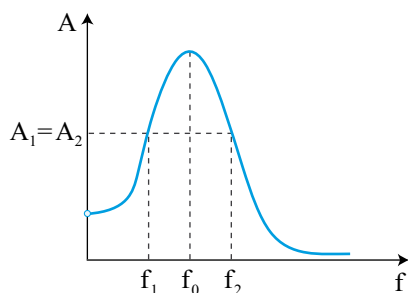
β. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος προκύπτει:

$A_1 = 0,2 \text{ m}$. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος προκύπτει:

$v_{\max} = 3,2 \text{ m/s}$. Είναι: $v_{\max} = \omega_2 A_2$ ή $A_2 = 0,2 \text{ m}$.

γ. Σωστή επιλογή είναι η ii.

Παρατηρούμε ότι για τις συχνότητες f_1 και f_2 τα πλάτη A_1 και A_2 αντίστοιχα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι ίσα.



Επομένως, όπως προκύπτει από το διάγραμμα του παραπάνω σχήματος είναι: $f_1 < f_0 < f_2$.

Επομένως, είναι: $f_0 = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}$.

δ. Από τη σχέση: $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ προκύπτει:
 $k = 100 \text{ N/m}$.

ε. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης για $A = A' = 0,05 \text{ m}$ και για $t = 2 \text{ s}$ προκύπτει:

$$0,05 = 0,2e^{-2\Lambda} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{4} = e^{-2\Lambda} \quad \text{ή} \quad 4 = e^{2\Lambda}$$

$$\text{ή} \quad \ln 4 = \ln e^{2\Lambda} \quad \text{ή} \quad 2\ln 2 = 2\Lambda \quad \text{ή} \quad \Lambda = \ln 2 \text{ s}^{-1}.$$

46. α. Η συχνότητα των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων που εκτελούν τα δύο συστήματα είναι $f = (5/\pi) \text{ Hz}$. Επειδή το πλάτος της

ταλάντωσης του συστήματος $(k_1 - m_1)$ είναι

$$\text{μέγιστο, ισχύει: } f = f_{01} \quad \text{ή} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

$$\text{ή} \quad k_1 = 100 \text{ N/m}.$$

β. Οι συχνότητες των απλών αρμονικών ταλαντώσεων που εκτελούν τα δύο συστήματα είναι ίσες με τις ιδιοσυχνότητές τους.

Επομένως, είναι: $f_{01} = 2f_{02}$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 2 \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad \text{ή} \quad \frac{k_1}{m_1} = 4 \frac{k_2}{m_2}$$

$$\text{ή} \quad k_2 = \frac{k_1}{2} \quad \text{ή} \quad k_2 = 50 \text{ N/m}.$$

γ. Όταν το σώμα Σ_2 εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κάθε $T/2$, όπου T η περίοδος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης. Επομένως, η συχνότητα f_2 διέλευσης του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας, όταν εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση, είναι: $f_2 = \frac{1}{T}$ ή $f_2 = \frac{2}{T}$

$$\text{ή} \quad f_2 = 2f \quad \text{ή} \quad f_2 = \frac{10}{\pi} \text{ Hz}.$$

Όταν το σώμα Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση διέρχεται από τη θέση ισορροπίας κάθε $T_{02}/2$, όπου T_{02} η ιδιοπερίοδος του συστήματος $(k_2 - m_2)$. Επομένως, η συχνότητα f'_2 διέλευσης του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας, όταν εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, είναι: $f'_2 = \frac{1}{T_{02}/2}$ ή $f'_2 = \frac{2}{T_{02}}$

$$\text{ή} \quad f'_2 = 2f_{02} \quad \text{ή} \quad f'_2 = 2 \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \text{ή} \quad f'_2 = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}.$$

$$\text{Επομένως, είναι: } \frac{f_2}{f'_2} = 2.$$

δ. Για να γίνει το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα $(k_2 - m_2)$ μέγιστο πρέπει η συχνότητα ταλάντωσης της δοκού να γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα f_{02} του συστήματος. Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος $(k_2 - m_2)$ είναι:

$$f_{02} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad \text{ή} \quad f_{02} = \frac{2,5}{\pi} \text{ Hz.}$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{|f_{02} - f|}{f} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 50\%.$$

Κεφάλαιο 4ο: Κύματα

4.1 Μηχανικά κύματα

ΘΕΜΑΤΑ Α

Θέματα πολλαπλής επιλογής

11. α	12. γ	13. δ	14. γ	15. β	16. β	17. δ	18. β	19. γ
20. δ	21. α	22. α	23. β	24. α	25. γ	26. γ	27. δ	28. β
29. γ	30. β	31. α	32. δ	33. β	34. γ	35. δ	36. α	

Θέματα του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

37.	α. Σ	β. Λ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Σ
38.	α. Σ	β. Λ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Λ
39.	α. Σ	β. Σ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Λ
40.	α. Σ	β. Σ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Σ
41.	α. Λ	β. Σ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Σ

42. Σωστή επιλογή είναι η α.

Η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος σε ένα ελαστικό μέσο εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες του ελαστικού μέσου. Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε:

$$v_s = \lambda f \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{v_s}{f}.$$

Προκύπτει, δηλαδή, ότι αν αυξήσουμε τη συχνότητα του κύματος, το μήκος κύματος του θα μειωθεί. Το πλήθος των μηκών κύματος που «χωρούν» σε ορισμένη απόσταση d δίνεται από τη σχέση: $N = \frac{d}{\lambda}$ (1).

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η μείωση του μήκους κύματος προκαλεί αύξηση του πλήθους των κυμάτων που «χωρούν» στην απόσταση d .

43. Σωστή επιλογή είναι η α.

Όταν το μήκος κύματος του κύματος είναι λ , η θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής γράφεται: $v_1 = \lambda f_1$ (1).

Όταν το μήκος κύματος του κύματος γίνει 2λ , η θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής γράφεται: $v_2 = 2\lambda f_2$ (2).

Επειδή το κύμα διαδίδεται και στις δύο περιπτώσεις στο ίδιο ελαστικό μέσο, ισχύει:

$$v_1 = v_2 \quad \text{ή} \quad \lambda f_1 = 2\lambda f_2 \quad \text{ή} \quad f_1 = 2f_2 \quad (3).$$

Έστω Δt_1 και Δt_2 τα χρονικά διαστήματα που μεσολαβούν ανάμεσα σε δύο διαδοχικές διελεύσεις ενός υλικού σημείου του ελαστικού

μέσου από τη θέση ισορροπίας του στην περίπτωση όπου το κύμα έχει μήκος κύματος λ και στην περίπτωση όπου το κύμα έχει μήκος κύματος 2λ , αντίστοιχα. Έχουμε:

$$\Delta t_1 = \frac{T_1}{2} \quad (4) \quad \text{και} \quad \Delta t_2 = \frac{T_2}{2} \quad (5).$$

$$\text{Συνεπώς, είναι:} \quad \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{f_2}{f_1},$$

$$\text{ή, λόγω της σχέσης (3):} \quad \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ή} \quad \Delta t_2 = 2\Delta t_1.$$

44. Α. Σωστή επιλογή είναι η β.

Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων στο ελαστικό μέσο είναι η ίδια ($v_1 = v_2$). Έστω λ_2 το μήκος κύματος του κύματος (2).

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών στο στιγμιότυπο ενός κύματος είναι ίση με ένα μήκος κύματος.

$$\text{Σύμφωνα με την εκφώνηση, έχουμε:} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{2}.$$

Έστω T_2 η περίοδος του κύματος (2). Έχουμε:

$$v_1 = v_2 \quad \text{ή} \quad \lambda f = \lambda_2 f_2 \quad \text{ή} \quad \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda_2}{T_2} \quad \text{ή} \quad \frac{\lambda}{\lambda_2} = \frac{T}{T_2}$$

$$\text{ή} \quad \frac{T}{T_2} = 2 \quad \text{ή} \quad T_2 = \frac{T}{2}.$$

Έστω A_2 το πλάτος του κύματος (2).

$$\text{Έχουμε:} \quad E_2 = 4E_1 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D_2 A_2^2 = 4 \frac{1}{2} D_1 A^2$$

$$\text{ή} \quad \Delta m \omega_2^2 A_2^2 = 4 \Delta m \omega^2 A^2$$

$$\text{ή} \quad \left(\frac{2\pi}{T_2} \right)^2 A_2^2 = 4 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 A^2$$

$$\text{ή } \left(\frac{A_2}{A}\right)^2 = 4 \left(\frac{T_2}{T}\right)^2 \quad \text{ή } \frac{A_2}{A} = 2 \frac{T_2}{T}$$

$$\text{ή } \frac{A_2}{A} = 1 \quad \text{ή } A_2 = A.$$

Η εξίσωση του κύματος (2) είναι η:

$$y = A_2 \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T_2} - \frac{x}{\lambda_2} \right)$$

$$\text{ή } y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{2t}{T} - \frac{2x}{\lambda} \right).$$

B. Σωστή επιλογή είναι η β.

$$\frac{v_{\max(1)}}{v_{\max(2)}} = \frac{\omega A}{\omega_2 A_2} \quad \text{ή} \quad \frac{v_{\max(1)}}{v_{\max(2)}} = \frac{\frac{2\pi}{T} A}{\frac{2\pi}{T_2} A_2}$$

$$\text{ή } \frac{v_{\max(1)}}{v_{\max(2)}} = \frac{T_2 A}{T A_2} \quad \text{ή } \frac{v_{\max(1)}}{v_{\max(2)}} = \frac{1}{2}.$$

45. Σωστή επιλογή είναι η β.

Η χρονική στιγμή στην οποία ξεκινά να ταλαντώνεται το υλικό σημείο Κ του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση $x_K = +\frac{3\lambda}{2}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$t = \frac{x_K}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t = \frac{\frac{3\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{T}} \quad \text{ή} \quad t = \frac{3T}{2}.$$

46. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Η ζητούμενη απόσταση είναι $\Delta x = \lambda$. Η εξίσωση του κύματος που μας δίνεται γράφεται:

$$y = A \eta \mu 2\pi \left(2t - \frac{x}{8} \right) \quad (\text{S.I.}) \quad (1).$$

Η γενική εξίσωση του κύματος είναι:

$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (2).$$

Από τη σύγκριση των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτει $\lambda = 8 \text{ m}$.

Επομένως, είναι: $\Delta x = 8 \text{ m}$.

B. Σωστή επιλογή είναι η α.

Το χρονικό διάστημα στο οποίο η κυματική εικόνα επαναλαμβάνεται ισούται με μία περίοδο του κύματος. Από τη σύγκριση των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{1}{T} = 2 \text{ s}^{-1} \quad \text{ή} \quad T = 0,5 \text{ s}.$$

47. Σωστή επιλογή είναι η β.

Η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται στο ελαστικό μέσο (1) γράφεται:

$$y = 0,2 \eta \mu 2\pi (4t - 2x) \quad (\text{S.I.}) \quad (1).$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει:

$$\frac{1}{T_1} = 4 \text{ s}^{-1} \quad \text{ή} \quad f_1 = 4 \text{ Hz} \quad \text{και}$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = 2 \text{ m}^{-1} \quad \text{ή} \quad \lambda_1 = 0,5 \text{ m}.$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στο ελαστικό μέσο (1) είναι: $v_1 = \lambda_1 f_1$ ή $v_1 = 2 \text{ m/s}$.

Η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται στο ελαστικό μέσο (2) γράφεται:

$$y_2 = 0,1 \eta \mu 2\pi (2t - 3x) \quad (\text{S.I.}) \quad (2).$$

Από την εξίσωση (2) προκύπτει:

$$\frac{1}{T_2} = 2 \text{ s}^{-1} \quad \text{ή} \quad f_2 = 2 \text{ Hz} \quad \text{και}$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = 3 \text{ m}^{-1} \quad \text{ή} \quad \lambda_2 = \frac{1}{3} \text{ m}.$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στο ελαστικό μέσο (2) είναι: $v_2 = \lambda_2 f$ ή $v_2 = \frac{2}{3} \text{ m/s}$.

Έστω t_M και t_N οι χρονικές στιγμές στις οποίες ξεκινούν να ταλαντώνονται τα υλικά σημεία M και N αντίστοιχα. Ισχύει:

$$t_M = \frac{|x_M|}{v_1} \quad (3) \quad \text{και} \quad t_N = \frac{|x_N|}{v_2} \quad (4).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (3) και

$$(4) \text{ προκύπτει: } \frac{t_M}{t_N} = \frac{|x_M|v_2}{|x_N|v_1} \quad (5).$$

Επειδή ισχύει $|x_M| = |x_N|$, η σχέση (5) γράφεται:

$$\text{τα: } \frac{t_M}{t_N} = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{ή} \quad \frac{t_M}{t_N} = \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad t_N = 3t_M.$$

Επομένως, η ταλάντωση του σημείου M ξεκινά αργότερα από την ταλάντωση του σημείου N.

48. Σωστή επιλογή είναι η β.

Έστω t_1 και t_2 οι χρονικές στιγμές στις οποίες ξεκινούν να ταλαντώνονται τα σημεία A και

B αντίστοιχα. Ισχύει: $t_1 = \frac{x_A}{v_\delta}$ (1) και

$$t_2 = \frac{x_B}{v_\delta} \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και

$$(2) \text{ έχουμε: } \frac{t_1}{t_2} = \frac{x_A}{x_B} \quad (3).$$

Επειδή ισχύει $t_1 > t_2$, από τη σχέση (3) προκύπτει: $x_A > x_B$. Οι φάσεις των ταλαντώσεων των υλικών σημείων A και B τη χρονική στιγμή t_1 είναι αντίστοιχα: $\varphi_A = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_A}{\lambda} \right)$ (4)

$$\text{και} \quad \varphi_B = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_B}{\lambda} \right) \quad (5).$$

Επειδή ισχύει: $x_A > x_B$, από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει: $\varphi_A < \varphi_B$.

49. Α. Σωστή επιλογή είναι η β.

Επειδή ισχύει: $\varphi_A > \varphi_K$, το σημείο Λ αρχίζει να ταλαντώνεται νωρίτερα από το σημείο K. Επομένως, το κύμα διαδίδεται από το σημείο Λ προς το σημείο K.

B. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των σημείων K και Λ είναι: $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_K$

$$\text{ή} \quad \Delta\varphi = \pi \text{ rad.}$$

Η απόσταση Δx μεταξύ των θέσεων ισορροπίας των σημείων K και Λ υπολογίζεται από τη σχέση: $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_K$

$$\text{ή} \quad \Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_A}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad \Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \quad \text{ή} \quad \Delta x = \frac{\lambda \Delta\varphi}{2\pi} \quad \text{ή} \quad \Delta x = \frac{\lambda}{2}.$$

Η χρονική διαφορά έναρξης των δύο ταλαντώσεων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{T}} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{T}{2}.$$

Γ. Σωστή επιλογή είναι η β.

Έστω t_1 μία χρονική στιγμή στην οποία το σημείο Λ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

$$\text{Ισχύει: } v_A = v_{\max} \sin 2\pi \left(\frac{t_1}{T} + \frac{x_A}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad +v_{\max} = v_{\max} \sin \varphi_A \quad \text{ή} \quad \sin \varphi_A = +1$$

$$\text{ή} \quad \varphi_A = 2\kappa\pi, \text{ με } \kappa = 0, +1, +2, \dots \quad (1).$$

Την ίδια χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα με την οποία ταλαντώνεται το υλικό σημείο K είναι:

$$v_K = v_{\max} \sin 2\pi \left(\frac{t_1}{T} + \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v_K = v_{\max} \sin \varphi_K \text{ ή } v_K = v_{\max} \sin(\varphi_A - \pi)$$

ή, λόγω της σχέσης (1):

$$v_K = v_{\max} \sin(2\pi - \pi) \text{ ή } v_K = v_{\max} \sin \pi$$

$$\text{ή } v_K = -v_{\max}.$$

50. Σωστή επιλογή είναι η β.

Οι φάσεις των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ τη χρονική στιγμή t_1 είναι αντί-

$$\text{στοιχα: } \varphi_K = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) \quad (1)$$

$$\text{και } \varphi_A = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_A}{\lambda} \right) \quad (2).$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$\varphi_K - \varphi_A = 2\pi \frac{x_A - x_K}{\lambda} \text{ ή } 2\pi = 2\pi \frac{x_A - x_K}{\lambda}$$

$$\text{ή } x_A - x_K = \lambda \text{ ή } x_A = +2\lambda.$$

51. Σωστή επιλογή είναι η α.

Η εξίσωση της φάσης του αρμονικού κύματος τη χρονική στιγμή t_1 σε συνάρτηση με τη θέση x των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου στον άξονα $x'Ox$ δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (1).$$

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι για $x = 0$ είναι $\varphi = 4\pi \text{ rad}$. Επομένως, από τη σχέση (1) για $x = 0$ και $\varphi = 4\pi \text{ rad}$ προκύπτει:

$$4\pi = \frac{2\pi t_1}{T} \text{ ή } T = 1 \text{ s}.$$

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι για $x = 2 \text{ m}$ είναι $\varphi = 0$. Επομένως, από τη σχέση (1) για $x = 2 \text{ m}$ και $\varphi = 0$ προκύπτει:

$$0 = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{2}{\lambda} \right) \text{ ή } \frac{t_1}{T} = \frac{2}{\lambda} \text{ ή } \lambda = 1 \text{ m}.$$

Η εξίσωση του κύματος στο (S.I.) είναι:

$$y = 0,2\eta\mu 2\pi(t - x).$$

52. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Οι φάσεις των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ τη χρονική στιγμή t_1 είναι αντί-

$$\text{στοιχα: } \varphi_K = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) \quad (1)$$

$$\text{και } \varphi_A = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_A}{\lambda} \right) \quad (2).$$

Επειδή είναι $x_A > x_K$ από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $\varphi_A < \varphi_K$. Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ

$$\text{είναι: } \varphi_K - \varphi_A = 2\pi \frac{x_A - x_K}{\lambda}$$

$$\text{ή } \varphi_K - \varphi_A = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\text{ή } \varphi_A = \varphi_K - \frac{\pi}{2} \quad (1).$$

Τη χρονική στιγμή t_1 η απομάκρυνση του υλικού σημείου Κ είναι $y_K = +A$. Έχουμε:

$$y_K = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) \text{ ή } y_K = A\eta\mu \varphi_K$$

$$\text{ή } +A = A\eta\mu \varphi_K \text{ ή } \eta\mu \varphi_K = 1$$

$$\text{ή } \varphi_K = 2\pi\kappa + \frac{\pi}{2}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (2).$$

Η σχέση (1), λόγω της σχέσης (2), γίνεται:

$$\varphi_A = 2\pi\kappa, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (3).$$

Η απομάκρυνση του σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$y_\Lambda = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad y_\Lambda = A\eta\mu\varphi_\Lambda$$

ή λόγω της σχέσης (3):

$$y_\Lambda = A\eta\mu 2\kappa\pi \quad \text{ή} \quad y_\Lambda = 0.$$

53. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Το υλικό σημείο Σ ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσής του τη χρονική στιγμή t στην οποία φτάνει για πρώτη φορά στην ακραία θετική

του θέσης. Έχουμε: $y_\Sigma = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Sigma}{\lambda}\right)$

$$\text{ή} \quad +A = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - 1\right) \quad \text{ή} \quad 1 = \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - 1\right)$$

$$\text{ή} \quad \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - 1\right)$$

$$\text{ή} \quad 2\pi\left(\frac{t}{T} - 1\right) = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) για $\kappa = 0$ προκύπτει:

$$t = \frac{5T}{4}.$$

54. Σωστή επιλογή είναι η α.

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει:

$$A = 0,2 \text{ m} \quad \text{και} \quad T + \frac{T}{2} = 6 \text{ s} \quad \text{ή} \quad T = 4 \text{ s}.$$

Η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο Σ είναι $t_1 = 1 \text{ s}$.

$$\text{Έχουμε: } t_1 = \frac{|x_\Sigma|}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad v_\delta = 2 \text{ m/s}.$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε: $v_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = 8 \text{ m}$.

Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή} \quad y = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{4} + \frac{x}{8}\right) \quad (\text{S.I.}).$$

55. Σωστή επιλογή είναι η β.

Το υλικό σημείο Κ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_K = \frac{x_K}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_K = \frac{2\lambda}{\lambda} \quad \text{ή} \quad t_K = 2T.$$

Το πλήθος N των ταλαντώσεων που εκτελεί το υλικό σημείο Κ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 8T$ υπολογίζεται από τη σχέση: $N = f(t - t_K)$

$$\text{ή} \quad N = 6 \text{ ταλαντώσεις}.$$

56. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Από τη σχέση $y = 0,5\eta\mu(20\pi t)$ (S.I.) προκύπτει: $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$ και $A = 0,5 \text{ m}$.

Έστω f η συχνότητα του κύματος.

$$\text{Έχουμε: } \omega = 2\pi f \quad \text{ή} \quad f = 10 \text{ Hz}.$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_\delta = \lambda f \quad \text{ή} \quad v_\delta = 3 \text{ m/s}.$$

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι τα σημεία Σ_1 και Σ_2 ξεκινούν να ταλαντώνονται τις χρονικές στιγμές $t_{\Sigma_1} = 0,1 \text{ s}$ και $t_{\Sigma_2} = 0,3 \text{ s}$ αντίστοιχα. Έστω x_1 και x_2 οι θέσεις των σημείων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα στον ημιάξονα Ox .

$$\text{Έχουμε: } t_{\Sigma_1} = \frac{x_1}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad x_1 = 0,3 \text{ m}$$

$$\text{και } t_{\Sigma_2} = \frac{x_2}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad x_2 = 0,9 \text{ m}.$$

Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ τη χρονική στιγμή t_1

$$\text{είναι: } \Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } \Delta\varphi = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} \quad \text{ή } \Delta\varphi = 4\pi \text{ rad.}$$

B. Σωστή επιλογή είναι η α.

Επειδή η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Σ_1 και Σ_2 είναι $4\pi \text{ rad}$, τα δύο σημεία βρίσκονται σε συμφωνία φάσης. Για τις ταχύτητες ταλάντωσης v_{Σ_1} και v_{Σ_2} των υλικών σημείων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t_2 ισχύει: $v_{\Sigma_1} = v_{\Sigma_2}$ (1).

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του σημείου Σ_1 έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_{\Sigma_1}^2 + \frac{1}{2}Dy_{\Sigma_1}^2$$

$$\text{ή} \quad v_{\Sigma_1} = \omega\sqrt{A^2 - y_{\Sigma_1}^2} \quad \text{ή} \quad v_{\Sigma_1} = +8\pi \text{ m/s.}$$

Επομένως, από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$v_{\Sigma_2} = +8\pi \text{ m/s}.$$

57. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Κ είναι:

$$\varphi_K = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) \quad (1).$$

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι για $t = 0$ είναι $\varphi_K = -8\pi \text{ rad}$.

Επομένως, από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $\varphi_K = -8\pi \text{ rad}$, έχουμε:

$$-8\pi = 2\pi\left(-\frac{x_K}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad \frac{x_K}{\lambda} = 4 \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,5 \text{ m.}$$

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι για $t = 1 \text{ s}$ είναι $\varphi_K = 0$.

Επομένως, από τη σχέση (1) για $t = 1 \text{ s}$ και

$$\varphi_K = 0, \text{ έχουμε: } 0 = 2\pi\left(\frac{1}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad \frac{x_K}{\lambda} = \frac{1}{T}$$

$$\text{ή} \quad T = 0,25 \text{ s.}$$

Η συχνότητα του κύματος είναι ίση με:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{ή} \quad f = 4 \text{ Hz.}$$

Το πλήθος N των ταλαντώσεων που εκτελεί το σημείο Κ σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 10 \text{ s}$ μετά την έναρξη της ταλάντωσής του υπολογίζεται από τη σχέση: $N = f\Delta t$
ή $N = 40$ ταλαντώσεις.

B. Σωστή επιλογή είναι η α.

Η ζητούμενη απόσταση είναι

$$\Delta x = \lambda \quad \text{ή} \quad \Delta x = 0,5 \text{ m.}$$

58. Σωστή επιλογή είναι η β.

Από το στιγμιότυπο του κύματος Α προκύπτει: $\frac{\lambda_A}{2} = 0,1 \text{ m}$ ή $\lambda_A = 0,2 \text{ m}$.

Από το στιγμιότυπο του κύματος Α προκύπτει ακόμη ότι τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ το κύμα θέτει σε ταλάντωση το σημείο του ελαστικού μέσου το οποίο βρίσκεται στη θέση $x_A = +0,1 \text{ m}$. Επομένως, η ταχύτητα διάδοσης του κύματος Α είναι: $v_A = \frac{x_A}{t_1}$
ή $v_A = 0,05 \text{ m/s}$.

Από το στιγμιότυπο του κύματος Β προκύπτει: $\frac{\lambda_B}{4} = 0,1 \text{ m}$ ή $\lambda_B = 0,4 \text{ m}$.

Από το στιγμιότυπο του κύματος Β προκύπτει ακόμη ότι το κύμα Β τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ θέτει σε ταλάντωση το υλικό σημείο του ελαστικού μέσου το οποίο βρίσκεται στη θέση: $x_B = \frac{3\lambda_B}{4}$ ή $x_B = +0,3 \text{ m}$.

Επομένως, η ταχύτητα διάδοσης του κύματος

$$B \text{ είναι: } v_B = \frac{x_B}{t_1} \quad \text{ή} \quad v_B = 0,15 \text{ m/s.}$$

Επομένως, είναι: $v_B > v_A$.

59. Α. Σωστή επιλογή είναι η β.

Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $x = \frac{3\lambda}{2}$ από την αρχή $O(x = 0)$ του ημιάξονα Ox .

$$\text{Επομένως, έχουμε: } v_\delta = \frac{x}{t_1} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{x}{v_\delta}$$

$$\text{ή} \quad t_1 = \frac{\frac{3\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{T}} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{3T}{2}.$$

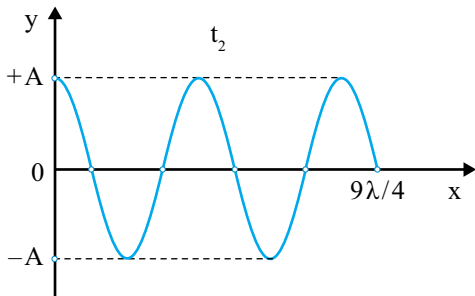
B. Σωστή επιλογή είναι η β.

$$\text{Έχουμε: } t_2 = t_1 + \frac{3T}{4} \quad \text{ή} \quad t_2 = \frac{9T}{4}.$$

Τη χρονική στιγμή t_2 το κύμα θέτει σε ταλάντωση το υλικό σημείο του ελαστικού μέσου το οποίο βρίσκεται στη θέση:

$$x_2 = v_\delta t_2 \quad \text{ή} \quad x_2 = \frac{\lambda}{T} \cdot \frac{9T}{4} \quad \text{ή} \quad x_2 = \frac{9\lambda}{4}.$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 .



Όπως φαίνεται από το στιγμιότυπο του κύματος, το πλήθος των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου τα οποία τη χρονική στιγμή t_2 έχουν μέγιστη κινητική ενέργεια ισούται με 5.

60. Σωστή επιλογή είναι η α.

Όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο, το κύμα τη χρονική στιγμή t_1 έχει διαδοθεί σε απόσταση $x = 2\lambda$ από την αρχή $O(x = 0)$ του ημιάξονα Ox .

$$\text{Έχουμε: } t_1 = \frac{x}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{2\lambda}{\frac{\lambda}{T}} \quad \text{ή} \quad t_1 = 2T.$$

Η θέση του υλικού σημείου K είναι: $x_K = +\lambda$.

Η ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου K τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } v_K = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad v_K = \frac{2\pi}{T} A \sin 2\pi \quad \text{ή} \quad v_K = + \frac{2\pi}{T} A.$$

61. Σωστή επιλογή είναι η β.

Από τα δύο στιγμιότυπα προκύπτει: $A = 0,5 \text{ m}$.

Από το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική

$$\text{στιγμή } t_1 \text{ προκύπτει: } \frac{5\lambda}{4} = 0,5 \text{ m}$$

$$\text{ή} \quad \lambda = 0,4 \text{ m.}$$

Για τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 που αντιστοι-

χούν στα δύο στιγμιότυπα ισχύει: $t_2 = t_1 + \frac{T}{4}$

$$\text{ή} \quad \frac{T}{4} = 0,025 \text{ s} \quad \text{ή} \quad T = 0,1 \text{ s.}$$

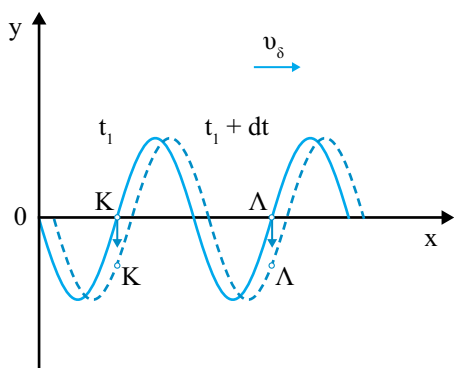
Επομένως, η εξίσωση του κύματος είναι:

$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad y = 0,5 \eta \mu 2\pi (10t - 2,5x) \text{ (S.I.).}$$

62. Σωστή επιλογή είναι η β.

Η χρονική στιγμή t_1 στην οποία το υλικό σημείο Ο ($x = 0$) έχει εκτελέσει δύο πλήρεις ταλαντώσεις είναι ίση με $t_1 = 2T$. Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζονται τα στιγμιότυπα του κύματος τις χρονικές στιγμές t_1 και $t_1 + dt$. Όπως προκύπτει από τα δύο στιγμιότυπα, το πλήθος των υλικών σημείων τα οποία τη χρονική στιγμή t_1 διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους κινούμενα με αρνητική ταχύτητα, είναι ίσο με 2 (τα σημεία Κ και Λ που φαίνονται στο σχήμα).



63. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Επειδή οι χορδές (1) και (2) είναι πανομοιότυπες, οι ταχύτητες διάδοσης των δύο κυμάτων είναι ίσες ($v_1 = v_2$). Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 το υλικό σημείο Σ_1 διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο με αρνητική ταχύτητα, ισχύει:

$$t_1 = \frac{x}{v_1} + \frac{T_1}{2} \quad (1), \text{ όπου } T_1 \text{ η περίοδος του κύματος που διαδίδεται στη χορδή (1).}$$

Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 το υλικό σημείο

Σ_2 φτάνει για πρώτη φορά στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του, ισχύει:

$$t_1 = \frac{x}{v_2} + \frac{T_2}{4} \quad (2), \text{ όπου } T_2 \text{ η περίοδος του κύματος που διαδίδεται στη χορδή (2).}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{T_1}{2} = \frac{T_2}{4} \quad \text{ή} \quad T_2 = 2T_1 \quad (3).$$

$$\text{Έχουμε: } v_1 = \frac{\lambda_1}{T_1} \quad (4) \text{ και } v_2 = \frac{\lambda_2}{T_2} \quad (5).$$

Από τις σχέσεις (4), (5) και αφού $v_1 = v_2$, προκύπτει:

$$\frac{\lambda_1}{T_1} = \frac{\lambda_2}{T_2} \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (3):}$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_2}{2}.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Οι μέγιστες επιταχύνσεις $a_{\max(1)}$ και $a_{\max(2)}$ με τις οποίες ταλαντώνονται τα υλικά σημεία Σ_1 και Σ_2 δίνονται από τις σχέσεις αντίστοιχα:

$$a_{\max(1)} = \omega_1^2 A_1 \quad (6) \text{ και } a_{\max(2)} = \omega_2^2 A_2 \quad (7).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (6) και

$$(7) \text{ έχουμε: } \frac{a_{\max(1)}}{a_{\max(2)}} = \frac{\omega_1^2 A_1}{\omega_2^2 A_2}$$

$$\text{ή } \frac{a_{\max(1)}}{a_{\max(2)}} = \frac{\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 A_1}{\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 A_2}$$

$$\text{ή } \frac{a_{\max(1)}}{a_{\max(2)}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \frac{A_1}{A_2}$$

$$\text{ή } \frac{a_{\max(1)}}{a_{\max(2)}} = 2 \quad \text{ή} \quad a_{\max(1)} = 2a_{\max(2)}.$$

64. Α. Σωστή επιλογή είναι η β.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου $O(x = 0)$ από τη θέση ισορροπίας του είναι της μορφής:

$$y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και για $y = +A$ προκύπτει: $\eta\mu\varphi_0 = 1$

$$\text{ή } \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Επειδή ισχύει: $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$,

$$\text{έχουμε } \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

$$\text{ή } y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{\varphi_0}{2\pi}\right)$$

$$\text{ή } y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{4}\right).$$

B. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία ξεκινά να ταλαντώνεται το σημείο K, η φάση της ταλάντωσής του είναι ίση με μηδέν. Έχουμε:

$$\varphi_K = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda} + \frac{1}{4}\right) \quad \text{ή} \quad 0 = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{3}{4}\right)$$

$$\text{ή } t_1 = \frac{3T}{4}.$$

65. Α. Σωστή επιλογή είναι η α.

Έστω T η περίοδος του κύματος. Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του σημείου O γίνεται μέγιστη για πέμπτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$,

$$\text{ισχύει: } t_1 = \frac{9T}{4}. \text{ Την ίδια χρονική στιγμή το}$$

σημείο M φτάνει για δεύτερη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσής του στην ακραία αρνητική του θέση. Έστω t_M η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο M. Έχουμε: $t_1 = t_M + \frac{7T}{4}$

$$\text{ή } \frac{9T}{4} = \frac{x_M}{v_\delta} + \frac{7T}{4} \quad \text{ή} \quad \frac{x_M}{v_\delta} = \frac{T}{2}$$

$$\text{ή } x_M = v_\delta \frac{T}{2} \quad \text{ή} \quad x_M = \frac{\lambda T}{2}$$

$$\text{ή } x_M = +\frac{\lambda}{2}.$$

B. Σωστή επιλογή είναι η α.

Το υλικό σημείο M αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_M = \frac{x_M}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_M = \frac{\frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{T}} \quad \text{ή} \quad t_M = \frac{T}{2}.$$

Το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί το σημείο M από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $N = f\Delta t$

$$\text{ή } N = \frac{1}{T}(t_2 - t_M) \quad \text{ή} \quad N = 2 \text{ ταλαντώσεις}.$$

Σε κάθε ταλάντωση το σημείο M διανύει διάστημα $4A$. Επομένως το διάστημα s που διανύει το σημείο M από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$s = N \cdot 4A \quad \text{ή} \quad s = 8A.$$

66. Σωστή επιλογή είναι η β.

Όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο του κύματος, είναι $A = 0,2 \text{ m}$ και $\lambda = 0,4 \text{ m}$.

Το σημείο K βρίσκεται στη θέση:

$$x_K = +1,5\lambda \quad \text{ή} \quad x_K = +0,6 \text{ m}$$

και τη χρονική στιγμή t_1 κινείται με θετική ταχύτητα. Επομένως, τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \frac{T}{4}$, όπου T η περίοδος του κύματος, το σημείο K θα βρεθεί στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του. Δηλαδή, τη χρονική στιγμή t_2 από το σημείο K διέρχεται ένα «όρος» του κύματος. Όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο, το πλησιέστερο προς το σημείο K «όρος» του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται αριστερά του. Επομένως, το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x 'Οχ.

Έστω T η περίοδος του κύματος. Έχουμε:

$$v_\delta = \lambda f \quad \text{ή} \quad v_\delta = \frac{\lambda}{T} \quad \text{ή} \quad T = 0,4 \text{ s.}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου K δίνεται από τη σχέση:

$$y_K = A \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad y_K = 0,2 \mu 2\pi (2,5t + 1,5) \text{ (S.I.)}$$

67. Α. Σωστή επιλογή είναι η α .

Η χρονική διαφορά έναρξης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων K και Λ είναι:

$$\Delta t = \frac{7T}{4} - T = \frac{3T}{4}.$$

$$\text{Έχουμε: } \Delta x = v_\delta \Delta t \quad \text{ή} \quad \Delta x = \frac{\lambda}{T} \cdot \frac{3T}{4}$$

$$\text{ή} \quad \Delta x = \frac{3\lambda}{4}.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η α .

Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων K και Λ είναι: $\Delta \varphi = \frac{2\pi \Delta x}{\lambda}$

$$\text{ή} \quad \varphi_K - \varphi_\Lambda = \frac{3\pi}{2} \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \varphi_K = \varphi_\Lambda + \frac{3\pi}{2} \quad (1).$$

$$\text{Έχουμε: } v_\Lambda = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad v_\Lambda = \frac{2\pi}{T} A \sin \varphi_\Lambda \quad \text{ή} \quad \frac{2\pi}{T} A = \frac{2\pi}{T} A \sin \varphi_\Lambda$$

$$\text{ή} \quad \sin \varphi_\Lambda = +1$$

$$\text{ή} \quad \varphi_\Lambda = 2\kappa\pi, \quad (2) \quad \text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Η ταχύτητα με την οποία ταλαντώνεται το υλικό σημείο K τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_K = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad v_K = \frac{2\pi}{T} A \sin \varphi_K$$

ή, λόγω των σχέσεων (1) και (2):

$$v_K = \frac{2\pi}{T} A \sin \left(2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\text{ή} \quad v_K = \frac{2\pi}{T} A \sin \frac{3\pi}{2} \quad \text{ή} \quad v_K = 0.$$

68. Σωστή επιλογή είναι η β .

Από την εξίσωση που μας δίνεται προκύπτει:

$$\frac{t_1}{T} = 2 \quad \text{ή} \quad t_1 = 2T.$$

Τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα θέτει σε ταλάντωση το υλικό σημείο του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση:

$$x = v t_1 \quad \text{ή} \quad x = \frac{\lambda}{T} \cdot 2T \quad \text{ή} \quad x = 2\lambda.$$

Επομένως, το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 απεικονίζεται στο διάγραμμα β .

69. Σωστή επιλογή είναι η β .

Έστω T η περίοδος του κύματος. Η εξίσωση της φάσης του κύματος τη χρονική στιγμή t_1

σε συνάρτηση με τη θέση x των σημείων του ελαστικού μέσου στον άξονα $x'Ox$ δίνεται

$$\text{από τη σχέση: } \varphi = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (1).$$

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή t_1 , για $x = \frac{\lambda}{2}$, είναι $\varphi = 0$. Επομένως, από τη σχέση (1) για $x = \frac{\lambda}{2}$ και $\varphi = 0$ έχουμε:

$$0 = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{1}{2} \right) \quad \text{ή} \quad \frac{t_1}{T} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{T}{2}.$$

Η εξίσωση του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 σε συνάρτηση με τη θέση x των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου στον άξονα $x'Ox$ δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (2).$$

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή t_2 , για $x = 2\lambda$, είναι $\varphi = 0$. Επομένως, από τη σχέση (2) για $x = 2\lambda$ και $\varphi = 0$, έχουμε:

$$0 = 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - 2 \right) \quad \text{ή} \quad \frac{t_2}{T} - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad t_2 = 2T.$$

Η μεταβολή της φάσης του σημείου O από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 , είναι: $\Delta\varphi = \omega\Delta t$ ή $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}(t_2 - t_1)$

$$\text{ή } \Delta\varphi = 3\pi \text{ rad.}$$

70. Α. Σωστή επιλογή είναι η α.

Η δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου K γράφεται:

$$y_K = 0,3\eta\mu 2\pi(10t + 2) \text{ (S.I.)} \quad (1).$$

Η δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Λ γράφεται:

$$y_\Lambda = 0,3\eta\mu 2\pi(10t - 1) \text{ (S.I.)} \quad (2).$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει ότι οι χρονικές εξισώσεις της φάσης της ταλάντωσης των σημείων K και Λ στο S.I. είναι αντίστοιχα: $\varphi_K = 2\pi(10t + 2) \text{ (S.I.)} \quad (3).$

$$\text{και } \varphi_\Lambda = 2\pi(10t - 1) \text{ (S.I.)} \quad (4).$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι η φάση της ταλάντωσης του σημείου K είναι μεγαλύτερη από τη φάση της ταλάντωσης του σημείου Λ . Επομένως, το κύμα διαδίδεται από το σημείο K προς το σημείο Λ . Αφού είναι $x_K > 0$ και $x_\Lambda < 0$, το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'Ox$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου K δίνεται από τη σχέση:

$$y_K = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_K}{\lambda} \right) \quad (5).$$

Από τη σύγκριση της σχέσης (5) με τη σχέση

$$(1) \text{ προκύπτει ότι: } A = 0,3 \text{ m, } \frac{1}{T} = 10 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{ή } T = 0,1 \text{ s και } \frac{x_K}{\lambda} = 2 \quad \text{ή } \lambda = 0,4 \text{ m.}$$

Επομένως, η εξίσωση του κύματος δίνεται

$$\text{από τη σχέση: } y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = 0,3\eta\mu 2\pi(10t + 2,5x) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή } y = 0,3\eta\mu(20\pi t + 5\pi x) \text{ (S.I.).}$$

B. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$y_\Lambda = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right) \text{ (S.I.)} \quad (6).$$

Από τη σύγκριση της σχέσης (6) με τη σχέση

$$(2) \text{ προκύπτει: } \frac{x_\Lambda}{\lambda} = -1 \quad \text{ή} \quad x_\Lambda = -0,4 \text{ m.}$$

Οι θέσεις ισορροπίας δύο υλικών σημείων τα οποία έχουν κάθε χρονική στιγμή την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα απέχουν μεταξύ τους απόσταση:

$$\Delta x = \kappa \lambda, \text{ με } \kappa = 1, 2, 3, \dots (7).$$

Έστω ένα τυχαίο υλικό σημείο το οποίο βρίσκεται στη θέση x και έχει κάθε χρονική στιγμή την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα με το σημείο O . Από τη σχέση (7) έχουμε: $x - 0 = \kappa \lambda$

$$\text{ή } x = 0,4\kappa \text{ (S.I.), με } \kappa = 1, 2, 3, \dots$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου τα οποία βρίσκονται ανάμεσα στα σημεία K και Λ και έχουν κάθε χρονική στιγμή μετά την έναρξη της ταλάντωσής τους την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα με το σημείο O , επιλύουμε την ανίσωση: $x_{\Lambda} < x < x_K$

$$\text{ή } -0,4 < 0,4\kappa < +0,8 \quad \text{ή} \quad -1 < \kappa < 2$$

$$\text{ή } \kappa = 0, 1.$$

Επομένως, το πλήθος των ζητούμενων υλικών σημείων είναι ίσο με 2.

71. α. Από την εξίσωση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο προκύπτει ότι:

$$A = 0,1 \text{ m και } \omega = 4\pi \text{ rad/s.}$$

$$\text{Έχουμε: } \omega = 2\pi f \text{ ή } f = 2 \text{ Hz.}$$

Το μήκος κύματος του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = 2 \text{ m.}$

$$\text{β. Έχουμε: } y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = 0,1\eta\mu 2\pi \left(2t - \frac{x}{2} \right) \text{ (S.I.) (1).}$$

γ. Από τη σχέση (1) για $t = t_1 = 2,125 \text{ s}$ και

$$x = x_A = +8 \text{ m, προκύπτει:}$$

$$y = 0,1\eta\mu \frac{\pi}{2} \text{ m ή } y = +0,1 \text{ m.}$$

$$\text{δ. Έχουμε: } \Sigma F = -Dy \text{ ή } \Sigma F = -m\omega^2 y$$

$$\text{ή } \Sigma F = -0,16 \text{ N.}$$

$$\textbf{72. α. Έχουμε: } t_1 = \frac{3T}{4} \text{ ή } T = 4 \text{ s.}$$

β. Το μήκος κύματος του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \lambda f \text{ ή } v_\delta = \frac{\lambda}{T} \text{ ή } \lambda = 8 \text{ m.}$$

Η θέση του σημείου Κ στον άξονα $x'Ox$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x_K = v_\delta t_1 \text{ ή } x_K = +6 \text{ m.}$$

$$\text{Έχουμε: } v = v_{\max} \text{ ή } v = \omega A \text{ ή } v = \frac{2\pi}{T} A$$

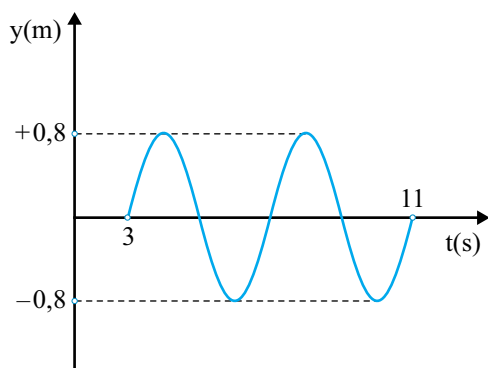
$$\text{ή } A = 0,8 \text{ m.}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του

$$\text{σημείου Κ είναι η: } y_K = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y_K = 0,8\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{4} - \frac{3}{4} \right) \text{ (S.I.), για } t \geq 3 \text{ s.}$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σημείου Κ σε συνάρτηση με τον χρόνο.



$$\text{γ. Έχουμε: } t_2 = t_1 + T \text{ ή } t_2 = 7 \text{ s.}$$

δ. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Κ έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_K^2 + \frac{1}{2}Dy_K^2$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}mv_K^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y_K^2$$

$$\text{ή } y_K = \pm \sqrt{A^2 - \left(\frac{v_K}{\omega} \right)^2}$$

$$\text{ή } y_K = \pm 0,4 \text{ m.}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου Κ είναι: $|a_K| = \omega^2 |y_K|$ ή $|a_K| = 1 \text{ m/s}^2.$

73. α. Η απόσταση μιας κορυφής από τη μεθεπόμενη κοιλιά στο στιγμιότυπο του κύματος ισούται με $\frac{3\lambda}{2}$. Έχουμε:

$$\frac{3\lambda}{2} = 3 \text{ m} \quad \text{ή} \quad \lambda = 2 \text{ m}.$$

Επειδή από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ η πηγή του κύματος εκτελεί $N = 10$ πλήρεις ταλαντώσεις, η συχνότητα του κύματος είναι ίση με:

$$f = \frac{N}{t_1} \quad \text{ή} \quad f = 5 \text{ Hz}.$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \lambda f \quad \text{ή} \quad v_\delta = 10 \text{ m/s}.$$

β. Έχουμε: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

$$\text{ή} \quad y = 0,1\eta\mu 2\pi\left(2t - \frac{x}{2}\right) \text{ (S.I.)}.$$

γ. Το υλικό σημείο K ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_K = \frac{x_K}{v_\delta}$ (1).

Το πλήθος N_K των ταλαντώσεων που εκτελεί το σημείο K από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ δίνεται από τη σχέση:

$$N_K = f(t_1 - t_K) \quad \text{ή} \quad N_K = f\left(t_1 - \frac{x_K}{v_\delta}\right)$$

$$\text{ή} \quad x_K = \left(t_1 - \frac{N_K}{f}\right)v_\delta \quad \text{ή} \quad x_K = +10 \text{ m}.$$

Έχουμε: $\omega = 2\pi f$ ή $\omega = 10\pi \text{ rad/s}$.

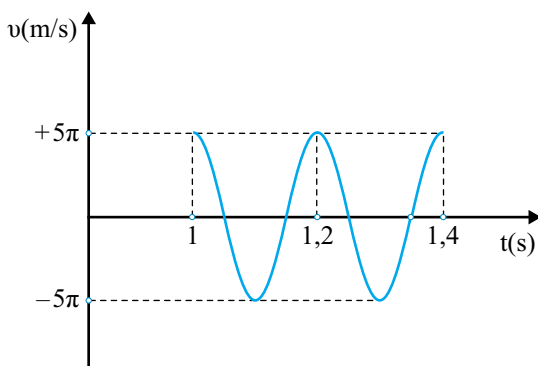
Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $t_K = 1 \text{ s}$.

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου K δίνεται από τη σχέση:

$$v = \omega A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή} \quad v = 5\pi \sin 2\pi(5t - 5) \text{ (S.I.) (3), για } t \geq 1 \text{ s}.$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης (3) απεικονίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



δ. Η επιτάχυνση του σημείου K τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a = -\omega^2 A \sin 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή} \quad a = -500\eta\mu(12,5\pi) \text{ m/s}^2$$

$$\text{ή} \quad a = -500 \text{ m/s}^2.$$

74. α. Η δοθείσα εξίσωση του κύματος γράφεται: $y = 0,4\eta\mu 2\pi\left(2t - \frac{x}{2}\right)$ (S.I.) (1).

Από τη σύγκριση της σχέσης (1) με τη σχέση

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \text{ προκύπτει:}$$

$$A = 0,4 \text{ m}, \quad \frac{1}{T} = 2 \text{ s}^{-1} \quad \text{ή} \quad f = 2 \text{ Hz}$$

$$\text{και} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \text{ m}^{-1} \quad \text{ή} \quad \lambda = 2 \text{ m}.$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \lambda f \quad \text{ή} \quad v_\delta = 4 \text{ m/s}.$$

β. Το υλικό σημείο M ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_M = \frac{x_M}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_M = 0,4 \text{ s.}$$

γ. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σημείου M δίνεται από τη σχέση:

$$v = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad v = 2\pi f A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad v = 1,6\pi \sin 2\pi(2t - 0,8) \text{ (S.I.)}, \text{ για } t \geq 0,4 \text{ s.}$$

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σημείου M δίνεται από τη σχέση:

$$a = -\omega^2 A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad a = -(2\pi f)^2 A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad a = -64\pi^2 \sin 2\pi(2t - 0,8) \text{ (S.I.)}, \text{ για } t \geq 0,4 \text{ s.}$$

$$\delta. \text{ Έχουμε: } a = -\omega^2 y_M \quad \text{ή} \quad a = +32 \text{ m/s}^2$$

75. α. Η δοθείσα εξίσωση του κύματος γράφεται: $y = 0,5\eta\mu 2\pi(5t - 2,5x)$ (S.I.) (1).

Από τη σύγκριση της εξίσωσης (1) με τη γενική εξίσωση:

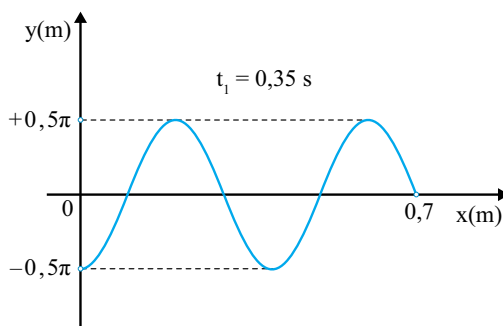
$$y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{προκύπτει: } A = 0,5 \text{ m}, \quad \frac{1}{T} = 5 \text{ s}^{-1} \quad \text{ή} \quad f = 5 \text{ Hz}$$

$$\text{και} \quad \frac{1}{\lambda} = 2,5 \text{ m}^{-1} \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,4 \text{ m.}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = 2 \text{ m/s.}$

β. Ακολουθώντας τα βήματα που περιγράφονται στη μεθοδολογία, σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,35 \text{ s}$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



$$\gamma. \text{ Έχουμε: } v = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad v = 2\pi f A \sin 2\pi \left(ft_2 - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad v = 5\pi \sin \pi \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad v = -5\pi \text{ m/s}$$

$$\text{και} \quad a = -\omega^2 A \sin 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad a = -(2\pi f)^2 A \sin 2\pi \left(ft_2 - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad a = -500\eta\mu \pi \text{ m/s}^2 \quad \text{ή} \quad a = 0.$$

δ. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο K έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m v_K^2 + \frac{1}{2} D y_K^2$$

$$\text{ή} \quad m \omega^2 A^2 = m v_K^2 + m \omega^2 y_K^2$$

$$\text{ή} \quad |y_K| = \sqrt{A^2 - \frac{v_K^2}{\omega^2}}$$

$$\text{ή} \quad |y_K| = \sqrt{A^2 - \left(\frac{v_K}{2\pi f} \right)^2} \quad \text{ή} \quad |y_K| = 0,4 \text{ m.}$$

Επομένως, έχουμε: $|a_K| = \omega^2 |y_K|$

$$\text{ή } |a_K| = (2\pi f)^2 |y_K| \text{ ή } a_K = 400 \text{ m/s}^2.$$

76. α. Η δοθείσα εξίσωση του κύματος γράφεται: $y = 0,02\eta\mu 2\pi(5t - 2x)$ (S.I.) (1).

Από τη σύγκριση της εξίσωσης (1) με τη γενική εξίσωση $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ προκύπτει:

$$A = 0,02 \text{ m}, \quad \frac{1}{T} = 5 \text{ s}^{-1} \text{ ή } f = 5 \text{ Hz}$$

$$\text{και } \frac{1}{\lambda} = 2 \text{ m}^{-1} \text{ ή } \lambda = 0,5 \text{ m}.$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = 2,5 \text{ m/s}$.

β. Το υλικό σημείο Κ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_K = \frac{x_K}{v_\delta} \text{ ή } t_K = 2 \text{ s}.$$

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$a = -\omega^2 A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } a = -(2\pi f)^2 A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } a = -20\eta\mu 2\pi(5t - 10) \text{ (S.I.) (2), για } t \geq 2 \text{ s}.$$

Από τη σχέση (2) για $t = t_1 = 2,1 \text{ s}$ προκύπτει:

$$a = -20\eta\mu\pi \text{ m/s}^2 \text{ ή } a = 0.$$

γ. Έχουμε: $a = -\omega^2 y$ ή $y = -0,01\sqrt{3} \text{ m}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο Κ προκύπτει:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - y^2} \text{ ή } v = 0,1\pi \text{ m/s}.$$

δ. Το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί το σημείο Κ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$N = f(t_3 - t_K) \text{ ή } N = 50 \text{ ταλαντώσεις}.$$

77. α. Η δοθείσα εξίσωση του κύματος γράφεται: $y = 0,5\eta\mu 2\pi(10t - 0,25x)$ (S.I.) (1).

Από τη σύγκριση της εξίσωσης (1) με τη γενική εξίσωση $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ προκύπτει:

$$A = 0,5 \text{ m}, \quad \frac{1}{T} = 10 \text{ s}^{-1} \text{ ή } f = 10 \text{ Hz}$$

$$\text{και } \frac{1}{\lambda} = 0,25 \text{ m}^{-1} \text{ ή } \lambda = 4 \text{ m}.$$

β. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του υλικού σημείου Ο ($x = 0$) δίνεται από τη σχέση:

$$v_O = \omega A \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{t}{T} \text{ ή } v_O = 2\pi f A \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi t}{T}$$

$$\text{ή } v_O = 10\pi \sigma\upsilon\nu(20\pi t) \text{ (S.I.) (1)}.$$

Από τη σχέση (1) για $t = t_1 = (1/40) \text{ s}$ προκύπτει: $v_O = 10\pi \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \text{ m/s}$ ή $v_O = 0$.

γ. Έστω v'_O το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Ο τις χρονικές στιγμές στις οποίες η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του είναι: $y_O = -0,3 \text{ m}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο Ο έχουμε: $E = K + U$ ή $\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_O'^2 + \frac{1}{2}Dy_O^2$

$$\text{ή } m\omega^2 A^2 = mv_O'^2 + m\omega^2 y_O^2$$

$$\text{ή } v'_O = \omega\sqrt{A^2 - y_O^2} \text{ ή } v'_O = 8\pi \text{ m/s}.$$

δ. Οι φάσεις των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ τη χρονική στιγμή t_2 δίνονται από τις σχέσεις:

$$\varphi_K = 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) \quad (2) \text{ και}$$

$$\varphi_\Lambda = 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right) \quad (3).$$

Επειδή είναι $x_\Lambda > x_K$, από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει: $\varphi_\Lambda < \varphi_K$.

Επομένως, η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι:

$\Delta\varphi = \varphi_K - \varphi_\Lambda$ ή, λόγω των σχέσεων (2) και

$$(3): \Delta\varphi = 2\pi \frac{x_\Lambda - x_K}{\lambda} \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = \pi \text{ rad.}$$

78. α. Η δοθείσα εξίσωση του κύματος γράφεται στη μορφή:

$$y = 0,2\eta\mu 2\pi(2t - x) \quad (\text{S.I.}) \quad (1).$$

Από τη σύγκριση της εξίσωσης (1) με τη γενική εξίσωση $y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ προκύπτει

$$\text{ότι: } A = 0,2 \text{ m, } \frac{1}{T} = 2 \text{ s}^{-1} \quad \text{ή} \quad f = 2 \text{ Hz}$$

$$\text{και } \frac{1}{\lambda} = 1 \text{ m}^{-1} \quad \text{ή} \quad \lambda = 1 \text{ m.}$$

Επομένως, έχουμε:

$$\frac{v_{\max}}{v_\delta} = \frac{2\pi f A}{\lambda f} \quad \text{ή} \quad \frac{v_{\max}}{v_\delta} = 0,4\pi.$$

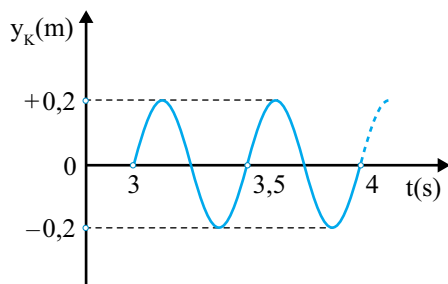
β. Το υλικό σημείο Κ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_K = \frac{x_K}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_K = \frac{x_K}{\lambda f} \quad \text{ή} \quad t_K = 3 \text{ s.}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Κ προκύπτει από τη σχέση (1), θέτοντας σε αυτήν όπου x το $x_K = +6 \text{ m}$. Έχουμε:

$$y_K = 0,2\eta\mu 2\pi(2t - 6) \quad (\text{S. I.}), \text{ για } t \geq 3 \text{ s.}$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σημείου Κ σε συνάρτηση με τον χρόνο από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$.



γ. Έστω v_K το μέτρο της ταχύτητας του ταλαντούμενου σημείου Κ τις χρονικές στιγμές στις οποίες είναι $y_K = +0,1\sqrt{3} \text{ m}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Κ έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m v_K^2 + \frac{1}{2} D y_K^2$$

$$\text{ή} \quad m \omega^2 A^2 = m v_K^2 + m \omega^2 y_K^2$$

$$\text{ή} \quad v_K = \omega \sqrt{A^2 - y_K^2}$$

$$\text{ή} \quad v_K = 2\pi f \sqrt{A^2 - y_K^2}$$

$$\text{ή} \quad v_K = 0,4\pi \text{ m/s.}$$

$$\text{δ. Έχουμε: } N_\Lambda = f \left(t_2 - \frac{x_\Lambda}{v_\delta} \right)$$

$$\text{ή} \quad N_\Lambda = f \left(t_2 - \frac{x_\Lambda}{\lambda f} \right) \quad \text{ή} \quad x_\Lambda = +10 \text{ m.}$$

ε. Έχουμε:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi \Delta x}{\lambda} \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = 8\pi \text{ rad.}$$

79. α. Το χρονικό διάστημα στο οποίο επαναλαμβάνεται η κυματική εικόνα ισούται με μία περίοδο του κύματος. Από τη φάση της ταλάντωσης της πηγής τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε: $\varphi_0 = \frac{2\pi}{T} t_1$ ή $T = 0,2 \text{ s}$.

β. Η ζητούμενη απόσταση ισούται με ένα μήκος κύματος (λ).

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_s = \frac{x_M}{t_1} \quad \text{ή} \quad v_s = 1 \text{ m/s}.$$

Έχουμε: $v_s = \lambda f$ ή $v_s = \frac{\lambda}{T}$ ή $\lambda = 0,2 \text{ m}$.

γ. Έχουμε: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 10\pi \text{ rad/s}$.

Η ταχύτητα με την οποία ταλαντώνεται το υλικό σημείο Μ τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $v = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right)$

$$\text{ή} \quad v = 5\pi \sin 2\pi \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad v = +5\pi \text{ m/s}.$$

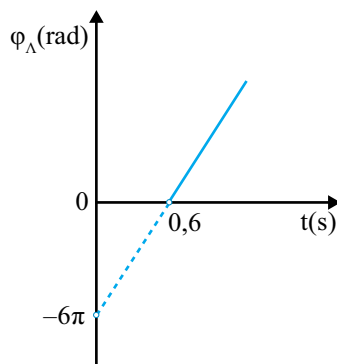
δ. Έχουμε: $\varphi_0 - \varphi_\Lambda = \frac{2\pi t}{T} - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$

$$\text{ή} \quad \varphi_0 - \varphi_\Lambda = \frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda} \quad \text{ή} \quad x_\Lambda = +0,6 \text{ m}.$$

Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_\Lambda = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right) \quad \text{ή} \quad \varphi_\Lambda = 2\pi(5t - 3) \quad (\text{S.I.}).$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ σε συνάρτηση με τον χρόνο.



80. α. Η πηγή φτάνει τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,9 \text{ s}$ για τρίτη φορά στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσης της. Επομένως, έχουμε: $t_1 = \frac{9T}{4}$ ή $T = 0,4 \text{ s}$.

β. Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση: $\varphi_K = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$

$$\text{ή} \quad \varphi_K = 2\pi \left(2,5t - \frac{5}{\lambda} \right) \quad (\text{S.I.}) \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) για $t = t_1 = 0,9 \text{ s}$ και

$$\varphi_K = 2\pi \text{ rad} \text{ προκύπτει: } 2\pi = 2\pi \left(2,25 - \frac{5}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad 1 = 2,25 - \frac{5}{\lambda} \quad \text{ή} \quad \frac{5}{\lambda} = 1,25 \quad \text{ή} \quad \lambda = 4 \text{ m}.$$

γ. Έχουμε: $y_K = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$

$$\text{ή} \quad y_K = 0,2 \eta \mu(2,5\pi) \text{ m} \quad \text{ή} \quad y_K = +0,2 \text{ m}.$$

δ. Από τη διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ τη χρονική στιγμή t_3 έχουμε: $\varphi_K - \varphi_\Lambda = 2\pi \frac{x_\Lambda - x_K}{\lambda}$

$$\text{ή} \quad x_\Lambda = +7 \text{ m}.$$

Η δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο υλικό σημείο Λ τη χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται από τη σχέση: $\Sigma F = -Dy$

$$\text{ή } \Sigma F = -m\omega^2 A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t_3}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } \Sigma F = -2\eta \mu(3,5\pi) \text{ N } \quad \text{ή } \Sigma F = +2 \text{ N.}$$

81. α. Έχουμε: $t_1 = \frac{T}{4}$ ή $T = 0,4 \text{ s.}$

Η συχνότητα του κύματος είναι:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{ή } f = 2,5 \text{ Hz.}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \frac{|x_K|}{t_1}$ ή $v_\delta = 5 \text{ m/s.}$

Το μήκος κύματος του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = 2 \text{ m.}$

Επειδή το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'Ox$, η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = 0,2 \eta \mu 2\pi(2,5t + 0,5x) \text{ (S.I.).}$$

β. Έχουμε: $\omega = 2\pi f$ ή $\omega = 5\pi \text{ rad/s.}$

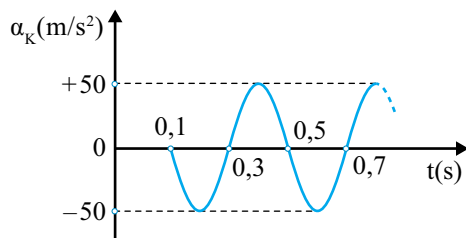
Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$a = -\omega^2 A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } a = -50 \eta \mu 2\pi(2,5t - 0,25) \text{ (S.I.),}$$

για $t \geq 0,1 \text{ s.}$

Η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του υλικού σημείου Κ σε συνάρτηση με τον χρόνο απεικονίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



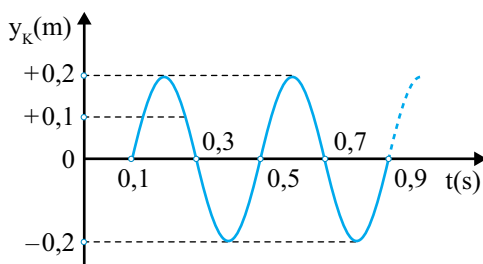
γ. Έχουμε: $\varphi_K = 2\pi \left(\frac{t_2}{T} + \frac{x_K}{\lambda} \right)$

$$\text{ή } \pi = 2\pi(2,5t_2 - 0,25) \quad \text{ή } t_2 = 0,3 \text{ s.}$$

Η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Μ τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } \varphi_M = 2\pi \left(\frac{t_2}{T} + \frac{x_M}{\lambda} \right) \quad \text{ή } \varphi_M = 2\pi \text{ rad.}$$

δ. Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Κ από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με τον χρόνο.



Από το διάγραμμα προκύπτει ότι από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 0,5 \text{ s}$ το σημείο Κ διέρχεται από τη θέση με απομάκρυνση $y = +0,1 \text{ m}$ δύο φορές.

82. α. Η συχνότητα του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$f = \frac{N}{\Delta t} \quad \text{ή } f = 10 \text{ Hz.}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Λ γράφεται:

$$y_{\Lambda} = 0,4\mu\text{m}2\pi\left(\frac{\omega}{2\pi}t - 1\right) \text{ (S.I.) (1).}$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει: $A = 0,4 \text{ m}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Ο ($x = 0$) δίνεται από τη σχέση: $y_{\text{O}} = A\eta\mu(\omega t)$ ή $y_{\text{O}} = A\eta\mu(2\pi ft)$

$$\text{ή } y_{\text{O}} = 0,4\mu\text{m}(20\pi t) \text{ (S.I.).}$$

β. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών του κύματος είναι ίση με ένα μήκος κύματος λ . Επομένως: $\lambda = 2 \text{ m}$.

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$\frac{x_{\Lambda}}{\lambda} = 1 \quad \text{ή} \quad x_{\Lambda} = +2 \text{ m.}$$

Η χρονική διαφορά έναρξης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Μ και Λ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_{\delta}} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{x_{\text{M}} - x_{\Lambda}}{v_{\delta}} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{x_{\text{M}} - x_{\Lambda}}{\lambda f}$$

$$\text{ή } \Delta t = 0,1 \text{ s.}$$

γ. Η εξίσωση του στιγμιότυπου τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$y = A\eta\mu2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } y = 0,4\mu\text{m}2\pi(10 - 0,5x) \text{ (S.I.).}$$

δ. Επειδή το κύμα διαδίδεται στο ίδιο ελαστικό μέσο, η ταχύτητα διάδοσης του κύματος δεν μεταβάλλεται. Έστω λ' και f' το νέο μήκος κύματος και η νέα συχνότητα του κύματος αντίστοιχα. Έχουμε: $v_{\delta} = \lambda'f'$

$$\text{ή } f' = \frac{v_{\delta}}{2\lambda} \quad \text{ή} \quad f' = \frac{f}{2} \quad \text{ή} \quad f' = 5 \text{ Hz.}$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο Λ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2}m(2\pi f')^2A^2$$

$$\text{ή } E = 0,8 \text{ J.}$$

83. α. Ο χρόνος μετάβασης της στοιχειώδους μάζας Δm από τη μια ακραία θέση στην άλλη ακραία θέση της ταλάντωσης είναι:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{T}{2} = 0,4 \text{ s} \quad \text{ή} \quad T = 0,8 \text{ s.}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_{\delta} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad v_{\delta} = 0,1 \text{ m/s.}$$

Το μήκος κύματος λ του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_{\delta} = \frac{\lambda}{T} \quad \text{ή} \quad \lambda = v_{\delta}T \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,08 \text{ m.}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης της στοιχειώδους μάζας Δm υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{5\pi}{2} \text{ rad/s.}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης της στοιχειώδους μάζας Δm . Έχουμε:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2}\Delta m\omega^2A^2$$

$$\text{ή } A = \sqrt{\frac{2E}{\Delta m\omega^2}} \quad \text{ή} \quad A = 0,4 \text{ m.}$$

β. Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση: $y = A\eta\mu2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

$$\text{ή } y = 0,4\mu\text{m}2\pi\left(\frac{5}{4}t - \frac{25x}{2}\right) \text{ (S.I.) (1).}$$

Η εξίσωση του στιγμιότυπου του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,4 \text{ s}$ προκύπτει από τη σχέση (1), θέτοντας σε αυτήν όπου t το t_1 :

$$y = 0,4\mu 2\pi \left(1,75 - \frac{25x}{2} \right) \text{ (S.I.) (2)}.$$

Έστω x η θέση του υλικού σημείου του ελαστικού μέσου που ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,4 \text{ s}$.

$$\text{Έχουμε: } v_s = \frac{x}{t_1} \quad \text{ή} \quad x = +0,14 \text{ m}.$$

Υπολογίζουμε την απομάκρυνση y_0 του υλικού σημείου O ($x = 0$) όπου βρίσκεται η πηγή του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 , θέτοντας στη σχέση (2) όπου $x = 0$:

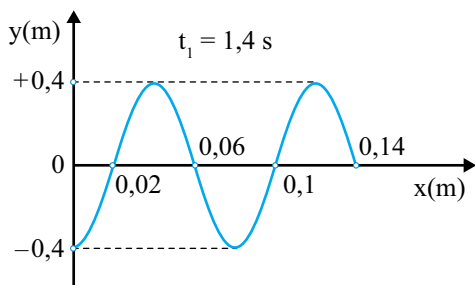
$$y_0 = 0,4\mu 2\pi (1,75) \text{ m}$$

$$\text{ή } y_0 = 0,4\mu 3,5\pi \text{ m} \quad \text{ή} \quad y_0 = -0,4 \text{ m}.$$

Χωρίζουμε την απόσταση x σε N τμήματα μήκους $\frac{\lambda}{4}$ το καθένα: $N = \frac{x}{(\lambda/4)}$

$$\text{ή } N = \frac{4x}{\lambda} \quad \text{ή} \quad N = 7.$$

Το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,4 \text{ s}$ απεικονίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



γ. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί η στοιχειώδης μάζα Δm έχουμε: $E = K + U$ ή $K = E - U$

$$\text{ή } K = \frac{1}{2} \Delta m A^2 - \frac{1}{2} \Delta m y^2$$

$$\text{ή } K = \frac{1}{2} \Delta m (A^2 - y^2)$$

$$\text{ή } K = \frac{1}{2} \Delta m \omega^2 (A^2 - y^2)$$

$$\text{ή } K = 3,75\pi^2 \cdot 10^{-7} \text{ J}.$$

δ. Από τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου P τις χρονικές στιγμές στις οποίες βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $y_p = +0,4 \text{ m}$ έχουμε:

$$y_p = A\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_p}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y_p = A\mu \varphi_p \quad \text{ή} \quad 0,4 = 0,4\mu \varphi_p$$

$$\text{ή } \mu \varphi_p = 1 \quad \text{ή} \quad \mu \varphi_p = \mu \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ή } \varphi_p = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Από τη διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων P και Σ έχουμε:

$$\varphi_p - \varphi_\Sigma = \frac{3\pi}{2} \quad \text{ή} \quad 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi_\Sigma = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{ή } \varphi_\Sigma = 2\kappa\pi - \pi.$$

Η ταχύτητα του σημείου Σ τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σημείο P βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $y_p = +0,4 \text{ m}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\Sigma = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Sigma}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v_\Sigma = \omega A \sin \varphi_\Sigma \quad \text{ή} \quad v_\Sigma = \omega A \sin (2\kappa\pi - \pi)$$

$$\text{ή } v_\Sigma = \omega A \sin(-\pi) \quad \text{ή} \quad v_\Sigma = -\omega A$$

$$\text{ή } v_\Sigma = -\pi \text{ m/s}.$$

84. α. Έχουμε: $t_1 = 10T$ ή $T = 0,2 \text{ s}$

$$\text{και } v_\delta = \frac{x_K}{t_1} \text{ ή } v_\delta = 5 \text{ m/s.}$$

Το μήκος κύματος λ του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$
ή $\lambda = v_\delta T$ ή $\lambda = 1 \text{ m}$.

β. Έχουμε: $\Sigma F_{\max} = DA$

$$\text{ή } \Sigma F_{\max} = m\omega^2 A \text{ ή } \Sigma F_{\max} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A$$

$$\text{ή } A = 0,2 \text{ m.}$$

Επομένως, η εξίσωση που περιγράφει το κύμα είναι:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } y = 0,2\eta\mu 2\pi(5t - x) \text{ (S.I.) (1).}$$

γ. Το υλικό σημείο Λ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_Λ για την οποία ισχύει:

$$t_\Lambda = t_1 + 0,4 \text{ s ή } t_\Lambda = 2,4 \text{ s.}$$

$$\text{Έχουμε: } v_\delta = \frac{x_\Lambda}{t_\Lambda} \text{ ή } x_\Lambda = v_\delta t_\Lambda \text{ ή } x_\Lambda = +12 \text{ m.}$$

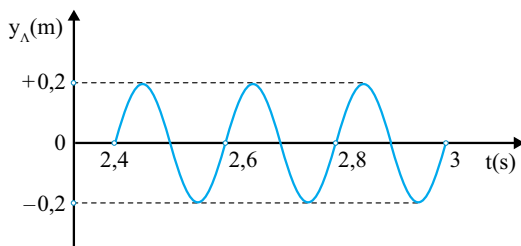
Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$y_\Lambda = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } y_\Lambda = 0,2\eta\mu 2\pi(5t - 12) \text{ (S.I.),}$$

$$\text{για } t \geq 2,4 \text{ s.}$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης y_Λ του υλικού σημείου Λ σε συνάρτηση με τον χρόνο t , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_2 = 3 \text{ s}$:



δ. Έχουμε: $\Delta\varphi = \varphi_K - \varphi_\Lambda$

$$\text{ή } \Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } \Delta\varphi = 2\pi\frac{x_\Lambda - x_K}{\lambda} \text{ ή } \Delta\varphi = 4\pi \text{ rad.}$$

ε. Έχουμε: $\alpha_\Lambda = -\omega^2 y_\Lambda$

$$\text{ή } \alpha_\Lambda = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y_\Lambda \text{ ή } y_\Lambda = -0,2 \text{ m.}$$

Επειδή η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι: $\Delta\varphi = 4\pi \text{ rad}$, τα σημεία αυτά βρίσκονται σε συμφωνία φάσης, οπότε η απομάκρυνση του σημείου Κ είναι:
 $y_K = -0,2 \text{ m.}$

85. α. Από την εξίσωση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο ($x = 0$) προκύπτει: $A = 0,05 \text{ m}$ και $\omega = 50\pi \text{ rad/s}$. Η συχνότητα του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\omega = 2\pi f \text{ ή } f = 25 \text{ Hz.}$$

Το μήκος κύματος λ του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = \frac{v_\delta}{f}$
ή $\lambda = 0,08 \text{ m}$.

Η εξίσωση του κύματος είναι:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } y = 0,05\eta\mu 2\pi(25t - 12,5x) \text{ (S.I.).}$$

β. Το υλικό σημείο Γ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή: $t_{\Gamma} = \frac{x_{\Gamma}}{v_{\delta}}$ ή $t_{\Gamma} = 0,2 \text{ s}$.

Επομένως, τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,1 \text{ s} < 0,2 \text{ s}$ είναι $v_{\Gamma} = 0$, αφού δεν έχει αρχίσει ακόμη η ταλάντωση του υλικού σημείου Γ.

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 0,3 \text{ s} > 0,2 \text{ s}$ έχουμε:

$$v_{\Gamma} = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_{\Gamma}}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v_{\Gamma} = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_{\Gamma}}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v_{\Gamma} = 2,5\pi \sin 5\pi \text{ m/s} \quad \text{ή } v_{\Gamma} = -2,5\pi \text{ m/s.}$$

γ. Οι φάσεις των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Β και Γ μια τυχαία χρονική στιγμή στην οποία ταλαντώνονται και τα δύο σημεία είναι αντίστοιχα:

$$\varphi_B = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda} \right) \quad (1) \quad \text{και}$$

$$\varphi_{\Gamma} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\Gamma}}{\lambda} \right) \quad (2).$$

Όπως φαίνεται από το σχήμα, είναι $x_{\Gamma} > x_B$, οπότε από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\varphi_B > \varphi_{\Gamma}$. Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των δύο υλικών σημείων είναι:

$$\varphi_B - \varphi_{\Gamma} = 2\pi \frac{x_{\Gamma} - x_B}{\lambda}$$

$$\text{ή } \varphi_B - \varphi_{\Gamma} = 3\pi \text{ rad} \quad \text{ή } \varphi_B = 3\pi + \varphi_{\Gamma}$$

Τις χρονικές στιγμές στις οποίες η απομάκρυνση του σημείου Γ είναι: $y_{\Gamma} = +A$, η απομάκρυνση του σημείου Β είναι: $y_B = A \sin \varphi_B$

$$\text{ή } y_B = A \sin(3\pi + \varphi_{\Gamma}) \quad \text{ή } y_B = A \sin(\pi + \varphi_{\Gamma})$$

$$\text{ή } y_B = -A \sin \varphi_{\Gamma} \quad \text{ή } y_B = -y_{\Gamma} \quad \text{ή } y_B = -A$$

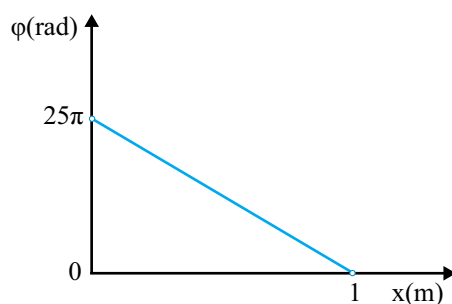
$$\text{ή } y_B = -0,05 \text{ m.}$$

δ. Η εξίσωση της φάσης του κύματος τη χρονική στιγμή t_3 σε συνάρτηση με τη θέση x των υλικών σημείων στον θετικό ημιάξονα Ox δίνεται από τη σχέση: $\varphi = 2\pi \left(\frac{t_3}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$

$$\text{ή } \varphi = 2\pi \left(\frac{t_3}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } \varphi = 2\pi(12,5 - 12,5x) \text{ (S.I.)} \quad (3).$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της σχέσης (3).



86. α. Το χρονικό διάστημα στο οποίο επαναλαμβάνεται η κυματική εικόνα ισούται με την περίοδο T του κύματος. Έχουμε:

$$t_1 = 3 \frac{T}{2} \quad \text{ή } T = \frac{2}{3} t_1 \quad \text{ή } T = 0,4 \text{ s.}$$

β. Έστω λ το μήκος κύματος του κύματος.

$$\text{Έχουμε: } \varphi_M = 2\pi \left(\frac{t_2}{T} + \frac{x_M}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } 5\pi = 2\pi \left(\frac{1,4}{0,4} - \frac{0,4}{\lambda} \right) \quad \text{ή } \lambda = 0,4 \text{ m.}$$

Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των θέσεων ισορροπίας δύο υλικών σημείων του ελαστικού μέσου τα οποία την ίδια χρονική στιγμή έχουν μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι: $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$ ή $\Delta x = 0,2 \text{ m}$.

γ. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου $O(x = 0)$. Το διάστημα s που διανύει το υλικό σημείο O από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$s = 6A \quad \text{ή} \quad A = 0,4 \text{ m.}$$

Η εξίσωση του κύματος είναι:

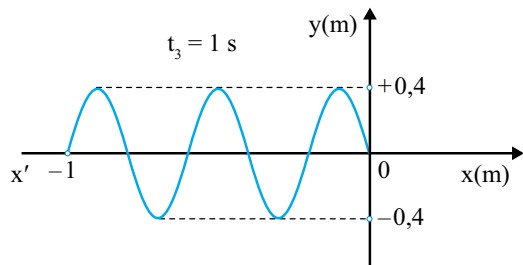
$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή} \quad y = 0,4\eta\mu 2\pi(2,5t + 2,5x) \text{ (S.I.)}$$

δ. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_\delta = \lambda f \quad \text{ή} \quad v_\delta = 1 \text{ m/s.}$$

Ακολουθώντας τα βήματα που περιγράφονται στη μεθοδολογία σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του κύματος στον αρνητικό ημιάξονα Ox' τη χρονική στιγμή $t_3 = 1 \text{ s}$:



ε. Το υλικό σημείο M αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_M = \frac{|x_M|}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_M = 0,4 \text{ s.}$$

Η χρονική στιγμή t_4 υπολογίζεται από τη σχέση:

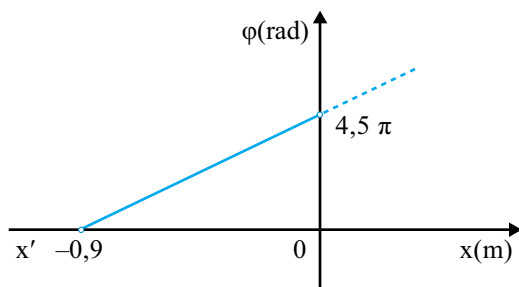
$$t_4 = t_M + 5\frac{T}{4} \quad \text{ή} \quad t_4 = 0,9 \text{ s.}$$

Η φάση φ του αρμονικού κύματος τη χρονική στιγμή t_4 σε συνάρτηση με τη θέση x των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου στον άξονα $x'Ox$ δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t_4}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad \varphi = 2\pi(2,25 + 2,5x)$$

$$\text{ή} \quad \varphi = 4,5\pi + 5\pi x \text{ (S.I.) (1).}$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης (1) απεικονίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



87. α. Έχουμε:

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = 2\pi f\Delta t \quad \text{ή} \quad f = 2 \text{ Hz.}$$

β. Έχουμε: $x_K - x_O = 2\lambda$ ή $x_K = 2\lambda$

$$\text{ή} \quad \lambda = 1 \text{ m.}$$

Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{v_{\max}}{v_\delta} = \frac{2\pi f A}{\lambda f} \quad \text{ή} \quad \frac{v_{\max}}{v_\delta} = 0,8\pi.$$

γ. Έχουμε:

$$x_\Lambda - x_O = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad \text{με} \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots (1).$$

Επειδή το σημείο Λ είναι το 2ο κατά σειρά σημείο του θετικού ημιάξονα το οποίο βρίσκεται σε αντίθεση φάσης με την πηγή του κύματος, είναι $\kappa = 1$. Επομένως, από τη σχέση (1) για $\kappa = 1$ προκύπτει:

$$x_\Lambda = \frac{3\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad x_\Lambda = +1,5 \text{ m.}$$

Το υλικό σημείο Λ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_\Lambda = \frac{x_\Lambda}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_\Lambda = \frac{x_\Lambda}{\lambda f} \quad \text{ή} \quad t_\Lambda = 0,75 \text{ s.}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Λ από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση:

$$y_{\Lambda} = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\Lambda}}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } y = 0,4\eta\mu 2\pi(2t - 1,5) \text{ (S.I.)},$$

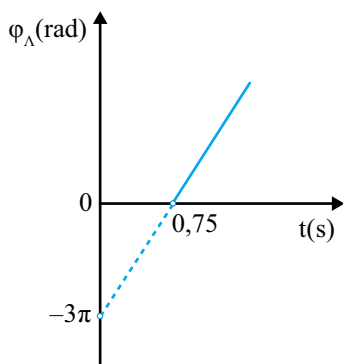
για $t \geq 0,75 \text{ s}$.

δ. Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_{\Lambda} = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\Lambda}}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad \varphi_{\Lambda} = 2\pi\left(2t - \frac{x_{\Lambda}}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } \varphi_{\Lambda} = 2\pi(2t - 1,5) \text{ (S.I.) (2).}$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης (2) απεικονίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



88. α. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι το σημείο Κ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_K = 2 \text{ s}$. Έχουμε:

$$v_{\delta} = \frac{x_K}{t_K} \quad \text{ή} \quad v_{\delta} = 5 \text{ m/s}.$$

β. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ακόμη ότι $A = 0,1 \text{ m}$ και $T = 2 \text{ s}$. Το μήκος κύματος του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_{\delta} = \lambda f \quad \text{ή} \quad v_{\delta} = \frac{\lambda}{T} \quad \text{ή} \quad \lambda = 10 \text{ m}.$$

Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } y = 0,1\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{10}\right) \text{ (S.I.).}$$

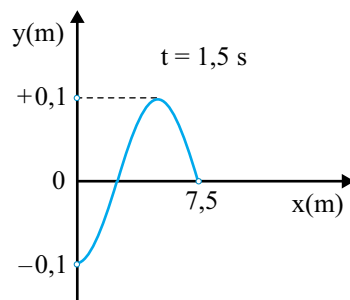
γ. Η απόσταση από την αρχή $O(x = 0)$ του ημιιάξονα Ox στην οποία έχει διαδοθεί το κύμα τη χρονική στιγμή $t = 1,5 \text{ s}$ είναι:

$$x = v_{\delta} t \quad \text{ή} \quad x = 7,5 \text{ m}.$$

Χωρίζουμε την απόσταση x σε N τμήματα μήκους $\lambda/4$ το καθένα. Έχουμε:

$$N = \frac{x}{\frac{\lambda}{4}} \quad \text{ή} \quad N = 3.$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t = 1,5 \text{ s}$.



δ. Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι:

$$\varphi_{\Lambda} - \varphi_K = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\Lambda}}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή} \quad \varphi_{\Lambda} - \varphi_K = \frac{2\pi(x_K - x_{\Lambda})}{\lambda}$$

$$\text{ή} \quad \varphi_{\Lambda} - \varphi_K = \pi \text{ rad}$$

$$\text{ή} \quad \varphi_K = \varphi_{\Lambda} - \pi \text{ rad (1).}$$

Έστω t_1 μία από τις χρονικές στιγμές στην οποία το υλικό σημείο Λ διέρχεται από τη

θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα ($v_A = +\omega A$). Έχουμε:

$$v_A = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_A}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } +\omega A = \omega A \sin \varphi_A \text{ ή } \sin \varphi_A = 1$$

$$\text{ή } \sin \varphi_A = \sin 0$$

$$\text{ή } \varphi_A = 2\kappa\pi, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots (2).$$

Η ταχύτητα του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$v_K = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v_K = \omega A \sin \varphi_K$$

ή, λόγω των σχέσεων (1) και (2):

$$v_K = \omega A \sin (2\kappa\pi - \pi)$$

$$\text{ή } v_K = \omega A \sin \pi \text{ ή } v_K = -\omega A$$

$$\text{ή } v_K = -\frac{2\pi}{T} A \text{ ή } v_K = -0,1\pi \text{ m/s.}$$

89. α. Έστω Τ η περίοδος του κύματος. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει:

$$T = (1,5 - 1) \text{ s} \text{ ή } T = 0,5 \text{ s.}$$

β. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι το πλάτος του κύματος είναι: $A = 0,2 \text{ m}$.

$$\text{Είναι: } v_{\max} = \omega A \text{ ή } v_{\max} = \frac{2\pi}{T} A$$

$$\text{ή } v_{\max} = 0,8\pi \text{ m/s.}$$

γ. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι το υλικό σημείο Κ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_K = 1 \text{ s}$. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \frac{|x_K|}{t_K} \text{ ή } v_\delta = 2 \text{ m/s.}$$

Έστω λ το μήκος κύματος του κύματος. Εί-

$$\text{ναι: } v_\delta = \lambda f \text{ ή } v_\delta = \frac{\lambda}{T} \text{ ή } \lambda = 1 \text{ m.}$$

Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέ-

$$\text{ση: } y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = 0,2\pi \sin 2\pi (2t + x) \text{ (S.I.) (1).}$$

δ. Η επιτάχυνση του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a = -\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 A \sin 2\pi \left(\frac{t_1}{T} + \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } a = -32\pi^2,5\pi \text{ m/s}^2 \text{ ή } a = -32 \text{ m/s}^2.$$

ε. Έστω x η θέση του υλικού σημείου το οποίο τίθεται σε ταλάντωση τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι: $x = -v_\delta t_2$ ή $x = -2 \text{ m}$.

Χωρίζουμε την απόσταση $|x|$ σε Ν τμήματα μήκους $\lambda/4$ το καθένα. Είναι:

$$N = \frac{|x|}{\frac{\lambda}{4}} \text{ ή } N = 8.$$

Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Ο τη χρονική στιγμή t_2 προκύπτει από τη σχέση (1), θέτοντας σε αυτήν όπου t το t_2 και όπου $x = 0$.

$$\text{Είναι: } y_0 = 0,2\pi \sin 4\pi \text{ ή } y_0 = 0.$$

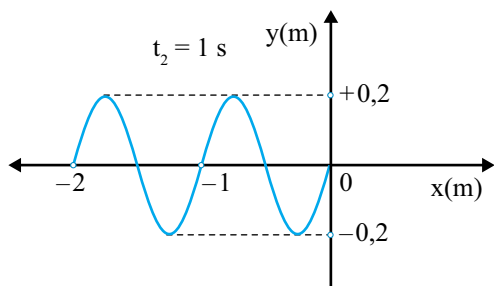
Η απομάκρυνση του υλικού σημείου του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση:

$x = -\frac{\lambda}{4}$ ή $x = -0,25 \text{ m}$ τη χρονική στιγμή t_2 προκύπτει από τη σχέση (1), θέτοντας σε αυτήν όπου t το t_2 και όπου $x = -0,25 \text{ m}$. Είναι:

$$y = 0,2\pi \sin 3,5\pi \text{ ή } y = 0,2\pi \sin \left(2\pi + \frac{3\pi}{2} \right) \text{ m}$$

$$\text{ή } y = -0,2 \text{ m}$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος στον αρνητικό ημιάξονα Ox' τη χρονική στιγμή t_2 .



90. α. Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,35$ s αρχίζει να ταλαντώνεται το υλικό σημείο που βρίσκεται στη θέση $x = +7$ m. Από τον ορισμό της ταχύτητας διάδοσης του κύματος έχουμε:

$$v_\delta = \frac{x}{t_1} \quad \text{ή} \quad v_\delta = 20 \text{ m/s.}$$

β. Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει ακόμη: $\frac{7\lambda}{4} = 7$ m ή $\lambda = 4$ m και $A = 0,8$ m.

Η περίοδος του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$ ή $T = 0,2$ s.

Η εξίσωση του στιγμιότυπου του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = 0,8\eta\mu 2\pi(1,75 - 0,25x) \text{ (S.I.).}$$

γ. Η θέση του υλικού σημείου K είναι:

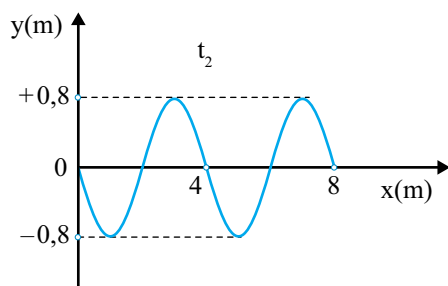
$$x_K = +\frac{3\lambda}{4} \quad \text{ή} \quad x_K = +3 \text{ m.}$$

Η φάση της ταλάντωσης του σημείου K τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\varphi_K = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) \quad \text{ή} \quad \varphi_K = 2\pi \text{ rad.}$$

δ. Ανάμεσα στο σημείο K και στο σημείο Λ υπάρχουν 2 σημεία τα οποία έχουν κάθε χρονική στιγμή την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα με το σημείο O (βλέπε βασική άσκηση 8, ερώτημα δ). Τα σημεία αυτά βρίσκονται στις θέσεις: $x_1 = +4$ m και $x_2 = +8$ m.

ε. Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \frac{T}{4}$.



91. α. Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει: $A = 0,1$ m

$$\text{και } 11\frac{\lambda}{4} = 1,1 \text{ m} \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,4 \text{ m.}$$

Η συχνότητα του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $f = 10$ Hz.

Η εξίσωση του κύματος είναι:

$$y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = 0,1\eta\mu 2\pi(10t - 2,5x) \text{ (S.I.).}$$

β. Το κύμα τη χρονική στιγμή t_1 θέτει σε ταλάντωση το υλικό σημείο που βρίσκεται στη θέση $x = 1,1 \text{ m}$. Έχουμε:

$$t_1 = \frac{x}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,275 \text{ s.}$$

γ. Όπως φαίνεται από το στιγμιότυπο, η θέση του σημείου Κ είναι ίση με: $x_K = 5 \frac{\lambda}{4}$

$$\text{ή} \quad x_K = 0,5 \text{ m.}$$

Η ταχύτητα με την οποία ταλαντώνεται το υλικό σημείο Κ τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται

$$\text{από τη σχέση: } v_K = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad v_K = 2\pi f A \sin 3\pi \quad \text{ή} \quad v_K = -2\pi f A$$

$$\text{ή} \quad v_K = -2\pi \text{ m/s.}$$

Επειδή το σημείο Λ τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται στην ακραία θετική του θέση, έχουμε:

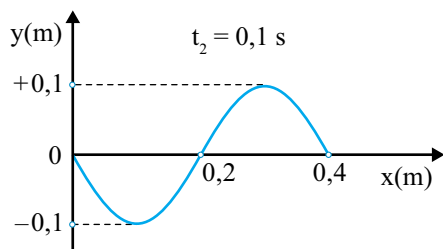
$$v_\Lambda = 0.$$

δ. Τη χρονική στιγμή t_2 το κύμα θέτει σε ταλάντωση το υλικό σημείο που βρίσκεται στη θέση: $x = v_\delta t_2$ ή $x = 0,4 \text{ m}$.

Χωρίζουμε την απόσταση x σε N τμήματα μήκους $\lambda/4$ το καθένα.

$$\text{Έχουμε: } N = \frac{x}{\frac{\lambda}{4}} \quad \text{ή} \quad N = \frac{4x}{\lambda} \quad \text{ή} \quad N = 4.$$

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 .



ε. Έστω t_K η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο Κ. Έχουμε:

$$t_3 = t_K + \frac{3T}{4} \quad \text{ή} \quad t_3 = \frac{x_K}{v_\delta} + \frac{3T}{4} \quad \text{ή} \quad t_3 = 0,2 \text{ s.}$$

92. α. Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει: $\frac{3\lambda}{4} = 1,5 \text{ m}$ ή $\lambda = 2 \text{ m}$.

β. Η δοθείσα εξίσωση του κύματος γράφεται:

$$y = A \sin 2\pi \left(2,5t - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (\text{S.I.}) \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{T} = 2,5 \text{ s}^{-1} \quad \text{ή} \quad f = 2,5 \text{ Hz.}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = 5 \text{ m/s}$.

Όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο του κύματος, τη χρονική στιγμή t_1 ξεκινά να ταλαντώνεται το υλικό σημείο που βρίσκεται στη

$$\text{θέση: } x = \frac{9\lambda}{4} \quad \text{ή} \quad x = 4,5 \text{ m.}$$

$$\text{Έχουμε: } t_1 = \frac{x}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,9 \text{ s.}$$

γ. Έχουμε: $\omega = 2\pi f$ ή $\omega = 5\pi \text{ rad/s}$.

Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει ότι: $A = 0,2 \text{ m}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το εν λόγω υλικό σημείο έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad E = 4K$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} D A^2 = 4 \frac{1}{2} m v^2$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = 4 \frac{1}{2} m v^2$$

$$\text{ή} \quad |v| = \frac{\omega A}{2} \quad \text{ή} \quad |v| = \frac{\pi}{2} \text{ m/s.}$$

δ. Το υλικό σημείο Κ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή: $t_K = \frac{x_K}{v_\delta}$ ή $t_K = 1$ s.

Το πλήθος Ν των ταλαντώσεων που εκτελεί το σημείο Κ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_2 = 5$ s υπολογίζεται από τη σχέση: $N = f(t_2 - t_K)$

ή $N = 10$ ταλαντώσεις.

Το διάστημα που διανύει το υλικό σημείο Κ όταν εκτελεί μία πλήρη ταλάντωση, είναι ίσο με $4A$. Επομένως, το διάστημα s που διανύει το σημείο Κ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$s = N \cdot 4A \quad \text{ή} \quad s = 40A \quad \text{ή} \quad s = 8 \text{ m.}$$

93. α. Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει: $A = 0,4$ m. Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει ακόμη:

$$2,5\lambda = 10 \text{ m} \quad \text{ή} \quad \lambda = 4 \text{ m.}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $x = 10$ m από την αρχή $O(x = 0)$ του ημιάξονα Ox . Επομένως, έχουμε:

$$v_\delta = \frac{x}{t_1} \quad \text{ή} \quad v_\delta = 2 \text{ m/s.}$$

Η περίοδος του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$ ή $T = 2$ s.

Η εξίσωση του κύματος είναι της μορφής:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή} \quad y = 0,4\eta\mu 2\pi(0,5t - 2,5x) \text{ (S.I.)}$$

β. Η θέση του υλικού σημείου Κ στον θετικό ημιάξονα Ox είναι: $x_K = +\frac{\lambda}{2}$ ή $x_K = +2$ m.

$$\text{Έχουμε: } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \omega = \pi \text{ rad/s.}$$

Η ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } v_K = \omega A \sin 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή} \quad v_K = 0,4\pi \sin(4\pi) \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad v_K = +0,4\pi \text{ m/s.}$$

γ. (Βλέπε βασική άσκηση 9, ερώτημα δ) 3 σημεία.

δ. Έστω t_K η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο Κ. Έχουμε:

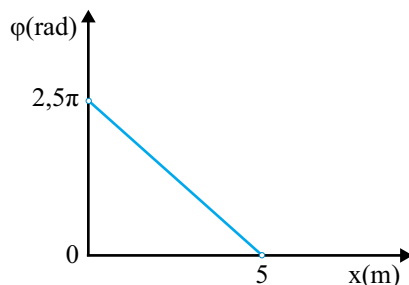
$$t_2 = t_K + \frac{3T}{4} \quad \text{ή} \quad t_2 = \frac{x_K}{v_\delta} + \frac{3T}{4} \quad \text{ή} \quad t_2 = 2,5 \text{ s.}$$

Η εξίσωση της φάσης του αρμονικού κύματος τη χρονική στιγμή t_2 σε συνάρτηση με τη θέση x των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου στον ημιάξονα Ox δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή} \quad \varphi = 2\pi(1,25 - 0,25x) \text{ (S.I.) (1)}$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης (1) απεικονίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



94. α. Από το δοθέν στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 προκύπτει: $\lambda = 0,3$ m.

Έστω T η περίοδος του κύματος. Έχουμε:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \quad \text{ή} \quad T = \frac{\lambda}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad T = 0,4 \text{ s.}$$

Από το δοθέν στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει ότι το κύμα τη χρονική στιγμή t_1 θέτει σε ταλάντωση το υλικό σημείο του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση:

$$x = -2\lambda \quad \text{ή} \quad x = -0,6 \text{ m. Έχουμε:}$$

$$v_\delta = \frac{|x|}{t_1} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{|x|}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,8 \text{ s.}$$

β. Επειδή είναι $T = 0,4 \text{ s}$, ισχύει $t_1 = 2T$.

Επομένως, το διάστημα που διανύει το υλικό σημείο Ο από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$s = 8A \quad \text{ή} \quad A = 0,1 \text{ m.}$$

Η εξίσωση του στιγμιότυπου του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$y = A\mu 2\pi \left(\frac{t_1}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad y = 0,1\mu 2\pi \left(2 + \frac{10}{3}x \right) \text{ (S.I.)}$$

γ. Από το δοθέν στιγμιότυπο προκύπτει ότι η θέση του σημείου Κ στον άξονα $x'Ox$ είναι:

$$x_K = +\frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad x_K = +0,15 \text{ m.}$$

Η ταχύτητα του σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_K = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t_1}{T} + \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad v_K = 0,5\pi \sin 5\pi$$

$$\text{ή} \quad v_K = -0,5\pi \text{ m/s.}$$

δ. Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$y_\Lambda = A\mu 2\pi \left(\frac{t_2}{T} + \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad y_\Lambda = 0,1\mu 1,5\pi \text{ m}$$

$$\text{ή} \quad y_\Lambda = 0,1\mu \frac{3\pi}{2} \text{ m} \quad \text{ή} \quad y_\Lambda = -0,1 \text{ m.}$$

Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Μ τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$y_M = A\mu 2\pi \left(\frac{t_2}{T} + \frac{x_M}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad y_M = 0,1\mu \frac{\pi}{2} \text{ m} \quad \text{ή} \quad y_M = +0,1 \text{ m.}$$

Η κατακόρυφη απόσταση των υλικών σημείων Λ και Μ τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$\Delta y = y_M + |y_\Lambda| \quad \text{ή} \quad \Delta y = 0,2 \text{ m.}$$

Η απόσταση μεταξύ των σημείων Μ και Λ τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

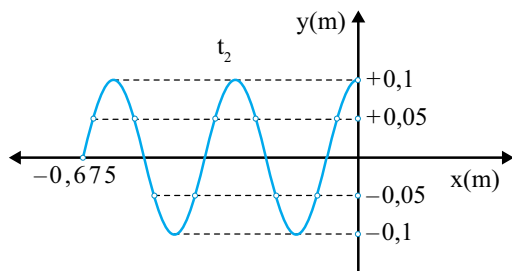
$$\text{ή} \quad d = \sqrt{|x_\Lambda - x_M|^2 + (\Delta y)^2} \quad \text{ή} \quad d = 0,25 \text{ m.}$$

ε. Έστω y η απομάκρυνση των υλικών σημείων μάζας $m = 10^{-3} \text{ kg}$, τα οποία τη χρονική στιγμή t_2 έχουν δυναμική ενέργεια ταλάντωσης $U = 312,5 \cdot 10^{-6} \text{ J}$.

$$\text{Έχουμε: } U = \frac{1}{2} D y^2 \quad \text{ή} \quad U = \frac{1}{2} m \omega^2 y^2$$

$$\text{ή} \quad U = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 y^2 \quad \text{ή} \quad y = \pm 0,05 \text{ m.}$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου στον αρνητικό ημιάξονα Ox' τα οποία έχουν τη χρονική στιγμή t_2 δυναμική ενέργεια ταλάντωσης $U = 312,5 \cdot 10^{-6} \text{ J}$, σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 στον αρνητικό ημιάξονα Ox' .



Όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 το πλήθος των ζητούμενων υλικών σημείων είναι ίσο με 9.

95. α. Η φορά διάδοσης του κύματος είναι από το σημείο Π_2 προς το σημείο Π_1 , διότι το σημείο Π_2 έχει κάθε χρονική στιγμή μεγαλύτερη φάση από το σημείο Π_1 . Όπως προκύπτει από τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Π_1 , η θέση του στον άξονα $x'Ox$ είναι $x_{\Pi_1} = 0$. Αφού το σημείο Π_2 είναι δεξιά του σημείου Π_1 για τη θέση του στον άξονα $x'Ox$ ισχύει ότι $x_{\Pi_2} > 0$. Επομένως, το κύμα διαδίδεται από ένα σημείο του θετικού ημιάξονα προς ένα σημείο του αρνητικού ημιάξονα, δηλαδή διαδίδεται **προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'Ox$** .

β. Από την εξίσωση της αυτομάκρυνσης του σημείου Π_2 προκύπτει:

$$\omega = 30\pi \text{ rad/s} \quad \text{ή} \quad \frac{2\pi}{T} = 30\pi \quad \text{ή} \quad T = \frac{1}{15} \text{ s}.$$

Οι χρονικές εξισώσεις των φάσεων των ταλαντώσεων των σημείων Π_1 και Π_2 είναι αντίστοιχα: $\varphi_1 = 30\pi t$ (S.I.) (1)

$$\text{και} \quad \varphi_2 = 30\pi t + \frac{\pi}{6} \text{ (S.I.) (2).}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των ση-

$$\text{μείων } \Pi_1 \text{ και } \Pi_2 \text{ είναι: } \Delta\varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad (3).}$$

Τα σημεία Π_1 , Π_2 απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\Delta x = 0,06 \text{ m}$, ενώ έχουν διαφορά φάσης $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$. Έχουμε: $\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda}$

$$\text{ή } \lambda = 0,72 \text{ m}.$$

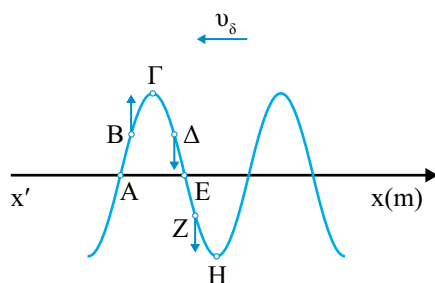
Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \quad \text{ή} \quad v_\delta = 10,8 \text{ m/s}.$$

$$\text{γ. Ισχύει: } v_\delta = v_{\max} \quad \text{ή} \quad v_\delta = \omega A$$

$$\text{ή} \quad A = \frac{v_\delta}{\omega} \quad \text{ή} \quad A = 0,114 \text{ m}.$$

δ.



Η ταχύτητα είναι μηδενική για τα ταλαντούμενα σημεία Γ και H που βρίσκονται στις ακραίες θέσεις τους, ενώ είναι μέγιστη για τα ταλαντούμενα σημεία A και E που βρίσκονται στις θέσεις ισορροπίας τους. Το σημείο B κινείται προς τα πάνω, ενώ τα σημεία Δ και Z κινούνται προς τα κάτω. (Κάθε σημείο της χορδής, κάθε χρονική στιγμή, τείνει να κινηθεί έτσι, ώστε να αποκτήσει την απομάκρυνση ενός από τα σημεία του ελαστικού μέσου προς το μέρος της πηγής).

96. α. Το υλικό σημείο Κ τη χρονική στιγμή t_1 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με αρνητική ταχύτητα. Επομένως το σημείο Κ τη χρονική στιγμή $t' = t_1 + \frac{T}{4}$ θα βρεθεί στην ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσής του. Για να συμβεί αυτό, πρέπει τη χρονική στιγμή t' να διέλθει από το σημείο Κ μία «κοιλάδα» του κύματος. Όπως φαίνεται από το στιγμιότυπο, τη χρονική στιγμή t_1 η πιο κοντινή προς το σημείο Κ «κοιλάδα» του κύματος βρίσκεται αριστερά από το σημείο Κ. Επομένως, το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'Ox$.

β. Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει: $A = 0,4 \text{ m}$ και $\frac{3\lambda}{4} = 0,3 \text{ m}$ ή $\lambda = 0,4 \text{ m}$.

Επειδή το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση, ξεκινά να ταλαντώνεται πρώτα το σημείο Λ και έπειτα το σημείο Κ. Η χρονική διαφορά έναρξης των ταλαντώσεων των σημείων Κ και Λ δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{x_K - x_\Lambda}{v_\delta}$$

$$\text{ή} \quad v_\delta = \frac{x_K - x_\Lambda}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad v_\delta = 4 \text{ m/s.}$$

Η περίοδος T του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$ ή $T = \frac{\lambda}{v_\delta}$
ή $T = 0,1 \text{ s}$.

Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$
ή $y = 0,4\eta\mu 2\pi(10t - 2,5x) \text{ (S.I.) (1)}$.

γ. Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} \quad \text{ή} \quad \Delta\phi = \frac{2\pi(x_K - x_\Lambda)}{\lambda}$$

$$\text{ή} \quad \Delta\phi = 4\pi \text{ rad.}$$

Τα σημεία Κ και Λ βρίσκονται σε συμφωνία φάσης. Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 το σημείο Λ διέρχεται από τη Θ.Ι. του με αρνητική ταχύτητα (όπως το σημείο Κ). Η ταχύτητα του σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$v_\Lambda = -v_{\max} \quad \text{ή} \quad v_\Lambda = -\omega A \quad \text{ή} \quad v_\Lambda = -2\pi f A$$

$$\text{ή} \quad v_\Lambda = -8\pi \text{ m/s.}$$

δ. Για να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο του κύματος μεταξύ των σημείων Κ και Λ τη χρονική στιγμή t_2 , πρέπει να υπολογίσουμε την απομάκρυνση καθενός από αυτά τα δύο σημεία τη χρονική στιγμή t_2 .

Η απομάκρυνση του σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_2 προκύπτει από τη σχέση (1), αν θέσουμε σε αυτήν όπου t το $t_2 = 0,2 \text{ s}$ και όπου x το $x_K = +0,3 \text{ m}$. Έχουμε:

$$y_K = 0,4\eta\mu 2,5\pi \text{ m} \quad \text{ή} \quad y_K = +0,4 \text{ m.}$$

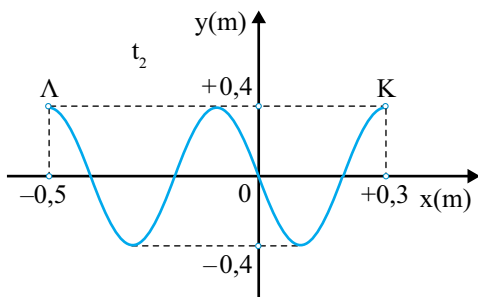
Επειδή το σημείο Λ βρίσκεται σε συμφωνία φάσης με το σημείο Κ, η απομάκρυνση του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_2 είναι:
 $y_\Lambda = +0,4 \text{ m}$.

Η απομάκρυνση του σημείου Ο ($x = 0$) τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$y_O = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t_2\right) \quad \text{ή} \quad y_O = 0,4\eta\mu 4\pi \text{ m}$$

$$\text{ή} \quad y_O = 0.$$

Στο διάγραμμα του επόμενου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος μεταξύ των σημείων Κ και Λ τη χρονική στιγμή t_2 .



ε. Έστω t_M η χρονική στιγμή στην οποία τίθεται σε ταλάντωση το υλικό σημείο Μ. Έχουμε: $t_M = \frac{x_M}{v_\delta}$ ή $t_M = 0,375$ s.

Η επιτάχυνση του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_M υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a = -\omega^2 A \sin 2\pi \left(\frac{t_M}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } a = -\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 A \sin 2\pi \left(\frac{t_M}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } a = -1.600 \eta \mu 10 \pi \text{ m/s}^2$$

$$\text{ή } a = 0.$$

97. α. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει:

$$A = 0,4 \text{ m και } \frac{3\lambda}{2} = 0,75 \text{ m ή } \lambda = 0,5 \text{ m.}$$

Έστω Τ η περίοδος του κύματος. Έχουμε:

$$v_\delta = \lambda f \text{ ή } v_\delta = \frac{\lambda}{T} \text{ ή } T = 0,1 \text{ s.}$$

Το κύμα τη χρονική στιγμή t_1 θέτει σε ταλάντωση το υλικό σημείο που βρίσκεται στη θέση $x = +0,75$ m. Επομένως, έχουμε:

$$v_\delta = \frac{x}{t_1} \text{ ή } t_1 = \frac{x}{v_\delta} \text{ ή } t_1 = 0,15 \text{ s.}$$

Η εξίσωση που περιγράφει το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από

$$\text{τη σχέση: } y = A \sin 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = 0,4 \eta \mu 2\pi (1,5 - 2x) \text{ (S.I.).}$$

β. Το υλικό σημείο Κ βρίσκεται στη θέση:

$$x_K = +\frac{\lambda}{2} \text{ ή } x_K = +0,25 \text{ m.}$$

$$\text{Έχουμε: } v_K = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v_K = \frac{2\pi}{T} A \sin 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v_K = 8\pi \sin 2\pi \text{ m/s ή } v = 8\pi \text{ m/s.}$$

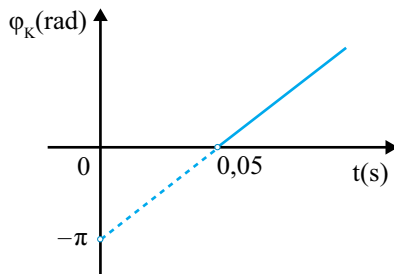
γ. Η χρονική εξίσωση της φάσης φ_K του υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_K = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } \varphi_K = 2\pi (10t - 0,5)$$

$$\text{ή } \varphi_K = 20\pi t - \pi \text{ (S.I.).}$$

Η γραφική παράσταση της φάσης φ_K του υλικού σημείου Κ σε συνάρτηση με τον χρόνο t απεικονίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



δ. Όπως φαίνεται από το προηγούμενο διάγραμμα το υλικό σημείο Κ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή: $t_K = 0,05$ s.

Το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί το υλικό σημείο Κ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $N = f\Delta t$

$$\text{ή } N = \frac{1}{T} (t_2 - t_K) \text{ ή } N = 5 \text{ ταλαντώσεις.}$$

Το πλήθος των μεγιστοποιήσεων της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το

σημείο Κ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$N' = 2N \quad \text{ή} \quad N' = 10 \text{ φορές.}$$

ε. Έστω y_K η απομάκρυνση του υλικού σημείου Κ τις χρονικές στιγμές στις οποίες ισχύει: $U = 3K$ ή $K = \frac{U}{3}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Κ έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad E = \frac{4}{3}U$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}DA^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}Dy_K^2 \quad \text{ή} \quad |y_K| = \frac{\sqrt{3}}{2}A$$

$$\text{ή} \quad |y_K| = 0,2\sqrt{3} \text{ m.}$$

$$\text{Έχουμε: } |\alpha_K| = \omega^2 |y_K| \quad \text{ή} \quad |\alpha_K| = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 |y_K|$$

$$\text{ή} \quad |\alpha_K| = 800\sqrt{3} \text{ m/s}^2.$$

98. α. Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Μ δίνεται από τη σχέση: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right)$ (1).

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $\varphi = -20\pi \text{ rad}$ προκύπτει: $-20\pi = -2\pi \frac{x_M}{\lambda}$ ή $\lambda = 0,4 \text{ m}$.

Από τη σχέση (1) για $t = 2 \text{ s}$ και $\varphi_M = 0$ προκύπτει: $0 = 2\pi\left(\frac{2}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right)$

$$\text{ή} \quad \frac{2}{T} - \frac{x_M}{\lambda} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{2}{T} = 10 \quad \text{ή} \quad T = 0,2 \text{ s.}$$

Η συχνότητα του κύματος είναι:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{ή} \quad f = 5 \text{ Hz.}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = 2 \text{ m/s}$.

$$\text{β. Έχουμε: } E = \frac{1}{2}DA^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

$$\text{ή} \quad E = \frac{1}{2}m(2\pi f)^2 A^2 \quad \text{ή} \quad A = 0,4 \text{ m.}$$

Το υλικό σημείο Μ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_M = \frac{x_M}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_M = 2 \text{ s.}$$

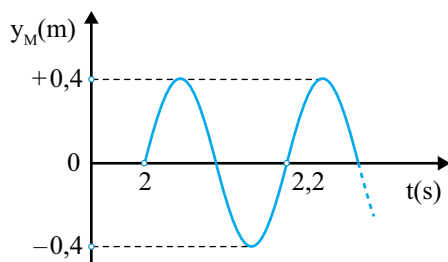
Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Μ από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση:

$$y_M = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή} \quad y_M = 0,4\eta\mu 2\pi(5t - 10) \text{ (S.I.),}$$

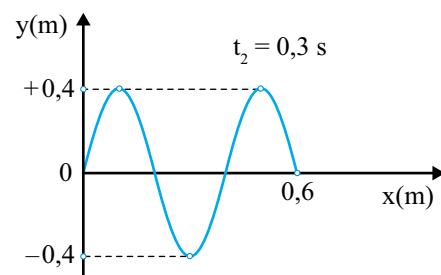
$$\text{για } t \geq 2 \text{ s (2).}$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης (2) απεικονίζεται στο διάγραμμα του παρακάτω σχήματος.



$$\text{γ. Έχουμε: } t_1 = t_M + \frac{3T}{4} \quad \text{ή} \quad t_1 = 2,15 \text{ s.}$$

δ. Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 0,3 \text{ s}$.



Από το στιγμιότυπο προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή t_2 υπάρχουν 3 σημεία του ελαστικού μέσου των οποίων η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι μέγιστη.

99. α. Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του σημείου N δίνεται από τη σχέση: $\varphi_N = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_N}{\lambda}\right)$ (1).

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $\varphi_N = -6\pi$ rad προκύπτει: $-6\pi = -2\pi\frac{x_N}{\lambda}$ ή $\lambda = 0,2$ m.

Από τη σχέση (1) για $t = 1,2$ s και $\varphi_N = 0$ προκύπτει:

$$0 = 2\pi\left(\frac{1,2}{T} - \frac{x_N}{\lambda}\right) \text{ ή } \frac{1,2}{T} = \frac{x_N}{\lambda} \text{ ή } T = 0,4 \text{ s.}$$

Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$
ή $y = 0,05\eta\mu 2\pi(2,5t - 5x)$ (S.I.).

β. Μία κυματική εικόνα επαναλαμβάνεται κάθε μία περίοδο. Έστω N το πλήθος των περιόδων που αντιστοιχούν στη χρονική στιγμή t_1 . Έχουμε: $t_1 = NT$ ή $N = 5$.

Επομένως, το πλήθος των κυματικών εικόνων που έχουν σχηματιστεί στο ελαστικό μέσο τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s είναι ίσο με 5.

γ. Έχουμε: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 5\pi$ rad/s.

Η επιτάχυνση του υλικού σημείου N τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a = -\omega^2 A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_N}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } a = -12,5\eta\mu \frac{3\pi}{2} \text{ m/s}^2 \text{ ή } a = +12,5 \text{ m/s}^2.$$

δ. Όπως φαίνεται από το δοθέν διάγραμμα, το υλικό σημείο N αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_N = 1,2$ s. Έχουμε:

$$t_3 = t_N + \frac{5T}{4} \text{ ή } t_3 = 1,7 \text{ s.}$$

Η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_3 δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_\Lambda = 2\pi\left(\frac{t_3}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) \text{ ή } x_\Lambda = +0,65 \text{ m.}$$

ε. Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων N και Λ είναι:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} \text{ ή } \Delta\varphi = 2\pi\frac{x_\Lambda - x_N}{\lambda}$$

$$\text{ή } \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

Αφού τα σημεία N και Λ έχουν διαφορά φάσης $(\pi/2)$ rad, τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σημείο N διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του το σημείο Λ βρίσκεται σε κάποια από τις δύο ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του. Επομένως, η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σημείων N και Λ τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σημείο N διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του είναι:

$$\Delta y_{\max} = A \text{ ή } \Delta y_{\max} = 0,05 \text{ m.}$$

Έστω d η απόσταση μεταξύ των σημείων N και Λ τις παραπάνω χρονικές στιγμές. Έχουμε:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_{\max})^2}$$

$$\text{ή } d = \sqrt{(x_\Lambda - x_N)^2 + (\Delta y_{\max})^2}$$

$$\text{ή } d = 0,05\sqrt{2} \text{ m.}$$

100. α. Η εξίσωση της φάσης του αρμονικού κύματος τη χρονική στιγμή t_1 σε συνάρτηση με τη θέση των υλικών σημείων του ελαστι-

κού μέσου στον άξονα $x'Ox$ δίνεται από τη σχέση: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ (1).

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι για $x = 0$ είναι $\varphi = 8\pi$ rad. Επομένως, από τη σχέση (1) για $x = 0$ και $\varphi = 8\pi$ rad προκύπτει:

$$8\pi = 2\pi \frac{t_1}{T} \quad \text{ή} \quad \frac{t_1}{T} = 4 \quad (2).$$

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ακόμη ότι για $x = 4$ m είναι $\varphi = 0$.

Επομένως, από τη σχέση (1) για $x = 4$ m και

$$\varphi = 0 \text{ έχουμε: } 0 = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{4}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad \frac{t_1}{T} = \frac{4}{\lambda}$$

ή, λόγω της σχέσης (2): $\frac{4}{\lambda} = 4$ ή $\lambda = 1$ m.

Η περίοδος T του κύματος υπολογίζεται από

$$\text{τη σχέση: } v_\delta = \frac{\lambda}{T} \quad \text{ή} \quad T = \frac{\lambda}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad T = 0,2 \text{ s.}$$

Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } y = 0,2\eta\mu 2\pi(5t - x) \text{ (S.I.).}$$

β. Έχουμε: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 10\pi$ rad/s.

Η χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\text{ση (2): } \frac{t_1}{T} = 4 \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,8 \text{ s.}$$

Η ταχύτητα του υλικού σημείου K τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v = \omega A \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad v = 2\pi \sigma\upsilon\nu 4\pi \text{ m/s}$$

$$\text{ή } v = +2\pi \text{ m/s.}$$

γ. Έστω y η απομάκρυνση ενός υλικού σημείου του μέσου τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία το μέτρο της επιτάχυνσής του είναι $a = 100\sqrt{3} \text{ m/s}^2$.

Έχουμε:

$$a = \omega^2|y| \quad \text{ή} \quad |y| = \frac{a}{\omega^2} \quad \text{ή} \quad y = \pm 0,1\sqrt{3} \text{ m.}$$

Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο πλήθος των σημείων του ελαστικού μέσου, σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 (βλ. αναλυτικά στη μεθοδολογία).

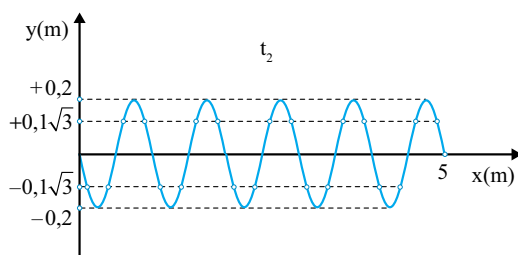
Έστω x η απόσταση από την αρχή $O(x = 0)$ του ημιάξονα στην οποία έχει διαδοθεί το κύμα τη χρονική στιγμή t_2 . Έχουμε:

$$x = v_\delta t_2 \quad \text{ή} \quad x = 5 \text{ m.}$$

Χωρίζουμε την απόσταση x σε N τμήματα μήκους $\lambda/4$ το καθένα. Έχουμε:

$$N = \frac{x}{\frac{\lambda}{4}} \quad \text{ή} \quad N = \frac{4x}{\lambda} \quad \text{ή} \quad N = 20.$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 .



Όπως φαίνεται από το στιγμιότυπο, το πλήθος των υλικών σημείων τα οποία τη χρονική στιγμή t_2 έχουν απομάκρυνση $y = \pm 0,1\sqrt{3} \text{ m}$, επομένως και επιτάχυνση μέτρου $a = 100\sqrt{3} \text{ m/s}^2$, είναι ίσο με 20.

δ. Έστω y' η απομάκρυνση ενός υλικού σημείου του μέσου τη χρονική στιγμή t_3 στην οποία το μέτρο της επιτάχυνσής του είναι $a' = 100 \text{ m/s}^2$. Έχουμε:

$$\alpha' = \omega^2 |y'| \quad \text{ή} \quad |y'| = \frac{\alpha'}{\omega^2} \quad \text{ή} \quad |y'| = \pm 0,1 \text{ m}$$

$$\text{ή} \quad y' = \pm 0,1 \text{ m.}$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας με την οποία ταλαντώνεται ένα υλικό σημείο του μέσου το οποίο τη χρονική στιγμή t_3 έχει απομάκρυνση $y' = \pm 0,1 \text{ m}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο αυτό έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D (y')^2$$

$$\text{ή} \quad m \omega^2 A^2 = m v^2 + m \omega^2 (y')^2$$

$$\text{ή} \quad v = \omega \sqrt{A^2 - (y')^2} \quad \text{ή} \quad v = \sqrt{3\pi} \text{ m/s.}$$

101. α. Η φάση του αρμονικού κύματος τη χρονική στιγμή t_1 σε συνάρτηση με τη θέση x των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου στον ημιάξονα Ox δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (1).$$

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι για $x = 0$ είναι $\varphi = 10\pi \text{ rad}$. Επομένως, από τη σχέση (1) για $x = 0$ και $\varphi = 10\pi \text{ rad}$ προκύπτει: $10\pi = \frac{2\pi}{T}$ ή $T = 0,2 \text{ s}$.

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ακόμη ότι για $x = +4 \text{ m}$ είναι $\varphi = 0$. Από τη σχέση (1) για $x = +4 \text{ m}$ και $\varphi = 0$ προκύπτει:

$$0 = 2\pi \left(\frac{1}{T} - \frac{4}{\lambda} \right) \quad \text{ή} \quad 5 = \frac{4}{\lambda} \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,8 \text{ m.}$$

Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση: $y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$
ή $y = 0,05 \eta \mu 2\pi (5t - 1,25x) \text{ (S.I.)}$.

β. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$ ή $v_\delta = 4 \text{ m/s}$.

Έστω t_K η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο K . Είναι:

$$t_K = \frac{x_K}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_K = 0,2 \text{ s.}$$

Η χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $t_2 = t_K + 2T$ ή $t_2 = 0,6 \text{ s}$.

Η κυματική εικόνα επαναλαμβάνεται κάθε μία περίοδο.

Έστω N το πλήθος των κυματικών εικόνων που έχουν δημιουργηθεί στο ελαστικό μέσο τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι: $t_2 = NT$

ή $N = 3$ κυματικές εικόνες.

Σε κάθε κυματική εικόνα που σχηματίζεται αντιστοιχεί μια «κοιλιάδα» του κύματος. Επομένως, το πλήθος N' των «κοιλιάδων» που έχουν σχηματιστεί στο ελαστικό μέσο τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $N = 3$ «κοιλιάδες».

γ. Εφόσον το υλικό σημείο Λ ξεκινά να ταλαντώνεται αργότερα από το υλικό σημείο K ισχύει: $x_\Lambda > x_K$.

Οι φάσεις της ταλάντωσης των υλικών σημείων K και Λ μια τυχαία χρονική στιγμή t δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις:

$$\varphi_K = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) \quad (2)$$

$$\varphi_\Lambda = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right) \quad (3).$$

Επειδή είναι $x_\Lambda > x_K$, από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι είναι $\varphi_K > \varphi_\Lambda$. Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων K και Λ είναι:

$\Delta\varphi = \varphi_K - \varphi_\Lambda$ ή, λόγω των σχέσεων (2) και

$$(3): \Delta\varphi = 2\pi \frac{x_\Lambda - x_K}{\lambda} \quad \text{ή} \quad x_\Lambda = +2,8 \text{ m.}$$

Η δύναμη επαναφοράς που δέχεται το υλικό σημείο Λ τη χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται από τη σχέση: $\Sigma F = -Dy$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = -m\omega^2 A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t_3}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = -m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t_3}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = -0,05 \eta \mu 5,5\pi \text{ N}$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = -0,05 \eta \mu \left(4\pi + \frac{3\pi}{2} \right) \text{ N}$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = +0,05 \text{ N.}$$

δ. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \omega = 10\pi \text{ rad/s.}$$

Έστω y_Λ η απομάκρυνση του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_3 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο Λ έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m v_\Lambda^2 + \frac{1}{2} D y_\Lambda^2$$

$$\text{ή} \quad m \omega^2 A^2 = m v_\Lambda^2 + m \omega^2 y_\Lambda^2$$

$$\text{ή} \quad y_\Lambda = + \sqrt{A^2 - \left(\frac{v_\Lambda}{\omega} \right)^2}$$

$$\text{ή} \quad y_\Lambda = +0,03 \text{ m}$$

Έστω y_K η απομάκρυνση του υλικού σημείο K τη χρονική στιγμή t_3 . Είναι:

$$y_K = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad y_K = A \eta \mu \varphi_K \quad \text{ή} \quad y_K = A \eta \mu (\Delta\varphi + \varphi_\Lambda)$$

$$\text{ή} \quad y_K = A \eta \mu (5\pi + \varphi_\Lambda)$$

$$\text{ή} \quad y_K = A \eta \mu (4\pi + \pi + \varphi_\Lambda)$$

$$\text{ή} \quad y_K = A \eta \mu (\varphi_\Lambda + \pi) \quad \text{ή} \quad y_K = -A \eta \mu \varphi_\Lambda$$

$$\text{ή} \quad y_K = -y_\Lambda \quad \text{ή} \quad y_K = -0,03 \text{ m.}$$

Επομένως, η επιτάχυνση του υλικού σημείου K τη χρονική στιγμή t_3 είναι: $a_K = -\omega^2 y_K$

$$\text{ή} \quad a_K = +30 \text{ m/s}^2.$$

102. α. Όπως φαίνεται από το δοθέν διάγραμμα, τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ η φάση της ταλάντωσης των υλικών σημείων του μέσου που βρίσκονται στον θετικό ημιάξονα Ox είναι μεγαλύτερη από τη φάση της ταλάντωσης των υλικών σημείων του μέσου που βρίσκονται στον αρνητικό ημιάξονα Ox' . Η φάση της ταλάντωσης κάθε σημείου αρχίζει να αυξάνεται από τη χρονική στιγμή που φτάνει το κύμα στο σημείο αυτό. Συνεπώς, τα σημεία του θετικού ημιάξονα ξεκίνησαν να ταλαντώνονται νωρίτερα από τα σημεία του αρνητικού ημιάξονα. Επομένως, **το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'Ox$.**

β. Η εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ σε συνάρτηση με τη θέση τους x στον άξονα $x'Ox$ δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad \varphi = 2\pi \left(\frac{2}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \quad (\text{S. I.}) \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) για $x = 0$ και $\varphi = 8\pi \text{ rad}$

$$\text{προκύπτει: } 8\pi = \frac{4\pi}{T} \quad \text{ή} \quad T = 0,5 \text{ s}$$

$$\text{ή } \frac{1}{f} = 0,5 \text{ s ή } f = 2 \text{ Hz.}$$

Από τη σχέση (1) για $x = 4 \text{ m}$ και $\varphi = 10\pi \text{ rad}$ προκύπτει:

$$10\pi = 2\pi \left(\frac{2}{T} + \frac{4}{\lambda} \right) \text{ ή } 5 = 4 + \frac{4}{\lambda} \text{ ή } \lambda = 4 \text{ m.}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_\delta = \lambda f \text{ ή } v_\delta = 8 \text{ m/s.}$$

γ. Η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Μ τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ είναι $\varphi = 0$. Επομένως από τη σχέση (1) για $x = x_M$ και $\varphi = 0$, προκύπτει:

$$0 = 2\pi \left(4 + \frac{x_M}{4} \right) \text{ ή } x_M = -16 \text{ m.}$$

Το υλικό σημείο Μ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_M = \frac{|x_M|}{v_\delta} \text{ ή } t_M = 2 \text{ s.}$$

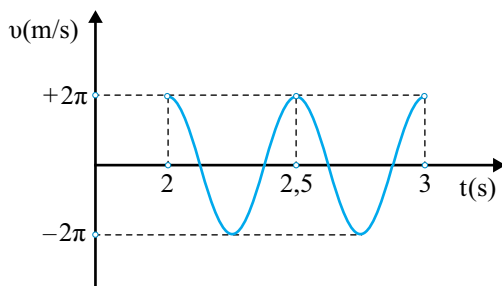
Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του υλικού σημείου Μ είναι η:

$$v = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_M}{\lambda} \right)$$

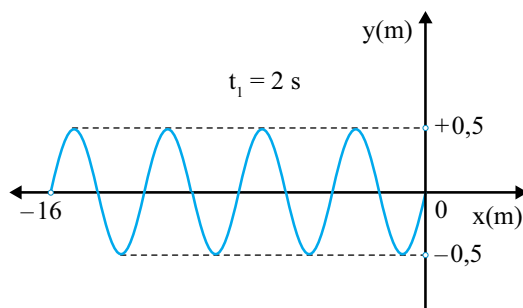
$$\text{ή } v = \frac{2\pi}{T} A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_M}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v = 2\pi \sin 2\pi(2t - 4) \text{ (S.I.)}, \text{ για } t \geq 2 \text{ s.}$$

Στο επόμενο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας του σημείου Μ σε συνάρτηση με τον χρόνο, από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 3 \text{ s}$.



δ. Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος στον αρνητικό ημιάξονα Ox' τη χρονική στιγμή t_1 (βλ. αναλυτικά στη μεθοδολογία).



103. α. Έχουμε: $v_{\max} = \omega A$ ή $\omega = 10\pi \text{ rad/s}$.

Η συχνότητα του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega = 2\pi f$ ή $f = 5 \text{ Hz}$.

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών του κύματος ισούται με ένα μήκος κύματος του κύματος (λ).

Έχουμε: $v_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = 1 \text{ m}$.

β. Για $t = 0$ είναι $y = +A$. Επομένως, η αρχική φάση της ταλάντωσης του σημείου Ο είναι: $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Ο δίνεται από τη σχέση:

$$y_O = 0,2\eta\mu \left(10\pi t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S. I.) (1).}$$

γ. Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη

$$\text{σχέση: } y = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

$$\text{ή } y = 0,2\eta\mu 2\pi\left(5t - x + \frac{1}{4}\right) \text{ (S.I.) (2).}$$

δ. Έστω x η θέση του υλικού σημείου που τίθεται σε ταλάντωση τη χρονική στιγμή $t = 0,25 \text{ s}$. Η φάση του συγκεκριμένου σημείου τη χρονική στιγμή $t = 0,25 \text{ s}$ είναι ίση με μηδέν. Έχουμε:

$$\varphi = 2\pi\left(5t - x + \frac{1}{4}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή } 0 = 2\pi\left(1,25 - x + \frac{1}{4}\right) \text{ (S.I.) ή } x = +1,5 \text{ m.}$$

Η απομάκρυνση του σημείου O τη χρονική στιγμή $t = 0,25 \text{ s}$ προκύπτει από τη σχέση (1), θέτοντας σε αυτήν όπου $t = 0,25 \text{ s}$:

$$y_O = 0,2\eta\mu 3\pi \text{ m ή } y_O = 0.$$

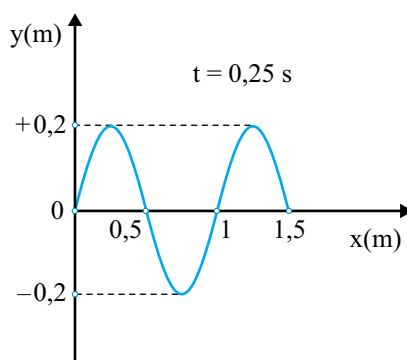
Η απομάκρυνση του υλικού σημείου που βρίσκεται στη θέση $x = +\frac{\lambda}{4} = +0,25 \text{ m}$ τη χρονική στιγμή $t = 0,25 \text{ s}$ υπολογίζεται από τη σχέση (2), θέτοντας σε αυτήν όπου $t = 0,25 \text{ s}$ και όπου $x = +0,25 \text{ m}$:

$$y = 0,2\eta\mu 2,5\pi \text{ m ή } y = +0,2 \text{ m.}$$

Χωρίζουμε την απόσταση x σε N τμήματα μήκους $\frac{\lambda}{4}$ το καθένα.

$$\text{Έχουμε: } N = \frac{x}{\frac{\lambda}{4}} \text{ ή } N = \frac{4x}{\lambda} \text{ ή } N = 6.$$

Στο επόμενο διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t = 0,25 \text{ s}$.



104. α. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η φάση της ταλάντωσης του σημείου K είναι $\varphi_K = 0$. Επομένως, έχουμε:

$$\varphi_K = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} + \frac{\varphi_0}{2\pi}\right)$$

$$\text{ή } 0 = 2\pi\left(-\frac{x_K}{\lambda} + \frac{\varphi_0}{2\pi}\right)$$

$$\text{ή } \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

β. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ η φάση της ταλάντωσης του σημείου Λ είναι $\varphi_\Lambda = 0$. Επομένως, έχουμε: $\varphi_\Lambda = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} + \frac{\varphi_0}{2\pi}\right)$

$$\text{ή } 0 = 2\pi\left(\frac{2}{T} - 1\right) \text{ ή } T = 2 \text{ s.}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι ίση με: $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$ ή $v_\delta = 1 \text{ m/s}$.

γ. Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη

$$\text{σχέση: } y = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

$$\text{ή } y = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) \text{ (S.I.).}$$

δ. Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Κ είναι η:

$$\varphi_K = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) + \varphi_0$$

$$\text{ή } \varphi_K = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} + \frac{1}{4} \right)$$

$$\text{ή } \varphi_K = \pi t \text{ (S.I.) (1).}$$

Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Λ είναι η:

$$\varphi_\Lambda = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right) + \varphi_0$$

$$\text{ή } \varphi_\Lambda = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} + \frac{1}{4} \right)$$

$$\text{ή } \varphi_\Lambda = \pi t - 2\pi \text{ (S.I.) (2).}$$

Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_K - \varphi_\Lambda \text{ ή } \Delta\varphi = 2\pi \text{ rad.}$$

Τα σημεία Κ και Λ βρίσκονται σε συμφωνία φάσης. Επομένως, τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σημείο Λ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, η ταχύτητα του σημείου Κ είναι:

$$v_K = v_\Lambda \text{ ή } v_K = +v_{\max} \text{ ή } v_K = +0,2\pi \text{ m/s.}$$

105. α. Επειδή η κάθε σηματοδούρα διέρχεται 30 φορές το λεπτό από τη θέση ισορροπίας της, εκτελεί $N = 15$ ταλαντώσεις κάθε λεπτό. Επομένως, έχουμε:

$$f = \frac{N}{t} \quad \text{ή} \quad f = \frac{15}{60} \quad \text{ή} \quad f = 0,25 \text{ Hz.}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad v_\delta = \frac{(AB)}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad v_\delta = \frac{13,5}{9} \text{ m/s}$$

$$\text{ή} \quad v_\delta = 1,5 \text{ m/s.}$$

$$\text{Έχουμε: } v_\delta = \lambda f \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{v_\delta}{f} \quad \text{ή} \quad \lambda = 6 \text{ m.}$$

β. Η περίοδος T του κύματος είναι:

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{ή} \quad T = 4 \text{ s.}$$

Η σηματοδούρα διέρχεται από την ανώτερη θέση της ταλάντωσής της για 21η φορά τη χρονική στιγμή t_1 για την οποία ισχύει:

$$t_1 = 20T + \frac{T}{4} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{81T}{4} \quad \text{ή} \quad t_1 = 81 \text{ s.}$$

Η απόσταση που διανύει το κύμα στον παραπάνω χρόνο είναι:

$$\Delta x = v_\delta t_1 \quad \text{ή} \quad \Delta x = 121,5 \text{ m.}$$

Επομένως, η απόσταση της σηματοδούρας Α από την ακτή είναι ίση με 121,5 m.

γ. Έχουμε: $v_{\max} = \omega A$

$$\text{ή} \quad v_{\max} = \frac{2\pi}{T} A \quad \text{ή} \quad A = \frac{v_{\max} T}{2\pi}$$

$$\text{ή} \quad A = 0,4 \text{ m.}$$

Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad y = 0,4 \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{4} - \frac{13,5}{6} \right) \text{ (S.I.).}$$

δ. Η διαφορά φάσης ανάμεσα στη σηματοδούρα Α και τη σηματοδούρα Β είναι:

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi \Delta x}{\lambda} \quad \text{ή} \quad \Delta \varphi = 4,5\pi \text{ rad}$$

$$\text{ή} \quad \Delta \varphi = \left(4\pi + \frac{\pi}{2} \right) \text{ rad}$$

$$\text{ή} \quad \varphi_A - \varphi_B = \left(4\pi + \frac{\pi}{2} \right) \text{ rad}$$

$$\text{ή} \quad \varphi_B = \varphi_A - \left(4\pi + \frac{\pi}{2} \right) \text{ rad (1).}$$

Τις χρονικές στιγμές στις οποίες η σηματοδούρα Α βρίσκεται στο ανώτερο σημείο της ταλάντωσής της ισχύει:

$$y_A = A \eta \mu \varphi_A \quad \text{ή} \quad A = A \eta \mu \varphi_A$$

$$\text{ή} \quad \eta \mu \varphi_A = 1 \quad \text{ή} \quad \varphi_A = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (2).}$$

Από τη σχέση (1), λόγω της σχέσης (2), προκύπτει: $\varphi_B = 2\kappa\pi - 4\pi$ (3).

Η ταχύτητα με την οποία ταλαντώνεται η σηματοδούρα Β υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_B = v_{\max} \sigma \nu \varphi_B$$

ή, λόγω της σχέσης (3):

$$v_B = v_{\max} \sigma \nu \nu (2\kappa\pi - 4\pi)$$

$$\text{ή} \quad v_B = v_{\max} \sigma \nu \nu 4\pi \quad \text{ή} \quad v_B = +v_{\max}$$

$$\text{ή} \quad v_B = +\frac{\pi}{5} \text{ m/s.}$$

106. α. Η δοθείσα εξίσωση του στιγμιότυπου του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 γράφεται:

$$y = 0,04\eta\mu 2\pi \left(1,5 - \frac{x}{40} \right) \quad (1) \quad (y \text{ σε m, } x \text{ σε cm}).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\frac{t_1}{T} = 1,5 \quad \text{ή} \quad T = 0,5 \text{ s}$$

$$\text{και} \quad \frac{1}{40} \text{ cm}^{-1} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{ή} \quad \lambda = 40 \text{ cm} \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,4 \text{ m}.$$

Η συχνότητα του κύματος είναι:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{ή} \quad f = 2 \text{ Hz}.$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = 0,8 \text{ m/s}$.

β. Έχουμε: $\varphi_K = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$

$$\text{ή} \quad x_K = +0,4 \text{ m}.$$

γ. Έχουμε: $t_2 = t_1 + \frac{T}{4}$ ή $t_2 = 0,875 \text{ s}$.

Η επιτάχυνση του υλικού σημείου K τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a = -\omega^2 A \eta\mu 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad a = -\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 A \eta\mu 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad a = -6,4\eta\mu \frac{3\pi}{2} \text{ m/s}^2 \quad \text{ή} \quad a = +6,4 \text{ m/s}^2.$$

δ. Η χρονική στιγμή t_A στην οποία ξεκινά να ταλαντώνεται το υλικό σημείο A είναι:

$$t_A = t_K + 0,25 \text{ s} \quad \text{ή} \quad \frac{x_A}{v_\delta} = \frac{x_K}{v_\delta} + 0,25 \text{ s}$$

$$\text{ή} \quad x_A = +0,6 \text{ m}.$$

$$\text{Έχουμε: } \Delta\varphi = \varphi_K - \varphi_A$$

$$\text{ή} \quad \Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad \Delta\varphi = \pi \text{ rad}.$$

ε. Έστω y_K η απομάκρυνση του σημείου K τις χρονικές στιγμές στις οποίες η ταχύτητά του είναι: $v_K = -0,08 \text{ m/s}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του υλικού σημείου K έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m v_K^2 + \frac{1}{2} D y_K^2$$

$$\text{ή} \quad y_K = \pm 0,02\sqrt{3} \text{ m}.$$

Επειδή το σημείο K κινείται επιταχυνόμενο είναι $y_K = +0,02\sqrt{3} \text{ m}$.

Επειδή η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων K και A ισούται με $\pi \text{ rad}$, η απομάκρυνση του σημείου A είναι:

$$y_A = -y_K \quad \text{ή} \quad y_A = -0,02\sqrt{3} \text{ m}.$$

107. α. Το υλικό σημείο K αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_K = 0,4 \text{ s}$. Επομένως, έχουμε: $t_K = \frac{x_K}{v_\delta}$ ή $x_K = +2 \text{ m}$.

Από τη δοθείσα εξίσωση της ταχύτητας του ταλαντούμενου υλικού σημείου K προκύπτει:

$$v_{\max} = \pi \text{ m/s} \quad (1) \quad \text{και} \quad \frac{x_K}{\lambda} = 4 \quad (2).$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει: $\lambda = 0,5 \text{ m}$.

Επομένως, έχουμε: $v_\delta = \lambda f$ ή $f = 10 \text{ Hz}$.

Από τη σχέση (1) έχουμε: $v_{\max} = 2\pi f A$

$$\text{ή} \quad A = 0,05 \text{ m}.$$

Η εξίσωση του κύματος είναι η:

$$y = A \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad y = 0,05\eta\mu 2\pi (10t - 2x) \quad (\text{S.I.}).$$

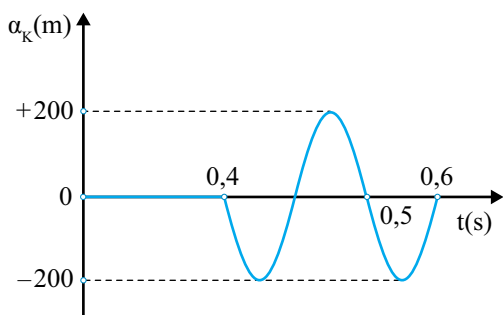
β. Έχουμε: $\omega = 2\pi f$ ή $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$.

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

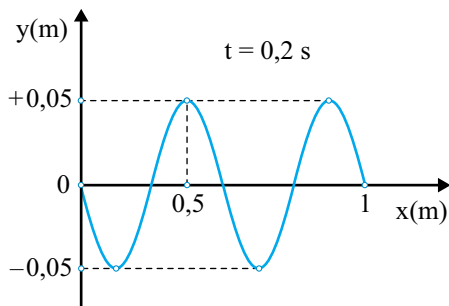
$$a_K = -\omega^2 A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

ή $a_K = -200\pi^2 \sin 2\pi(10t - 4)$ (S.I.), για $t \geq 0,4 \text{ s}$ (3).

Η γραφική παράσταση της σχέσης (3) από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 0,6 \text{ s}$ απεικονίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



γ. Από το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,2 \text{ s}$ (βλέπε μεθοδολογία), το οποίο απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα, προκύπτει ότι εκείνη τη χρονική στιγμή υπάρχουν 4 σημεία τα οποία έχουν κινητική ενέργεια ίση με μηδέν (είναι τα σημεία τα οποία τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους).



δ. Επειδή το υλικό σημείο Λ αρχίζει να ταλαντώνεται αργότερα από το υλικό σημείο Κ, ισχύει: $x_\Lambda > x_K$. Επομένως, κάθε χρονική στιγμή μετά την έναρξη της ταλάντωσης του σημείου Λ ισχύει: $\phi_\Lambda < \phi_K$.

Επομένως: $\Delta\phi = \phi_K - \phi_\Lambda$

$$\text{ή } \Delta\phi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

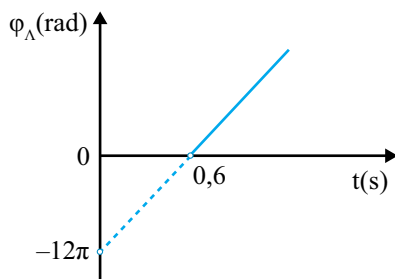
$$\text{ή } \Delta\phi = 2\pi \frac{x_\Lambda - x_K}{\lambda}$$

$$\text{ή } x_\Lambda = +3 \text{ m.}$$

ε. Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ δίνεται από τη σχέση: $\phi_\Lambda = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$

$$\text{ή } \phi_\Lambda = 2\pi(10t - 6) \text{ (S.I.) (2).}$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης (2) απεικονίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



108. α. Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ είναι μεγαλύτερη από τη φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ, το κύμα φτάνει πρώτα στο σημείο Κ και αργότερα φτάνει στο σημείο Λ. Επομένως, το κύμα διαδίδεται από το σημείο Κ προς το σημείο Λ.

β. Επειδή το κύμα διαδίδεται από το σημείο $K(x_K = +1 \text{ m})$ προς το σημείο $\Lambda(x_\Lambda = -1 \text{ m})$, διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'Ox$.

Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου K δίνεται από τη σχέση: $\varphi_K = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x_K}{\lambda}\right)$ (1).

Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ δίνεται από τη σχέση: $\varphi_\Lambda = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right)$ (2).

Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των δύο σημείων είναι: $\Delta\varphi = \varphi_K - \varphi_\Lambda$

ή, λόγω των σχέσεων (1) και (2):

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{x_K - x_\Lambda}{\lambda} \quad \text{ή} \quad \lambda = 2\pi \frac{x_K - x_\Lambda}{\Delta\varphi}$$

$$\text{ή} \quad \lambda = 1 \text{ m.}$$

Από τη δοθείσα εξίσωση της ταλάντωσης του σημείου O προκύπτει:

$$A = 0,02 \text{ m} \quad \text{και} \quad \omega = 8\pi \text{ rad/s.}$$

Η περίοδος T του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $T = 0,25 \text{ s}$.

Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$
ή $y = 0,02\eta\mu 2\pi(4t + x)$ (S.I.).

γ. Έχουμε: $\varphi_K = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} + \frac{x_K}{\lambda}\right)$ ή $t_1 = 1 \text{ s}$.

Επομένως, η χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{16} \text{ s} \quad \text{ή} \quad t_2 = \frac{17}{16} \text{ s.}$$

Η απομάκρυνση του σημείου K τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$y_K = A\eta\mu 2\pi\left(4t_2 + \frac{x_K}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή} \quad y_K = 0,02\eta\mu\left(10\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

$$\text{ή} \quad y_K = +0,02 \text{ m.}$$

Η απομάκρυνση του σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$y_\Lambda = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_2}{T} + \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή} \quad y_\Lambda = 0,02\eta\mu\left(6\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{ή} \quad y_\Lambda = +0,02 \text{ m.}$$

δ. Η χρονική διαφορά έναρξης των ταλαντώσεων των δύο σημείων υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } \Delta t = \frac{(K\Lambda)}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{x_K - x_\Lambda}{\lambda f}$$

$$\text{ή} \quad \Delta t = 0,5 \text{ s.}$$

109. α. Από το διάγραμμα (β) προκύπτει:

$$\frac{7T}{4} = (11,5 - 8) \text{ s} \quad \text{ή} \quad T = 2 \text{ s.}$$

β. Έχουμε: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$ ή $\lambda = 4 \text{ m}$.

Από το διάγραμμα (β) προκύπτει ότι το υλικό σημείο M αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_M = 8 \text{ s}$.

Επομένως, έχουμε: $t_M = \frac{x_M}{v_\delta}$ ή $x_M = +16 \text{ m}$.

Το πλήθος των μηκών κύματος που «χωρούν» στην απόσταση (OM) είναι:

$$N = \frac{(OM)}{\lambda} \quad \text{ή} \quad N = \frac{x_M}{\lambda}$$

$$\text{ή} \quad N = 4 \text{ μήκη κύματος.}$$

γ. Από το διάγραμμα (α) προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή t_1 τίθεται σε ταλάντωση το υλικό σημείο που βρίσκεται στη θέση $x = +8 \text{ m}$ (αφού η φάση της ταλάντωσής του είναι ίση με μηδέν). Επομένως, έχουμε:

$$t_1 = \frac{x}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_1 = 4 \text{ s.}$$

Η φάση της ταλάντωσης της πηγής τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\varphi_0 = \omega t_1$

$$\text{ή} \quad \varphi_0 = \frac{2\pi}{T} t_1 \quad \text{ή} \quad \varphi_0 = 4\pi \text{ rad.}$$

δ. Τα ζητούμενα σημεία του ελαστικού μέσου βρίσκονται στις θέσεις:

$$x = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad \text{με} \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (1).$$

Έχουμε: $x_K < x < x_M$

$$\text{ή} \quad 8 \text{ m} < (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{2} < 16 \text{ m}$$

$$\text{ή} \quad \kappa = 2, 3.$$

Από τη σχέση (1) για $\kappa = 2$ και $\kappa = 3$ προκύπτει αντίστοιχα: $x_1 = +10 \text{ m}$

και $x_2 = +14 \text{ m}$.

110. α. Τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $\Delta x = 10 \text{ m}$ από την αρχή Ο. Επομένως, έχουμε:

$$v_\delta = \frac{\Delta x}{t_1} \quad \text{ή} \quad v_\delta = 5 \text{ m/s.}$$

β. Έστω T η περίοδος του κύματος. Επειδή τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ το σημείο Ο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του για δέκατη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσής του, ισχύει:

$$t_1 = 5T \quad \text{ή} \quad T = 0,4 \text{ s.}$$

Η συχνότητα του κύματος είναι:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{ή} \quad f = 2,5 \text{ Hz.}$$

Το μήκος κύματος λ του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = 2 \text{ m}$.

Η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ είναι ίση με $2A$, όπου A το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ. Επομένως, ισχύει:

$$2A = 0,2 \text{ m} \quad \text{ή} \quad A = 0,1 \text{ m.}$$

Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση: $y = A \eta \mu \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$

$$\text{ή} \quad y = 0,1 \eta \mu 2\pi(2,5t - 0,5x) \text{ (S.I.)} \quad (1).$$

$$\text{γ. Έχουμε: } E = \frac{1}{2} D A^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

$$\text{ή} \quad E = \frac{1}{2} m (2\pi f)^2 A^2 \quad \text{ή} \quad E = 125 \cdot 10^{-4} \text{ J.}$$

δ. Έστω t_K η χρονική στιγμή στην οποία το σημείο Κ αρχίζει να ταλαντώνεται. Επειδή τη χρονική στιγμή t_2 το υλικό σημείο Κ φτάνει για πέμπτη φορά σε ακραία θέση της ταλάντωσής του, ισχύει:

$$t_2 = t_K + \frac{9T}{4} \quad \text{ή} \quad t_2 = \frac{x_K}{v_\delta} + \frac{9T}{4}$$

$$\text{ή} \quad x_K = +10 \text{ m.}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$y_K = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad y_K = 0,1 \eta \mu 2\pi(2,5t - 5) \text{ (S.I.)}, \quad \text{για} \quad t \geq 2 \text{ s.}$$

ε. Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Ο και Μ τη χρονική στιγμή t_3 είναι: $\Delta\varphi = \varphi_O - \varphi_M \quad (1)$

$$\text{ή} \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi t_3}{T} - 2\pi \left(\frac{t_3}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } \Delta\varphi = 2\pi \frac{x_M}{\lambda} \quad \text{ή } \Delta\varphi = \frac{3\pi}{2} \text{ rad.}$$

Επομένως, από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\varphi_M = \varphi_0 - \frac{3\pi}{2} \quad (2).$$

Έχουμε: $\omega = 2\pi f$ ή $\omega = 5\pi \text{ rad/s}$.

Τη χρονική στιγμή t_3 στην οποία το υλικό σημείο Ο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα ισχύει:

$$v_O = \omega A \sin\left(2\pi \frac{t_3}{T}\right) \quad \text{ή } v_O = \omega A \sin\varphi_O$$

$$\text{ή } +\omega A = \omega A \sin\varphi_O$$

$$\text{ή } \varphi_O = 2\kappa\pi, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (3).$$

Τη χρονική στιγμή t_3 η επιτάχυνση του υλικού σημείου Μ είναι: $a_M = -\omega^2 A \sin\varphi_M$

ή λόγω της σχέσης (2):

$$a_M = -\omega^2 A \sin\left(\varphi_O - \frac{3\pi}{2}\right)$$

ή λόγω της σχέσης (3):

$$a_M = -\omega^2 A \sin\left(2\kappa\pi - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\text{ή } a_M = -\omega^2 A \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\text{ή } a_M = -\omega^2 A \sin\frac{\pi}{2} \quad \text{ή } a_M = -\omega^2 A$$

$$\text{ή } a_M = -25 \text{ m/s}^2.$$

$$\mathbf{111. \alpha.} \text{ Έχουμε: } v_\delta = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{ή } v_\delta = 5 \text{ m/s.}$$

β. Έστω t_K η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το υλικό σημείο Κ.

$$\text{Έχουμε: } t_1 = t_K + \frac{T}{4} \quad \text{ή } t_1 = \frac{x_K}{v_\delta} + \frac{T}{4} \quad (1).$$

Έστω t_Λ η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο Λ. Έχουμε:

$$t_1 = t_\Lambda + \frac{3T}{4} \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{x_K}{v_\delta} + \frac{T}{4} = \frac{x_\Lambda}{v_\delta} + \frac{3T}{4} \quad \text{ή } \frac{x_K - x_\Lambda}{v_\delta} = \frac{T}{2}$$

$$\text{ή } \frac{\Delta x}{v_\delta} = \frac{T}{2} \quad \text{ή } T = 4 \text{ s.}$$

$$\text{Επομένως: } v_\delta = \frac{\lambda}{T} \quad \text{ή } \lambda = 20 \text{ m.}$$

γ. Από τη δοθείσα εξίσωση της ταλάντωσης του σημείου Ο προκύπτει: $A = 0,3 \text{ m}$.

Η εξίσωση του κύματος είναι η:

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = 0,3 \sin 2\pi \left(0,25t - \frac{x}{20} \right) \quad (\text{S.I.}).$$

$$\mathbf{\delta.} \text{ Έχουμε: } \frac{K}{U} = \frac{E - U}{U}$$

$$\text{ή } \frac{K}{U} = \frac{\frac{1}{2} D A^2 - \frac{1}{2} D y_K^2}{\frac{1}{2} D y_K^2}$$

$$\text{ή } \frac{K}{U} = \frac{A^2 - y_K^2}{y_K^2} \quad \text{ή } \frac{K}{U} = 8.$$

$$\mathbf{\epsilon.} \text{ Έχουμε: } t_2 = t_1 + \frac{T}{4}$$

$$\text{ή λόγω της σχέσης (1): } t_2 = \frac{x_K}{v_\delta} + \frac{T}{2}$$

$$\text{ή } t_2 = \frac{x_K}{\lambda} T + \frac{T}{2}.$$

Η ταχύτητα με την οποία ταλαντώνεται το υλικό σημείο Κ τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $v_K = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$

$$\text{ή } v_K = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v_K = \frac{2\pi}{T} A \sin 2\pi \left(\frac{\frac{x_K}{\lambda} T + \frac{T}{2}}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v_K = \frac{2\pi}{T} A \sin \pi \quad \text{ή } v_K = -\frac{2\pi}{T} A$$

$$\text{ή } v_K = -0,15 \text{ m/s.}$$

112. α. Από το στιγμιότυπο του κύματος που απεικονίζεται στο διάγραμμα (α) προκύπτει:

$$A = 0,5 \text{ m και } \frac{5\lambda}{4} = 0,5 \text{ m ή } \lambda = 0,4 \text{ m.}$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής προκύπτει: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$ ή $T = \frac{\lambda}{v_\delta}$

$$\text{ή } T = 0,1 \text{ s.}$$

Συνεπώς, η εξίσωση που περιγράφει το κύμα

$$\text{είναι η: } y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = 0,5 \sin 2\pi (10t - 2,5x) \text{ (S.I.).}$$

Από το στιγμιότυπο του κύματος που απεικονίζεται στο διάγραμμα (α) προκύπτει ακόμη ότι τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $x_1 = 0,5 \text{ m}$ από την αρχή $O(x=0)$ του ημιάξονα Ox . Συνεπώς, ισχύει:

$$v_\delta = \frac{x_1}{t_1} \quad \text{ή } t_1 = \frac{x_1}{v_\delta} \quad \text{ή } t_1 = 0,125 \text{ s.}$$

β. Από το στιγμιότυπο που απεικονίζεται στο διάγραμμα (β) προκύπτει ότι το κύμα τη χρονική στιγμή t_2 έχει διαδοθεί σε απόσταση x_2 από την αρχή $O(x=0)$ του ημιάξονα Ox , για την οποία ισχύει:

$$x_2 = \frac{3\lambda}{2} \quad \text{ή } x_2 = 0,6 \text{ m.}$$

Επομένως, η χρονική στιγμή t_2 , η οποία αντιστοιχεί στο στιγμιότυπο που απεικονίζεται στο διάγραμμα (β), υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \frac{x_2}{t_2} \quad \text{ή } t_2 = \frac{x_2}{v_\delta} \quad \text{ή } t_2 = 0,15 \text{ s.}$$

Η εξίσωση του στιγμιότυπου του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 δίνεται από τη σχέση:

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = 0,5 \sin 2\pi (1,5 - 2,5x) \text{ (S.I.),}$$

για $x \leq 0,6 \text{ m.}$

γ. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του υλικού σημείου Σ_1 ($x_{\Sigma_1} = +0,2 \text{ m}$) δίνεται από τη

$$\text{σχέση: } v = v_{\max} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\Sigma_1}}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\Sigma_1}}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v = \frac{2\pi}{T} A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\Sigma_1}}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v = 10\pi \sin 2\pi \left(10t - \frac{1}{2} \right) \text{ (S.I.).}$$

Από την τελευταία σχέση για $t = t_1 = 0,125 \text{ s}$

$$\text{προκύπτει: } v = 10\pi \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \text{ (S.I.) ή } v = 0.$$

δ. Έστω x_{Σ_2} και x_{Σ_3} οι θέσεις των υλικών σημείων Σ_2 και Σ_3 αντίστοιχα στον άξονα Ox . Όπως φαίνεται από το διάγραμμα, τα υλικά σημεία Σ_2 και Σ_3 ξεκινούν να ταλαντώνονται τις χρονικές στιγμές $t_{\Sigma_2} = 0,1 \text{ s}$ και $t_{\Sigma_3} = 0,4 \text{ s}$ αντίστοιχα. Ισχύει ότι:

$$t_{\Sigma_2} = \frac{x_{\Sigma_2}}{v_\delta} \quad \text{ή } x_{\Sigma_2} = 0,4 \text{ m}$$

$$\text{και } t_{\Sigma_3} = \frac{x_{\Sigma_3}}{v_\delta} \quad \text{ή } x_{\Sigma_3} = 1,6 \text{ m.}$$

Οι φάσεις της ταλάντωσης των υλικών σημείων Σ_2 και Σ_3 κάποια χρονική στιγμή στην οποία ταλαντώνονται και τα δύο σημεία είναι

$$\text{αντίστοιχα: } \varphi_{\Sigma_2} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\Sigma_2}}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } \varphi_{\Sigma_2} = 2\pi(10t - 1) \text{ (S.I.) (1)}$$

$$\text{και } \varphi_{\Sigma_3} = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\Sigma_3}}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } \varphi_{\Sigma_3} = 2\pi(10t - 4) \text{ (S.I.) (2).}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\varphi_{\Sigma_2} > \varphi_{\Sigma_3}$.

Επομένως η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Σ_2 και Σ_3 είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_{\Sigma_2} - \varphi_{\Sigma_3} \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = 6\pi \text{ rad.}$$

ε. Η απόσταση μεταξύ των θέσεων ισορροπίας δύο υλικών σημείων τα οποία έχουν κάθε χρονική στιγμή την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα, είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος: $\Delta x = \kappa\lambda$ (2) με $\kappa = 1, 2, 3, \dots$

Έστω ένα τυχαίο υλικό σημείο Σ που βρίσκεται στη θέση x_{Σ} του άξονα Ox και έχει κάθε χρονική στιγμή την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα με το υλικό σημείο Σ_1 . Σύμφωνα με τη σχέση (2), ισχύει ότι:

$$\Delta x = \kappa\lambda \quad \text{ή} \quad x_{\Sigma} - x_{\Sigma_1} = \kappa\lambda$$

$$\text{ή } x_{\Sigma} = x_{\Sigma_1} + \kappa\lambda$$

$$\text{ή } x_{\Sigma} = 0,2 + 0,4\kappa \text{ (S.I.),}$$

$$\text{με } \kappa = 0, 1, 2, 3, \dots (3).$$

Για να βρούμε πόσα τέτοια σημεία έχουμε ανάμεσα στο υλικό σημείο Σ_2 και Σ_3 , λύνουμε την ανίσωση: $x_{\Sigma_2} < x_{\Sigma} < x_{\Sigma_3}$

ή λόγω της σχέσης (3):

$$0,4 < 0,2 + 0,4\kappa < 1,6$$

$$\text{ή } 0,2 < 0,4\kappa < 1,4 \quad \text{ή} \quad 0,5 < \kappa < 3,5$$

$$\text{ή } \kappa = 1, 2, 3.$$

Επομένως, υπάρχουν **3 σημεία**.

113. α. Από τη δοθείσα εξίσωση της ταλάντωσης του υλικού σημείου O προκύπτει ότι $A = 0,2 \text{ m}$ και $\omega = 10\pi \text{ rad/s}$. Η περίοδος T του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad T = 0,2 \text{ s.}$$

Το μήκος κύματος λ του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_{\delta} = \lambda f$ ή $v_{\delta} = \frac{\lambda}{T}$

$$\text{ή } \lambda = 2 \text{ m.}$$

Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$

$$\text{ή } y = 0,2\eta\mu 2\pi\left(5t + \frac{x}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

β. Έχουμε: $\Delta x = v_{\delta}\Delta t$ ή $x_K - x_A = v_{\delta}\Delta t$
ή $x_A = -2 \text{ m.}$

γ. Η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο Λ είναι:

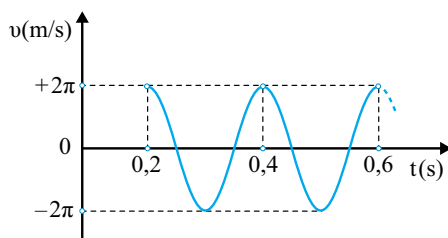
$$t_A = \frac{|x_A|}{v_{\delta}} \quad \text{ή} \quad t_A = 0,2 \text{ s.}$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$v_A = \omega A \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x_A}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } v = 2\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(5t - 1) \text{ (S. I.), για } t \geq 0,2 \text{ s.}$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Λ σε συνάρτηση με τον χρόνο.



δ. Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 1 \text{ s}$ το σημείο Λ ταλαντώνεται για χρονικό διάστημα:

$$\Delta t_{\Lambda} = t - t_{\Lambda} \quad \text{ή} \quad \Delta t_{\Lambda} = 0,8 \text{ s.}$$

Το υλικό σημείο K έχει ξεκινήσει να ταλαντώνεται νωρίτερα από το υλικό σημείο O . Επειδή θεωρούμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου ($t = 0$) τη χρονική στιγμή στην οποία το κύμα φτάνει στο σημείο O , στο χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 1 \text{ s}$ το υλικό σημείο K ταλαντώνεται για χρόνο:

$$\Delta t_K = (1 - 0) \text{ s} = 1 \text{ s.}$$

Επομένως, έχουμε:

$$\frac{N_K}{N_{\Lambda}} = \frac{f \Delta t_K}{f \Delta t_{\Lambda}} \quad \text{ή} \quad \frac{N_K}{N_{\Lambda}} = 1,25.$$

114. α. Επειδή ισχύει: $\varphi_K > \varphi_M$ το υλικό σημείο K ξεκινά να ταλαντώνεται νωρίτερα από το υλικό σημείο M . Συνεπώς, **το κύμα διαδίδεται από το σημείο K προς το σημείο M .**

β. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου M από τη θέση ισορροπίας του γράφεται: $y_M = 0,2\eta\mu 2\pi(5t - 2)$ (S. I.) (1).

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου M είναι της μορφής:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) \quad (2).$$

Από τη σύγκριση των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει: $A = 0,2 \text{ m}$, $\frac{1}{T} = 5 \text{ s}^{-1}$ ή $T = 0,2 \text{ s}$ και $\frac{x_M}{\lambda} = 2$ ή $\lambda = 1 \text{ m}$.

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_{\delta} = \lambda f \quad \text{ή} \quad v_{\delta} = \frac{\lambda}{T} \quad \text{ή} \quad v_{\delta} = 5 \text{ m/s.}$$

γ. Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$\varphi_M = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,5 \text{ s.}$$

$$\text{Έχουμε: } t_2 = t_1 + 0,15 \quad \text{ή} \quad t_2 = 0,65 \text{ s.}$$

Η απομάκρυνση του σημείου M τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση (1), θέτοντας σε αυτήν όπου t το $t_2 = 0,65 \text{ s}$:

$$y_M = 0,2\eta\mu 2\pi(5 \cdot 0,65 - 2) \text{ m}$$

$$\text{ή} \quad y_M = 0,2\eta\mu(2,5\pi)$$

$$\text{ή} \quad y_M = +0,2 \text{ m.}$$

Επομένως, η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του υλικού σημείου M τη χρονική στιγμή

$$t_2 \text{ είναι: } U = \frac{1}{2} D y_M^2 \quad \text{ή} \quad U = \frac{1}{2} m \omega^2 y_M^2$$

$$\text{ή} \quad U = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y_M^2 \quad \text{ή} \quad U = 2 \cdot 10^{-3} \text{ J.}$$

δ. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,5 \text{ s}$ είναι

$$\varphi_K = \frac{3\pi}{2} \text{ rad.} \quad \text{Έχουμε:}$$

$$\varphi_K = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad x_K = +1,75 \text{ m.}$$

Το υλικό σημείο K αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή: $t_K = \frac{x_K}{v_{\delta}}$ ή $t_K = 0,35 \text{ s}$.

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σημείου K δίνεται από τη σχέση:

$$a_K = -\omega^2 A \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή} \quad a_K = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή} \quad a_K = -200\eta\mu 2\pi(5t - 1,75) \text{ (S.I.),}$$

για $t \geq 0,35 \text{ s}$.

ε. Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Μ είναι:

$$\varphi_K - \varphi_M = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \varphi_K = \varphi_M + \frac{\pi}{2} \quad (2).$$

Τις χρονικές στιγμές στις οποίες η απομάκρυνση του σημείου Μ είναι $y_M = +0,1 \text{ m}$,

$$\text{ισχύει: } y_M = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } +0,1 = 0,2 \eta \mu \varphi_M \quad \text{ή} \quad \eta \mu \varphi_M = \eta \mu \frac{\pi}{6} \quad (3).$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (3) είναι:

$$\varphi_M = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \quad \text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ή } \varphi_M = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad \text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Αν $\varphi_M = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$, τότε η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Μ είναι:

$$v_M = \omega A \sin \left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \right) > 0,$$

ενώ αν $\varphi_M = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$, τότε η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Μ είναι:

$$v_M = \omega A \sin \left(2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \right) < 0.$$

Επομένως, η φάση της ταλάντωσης του σημείου Μ τις χρονικές στιγμές στις οποίες διέρχεται από τη θέση με απομάκρυνση $y_M = +0,1 \text{ m}$ με αρνητική ταχύτητα είναι:

$$\varphi_M = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad \text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η φάση της ταλάντωσης του σημείου Κ είναι:

$$\varphi_K = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ή } \varphi_K = 2\kappa\pi + \frac{4\pi}{3}, \quad \text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Κ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_K = \omega A \sin \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v_K = \omega A \sin \varphi_K$$

$$\text{ή } v_K = \omega A \sin \left(2\kappa\pi + \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$\text{ή } v_K = \omega A \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \quad \text{ή} \quad v_K = -\frac{\omega A}{2}$$

$$\text{ή } v_K = -\pi \text{ m/s}.$$

115. α. Έστω λ το μήκος κύματος του κύματος. Από το δοθέν διάγραμμα (α) του στιγμιότυπου του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 προκύπτει: $5\frac{\lambda}{4} = 2,5 \text{ m}$ ή $\lambda = 2 \text{ m}$.

Από το δοθέν διάγραμμα (α) προκύπτει ακόμη ότι το πλάτος του κύματος είναι:

$$A = 0,4 \text{ m}.$$

Η χρονική εξίσωση της φάσης του υλικού σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_\Lambda = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right) \quad (1).$$

Από το δοθέν διάγραμμα (β) της φάσης του υλικού σημείου Λ σε συνάρτηση με τον χρόνο t προκύπτει ότι για $t = 2 \text{ s}$ είναι $\varphi_\Lambda = 0$.

Από τη σχέση (1) για $t = 2 \text{ s}$ και $\varphi_\Lambda = 0$ προ-

$$\text{κύπτει: } 0 = 2\pi \left(\frac{2}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } \frac{2}{T} = \frac{x_\Lambda}{\lambda} \quad \text{ή} \quad x_\Lambda = \frac{4}{T} \quad (\text{S.I.}) \quad (2).$$

Από το δοθέν διάγραμμα (β) προκύπτει ακόμη ότι για $t = 3 \text{ s}$ είναι $\varphi_\Lambda = 6\pi \text{ rad}$. Από τη σχέση (1) για $t = 3 \text{ s}$ και $\varphi_\Lambda = 6\pi \text{ rad}$ προκύ-

$$\text{πτει: } 6\pi = 2\pi \left(\frac{3}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right) \quad \text{ή} \quad 3 = \frac{3}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}$$

ή λόγω της σχέσης (2): $3 = \frac{1}{T}$ ή $T = \frac{1}{3}$ s.

Από τη σχέση (2) για $T = \frac{1}{3}$ s προκύπτει:

$$x_A = +12 \text{ m.}$$

β. Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

$$\text{ή } y = 0,4\eta\mu 2\pi(3t - 0,5x) \text{ (S.I.).}$$

γ. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_s = \frac{\lambda}{T}$ ή $v_s = 6 \text{ m/s.}$

Από το δοθέν διάγραμμα (α) προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή t_1 τίθεται σε ταλάντωση το υλικό σημείο που βρίσκεται στη θέση:

$$x = +9\frac{\lambda}{4} \text{ ή } x = +4,5 \text{ m.}$$

Επομένως, ισχύει: $t_1 = \frac{x}{v_s}$ ή $t_1 = 0,75 \text{ s.}$

Η ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου M τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } v_M = \frac{2\pi}{T} A \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } v_M = 2,4\pi \sigma\upsilon\nu 1,25\pi \text{ m/s}$$

$$\text{ή } v_M = 2,4\pi \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \text{ m/s}$$

$$\text{ή } v_M = -1,2\sqrt{2}\pi \text{ m/s.}$$

δ. Από το δοθέν διάγραμμα (β) προκύπτει ότι το υλικό σημείο A αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_A = 2 \text{ s.}$ Επομένως, η χρονική στιγμή t_2 είναι: $t_2 = t_A + \frac{3T}{4}$

$$\text{ή } t_2 = 2,25 \text{ s.}$$

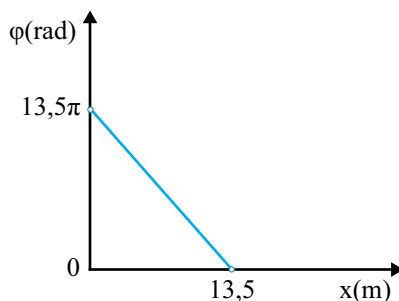
Η εξίσωση της φάσης του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 σε συνάρτηση με θέση x των

υλικών σημείων του ελαστικού μέσου στον ημιάξονα Ox δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } \varphi = 13,5\pi - \pi x \text{ (S.I.) (3).}$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της σχέσης (3).



ε. Είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 6\pi \text{ rad/s.}$

Έστω y η απομάκρυνση ενός τυχαίου υλικού σημείου του ελαστικού μέσου, το οποίο τη χρονική στιγμή t_3 έχει ταχύτητα $v = 1,2\pi \text{ m/s.}$ Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης για το συγκεκριμένο σημείο έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dy^2$$

$$\text{ή } m\omega^2 A^2 = mv^2 + m\omega^2 y^2$$

$$\text{ή } y = \pm \sqrt{A^2 - \left(\frac{v}{\omega}\right)^2} \text{ ή } y = \pm 0,2\sqrt{3} \text{ m.}$$

Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο πλήθος των σημείων, θα σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_3 .

Η εξίσωση του στιγμιότυπου του κύματος τη χρονική στιγμή t_3 είναι η: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_3}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

$$\text{ή } y = 0,4\eta\mu 2\pi(3 - 0,5x) \text{ (S.I.) (4).}$$

Έστω x η απόσταση από την αρχή O του ημιάξονα στην οποία έχει διαδοθεί το κύμα τη χρονική στιγμή t_3 . Είναι:

$$x = v_\delta t_3 \quad \text{ή} \quad x = 6 \text{ m.}$$

Χωρίζουμε την απόσταση x σε N τμήματα μήκους $\lambda/4$ το καθένα. Είναι:

$$N = \frac{x}{\frac{\lambda}{4}} \quad \text{ή} \quad N = 12.$$

Η απομάκρυνση του υλικού σημείου O τη χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται από τη σχέση (4), αν θέσουμε σε αυτήν όπου $x = 0$. Είναι:

$$y_0 = 0,4\eta\mu 6\pi \text{ m} \quad \text{ή} \quad y_0 = 0.$$

Η απομάκρυνση του υλικού σημείου που βρίσκεται στη θέση: $x = +\frac{\lambda}{4}$ ή $x = +0,5 \text{ m}$

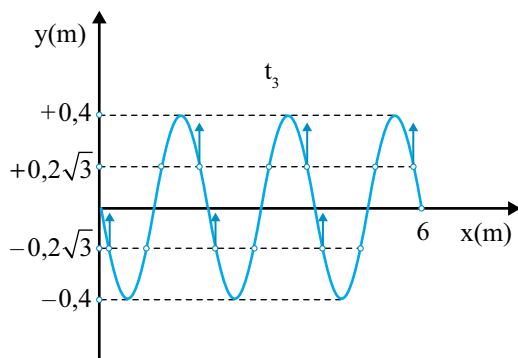
τη χρονική στιγμή t_3 προκύπτει από τη σχέση (4), αν θέσουμε σε αυτήν όπου $x = +0,5 \text{ m}$.

$$\text{Είναι: } y = 0,4\eta\mu 5,5\pi \text{ m}$$

$$\text{ή } y = 0,4\eta\mu\left(4\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ m}$$

$$\text{ή } y = -0,4 \text{ m.}$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_3 στον θετικό ημιάξονα Ox .



Στο παραπάνω διάγραμμα απεικονίζονται τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου τα οποία τη χρονική στιγμή t_3 έχουν απομάκρυνση $y = \pm 0,2\sqrt{3} \text{ m}$ και κινούνται με θετική ταχύτητα ($v > 0$). Επομένως, το ζητούμενο πλήθος των υλικών σημείων είναι ίσο με 6 ($N = 6$ σημεία).

116. α. Από το δοθέν διάγραμμα (α) προκύπτει: $5\frac{\lambda}{4} = 5$ ή $\lambda = 4 \text{ m}$.

Από το δοθέν διάγραμμα (β) προκύπτει ότι:

$$(2 - 0,75)s = 5\frac{T}{4} \quad \text{ή} \quad T = 1 \text{ s.}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \lambda f \quad \text{ή} \quad v_\delta = \frac{\lambda}{T} \quad \text{ή} \quad v_\delta = 4 \text{ m/s.}$$

β. Από το δοθέν διάγραμμα (β) προκύπτει:

$$\alpha_{\max} = \omega^2 A \quad \text{ή} \quad \alpha_{\max} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \quad \text{ή} \quad A = 0,1 \text{ m.}$$

Από το διάγραμμα (β) προκύπτει ακόμη ότι το υλικό σημείο Λ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_\Lambda = 0,75 \text{ s}$. Έχουμε:

$$t_\Lambda = \frac{x_\Lambda}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad x_\Lambda = v_\delta t_\Lambda \quad \text{ή} \quad x_\Lambda = +3 \text{ m.}$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

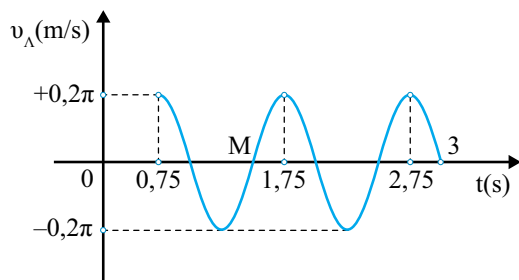
$$v_\Lambda = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad v_\Lambda = \frac{2\pi}{T} A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad v_\Lambda = 0,2\pi \sin 2\pi(t - 0,75) \text{ (S.I.) (1),}$$

για $t \geq 0,75 \text{ s}$.

Η γραφική παράσταση της σχέσης (1) από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 3 \text{ s}$ απεικονίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



γ. Από το διάγραμμα (α) προκύπτει ότι το κύμα τη χρονική στιγμή t_1 θέτει σε ταλάντωση το υλικό σημείο που βρίσκεται στη θέση

$$x = +7\frac{\lambda}{4} \quad \text{ή} \quad x = +7 \text{ m.}$$

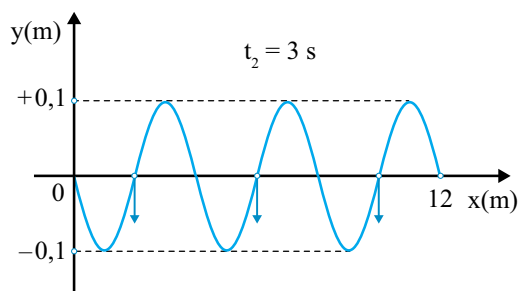
Επομένως, έχουμε:

$$v_\delta = \frac{x}{t_1} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{x}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_1 = 1,75 \text{ s.}$$

Η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου M ($x_M = +5 \text{ m}$) τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\varphi_M = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) \quad \text{ή} \quad \varphi_M = \pi \text{ rad.}$$

δ. Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 3 \text{ s}$ (βλ. μεθοδολογία).

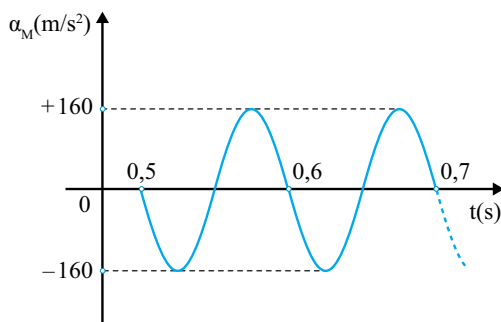


Τη χρονική στιγμή t_2 κάθε σημείο του ελαστικού μέσου τείνει να κινηθεί, έτσι ώστε να αποκτήσει την απομάκρυνση ενός από τα σημεία του ελαστικού μέσου που βρίσκεται πολύ κοντά του, προς το μέρος της πηγής O του κύματος. Επομένως, όπως φαίνεται στο στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 , το πλήθος των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου τα οποία τη χρονική στιγμή t_2 διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους κινούμενα με αρνητική ταχύτητα είναι $N = 3$ σημεία.

117. α. Το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'Ox$.

β. $v_\delta = 2 \text{ m/s.}$

γ. $a_M = -160\eta\mu 2\pi(10\tau - 5) \text{ (S.I.)}$, για $t \geq 0,5 \text{ s.}$



δ. $y_N = +0,04 \text{ m.}$

ε. $\frac{N_N}{N_M} = \frac{10}{9}.$

118. α. Έστω λ το μήκος κύματος του κύματος. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει:

$$2,5\lambda = 5 \text{ m} \quad \text{ή} \quad \lambda = 2 \text{ m.}$$

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ακόμη ότι το πλάτος του κύματος είναι: $A = 0,3 \text{ m}$.

Τη χρονική στιγμή t_1 , όπως φαίνεται στο στιγμιότυπο του κύματος, τίθεται σε ταλάντωση το υλικό σημείο Z ($x_Z = -5 \text{ m}$). Επομένως, η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_\delta = \frac{|x_Z|}{t_1} \quad \text{ή} \quad v_\delta = 5 \text{ m/s}.$$

Έστω T η περίοδος του κύματος. Είναι:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \quad \text{ή} \quad T = 0,4 \text{ s}.$$

Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad y = 0,3 \sin 2\pi \left(2,5t + \frac{x}{2} \right) \quad (\text{S.I.}).$$

β. Τη χρονική στιγμή t_1 το υλικό σημείο K κινείται προς τα κάτω, ενώ τα υλικά σημεία Λ και Μ κινούνται προς τα πάνω (βλ. παρατήρηση βασικής άσκησης 9 ερώτημα δ).

γ. Έστω y η απομάκρυνση των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου τα οποία τη χρονική στιγμή t_2 έχουν κινητική ενέργεια ίση με τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσής τους ($K = U$). Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί ένα από τα παραπάνω σημεία έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad E = 2U$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} DA^2 = 2 \frac{1}{2} Dy^2 \quad \text{ή} \quad y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A$$

$$\text{ή} \quad y = \pm 0,15\sqrt{2} \text{ m}.$$

Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο πλήθος των υλικών σημείων, πρέπει να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 .

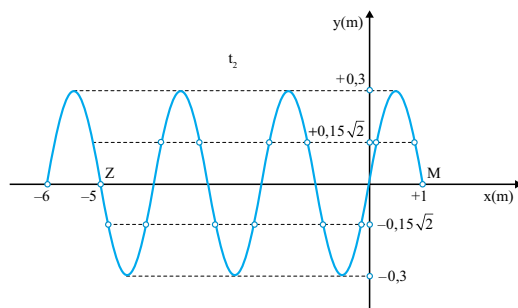
Έστω x η θέση του υλικού σημείου στον αρνητικό ημιάξονα το οποίο τίθεται σε ταλάντωση τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι:

$$x = -v_\delta t_2 \quad \text{ή} \quad x = -6 \text{ m}.$$

Χωρίζουμε την απόσταση $|x|$ σε N τμήματα μήκους $\lambda/4$ το καθένα. Είναι:

$$N = \frac{|x|}{\frac{\lambda}{4}} \quad \text{ή} \quad N = 12.$$

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία, το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 απεικονίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



Από το δοθέν στιγμιότυπο προκύπτει ότι η θέση του υλικού σημείου Μ στον άξονα x είναι: $x_M = +\frac{\lambda}{2}$ ή $x_M = +1 \text{ m}$.

Όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 , το πλήθος των υλικών σημείων τα οποία βρίσκονται ανάμεσα στα σημεία Z και Μ και τη χρονική στιγμή t_2 έχουν απομακρύνσεις $y = \pm 0,15\sqrt{2} \text{ m}$ είναι ίσο με 12 ($N = 12$ σημεία).

δ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Μ δίνεται από τη σχέση:

$$y_M = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_M}{\lambda} \right)$$

ή $y_M = 0,3\eta\mu 2\pi(2,5t + 0,5)$ (S.I.),

για $t \geq 0$ (1).

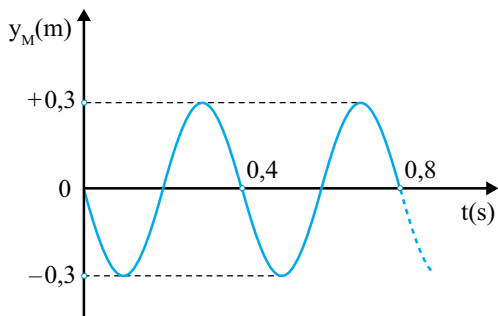
Από τη σχέση (1) για $t = 0$ προκύπτει:

$$y_{M(0)} = 0,3\eta\mu\pi \text{ m ή } y_M = 0.$$

Από τη σχέση (1) για $t = \frac{T}{4} = 0,1 \text{ s}$ προκύπτει: $y_M = 0,3\eta\mu 1,5\pi \text{ m}$

$$\text{ή } y_M = 0,3\eta\mu \frac{3\pi}{2} \text{ m ή } y_M = -0,3 \text{ m}.$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Μ σε συνάρτηση με τον χρόνο.



ε. Έστω t_3 η χρονική στιγμή στην οποία ξεκινά να ταλαντώνεται το υλικό σημείο Κ. Είναι:

$$t_3 = \frac{|x_K|}{v_\delta} \text{ ή } t_3 = 0,85 \text{ s}.$$

Η ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_3 δίνεται από τη σχέση:

$$v_\Lambda = \frac{2\pi}{T} A \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t_3}{T} + \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v_\Lambda = 1,5\pi \sigma\upsilon\nu 3\pi \text{ m/s ή } v_\Lambda = -1,5\pi \text{ m/s}.$$

119. α. Η δοθείσα εξίσωση του κύματος γράφεται στη μορφή:

$$y = 0,2\eta\mu 2\pi(2t - x) \text{ (S.I.) (1)}.$$

Η γενική εξίσωση του κύματος δίνεται από τη

$$\text{σχέση: } y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Από τη σύγκριση της σχέσης (1) με τη γενική εξίσωση του κύματος προκύπτει:

$$A = 0,2 \text{ m, } \frac{1}{T} = 2 \text{ s}^{-1} \text{ ή } f = 2 \text{ Hz}$$

$$\text{και } \frac{1}{\lambda} = 1 \text{ m}^{-1} \text{ ή } \lambda = 1 \text{ m}.$$

$$\text{Έχουμε: } \frac{v_{\max}}{v_\delta} = \frac{2\pi f A}{\lambda f} \text{ ή } \frac{v_{\max}}{v_\delta} = 0,4\pi.$$

β. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_\delta = \lambda f \text{ ή } v_\delta = 2 \text{ m/s}.$$

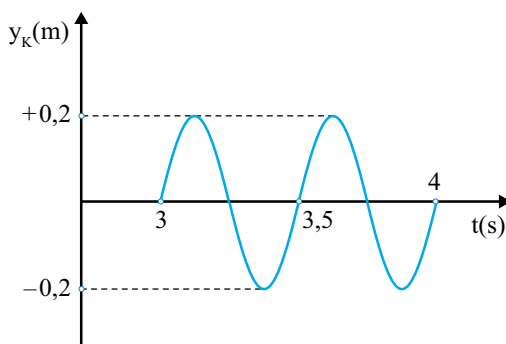
Το υλικό σημείο Κ ξεκινά να ταλαντώνεται

$$\text{τη χρονική στιγμή: } t_K = \frac{x_K}{v_\delta} \text{ ή } t_K = 3 \text{ s}.$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Κ από τη θέση ισορροπίας του προκύπτει από τη σχέση (1), θέτοντας σε αυτήν όπου x το $x_K = +6 \text{ m}$. Έχουμε:

$$y_K = 0,2\eta\mu 2\pi(2t - 6) \text{ (S.I.)}, \text{ για } t \geq 3 \text{ s}.$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης y_K του υλικού σημείου Κ από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με τον χρόνο t από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$.



γ. Η ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή $t_2 = 3,25$ s υπολογίζεται από τη σχέση: $v_K = \omega A \sin 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$

$$\text{ή } v_K = 2\pi f A \sin 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } v_K = 0,8\pi \sin \pi \text{ m/s}$$

$$\text{ή } v_K = -0,8\pi \text{ m/s.}$$

δ. Έστω y η απομάκρυνση των υλικών σημείων του μέσου τα οποία τη χρονική στιγμή t_3 έχουν ταχύτητα: $v = +0,4\pi\sqrt{3}$ m/s.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D y^2$$

$$\text{ή } m \omega^2 A^2 = m v^2 + m \omega^2 y^2$$

$$\text{ή } y = \pm \sqrt{A^2 - \left(\frac{v}{\omega} \right)^2}$$

$$\text{ή } y = \pm \sqrt{A^2 - \left(\frac{v}{2\pi f} \right)^2}$$

$$\text{ή } y = \pm 0,1 \text{ m.}$$

Επειδή τη χρονική στιγμή t_3 τα σημεία κινούνται επιβραδυνόμενα και η ταχύτητά τους είναι θετική, είναι $y = +0,1$ m. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των σημείων τα οποία τη χρονική στιγμή t_3 έχουν απομάκρυνση $y = +0,1$ m και κινούνται με θετική ταχύτητα σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_3 (βλ. μεθοδολογία).

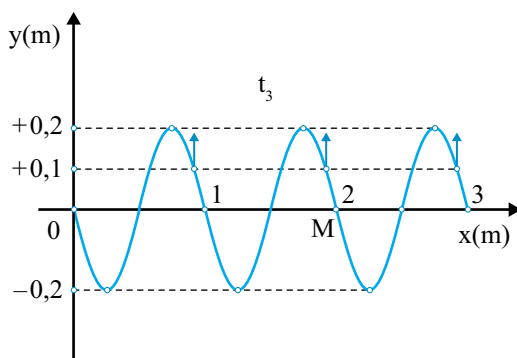
Η απόσταση x στην οποία έχει διαδοθεί το κύμα από την αρχή Ο του ημιάξονα Οx τη χρονική στιγμή $t_3 = 1,5$ s είναι ίση με:

$$x = v_\delta t_3 \quad \text{ή} \quad x = 3 \text{ m.}$$

Χωρίζουμε την απόσταση x σε N τμήματα μήκους $\lambda/4$ το καθένα:

$$N = \frac{x}{\frac{\lambda}{4}} \quad \text{ή} \quad N = \frac{4x}{\lambda} \quad \text{ή} \quad N = 12.$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_3 = 1,5$ s.



Όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο του κύματος το πλήθος των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου, τα οποία τη χρονική στιγμή t_3 έχουν απομάκρυνση $y = +0,1$ m και κινούνται με θετική ταχύτητα είναι: $N = 3$.

ε. Έστω N το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί το υλικό σημείο Λ από τη χρονική στιγμή t_Λ στην οποία ξεκίνησε να ταλαντώνεται μέχρι τη χρονική στιγμή $t_4 = 7,75$ s. Επειδή σε κάθε ταλάντωση το σημείο Λ διανύει διάστημα $4A$, το συνολικό διάστημα s που διανύει το σημείο Λ στο παραπάνω χρονικό διάστημα είναι: $s = N4A$ ή $N = \frac{s}{4A}$ ή $N = 10$ ταλαντώσεις.

Έχουμε: $N = f(t_4 - t_\Lambda)$

$$\text{ή } N = f \left(t_4 - \frac{x_\Lambda}{v_\delta} \right) \quad \text{ή} \quad \frac{N}{f} = t_4 - \frac{x_\Lambda}{v_\delta}$$

$$\text{ή } x_{\Lambda} = \left(t_4 - \frac{N}{f} \right) v_{\delta} \quad \text{ή } x_{\Lambda} = 5,5 \text{ m.}$$

Οι φάσεις της ταλάντωσης των υλικών σημείων Κ και Λ κάποια χρονική στιγμή t στην οποία ταλαντώνονται και τα δύο σημεία είναι

$$\text{αντίστοιχα: } \varphi_K = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } \varphi_K = 2\pi(2t - 6) \text{ (S.I.) (1)}$$

$$\text{και } \varphi_{\Lambda} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\Lambda}}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } \varphi_{\Lambda} = 2\pi(2t - 5,5) \text{ (S.I.) (2).}$$

Από τη σχέση (1) και (2) προκύπτει ότι η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_{\Lambda} - \varphi_K \quad \text{ή } \Delta\varphi = \pi \text{ rad.}$$

Έστω v_K η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Κ τις χρονικές στιγμές στις οποίες η απομάκρυνση του σημείου είναι $y_K = +0,1\sqrt{3} \text{ m}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του σημείου Κ έχουμε:

$$E = K + \quad \text{ή } \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m v_K^2 + \frac{1}{2} D y_K^2$$

$$\text{ή } m \omega^2 A^2 = m v_K^2 + m \omega^2 y_K^2$$

$$\text{ή } v_K = +\omega \sqrt{A^2 - y_K^2}$$

$$\text{ή } v_K = +2\pi f \sqrt{A^2 - y_K^2} \quad \text{ή } v_K = +0,4\pi \text{ m/s.}$$

Έστω v_{Λ} το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Λ. Επειδή τα σημεία Κ και Λ έχουν διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \pi \text{ rad}$, ισχύει ότι: $v_{\Lambda} = -v_K$

$$\text{ή } v_{\Lambda} = -0,4\pi \text{ m/s.}$$

120. α. Οι χρονικές εξισώσεις των απομακρύνσεων των υλικών σημείων Κ και Λ γράφονται στη μορφή:

$$y_K = 0,2\eta\mu 2\pi(5t + 1) \text{ (S.I.) (1)}$$

$$\text{και } y_{\Lambda} = 0,2\eta\mu 2\pi(5t - 2) \text{ (S.I.) (2).}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Κ είναι της μορφής:

$$y_K = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_K}{\lambda} \right) \text{ (3).}$$

Από τη σύγκριση των εξισώσεων (3) και (1)

$$\text{προκύπτει: } A = 0,2 \text{ m} \quad \text{και} \quad \frac{1}{T} = 5 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{ή } f = 5 \text{ Hz.}$$

Το μήκος κύματος λ του κύματος ισούται με την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών του κύματος. Επομένως, ισχύει: $\lambda = 2 \text{ m}$.

Επειδή το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'Ox$, η εξίσωση του κύματος είναι της μορφής:

$$y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y = 0,2\eta\mu 2\pi \left(5t + \frac{x}{2} \right) \text{ (S.I.).}$$

β. Από τη σύγκριση των εξισώσεων (1) και (3) προκύπτει: $\frac{x_K}{\lambda} = 1$ ή $x_K = +2 \text{ m}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Λ από τη θέση ισορροπίας του είναι της μορφής:

$$y_{\Lambda} = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_{\Lambda}}{\lambda} \right) \text{ (4).}$$

Από τη σύγκριση των εξισώσεων (2) και (4)

$$\text{προκύπτει: } \frac{x_{\Lambda}}{\lambda} = -2 \quad \text{ή} \quad x_{\Lambda} = -4 \text{ m.}$$

Οι χρονικές εξισώσεις της φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι:

$$\varphi_K = 2\pi(5t + 1) \text{ (S.I.) (5)}$$

$$\text{και } \varphi_{\Lambda} = 2\pi(5t - 2) \text{ (S.I.) (6).}$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (5) και (6) κάθε χρονική στιγμή t στην οποία ταλαντώνονται και τα δύο σημεία, ισχύει $\varphi_K > \varphi_\Lambda$.

Από τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει ότι η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι: $\Delta\varphi = \varphi_K - \varphi_\Lambda$

ή $\Delta\varphi = 6\pi \text{ rad}$.

Επομένως, τα σημεία Κ και Λ έχουν κάθε χρονική στιγμή μετά την έναρξη της ταλάντωσής τους την ίδια απομάκρυνση. Επομένως, η απόσταση των δύο σημείων κάθε χρονική στιγμή μετά την έναρξη της ταλάντωσής τους είναι: $(K\Lambda) = |x_K - x_\Lambda|$ ή $(K\Lambda) = 6 \text{ m}$.

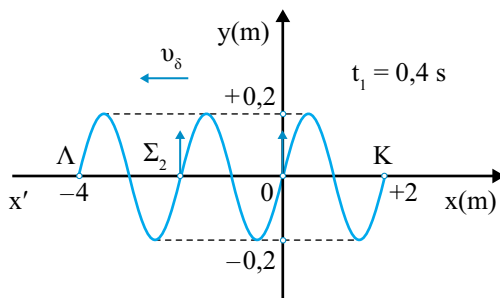
γ. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_\delta = \lambda f \text{ ή } v_\delta = 10 \text{ m/s}.$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,4 \text{ s}$ το κύμα θέτει σε ταλάντωση το υλικό σημείο του αρνητικού ημιάξονα το οποίο βρίσκεται στη θέση:

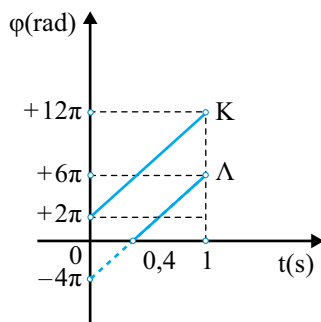
$$|x| = v_\delta t_1 \text{ ή } |x| = 4 \text{ m} \text{ ή } x = -4 \text{ m}.$$

Αφού $x = x_\Lambda$, το κύμα τη χρονική στιγμή t_1 θέτει σε ταλάντωση το υλικό σημείο Λ. Το στιγμιότυπο (βλ. μεθοδολογία) του κύματος μεταξύ των σημείων Κ και Λ τη χρονική στιγμή t_1 απεικονίζεται στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος.



Όπως φαίνεται από το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 , το πλήθος των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου που βρίσκονται μεταξύ των υλικών σημείων Κ και Λ και τη χρονική στιγμή t_1 διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους κινούμενα με θετική ταχύτητα είναι ίσο με 2.

δ. Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις των φάσεων των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_2 = 1 \text{ s}$.



ε. Το υλικό σημείο Κ αρχίζει να ταλαντώνεται μία προγενέστερη χρονική στιγμή από τη χρονική στιγμή $t = 0$. Το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί το υλικό σημείο Κ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_3 = 2,4 \text{ s}$ είναι: $N_K = f(t_3 - 0)$

$$\text{ή } N_K = 12 \text{ ταλαντώσεις}.$$

Το διάστημα που διανύει το σημείο Κ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_3 είναι: $s_K = N_K \lambda$ ή $s_K = 48 \lambda$.

Επειδή το υλικό σημείο Λ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,4 \text{ s}$, το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί το σημείο

Λ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_3 είναι: $N_\Lambda = f(t_3 - t_1)$

ή $N_\Lambda = 10$ ταλαντώσεις.

Το διάστημα που διανύει το σημείο Λ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_3 είναι: $s_\Lambda = N_\Lambda 4A$ ή $s_\Lambda = 40A$.

Επομένως, έχουμε: $\frac{s_K}{s_\Lambda} = 1,2$.

στ. Έστω y_Λ η απομάκρυνση του σημείου Λ τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της ταχύτητάς του είναι ίσο με $v_\Lambda = \pi$ m/s. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του σημείου Λ έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_\Lambda^2 + \frac{1}{2}Dy_\Lambda^2$$

$$\text{ή} \quad m\omega^2 A^2 = mv_\Lambda^2 + m\omega^2 y_\Lambda^2$$

$$\text{ή} \quad y_\Lambda = +\sqrt{A^2 - \left(\frac{v_\Lambda}{\omega}\right)^2}$$

$$\text{ή} \quad y_\Lambda = +0,1\sqrt{3} \text{ m.}$$

Επειδή η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι ίση με $\Delta\phi = 6\pi$ rad, η απομάκρυνση του υλικού σημείου Κ τις παραπάνω χρονικές στιγμές είναι:

$$y_K = y_\Lambda \quad \text{ή} \quad y_K = +0,1\sqrt{3} \text{ m.}$$

Επομένως, η επιτάχυνση του σημείου Κ είναι: $a_K = -\omega^2 y_K$ ή $a_K = -(2\pi f)^2 y_K$

$$\text{ή} \quad a_K = -100\sqrt{3} \text{ m/s}^2.$$

4.2 Συμβολή δύο κυμάτων στην επιφάνεια υγρού

ΘΕΜΑΤΑ Α

Θέματα πολλαπλής επιλογής

6. β	7. δ	8. γ	9. β	10. β	11. δ	12. δ	13. β	14. γ
15. α	16. α	17. γ						

Θέματα του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

18.	α. Σ	β. Σ	γ. Σ	δ. Λ	ε. Σ
19.	α. Λ	β. Λ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Σ
20.	α. Σ	β. Σ	γ. Λ	δ. Λ	ε. Σ

21. Σωστή επιλογή είναι η α.

Έστω λ το μήκος κύματος των δύο κυμάτων.

Έχουμε: $v_s = \lambda f$ ή $\lambda = 0,2 \text{ m}$.

Για να συμβαίνει στο σημείο Σ ενισχυτική συμβολή, πρέπει να ισχύει:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \quad (1), \text{ με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (1), προκύπτει: $N = 1$.

Επομένως, η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Σ είναι ενισχυτική και το πλάτος της ταλάντωσής του μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό είναι: $A_\Sigma = 2A$.

22. Σωστή επιλογή είναι η α.

Έστω ότι η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Κ είναι ενισχυτική. Έχουμε:

$$\Delta r_K = N\lambda \quad \text{ή} \quad 2\lambda = N\lambda \quad \text{ή} \quad N = 2.$$

Επομένως, η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Κ είναι ενισχυτική και το πλάτος της ταλάντωσής του μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό είναι $A_K = 2A$.

Έστω ότι η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Λ είναι ενισχυτική. Έχουμε:

$$\Delta r_\Lambda = N\lambda \quad \text{ή} \quad N = \frac{1}{6}.$$

Επομένως, το σημείο Λ δεν είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής.

Έστω ότι η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Λ είναι αποσβεστική. Έχουμε:

$$\Delta r_\Lambda = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{\lambda}{6} = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή} \quad N = -\frac{1}{3}.$$

Επομένως, το σημείο Λ δεν είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής.

Επειδή, το σημείο Λ δεν είναι ούτε σημείο ενισχυτικής, ούτε σημείο αποσβεστικής συμβολής, το πλάτος της ταλάντωσής του μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό ικανοποιεί τη σχέση: $0 < A_\Lambda < 2A$.

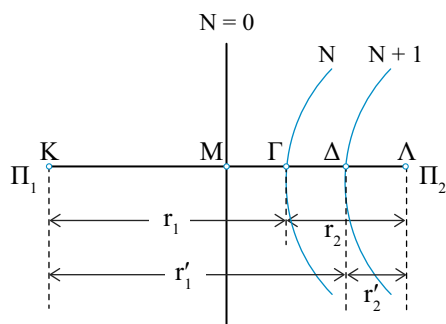
Έστω $v_{\max(K)}$ και $v_{\max(\Lambda)}$ οι μέγιστες ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων Κ και Λ αντίστοιχα μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στα σημεία αυτά. Έχουμε: $v_{\max(K)} = \omega A_K$ (1)

$$\text{και } v_{\max(\Lambda)} = \omega A_\Lambda \quad (2).$$

Επειδή είναι $A_K > A_\Lambda$, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $v_{\max(K)} > v_{\max(\Lambda)}$.

23. Α. Σωστή επιλογή είναι η β.

Έστω τα σημεία Γ και Δ που φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα, τα οποία βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και είναι διαδοχικά σημεία στα οποία συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.



Έστω r_1 και r_2 οι αποστάσεις του σημείου Γ από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Έχουμε:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \quad (1).$$

Έστω r'_1 και r'_2 οι αποστάσεις του σημείου Δ από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Έχουμε:

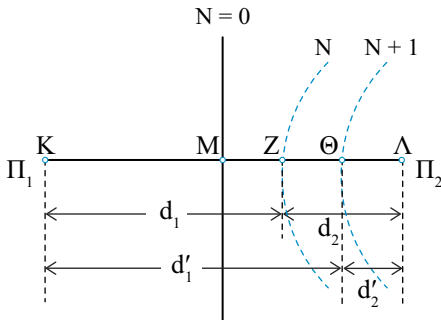
$$r'_1 - r'_2 = (N+1)\lambda \quad (2).$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τη σχέση (1) από τη σχέση (2), έχουμε: $(r'_1 - r_1) + (r_2 - r'_2) = \lambda$

$$\text{ή } 2(\Gamma\Delta) = \lambda \quad \text{ή } (\Gamma\Delta) = \frac{\lambda}{2}.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η β.

Έστω τα σημεία Z και Θ που φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα, τα οποία βρίσκονται στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και είναι διαδοχικά σημεία στα οποία συμβαίνει αποσβεστική συμβολή.



Έστω d_1 και d_2 οι αποστάσεις του σημείου Z από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα.

$$\text{Έχουμε: } d_1 - d_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad (3).$$

Έστω d'_1 και d'_2 οι αποστάσεις του σημείου Θ από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Έχουμε:

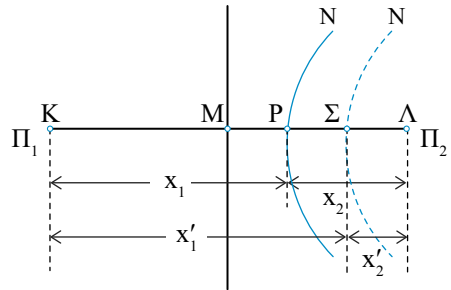
$$\text{με: } d'_1 - d'_2 = [2(N+1)+1]\frac{\lambda}{2} \quad (4).$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τη σχέση (3) από τη σχέση (4), έχουμε: $(d'_1 - d_1) + (d_2 - d'_2) = \lambda$

$$\text{ή } 2(Z\Theta) = \lambda \quad \text{ή } (Z\Theta) = \frac{\lambda}{2}.$$

Γ. Σωστή επιλογή είναι η α.

Έστω τα σημεία Ρ και Σ που φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα, τα οποία βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ. Στο σημείο Ρ συμβαίνει ενισχυτική συμβολή, ενώ το σημείο Σ είναι το αμέσως επόμενο σημείο δεξιά του σημείου Ρ στο οποίο συμβαίνει αποσβεστική συμβολή.



Έστω r_1 και r_2 οι αποστάσεις του σημείου Ρ από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Έχουμε:

$$x_1 - x_2 = N\lambda \quad (5).$$

Έστω x'_1 και x'_2 οι αποστάσεις του σημείου Σ από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Έχουμε:

$$\text{με: } x'_1 - x'_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad (6).$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τη σχέση (5) από τη σχέση (6), έχουμε:

$$(x'_1 - x_1) + (x_2 - x'_2) = \frac{\lambda}{2} \quad \text{ή } 2(P\Sigma) = \frac{\lambda}{2}$$

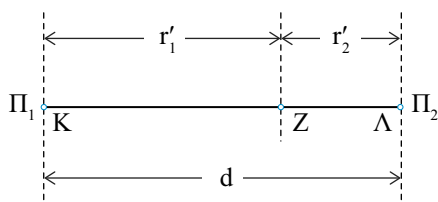
$$\text{ή } (P\Sigma) = \frac{\lambda}{4}.$$

24. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Έστω ένα τυχαίο σημείο Z αποσβεστικής συμβολής που βρίσκεται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και απέχει από τις πηγές Π_1 και Π_2 αποστάσεις r'_1 και r'_2 αντίστοιχα.

$$\text{Έχουμε: } r'_1 - r'_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad (1).$$

Επειδή το σημείο Z ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ έχουμε: $r'_1 + r'_2 = d$ (2).



Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και

$$(2) \text{ προκύπτει: } 2r'_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} + d$$

$$\text{ή } r'_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2}.$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των σημείων αποσβεστικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ, λύνουμε την ανίσωση: $0 \leq r'_1 \leq d$

$$\text{ή } 0 \leq (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \leq d$$

$$\text{ή } -2d \leq (2N+1)\lambda \leq 2d$$

$$\text{ή } -\frac{2d}{\lambda} - 1 \leq 2N \leq \frac{2d}{\lambda} - 1$$

$$\text{ή } -6,5 \leq 2N \leq 4,5$$

$$\text{ή } -3,25 \leq N \leq 2,25$$

$$\text{ή } N = -3, -2, -1, 0, +1, +2.$$

Επομένως, το πλήθος των σημείων αποσβεστικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ είναι ίσο με 6.

Β. Σωστή επιλογή είναι η β.

Έστω ότι το σημείο Δ είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής. Για το σημείο Δ ισχύει:

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad 2,5\lambda = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή } N = 2.$$

Επομένως, το σημείο Δ είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής και το ευθύγραμμο τμήμα ΚΔ το τέμνουν οι υπερβολές αποσβεστικής συμβολής με $N = -3, -2, -1, 0, +1, +2$.

Επομένως, το πλήθος των σημείων αποσβεστικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ είναι ίσο με 6.

25. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Επειδή το σημείο Σ είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής, ισχύει:

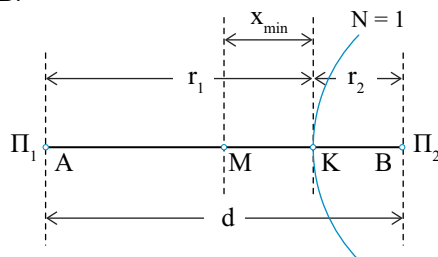
$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{με } N = 0, 1, 2, \dots$$

Επειδή το σημείο Σ είναι το πλησιέστερο σημείο προς το μέσον Μ του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$, ισχύει: $N = 0$. Επομένως, έχουμε:

$$r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad \lambda = 6 \text{ m}.$$

26. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Έστω ότι η απόσταση μεταξύ των δύο πηγών είναι ίση με d και το σημείο Κ βρίσκεται δεξιά του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.



Επειδή το σημείο Κ ταλαντώνεται με το μέγιστο δυνατό πλάτος ισχύει:

$$r_1 - r_2 = N\lambda, \text{ με } N = 0, 1, 2, \dots$$

Επειδή το σημείο Κ είναι το πλησιέστερο σημείο προς το μέσον Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, το οποίο ταλαντώνεται με το μέγιστο δυνατό πλάτος, ισχύει: $N = 1$.

Συνεπώς: $r_1 - r_2 = \lambda$

$$\text{ή } \frac{d}{2} + x_{\min} - \left(\frac{d}{2} - x_{\min} \right) = \lambda$$

$$\text{ή } 2x_{\min} = \lambda \text{ ή } x_{\min} = \frac{\lambda}{2}.$$

27. Σωστή επιλογή είναι η β.

Έστω ένα τυχαίο σημείο Ζ του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ, το οποίο απέχει από την πηγή Π_1 απόσταση r_1 και από την πηγή Π_2 απόσταση r_2 . Αν το σημείο Ζ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής, ισχύει:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \quad (1), \text{ με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Για το σημείο Ζ ισχύει ακόμη:

$$r_1 + r_2 = (ΚΛ) \text{ ή } r_1 + r_2 = 2,75\lambda \quad (2).$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει: $2r_1 = 2,75\lambda + N\lambda$

$$\text{ή } r_1 = 1,375\lambda + \frac{N\lambda}{2}.$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των σημείων ενισχυτικής συμβολής που βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ, λύνουμε την ανίσωση: $0 \leq r_1 \leq 2,75\lambda$

$$\text{ή } 0 \leq 1,375\lambda + \frac{N\lambda}{2} \leq 2,75\lambda$$

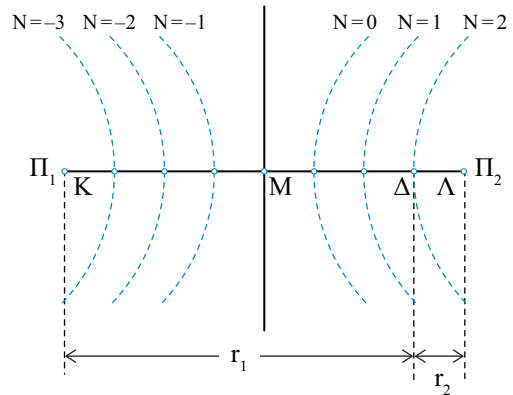
$$\text{ή } -2,75 \leq N \leq 2,75$$

$$\text{ή } N = -2, -1, 0, +1, +2.$$

Επομένως, υπάρχουν **5 σημεία ενισχυτικής συμβολής** επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ.

28. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Επειδή το σημείο Δ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ, ισχύει: $r_1 + r_2 = (ΚΛ) \quad (1).$



Επειδή το σημείο Δ είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής, ισχύει:

$$r_1 - r_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (2), \text{ με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

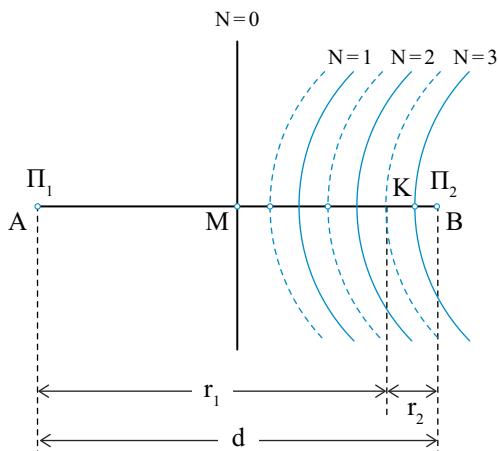
Όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα το σημείο Δ ανήκει στην τρίτη κατά σειρά υπερβολή αποσβεστικής συμβολής προς τα δεξιά της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ. Επομένως: $N = 2$. Από τη σχέση (2) για $N = 2$, έχουμε:

$$r_1 - r_2 = \frac{5\lambda}{2} \text{ ή } r_1 = 3\lambda.$$

Επομένως, από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$(ΚΛ) = 3,5\lambda.$$

29. Σωστή επιλογή είναι η α.



Επειδή το σημείο K ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα AB ισχύει:

$$r_1 + r_2 = d \quad \text{ή} \quad r_1 + r_2 = 2 \text{ m} \quad \text{ή} \quad r_2 = 0,25 \text{ m}.$$

Όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, αφού το σημείο K είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής και ανάμεσα στο σημείο αυτό και στο μέσον M του ευθύγραμμου τμήματος AB υπάρχουν 3 σημεία αποσβεστικής συμβολής, η υπερβολή ενισχυτικής συμβολής που διέρχεται από το σημείο K είναι αυτή με $N = 3$. Για το σημείο K έχουμε:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \quad \text{ή} \quad r_1 - r_2 = 3\lambda \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,5 \text{ m}.$$

30. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Έστω λ_2 το νέο μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού δεν μεταβάλλεται.

$$\text{Έχουμε: } v_1 = v_2 \quad \text{ή} \quad \lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2 \quad \text{ή} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{3}.$$

Έστω ένα τυχαίο σημείο Z αποσβεστικής συμβολής που βρίσκεται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και απέχει από τις πηγές Π_1 και Π_2 αποστάσεις r_1 και r_2 αντίστοιχα.

$$\text{Έχουμε: } r_1 - r_2 = (2N + 1) \frac{\lambda_2}{2} \quad (1)$$

$$\text{και } r_1 + r_2 = d \quad (2).$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει: $2r_1 = (2N + 1) \frac{\lambda_2}{2} + d$

$$\text{ή } r_1 = (2N + 1) \frac{\lambda_2}{4} + \frac{d}{2}.$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των σημείων αποσβεστικής συμβολής που βρίσκονται μεταξύ των σημείων K και Λ, λύνουμε την ανίσωση: $0 < r_1 < d$

$$\text{ή } 0 < (2N + 1) \frac{\lambda_2}{4} + \frac{d}{2} < d$$

$$\text{ή } \frac{-\frac{2d}{\lambda_2} - 1}{2} < N < \frac{\frac{2d}{\lambda_2} - 1}{2}$$

$$\text{ή } -6,5 < N < 5,5$$

$$\text{ή } N = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5.$$

Επομένως, το ζητούμενο πλήθος υπερβολών απόσβεσης είναι ίσο με 12.

31. Α. Σωστή επιλογή είναι η β.

Για να είναι το σημείο K σημείο ενισχυτικής συμβολής, πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη: $r_1 - r_2 = N\lambda$ (1), με $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Από τη σχέση (1) για $r_1 = 2\lambda$ και $r_2 = 0,5\lambda$ προκύπτει: $1,5\lambda = N\lambda$ ή $N = 1,5$.

Επομένως, το σημείο K δεν είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής.

Για να είναι το σημείο Κ σημείο αποσβεστικής συμβολής, πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη: $r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$ (2),

με $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Από τη σχέση (2) για $r_1 = 2\lambda$ και $r_2 = 0,5\lambda$ προκύπτει:

$$1,5\lambda = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad N = 1.$$

Επομένως, το σημείο Κ είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής.

Β. Σωστή επιλογή είναι η α.

Το σημείο Κ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_1 = \frac{r_2}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{0,5\lambda}{\frac{\lambda}{T}} \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,5T.$$

Η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Κ αρχίζει τη χρονική στιγμή:

$$t_2 = \frac{r_1}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_2 = \frac{2\lambda}{\frac{\lambda}{T}} \quad \text{ή} \quad t_2 = 2T.$$

Η χρονική διαφορά άφιξης των δύο κυμάτων στο σημείο Κ είναι:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{3T}{2}.$$

Γ. Σωστή επιλογή είναι η β.

Έστω r'_1 η απόσταση του σημείου Λ από την πηγή Π_1 . Επειδή το σημείο Λ ανήκει στην ίδια υπερβολή αποσβεστικής συμβολής με το σημείο Κ, έχουμε: $r'_1 - r'_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$

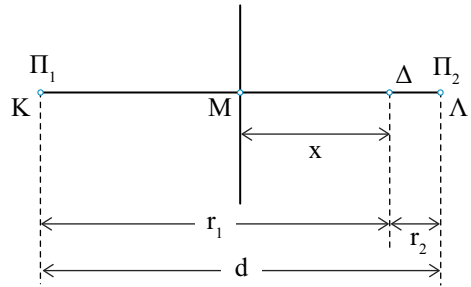
$$\text{ή} \quad r'_1 - r'_2 = (2 \cdot 1 + 1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad r'_1 - r'_2 = 1,5\lambda$$

$$\text{ή} \quad r'_1 = 1,75\lambda.$$

Επομένως, η απόσταση μεταξύ των δύο πηγών είναι: $(AB) = r'_1 + r'_2 \quad \text{ή} \quad (AB) = 2\lambda.$

32. Σωστή επιλογή είναι η β.

Έστω r_1 και r_2 οι αποστάσεις του σημείου Δ από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα και d η απόσταση μεταξύ των δύο πηγών.



Επειδή το σημείο Δ είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής, έχουμε:

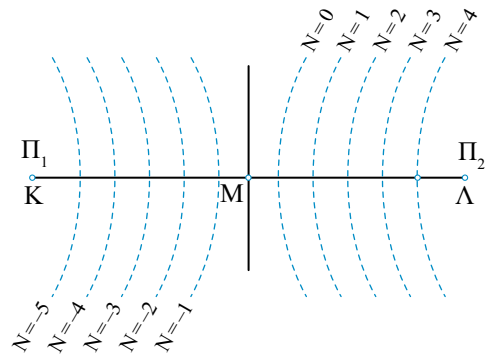
$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή} \quad \left(\frac{d}{2} + x\right) - \left(\frac{d}{2} - x\right) = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή} \quad 2x = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad 4,5\lambda = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή} \quad N = 4.$$

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζονται οι υπερβολές αποσβεστικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ.



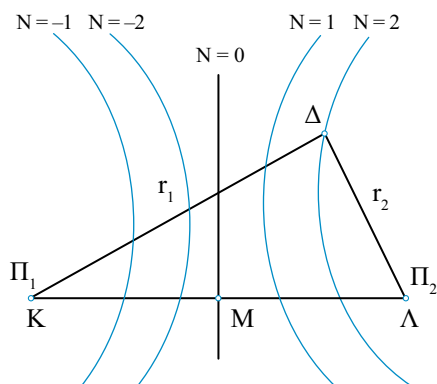
Επομένως, το πλήθος των σημείων αποσβεστικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ είναι ίσο με 10.

33. Α. Σωστή επιλογή είναι η α.

Επειδή το σημείο Δ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής, ισχύει:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \quad \text{ή} \quad N = 2.$$

Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι υπερβολές ενισχυτικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ. Όπως φαίνεται από το σχήμα, το πλήθος των σημείων ενισχυτικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ είναι ίσο με 5.



Β. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Δ αρχίζει τη χρονική στιγμή:

$$t_{\text{συμβ}} = \frac{r_1}{v_{\delta}} \quad \text{ή} \quad t_{\text{συμβ}} = \frac{8\lambda}{\lambda} \quad \text{ή} \quad t_{\text{συμβ}} = 8T.$$

Γ. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Η ταλάντωση του σημείου Δ αρχίζει τη χρονική στιγμή:

$$t_{\text{αρχ}} = \frac{r_2}{v_{\delta}} \quad \text{ή} \quad t_{\text{αρχ}} = \frac{6\lambda}{\lambda} \quad \text{ή} \quad t_{\text{αρχ}} = 6T.$$

Επειδή είναι $t_{\text{αρχ}} < t_1 < t_{\text{συμβ}}$, το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Δ τη χρονική στιγμή t_1 είναι $A_{\Delta} = A$.

34. Α. Σωστή επιλογή είναι η β.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΣΚΛ, έχουμε:

$$d_2^2 = d^2 + d_1^2 \quad \text{ή} \quad d_2 = 2,5\lambda.$$

Έστω ότι το σημείο Σ είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής. Έχουμε:

$$d_1 - d_2 = (2N + 1) \frac{\lambda_1}{2}$$

$$\text{ή} \quad -\frac{\lambda_1}{2} = (2N + 1) \frac{\lambda_1}{2}$$

$$\text{ή} \quad N = -1.$$

Επομένως, το σημείο Σ είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής και το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Σ μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό είναι: $A_{\Sigma} = 0$.

Β. Σωστή επιλογή είναι η α.

Έστω f_2 η νέα συχνότητα και λ_2 το νέο μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Έχουμε:

$$v_1 = v_2 \quad \text{ή} \quad \lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2 \quad \text{ή} \quad \lambda_1 f_1 = \lambda_2 2f_1$$

$$\text{ή} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2}.$$

Έστω ότι το σημείο Σ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής. Έχουμε: $d_1 - d_2 = N\lambda_2$

$$\text{ή} \quad -0,5\lambda_1 = N \frac{\lambda_1}{2} \quad \text{ή} \quad N = -1.$$

Επομένως, το σημείο Σ γίνεται σημείο ενισχυτικής συμβολής μετά τον διπλασιασμό της συχνότητας ταλάντωσης των δύο πηγών και το πλάτος της ταλάντωσής του μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό γίνεται:

$$A'_{\Sigma} = 2A.$$

35. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Έστω ότι το σημείο Δ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής.

Για να είναι το σημείο Δ σημείο ενισχυτικής συμβολής, πρέπει να ισχύει:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \quad (1), \text{ με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Από τη σχέση (1) για $r_1 = \lambda$ και $r_2 = \frac{4\lambda}{3}$ προκύπτει: $-\frac{\lambda}{3} = N\lambda$ ή $N = -\frac{1}{3}$.

Επομένως, το σημείο Δ δεν είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής.

Έστω ότι το σημείο Δ είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής.

Για να είναι το σημείο Δ σημείο αποσβεστικής συμβολής, πρέπει να ισχύει:

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad (2), \text{ με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Από τη σχέση (2) για $r_1 = \lambda$ και $r_2 = \frac{4\lambda}{3}$ προκύπτει: $-\frac{\lambda}{3} = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$ ή $N = -\frac{5}{6}$.

Επομένως, το σημείο Δ δεν είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής.

Επειδή το σημείο Δ δεν είναι ούτε σημείο ενισχυτικής συμβολής ούτε σημείο αποσβεστικής συμβολής, το πλάτος της ταλάντωσης μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό είναι: $A < A_A < 2A$.

Β. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Έστω f' η νέα συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών. Για να συμβάλλουν τα δύο κύματα ενισχυτικά στο σημείο Δ, πρέπει να ισχύει:

$$|r_1 - r_2| = N\lambda', \text{ με } N = 1, 2, \dots \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$|r_1 - r_2| = N \frac{v_\delta}{f'} \quad \text{ή} \quad f' = \frac{Nv_\delta}{|r_1 - r_2|}$$

$$\text{ή} \quad f' = \frac{N\lambda f}{\frac{\lambda}{3}}$$

$$\text{ή} \quad f' = 3Nf, \text{ με } N = 1, 2, \dots$$

Η μεταβολή της συχνότητας ταλάντωσης των δύο πηγών στην περίπτωση όπου τα δύο κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά στο σημείο Δ είναι: $\Delta f = f' - f$ ή $\Delta f = 3Nf - f$

$$\text{ή} \quad \Delta f = (3N-1)f, \text{ με } N = 1, 2, \dots \quad (2).$$

Αν στη σχέση (2) θέσουμε $N = 1$, προκύπτει ότι η ελάχιστη μεταβολή της συχνότητας ταλάντωσης των δύο πηγών είναι: $\Delta f_{\min} = 2f$.

36. Α. Σωστή επιλογή είναι η α.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΚΔΜ προκύπτει:

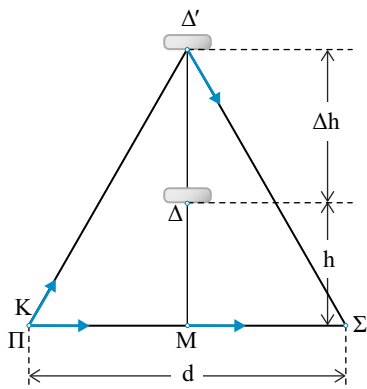
$$(ΚΔ)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2 \quad \text{ή} \quad (ΚΔ) = 10\lambda.$$

Έστω ότι στο σημείο Σ συμβαίνει ενισχυτική συμβολή. Ισχύει: $2(ΚΔ) - d = N\lambda$ ή $N = 4$.

Επομένως, στο σημείο Σ έχουμε ενισχυτική συμβολή. Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Σ είναι $A_\Sigma = 2A$.

B. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Έστω Δ' η νέα θέση του ανακλαστήρα.



Επειδή τα κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά για 14η φορά μετά τη μετακίνηση του ανακλαστήρα από την αρχική του θέση, ισχύει:

$$2(K\Delta') - d = N'\lambda \quad \text{ή} \quad 2(K\Delta') - d = 18\lambda$$

$$\text{ή} \quad (K\Delta') = 17\lambda.$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $K\Delta'M$ έχουμε:

$$(K\Delta')^2 = (\Delta'M)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \text{ή} \quad (\Delta'M) = 15\lambda.$$

$$\text{Ισχύει: } (\Delta'M) = h + \Delta h \quad \text{ή} \quad \Delta h = 9\lambda.$$

37. Σωστή επιλογή είναι η β.

Επειδή για $x = x_1$ τα δύο κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά στο σημείο Σ, ισχύει:

$$r_B - r_A = N\lambda \quad \text{ή} \quad 2x_1 = N\lambda$$

$$\text{ή} \quad x_1 = \frac{N\lambda}{2} \quad (1).$$

Επειδή για $x = x_2$ τα δύο κύματα συμβάλλουν αποσβεστικά στο σημείο Σ, ισχύει:

$$r_B - r_A = (2N' + 1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή} \quad 2x_2 = (2N' + 1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή} \quad x_2 = (2N' + 1)\frac{\lambda}{4} \quad (2).$$

Καθώς αυξάνουμε το x από την τιμή x_1 στην τιμή x_2 , στο σημείο Σ παρατηρείται για πρώτη φορά αποσβεστική συμβολή, όταν είναι $x = x_2$. Τότε ισχύει: $N' = N$.

Αφαιρώντας κατά μέλη από τη σχέση (2) τη σχέση (1), προκύπτει:

$$x_2 - x_1 = (2N' + 1)\frac{\lambda}{4} - \frac{N\lambda}{2}$$

$$\text{ή} \quad x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{4}$$

$$\text{ή} \quad \lambda = 4(x_2 - x_1) \quad \text{ή} \quad \lambda = 16 \text{ cm}.$$

38. α. Το σημείο K αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή στην οποία φτάνει σε αυτό το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π₁. Έστω t₁ η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο K. Έχουμε:

$$t_{\text{αρχ}} = \frac{r_1}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_{\text{αρχ}} = 0,1 \text{ s.}$$

β. Η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο K αρχίζει τη χρονική στιγμή στην οποία φτάνει σε αυτό το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π₂. Έστω t_{συμβ} η χρονική στιγμή στην οποία συμβάλλουν τα κύματα στο σημείο K.

$$\text{Έχουμε: } t_{\text{συμβ}} = \frac{r_2}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_{\text{συμβ}} = 0,2 \text{ s.}$$

γ. Επειδή t_{αρχ} < t₁ < t_{συμβ}, τη χρονική στιγμή t₁ το σημείο K ταλαντώνεται, εξαιτίας του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π₁. Επομένως, το πλάτος του τη χρονική στιγμή t₁ είναι: A_K = A ή A_K = 0,02 m.

Επειδή είναι t₂ > t_{συμβ}, τη χρονική στιγμή t₂ το σημείο K ταλαντώνεται, εξαιτίας της συμβολής των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό.

Έστω λ το μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Έχουμε: v_δ = λf ή λ = 0,3 m.

Έστω ότι στο σημείο K συμβαίνει ενισχυτική συμβολή. Έχουμε: r₁ - r₂ = Nλ ή N = -1.

Επομένως, στο σημείο K συμβαίνει ενισχυτική συμβολή και το πλάτος της ταλάντωσής του τη χρονική στιγμή t₂ είναι:

$$A_K = 2A \quad \text{ή} \quad A_K = 0,04 \text{ m.}$$

δ. Η νέα συχνότητα είναι:

$$f' = \frac{50}{100} f \quad \text{ή} \quad f' = 5 \text{ Hz.}$$

Έστω λ' το νέο μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Έχουμε: v_δ = λ'f' ή λ' = 0,6 m.

Έστω ότι στο σημείο K συμβαίνει ενισχυτική συμβολή μετά τη μεταβολή της συχνότητας. Έχουμε: r₁ - r₂ = Nλ' ή N = -(1/2).

Επομένως, στο σημείο K δεν συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.

Έστω ότι στο σημείο K συμβαίνει αποσβεστική συμβολή μετά τη μεταβολή της συχνότητας. Έχουμε: r₁ - r₂ = (2N + 1) $\frac{\lambda'}{2}$ ή N = -1.

Επομένως, στο σημείο K συμβαίνει αποσβεστική συμβολή.

39. α. Έστω λ το μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Έχουμε: v_δ = λf ή λ = 2 m.

Έστω ένα τυχαίο σημείο ενισχυτικής συμβολής που βρίσκεται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ μεταξύ των δύο πηγών και απέχει από τις πηγές Π₁ και Π₂ αποστάσεις r₁ και r₂ αντίστοιχα. Έχουμε: r₁ - r₂ = Nλ (1)

$$\text{και } r_1 + r_2 = d \text{ (2).}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και

$$(2) \text{ έχουμε: } 2r_1 = N\lambda + d \quad \text{ή} \quad r_1 = \frac{N\lambda + d}{2}.$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των σημείων ενισχυτικής συμβολής που βρίσκονται επάνω

στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ, λύνουμε την ανίσωση: $0 < r_1 < d$ ή $0 < \frac{N\lambda + d}{2} < d$

$$\text{ή } -\frac{d}{\lambda} < N < \frac{d}{\lambda}$$

$$\text{ή } -2,75 < N < 2,75 \text{ ή } N = 0, \pm 1, \pm 2.$$

Επομένως, το ζητούμενο πλήθος των σημείων είναι ίσο με 5.

β. Έστω ένα τυχαίο σημείο αποσβεστικής συμβολής που βρίσκεται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ μεταξύ των δύο πηγών και απέχει από τις πηγές Π_1 και Π_2 αποστάσεις r_1' και r_2' αντίστοιχα. Έχουμε:

$$r_1' - r_2' = (2N + 1)\frac{\lambda}{2} \quad (3) \text{ και } r_1' + r_2' = d \quad (4)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και

$$(4) \text{ έχουμε: } 2r_1' = (2N + 1)\frac{\lambda}{2} + d$$

$$\text{ή } r_1' = (2N + 1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2}.$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των σημείων αποσβεστικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ μεταξύ των δύο πηγών, λύνουμε την ανίσωση:

$$0 < r_1' < d \text{ ή } 0 < (2N + 1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} < d$$

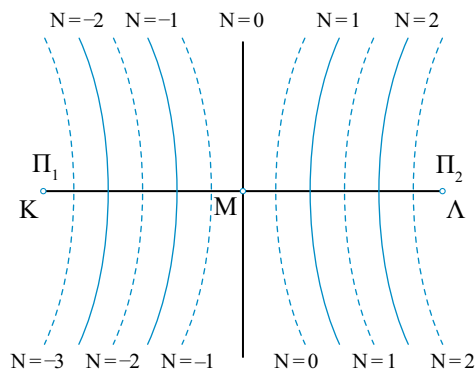
$$\text{ή } \frac{-\frac{2d}{\lambda} - 1}{2} < N < \frac{\frac{2d}{\lambda} - 1}{2}$$

$$\text{ή } -3,25 < N < 2,25$$

$$\text{ή } N = -3, -2, -1, 0, +1, +2.$$

Επομένως, το ζητούμενο πλήθος των σημείων είναι ίσο με 6.

γ. Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι υπερβολές ενίσχυσης και απόσβεσης που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ.



40. α. Από την εξίσωση της ταλάντωσης των δύο πηγών προκύπτει:

$$A = 0,1 \text{ m και } \omega = 10\pi \text{ rad/s}$$

Έστω f η συχνότητα των δύο κυμάτων.

$$\text{Έχουμε: } \omega = 2\pi f \text{ ή } f = 5 \text{ Hz.}$$

Έστω λ το μήκος κύματος των δύο κυμάτων.

$$\text{Έχουμε: } v_s = \lambda f \text{ ή } \lambda = 1 \text{ m.}$$

Για να συμβαίνει στο σημείο Κ ενισχυτική συμβολή, πρέπει να ισχύει:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \quad (1), \text{ με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Από τη σχέση (1), με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών, προκύπτει: $N = -2$.

Επομένως, το σημείο Κ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής.

β. Έστω t_1 η χρονική στιγμή στην οποία φτάνει στο σημείο Κ το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π_1 . Έχουμε: $t_1 = \frac{r_1}{v_s}$ ή $t_1 = 0,4 \text{ s.}$

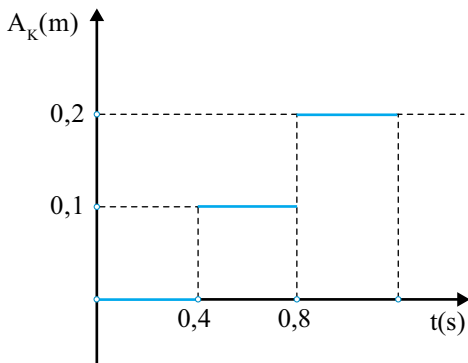
Έστω t_2 η χρονική στιγμή στην οποία φτάνει στο σημείο K το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π_2 . Έχουμε: $t_2 = \frac{r_2}{v_8}$ ή $t_2 = 0,8$ s.

Επομένως, η χρονική διαφορά με την οποία φτάνουν τα δύο κύματα στο σημείο K είναι:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad \text{ή} \quad \Delta t = 0,4 \text{ s.}$$

γ. Επειδή το σημείο K είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής, το πλάτος της ταλάντωσής του μετά τη συμβολή των κυμάτων στο σημείο αυτό είναι: $A_K = 2A$ ή $A_K = 0,2$ m.

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση του πλάτους της ταλάντωσης του σημείου K σε συνάρτηση με τον χρόνο.



δ. Έστω ένα τυχαίο σημείο αποσβεστικής συμβολής που βρίσκεται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα AB και απέχει αποστάσεις r_1' και r_2' από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Έχουμε: $r_1' - r_2' = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$ (1) και $r_1' + r_2' = d$ (2).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και

$$(2) \quad \text{έχουμε: } 2r_1' = (2N+1)\frac{\lambda}{2} + d$$

$$\text{ή} \quad r_1' = (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2}.$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των σημείων αποσβεστικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα AB, λύνουμε την ανίσωση: $0 \leq r_1' \leq d$

$$\text{ή} \quad 0 \leq (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \leq d$$

$$\text{ή} \quad -\frac{d}{2} \leq (2N+1)\frac{\lambda}{4} \leq \frac{d}{2}$$

$$\text{ή} \quad -\frac{2d}{\lambda} \leq 2N+1 \leq \frac{2d}{\lambda}$$

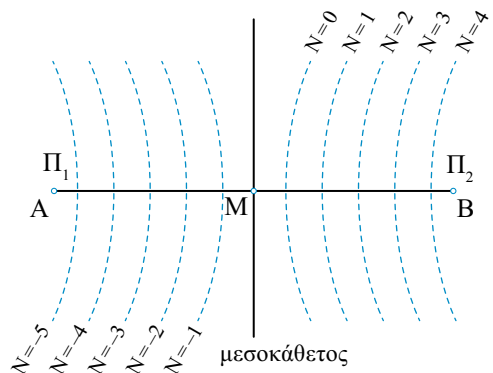
$$\text{ή} \quad \frac{-\frac{2d}{\lambda} - 1}{2} \leq N \leq \frac{\frac{2d}{\lambda} - 1}{2}$$

$$\text{ή} \quad -5,5 \leq N \leq 4,5$$

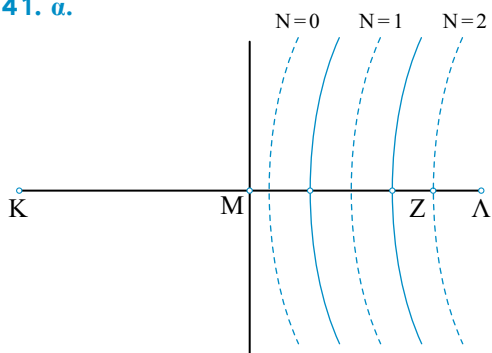
$$\text{ή} \quad N = -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4.$$

Επομένως, το ζητούμενο πλήθος των σημείων είναι ίσο με 10.

ε. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται οι υπερβολές αποσβεστικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα AB.



41. α.



Το σημείο Z, όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, ανήκει στην τρίτη υπερβολή αποσβεστικής συμβολής ($N = 2$), δεξιά της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ. Επομένως, για το σημείο Z ισχύει:

$$r_1 - r_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή } r_1 - r_2 = (2 \cdot 2 + 1) \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή } r_1 - r_2 = 0,5 \text{ m} \quad (1).$$

Επειδή το σημείο Z ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ ισχύει: $r_1 + r_2 = 1,5 \text{ m}$ (2).

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτουν:

$$r_1 = 1 \text{ m} \text{ και } r_2 = 0,5 \text{ m}.$$

β. Από την εξίσωση της ταλάντωσης των δύο πηγών έχουμε: $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$.

Έστω f η συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών. Έχουμε: $\omega = 2\pi f$ ή $f = 10 \text{ Hz}$.

Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = 2 \text{ m/s}$.

Έστω t_1 και t_2 οι χρονικές στιγμές στις οποίες φτάνουν τα κύματα στο σημείο Z από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Αφού είναι $r_1 > r_2$,

είναι $t_1 > t_2$. Η χρονική διαφορά με την οποία φτάνουν τα κύματα στο σημείο Z είναι:

$$\Delta t = t_1 - t_2 \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{r_1}{v_\delta} - \frac{r_2}{v_\delta}$$

$$\text{ή } \Delta t = \frac{r_1 - r_2}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad \Delta t = 0,25 \text{ s}.$$

γ. Το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί το σημείο Z από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή στην οποία συμβάλλουν τα κύματα σε αυτό είναι:

$$N = f\Delta t \quad \text{ή} \quad N = f(t_2 - t_1)$$

$$\text{ή } N = 2,5 \text{ ταλαντώσεις}.$$

δ. Έστω f' η νέα συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών. Έχουμε: $|r_1 - r_2| = N\lambda'$

$$\text{ή } |r_1 - r_2| = \frac{Nv_\delta}{f'}$$

$$\text{ή } f' = \frac{Nv_\delta}{|r_1 - r_2|} \quad \text{με } N = 1, 2, 3, \dots (3).$$

Η ελάχιστη συχνότητα προκύπτει από τη σχέση (3), θέτοντας σε αυτήν $N = 1$. Επομένως, έχουμε: $f'_{\min} = 4 \text{ Hz}$.

42. α. Έστω t_1 και t_2 οι χρονικές στιγμές στις οποίες φτάνουν τα κύματα στο σημείο K από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Έχουμε:

$$t_1 = \frac{r_1}{v_\delta} \quad (1) \quad \text{και} \quad t_2 = \frac{r_2}{v_\delta} \quad (2).$$

Επειδή είναι $r_2 > r_1$, είναι $t_2 > t_1$.

Η χρονική διαφορά με την οποία φτάνουν τα κύματα στο σημείο K δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad \text{ή} \quad \text{λόγω των σχέσεων (1) και (2):}$$

$$\Delta t = \frac{r_2}{v_\delta} - \frac{r_1}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad r_2 = r_1 + v_\delta \Delta t$$

$$\text{ή } r_2 = 1,4 \text{ m}.$$

β. Έστω λ το μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Έχουμε: $v_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = 0,2 \text{ m}$.

Για να συμβαίνει στο σημείο K ενισχυτική συμβολή, πρέπει να ισχύει:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \quad (3), \text{ με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (3), προκύπτει: $N = -2$.

Επομένως, στο σημείο K συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.

γ. Η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο K είναι:

$$t_1 = \frac{r_1}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_1 = 1 \text{ s}.$$

Το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί το σημείο K από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t' = 2 \text{ s}$ υπολογίζεται από τη σχέση: $N = f\Delta t$ ή $N = f(t' - t_1)$

ή **$N = 5$ ταλαντώσεις.**

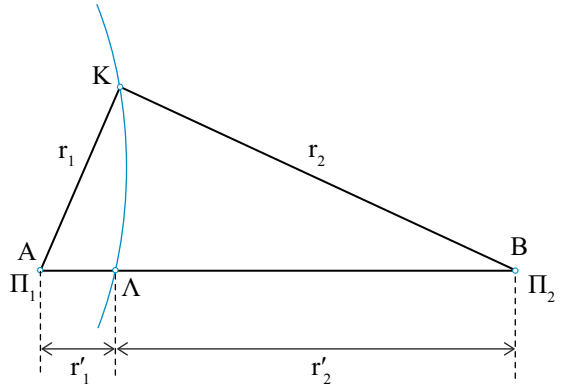
δ. Επειδή το σημείο K είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής, το πλάτος της ταλάντωσής του μετά την έναρξη της συμβολής των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό είναι:

$$A_K = 2A \quad \text{ή} \quad A_K = 0,2 \text{ m}.$$

Επομένως, η μέγιστη τιμή της ταχύτητας του ταλαντούμενου σημείου K μετά την έναρξη της συμβολής των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό είναι: $v_{\max} = \omega A_K$ ή $v_{\max} = 2\pi f A_K$

$$\text{ή} \quad v_{\max} = 2\pi \text{ m/s}.$$

ε. Έστω r'_1 και r'_2 οι αποστάσεις του σημείου Λ από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα.



Επειδή το σημείο Λ ανήκει στην ίδια υπερβολή ενισχυτικής συμβολής με το σημείο K, ισχύει: $r'_1 - r'_2 = N\lambda$ ή $r'_1 - r'_2 = -2\lambda$

$$\text{ή} \quad r'_1 - r'_2 = -0,4 \text{ m} \quad (4).$$

Επειδή το σημείο Λ είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB, ισχύει:

$$r'_1 + r'_2 = d \quad \text{ή} \quad r'_1 + r'_2 = 2 \text{ m} \quad (5).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (4) και (5), προκύπτει: $2r'_1 = 1,6 \text{ m}$ ή **$r'_1 = 0,8 \text{ m}$.**

43. α. Έστω λ το μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Έχουμε: $v_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = 2 \text{ m}$.

Για να συμβαίνει στο σημείο K ενισχυτική συμβολή, πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \quad (1), \text{ με } N = 0, 1, 2, \dots$$

Από τη σχέση (1) για $r_1 = 5 \text{ m}$, $r_2 = 1 \text{ m}$ και $\lambda = 2 \text{ m}$ προκύπτει: $N = 2$.

Επομένως, το σημείο K είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής.

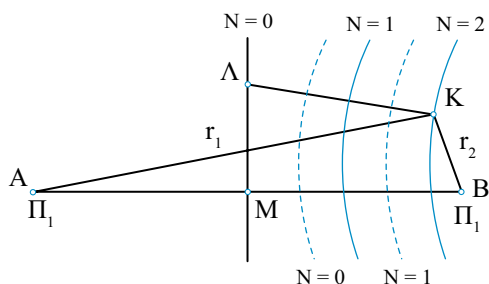
β. Μετά την έναρξη της συμβολής των δύο κυμάτων στο σημείο K, το πλάτος της ταλάντωσής του είναι: $A_K = 2A$ ή **$A_K = 0,02 \text{ m}$.**

Επομένως, η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης του σημείου Κ μετά την έναρξη της συμβολής των δύο κυμάτων σε αυτό είναι:

$$\alpha_{\max} = \omega^2 A_K \quad \text{ή} \quad \alpha_{\max} = (2\pi f)^2 \cdot 2A$$

$$\text{ή} \quad \alpha_{\max} = 3,2 \text{ m/s}^2.$$

γ. Το σημείο Λ ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής με $N = 0$. Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι υπερβολές ενισχυτικής και οι υπερβολές αποσβεστικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ.



Όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα, δύο υπερβολές αποσβεστικής συμβολής τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ. Επομένως, το ζητούμενο πλήθος των σημείων είναι **ίσο με 2**.

δ. Επειδή είναι: $A < y_K$, τις χρονικές στιγμές στις οποίες η απομάκρυνση του σημείου Κ από τη θέση ισορροπίας του είναι ίση με y_K , το σημείο Κ ταλαντώνεται, λόγω της συμβολής των δύο κυμάτων, με πλάτος:

$$A_K = 2A = 0,02 \text{ m}.$$

Έστω v_K το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Κ τις χρονικές στιγμές στις οποίες είναι: $y_K = +0,01\sqrt{3} \text{ m}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του σημείου Κ έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D A_K^2 = \frac{1}{2} m v_K^2 + \frac{1}{2} D y_K^2$$

$$\text{ή} \quad m \omega^2 A_K^2 = m v_K^2 + m \omega^2 y_K^2$$

$$\text{ή} \quad v_K = \omega \sqrt{A_K^2 - y_K^2}$$

$$\text{ή} \quad v_K = 2\pi f \sqrt{(2A)^2 - y_K^2}$$

$$\text{ή} \quad v_K = 0,04\pi \text{ m/s}.$$

44. α. Επειδή το σημείο Κ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, ισχύει:

$$r_1 + r_2 = d \quad \text{ή} \quad r_2 = 0,4 \text{ m}.$$

Επειδή το σημείο Κ είναι το πλησιέστερο σημείο δεξιά του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ στο οποίο συμβαίνει αποσβεστική συμβολή, ισχύει: $r_1 - r_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2}$

$$\text{ή} \quad r_1 - r_2 = (2 \cdot 0 + 1) \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή} \quad \lambda = 0,4 \text{ m}.$$

β. Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \lambda f \quad \text{ή} \quad v_\delta = 2 \text{ m/s}.$$

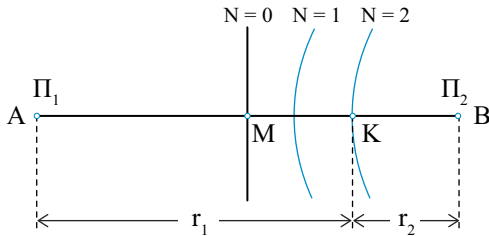
Το σημείο Μ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_M στην οποία συμβάλλουν τα δύο κύματα στο σημείο αυτό. Έχουμε:

$$t_M = \frac{d}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_M = 0,25 \text{ s}.$$

Το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί το σημείο Μ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,85 \text{ s}$ είναι:

$$N = f(t_1 - t_M) \quad \text{ή} \quad N = 3 \text{ ταλαντώσεις}.$$

γ. Έστω f' η νέα συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών. Επειδή το σημείο Κ ανήκει στη δεύτερη υπερβολή ενισχυτικής συμβολής δεξιά της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, ισχύει: $r_1 - r_2 = 2\lambda'$
 ή $r_1 - r_2 = 2 \frac{v_\delta}{f'}$ ή $f' = \frac{2v_\delta}{r_1 - r_2}$
 ή $f' = 20 \text{ Hz}$.



Το επί τοις εκατό (%) ποσοστό της μεταβολής της συχνότητας ταλάντωσης των δύο πηγών υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{f' - f}{f} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 300\%.$$

δ. Το νέο μήκος κύματος των δύο κυμάτων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \lambda' f' \quad \text{ή} \quad \lambda' = \frac{v_\delta}{f'} \quad \text{ή} \quad \lambda' = 0,1 \text{ m}.$$

Έστω ένα τυχαίο σημείο ενισχυτικής συμβολής που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και απέχει αποστάσεις r_1' και r_2' από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Για το σημείο αυτό ισχύει: $r_1' - r_2' = N\lambda'$ (1)

$$\text{και} \quad r_1' + r_2' = d \quad (2).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $2r_1' = N\lambda' + d$

$$\text{ή} \quad r_1' = \frac{N\lambda' + d}{2}.$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των σημείων ενισχυτικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, μεταξύ δύο πηγών, λύνουμε την ανίσωση:

$$0 < r_1' < d \quad \text{ή} \quad 0 < \frac{N\lambda' + d}{2} < d$$

$$\text{ή} \quad -d < N\lambda' < d \quad \text{ή} \quad -\frac{d}{\lambda'} < N < \frac{d}{\lambda'}$$

$$\text{ή} \quad -10 < N < 10$$

$$\text{ή} \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 9.$$

Επομένως, το ζητούμενο πλήθος των σημείων είναι ίσο με 19.

45. α. Έστω ότι στο σημείο Δ συμβαίνει ενισχυτική συμβολή. Για να συμβαίνει στο σημείο Δ ενισχυτική συμβολή, πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \quad (1), \text{ με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (1), προκύπτει: $N = -4$.

Επομένως, στο σημείο Δ συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.

β. Έστω t_1' η χρονική στιγμή στην οποία φτάνει στο σημείο Δ το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π_1 . Έχουμε: $t_1' = \frac{r_1}{v_\delta}$ ή $t_1' = 1 \text{ s}$.

Έστω t_2' η χρονική στιγμή στην οποία φτάνει στο σημείο Δ το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π_2 . Έχουμε: $t_2' = \frac{r_2}{v_\delta}$ ή $t_2' = 2,6 \text{ s}$.

Επειδή είναι $t_1' < t_1 < t_2'$, το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Δ τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με Α. Επομένως, η ενέργεια της ταλάντωσης του σημείου Δ τη χρονική στιγμή t_1

$$\text{είναι: } E = \frac{1}{2}DA^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (2).$$

Έστω f η συχνότητα ταλάντωσης των δύο κυμάτων. Έχουμε: $v_\delta = \lambda f$ ή $f = 2,5 \text{ Hz}$.

Επομένως: $\omega = 2\pi f$ ή $\omega = 5\pi \text{ rad/s}$.

Από τη σχέση (2) με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών προκύπτει: $E = 25 \cdot 10^{-4} \text{ J}$.

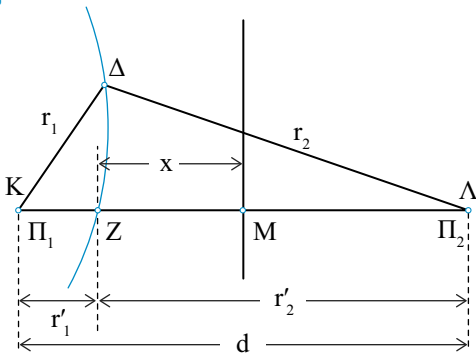
Επειδή είναι $t_2 > t'_2$, το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Δ τη χρονική στιγμή t_2 είναι ίσο με $2A$.

Επομένως, η ενέργεια της ταλάντωσης του σημείου Δ τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2}D(2A)^2 \quad \text{ή} \quad E' = 4E$$

$$\text{ή} \quad E' = 10^{-2} \text{ J}.$$

γ.



Έστω ότι το σημείο Z απέχει από την πηγή Π_1 απόσταση r'_1 και από την πηγή Π_2 απόσταση r'_2 . Επειδή το σημείο Z ανήκει στην ίδια υπερβολή ενισχυτικής συμβολής με το σημείο Δ , ισχύει: $r'_1 - r'_2 = -4\lambda$ ή $r'_2 - r'_1 = 4\lambda$

$$\text{ή} \quad \frac{d}{2} + x - \left(\frac{d}{2} - x \right) = 4\lambda$$

$$\text{ή} \quad 2x = 4\lambda \quad \text{ή} \quad x = 2\lambda \quad \text{ή} \quad x = 0,8 \text{ m}.$$

δ. Έστω ένα τυχαίο σημείο ενισχυτικής συμβολής που βρίσκεται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $K\Lambda$ και απέχει από τις πηγές Π_1 και Π_2 αποστάσεις r_1'' και r_2'' αντίστοιχα. Έχουμε:

$$r_1'' - r_2'' = N\lambda \quad (1)$$

$$\text{και} \quad r_1'' + r_2'' = d \quad (2).$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και

$$(2) \text{ έχουμε: } 2r_1'' = N\lambda \quad \text{ή} \quad r_1'' = \frac{N\lambda + d}{2}.$$

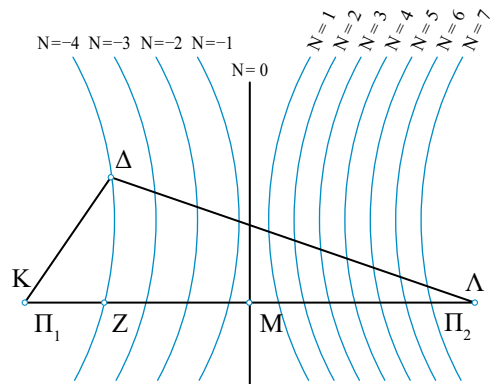
Για να υπολογίσουμε το πλήθος των σημείων ενισχυτικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $K\Lambda$, λύνουμε την ανί-

$$\text{σωση: } 0 \leq r_1'' \leq d \quad \text{ή} \quad 0 \leq \frac{N\lambda + d}{2} \leq d$$

$$\text{ή} \quad -\frac{d}{\lambda} \leq N \leq \frac{d}{\lambda} \quad \text{ή} \quad -7,5 \leq N \leq 7,5$$

$$\text{ή} \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7.$$

Όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα, μεταξύ των σημείων Z και Λ σχηματίζονται 11 σημεία ενισχυτικής συμβολής.



46. α. Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κύματων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \lambda f \quad \text{ή} \quad v_\delta = 3 \text{ m/s}.$$

Αφού είναι $r_1 > r_2$, το κύμα που φτάνει πρώτο στο σημείο Z είναι το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π_2 . Επομένως, έχουμε:

$$t_1 = \frac{r_2}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad r_2 = v_\delta t_1 \quad \text{ή} \quad r_2 = 0,3 \text{ m.}$$

Η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Z αρχίζει, όταν φτάνει σε αυτό το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π_1 . Έστω t_2 η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Z. Έχουμε:

$$t_2 = t_1 + 0,2 \text{ s} \quad \text{ή} \quad t_2 = 0,3 \text{ s.}$$

Η απόσταση του σημείου Z από την πηγή Π_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$t_2 = \frac{r_1}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad r_1 = v_\delta t_2 \quad \text{ή} \quad r_1 = 0,9 \text{ m.}$$

β. Έστω ότι στο σημείο Z συμβαίνει ενισχυτική συμβολή. Έχουμε: $r_1 - r_2 = N\lambda$ ή $N = 2$. Επομένως, στο σημείο Z συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.

γ. Έστω r'_1 η απόσταση του σημείου Δ από την πηγή Π_1 . Το σημείο Δ ανήκει στην ίδια υπερβολή ενισχυτικής συμβολής με το σημείο Z. Επομένως, έχουμε:

$$r'_1 - r'_2 = N\lambda \quad \text{ή} \quad r'_1 - r'_2 = 2\lambda$$

$$\text{ή} \quad r'_1 = r'_2 + 2\lambda \quad \text{ή} \quad r'_1 = 0,7 \text{ m.}$$

Επομένως, η απόσταση μεταξύ των δύο πηγών είναι: $(K\Lambda) = r'_1 + r'_2$ ή $(K\Lambda) = 0,8 \text{ m}$.

δ. Έστω f' η νέα συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών. Για να συμβαίνει αποσβεστική συμβολή στο σημείο Z, πρέπει να ισχύει:

$$|r_1 - r_2| = (2N+1) \frac{\lambda'}{2} \quad \text{ή} \quad |r_1 - r_2| = (2N+1) \frac{v_\delta}{2f'}$$

$$\text{ή} \quad f' = \frac{(2N+1)v_\delta}{2|r_1 - r_2|} \quad (\text{S.I.})$$

$$\text{ή} \quad f' = 2,5(2N+1) \quad (1), \text{ με } N = 0, 1, 2, \dots$$

Η ελάχιστη συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών, ώστε στο σημείο Z να συμβαίνει αποσβεστική συμβολή προκύπτει από τη σχέση (1), θέτοντας σε αυτήν $N = 0$. Έχουμε:

$$f_{\min} = 2,5 \text{ Hz.}$$

47. α. Όπως προκύπτει από το δοθέν διάγραμμα, το σημείο Z αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ με πλάτος $A_Z = 0,01 \text{ m}$ και από τη χρονική στιγμή $t_2 = 11 \text{ s}$ και μετά παραμένει διαρκώς ακίνητο. Επομένως, τη χρονική στιγμή t_2 τα δύο κύματα συμβάλλουν αποσβεστικά στο σημείο Z.

β. Έστω v_δ η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων. Τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία τα δύο κύματα αρχίζουν να συμβάλλουν στο σημείο Z, φτάνει στο σημείο αυτό το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π_1 . Έχουμε:

$$t_2 = \frac{r_1}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad v_\delta = 1 \text{ m/s.}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο Z φτάνει στο σημείο αυτό το κύμα που προέρχεται από την πηγή

$$\Pi_2. \text{ Έχουμε: } t_1 = \frac{r_2}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad r_2 = 4 \text{ m.}$$

γ. Από την εξίσωση της ταλάντωσης των δύο πηγών προκύπτει: $\omega = \pi \text{ rad/s}$.

Έστω f η συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών. Έχουμε: $\omega = 2\pi f$ ή $f = 0,5 \text{ Hz}$.

Έστω λ το μήκος κύματος των δύο κυμάτων.
Έχουμε: $v_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = 2 \text{ m}$.

Για το σημείο Z έχουμε:

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad N = 3.$$

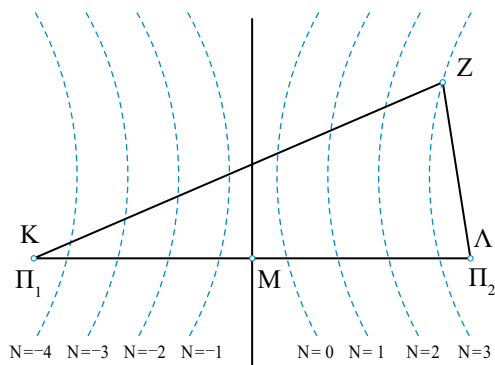
Έστω r'_1 και r'_2 οι αποστάσεις του σημείου Δ από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα και d η απόσταση μεταξύ των δύο πηγών. Επειδή το σημείο Δ ανήκει στην ίδια υπερβολή αποσβεστικής συμβολής με το σημείο Z ισχύει:

$$r'_1 - r'_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad r'_1 - r'_2 = 3,5\lambda$$

$$\text{ή} \quad \left(\frac{d}{2} + x\right) - \left(\frac{d}{2} - x\right) = 3,5\lambda$$

$$\text{ή} \quad 2x = 3,5\lambda \quad \text{ή} \quad x = 1,75\lambda \quad \text{ή} \quad x = 3,5 \text{ m}.$$

δ. Επειδή στο ευθύγραμμο τμήμα ΖΛ δεν υπάρχει άλλο σημείο αποσβεστικής συμβολής εκτός από το σημείο Z, η υπερβολή με $N = 3$ είναι η πιο κοντινή υπερβολή στην πηγή Π_2 που τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ. Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι υπερβολές αποσβεστικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ.



Όπως προκύπτει από το σχήμα, το πλήθος των σημείων αποσβεστικής συμβολής που

βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ είναι ίσο με 8.

48. α. Για να συμβαίνει αποσβεστική συμβολή στο σημείο K, πρέπει να ισχύει:

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad (1),$$

$$\text{με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (1), προκύπτει:

$$3,5 = (2N+1)0,5 \quad \text{ή} \quad N = 3.$$

Επομένως, στο σημείο K συμβαίνει αποσβεστική συμβολή.

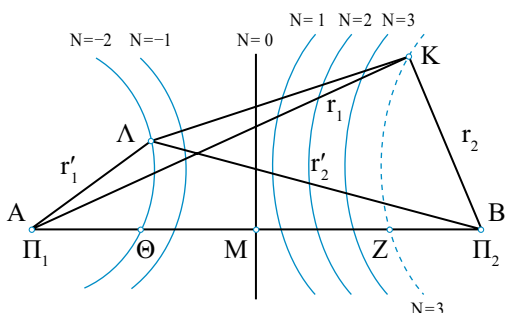
β. Για να συμβαίνει ενισχυτική συμβολή στο σημείο Λ, πρέπει να ισχύει:

$$r'_1 - r'_2 = N\lambda \quad (2), \quad \text{με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (2) προκύπτει: $N = -2$.

Επομένως, στο σημείο Λ συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.

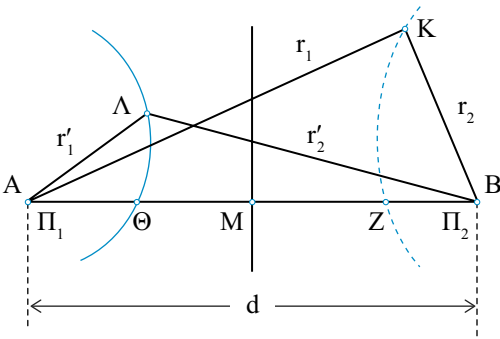
γ. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνονται οι υπερβολές ενισχυτικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ.



Όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα, το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ το τέμνουν 6 υπερβο-

λές ενισχυτικής συμβολής. Επομένως, επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ βρίσκονται **6 σημεία ενισχυτικής συμβολής**.

δ. Έστω d η απόσταση μεταξύ των δύο πηγών.



Το σημείο Z ανήκει στην ίδια υπερβολή αποσβεστικής συμβολής με το σημείο K. Επομένως, έχουμε: $(\Pi_1 Z) - (\Pi_2 Z) = 3,5\lambda$ (1).

Το σημείο Θ ανήκει στην ίδια υπερβολή ενισχυτικής συμβολής με το σημείο Λ. Επομένως, έχουμε: $(\Pi_1 \Theta) - (\Pi_2 \Theta) = -2\lambda$ (2).

Αφαιρώντας από τη σχέση (1) τη σχέση (2) κατά μέλη, έχουμε:

$$[(\Pi_1 Z) - (\Pi_1 \Theta)] + [(\Pi_2 \Theta) - (\Pi_2 Z)] = 5,5\lambda$$

$$\text{ή } 2(Z\Theta) = 5,5\lambda \text{ ή } (Z\Theta) = 2,75 \text{ m.}$$

49. α. Έστω r_B και r_A οι αποστάσεις που διανύουν τα ηχητικά κύματα στους σωλήνες B και A αντίστοιχα. Έχουμε:

$$r_B = 2d + 2x + \pi R \quad (1)$$

$$\text{και } r_A = 2d + \pi R \quad (2).$$

Επομένως, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η διαφορά των αποστάσεων που δια-

νύουν τα δύο κύματα στους σωλήνες B και A είναι: $r_B - r_A = 2x$ (3).

Για να συμβαίνει ενισχυτική συμβολή στο άκρο Σ του σωλήνα A, πρέπει να ισχύει:

$$r_B - r_A = N\lambda \text{ ή, λόγω της σχέσης (3): } 2x = N\lambda$$

$$\text{ή } x = \frac{N\lambda}{2} \quad (4), \text{ με } N = 0, 1, 2, \dots$$

Από τη σχέση (4) για $x = x_1 = 0,1 \text{ m}$ προκύπτει: $N = 1$.

Επομένως, στο άκρο Σ συμβαίνει ενισχυτική συμβολή και η ένταση του ήχου που μετρά ο ανιχνευτής είναι μέγιστη.

β. Έστω ότι στο άκρο Σ συμβαίνει ξανά ενισχυτική συμβολή. Από τη σχέση (1), για $x = x_2 = 0,55 \text{ m}$, προκύπτει: $N = 5,5$.

Επομένως, στο άκρο Σ δεν συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.

Έστω ότι στο άκρο Σ συμβαίνει αποσβεστική συμβολή. Για να συμβαίνει αποσβεστική συμβολή στο άκρο Σ, πρέπει να ισχύει:

$$r_B - r_A = (2N + 1) \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή, λόγω της σχέσης (3): } 2x = (2N + 1) \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή } x = (2N + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (5), \text{ με } N = 0, 1, 2, \dots$$

Από τη σχέση (5) για $x = x_2 = 0,55 \text{ m}$ προκύπτει $N = 5$.

Επομένως, στο άκρο Σ συμβαίνει αποσβεστική συμβολή και η ένταση του ήχου που μετρά ο ανιχνευτής είναι ίση με μηδέν.

γ. Το πλήθος των μεγίστων της έντασης του ήχου που μετρά ο ανιχνευτής κατά τη μετακίνηση του σωλήνα B από τη θέση x_1 στη θέση x_2 είναι ίσο με 5 ($N = 1, 2, 3, 4, 5$).

δ. Το πλήθος των μηδενισμών της έντασης του ήχου που μετρά ο ανιχνευτής κατά τη μετακίνηση του σωλήνα Β από τη θέση x_1 στη θέση x_2 είναι ίσο με 5 ($N = 1, 2, 3, 4, 5$).

50. α. Έστω ότι, όταν ο ανακλαστήρας βρίσκεται στη θέση Ζ, συμβαίνει ενισχυτική συμβολή στο σημείο Σ. Για να συμβαίνει ενισχυτική συμβολή στο σημείο Σ, πρέπει να ισχύει: $(KZ\Sigma) - (K\Sigma) = N\lambda$

$$\text{ή } 2(KZ) - d = N\lambda \quad (1), \text{ με } N = 0, 1, 2, \dots$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΜΖ, έχουμε:

$$(ZM)^2 + (KM)^2 = (KZ)^2$$

$$\text{ή } h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = (KZ)^2$$

$$\text{ή } (KZ) = \sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}}$$

$$\text{ή } (KZ) = 0,65 \text{ m.}$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (1) προκύπτει: $N = 0,5$.

Επομένως, στο σημείο Σ δεν συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.

Έστω ότι στο σημείο Σ συμβαίνει αποσβεστική συμβολή. Για να συμβαίνει αποσβεστική συμβολή στο σημείο Σ, πρέπει να ισχύει:

$$(KZ\Sigma) - (K\Sigma) = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ή } 2(KZ) - d = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad (2),$$

$$\text{με } N = 0, 1, 2, \dots$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (2), προκύπτει: $N = 0$.

Επομένως, στο σημείο Σ συμβαίνει αποσβεστική συμβολή.

β. Το ύψος h' όπου βρίσκεται ο ανακλαστήρας επάνω από το μέσον Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΚΣ, όταν βρίσκεται στη θέση Δ, είναι: $h' = h + \Delta h$ ή $h' = 0,8 \text{ m}$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΠΜΔ, έχουμε:

$$(\Delta M)^2 + (KM)^2 = (K\Delta)^2$$

$$\text{ή } (K\Delta)^2 = (h')^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$\text{ή } (K\Delta) = \sqrt{(h')^2 + \frac{d^2}{4}}$$

$$\text{ή } (K\Delta) = 1 \text{ m.}$$

Έστω ότι στο σημείο Σ συμβαίνει ενισχυτική συμβολή. Για να συμβαίνει ενισχυτική συμβολή στο σημείο Σ, πρέπει να ισχύει:

$$(K\Delta\Sigma) - (K\Sigma) = N\lambda$$

$$\text{ή } 2(K\Delta) - d = N\lambda \quad (3), \text{ με } N = 0, 1, 2, \dots$$

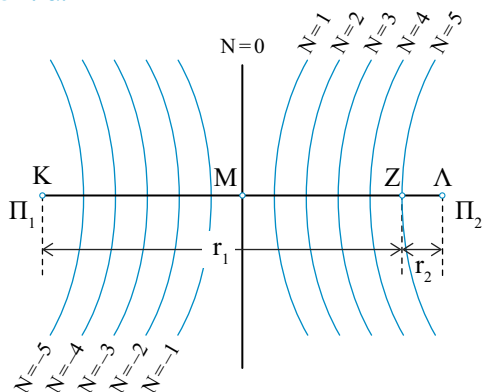
Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (3), προκύπτει: $N = 4$.

Επομένως, στο σημείο Σ συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.

γ. Κατά τη μετακίνηση του ανακλαστήρα από τη θέση Ζ στη θέση Δ στο σημείο Σ συμβαίνει 4 φορές ενισχυτική συμβολή ($N = 1, 2, 3, 4$).

δ. Κατά τη μετακίνηση του ανακλαστήρα από τη θέση Ζ στη θέση Δ στο σημείο Σ συμβαίνει 4 φορές αποσβεστική συμβολή ($N = 0, 1, 2, 3$).

51. α.



Επειδή στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ υπάρχουν συνολικά 11 σημεία ενισχυτικής συμβολής, το σημείο Ζ θα ανήκει στην πέμπτη υπερβολή ενισχυτικής συμβολής προς τα δεξιά της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Επομένως, για το σημείο Ζ έχουμε:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \quad \text{ή} \quad r_1 - r_2 = 5\lambda$$

$$\text{ή} \quad r_1 - r_2 = 1 \text{ m} \quad \text{ή} \quad r_1 = 1,6 \text{ m}.$$

β. Η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Ζ αρχίζει τη χρονική στιγμή:

$$t_1 = \frac{r_1}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t_1 = 2 \text{ s}.$$

γ. Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Ζ μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό είναι: $A_\Sigma = 2A$ ή $A_\Sigma = 0,08 \text{ m}$.

Έστω f η συχνότητα των δύο κυμάτων. Είναι: $v_\delta = \lambda f$ ή $f = 4 \text{ Hz}$.

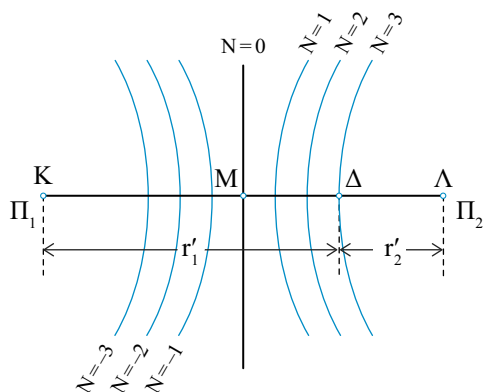
Έχουμε: $\omega = 2\pi f$ ή $\omega = 8\pi \text{ rad/s}$.

Η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης του σημείου Ζ μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό είναι: $a_{\max} = \omega^2 A_\Sigma$ ή $a_{\max} = 51,2 \text{ m/s}^2$.

δ. Η απόσταση μεταξύ των δύο πηγών είναι:

$$d = r_1 + r_2 \quad \text{ή} \quad d = 2,2 \text{ m}.$$

Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι υπερβολές ενισχυτικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ.



Έστω λ' το νέο μήκος κύματος των δύο κυμάτων.

Θεωρούμε το σημείο Δ, που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, το πλησιέστερο προς την πηγή Π_2 σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ στο οποίο συμβαίνει ενισχυτική συμβολή. Για το σημείο Δ ισχύει: $r'_1 - r'_2 = 3\lambda'$ (1)

$$\text{και} \quad r'_1 + r'_2 = d \quad (2).$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε: $2r'_1 = 3\lambda' + d$

$$\text{ή} \quad r'_1 = 1,5\lambda' + \frac{d}{2} \quad \text{ή} \quad r'_1 = 1,5 \frac{v_\delta}{f'} + \frac{d}{2} \quad (3),$$

όπου f' η νέα συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών. Έχουμε: $r'_1 \leq d$

ή, λόγω της σχέσης (3):

$$\frac{1,5v_\delta}{f'} + \frac{d}{2} \leq d \quad \text{ή} \quad \frac{1,5v_\delta}{f'} \leq \frac{d}{2}$$

$$\text{ή} \quad f' \geq \frac{3v_\delta}{d} \quad \text{ή} \quad f' \geq \frac{12}{11} \text{ Hz.}$$

Επομένως η ζητούμενη ελάχιστη συχνότητα είναι: $f'_{\min} = \frac{12}{11} \text{ Hz.}$

52. α. Έστω t'_1 η χρονική στιγμή στην οποία φτάνει στο σημείο Δ το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π_1 και t'_2 η χρονική στιγμή στην οποία φτάνει στο ίδιο σημείο το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π_2 . Αφού $r_1 < r_2$, είναι $t'_1 < t'_2$. Έχουμε: $\Delta t = t'_2 - t'_1$

$$\text{ή} \quad \Delta t = \frac{r_2}{v_\delta} - \frac{r_1}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad v_\delta = \frac{r_2 - r_1}{\Delta t}$$

$$\text{ή} \quad v_\delta = 0,8 \text{ m/s.}$$

Έστω λ το μήκος κύματος των δύο κυμάτων.

$$\text{Έχουμε: } v_\delta = \lambda f \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,2 \text{ m.}$$

Για να είναι το σημείο Δ σημείο ενισχυτικής συμβολής, πρέπει να ισχύει:

$$r_2 - r_1 = N\lambda \quad (1) \quad \text{με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (1) προκύπτει: $N = -1$.

Επομένως, το σημείο Δ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής.

β. Η χρονική στιγμή t'_1 είναι:

$$t'_1 = \frac{r_1}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t'_1 = 0,75 \text{ s.}$$

Η χρονική στιγμή t'_2 είναι:

$$t'_2 = \frac{r_2}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad t'_2 = 1 \text{ s.}$$

Αφού είναι $t'_1 < t_1 < t'_2$, το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Δ τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με Α και η ενέργεια της ταλάντωσης του την ίδια χρονική στιγμή είναι:

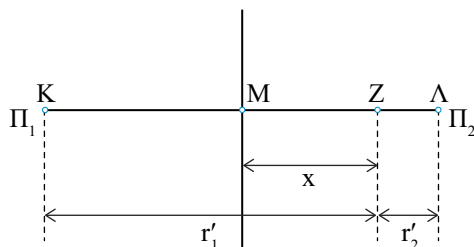
$$E_1 = \frac{1}{2} D A^2 \quad (2).$$

Αφού είναι $t_2 > t'_2$, το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Δ τη χρονική στιγμή t_2 είναι ίσο με 2Α και η ενέργεια της ταλάντωσης του την ίδια χρονική στιγμή είναι:

$$E_2 = \frac{1}{2} D (2A)^2 \quad (3).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (2) και (3), έχουμε: $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{4}$.

γ. Έστω r'_1 και r'_2 οι αποστάσεις του σημείου Z από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα.



Για το σημείο Z ισχύει:

$$r'_1 - r'_2 = N\lambda, \quad \text{με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4).$$

Από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\frac{(ΚΛ)}{2} + x - \left[\frac{(ΚΛ)}{2} - x \right] = N\lambda$$

$$\text{ή} \quad 2x = N\lambda \quad \text{ή} \quad N = 4.$$

Επομένως, επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ υπάρχουν συνολικά 9 σημεία ενισχυτικής συμβολής.

δ. Έστω f' η νέα συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών. Για να συμβαίνει αποσβεστική συμβολή στο σημείο Δ, πρέπει να ισχύει:

$$|r_1 - r_2| = (2N+1) \frac{\lambda'}{2}$$

$$\text{ή } |r_1 - r_2| = (2N+1) \frac{v_\delta}{2f'}$$

$$\text{ή } f' = \frac{(2N+1)v_\delta}{2|r_1 - r_2|}$$

$$\text{ή } f' = 2(2N+1) \text{ (5), με } N = 0, 1, 2, \dots$$

Ζητούμε τις πλησιέστερες συχνότητες στην αρχική συχνότητα $f = 4 \text{ Hz}$ της ταλάντωσης των δύο πηγών.

Επομένως, λύνουμε τις ανισότητες:

$$f' < 4 \text{ Hz} \text{ (6)}$$

$$\text{και } f' > 4 \text{ Hz} \text{ (7)}.$$

Από τη σχέση (6), λόγω της σχέσης (5), έχουμε: $2(2N+1) < 4$ ή $N < 0,5$ ή $N = 0$.

Επομένως, από τη σχέση (5) για $N = 0$ προκύπτει: $f' = 2 \text{ Hz}$.

Από τη σχέση (7), λόγω της σχέσης (5) έχουμε: $2(2N+1) > 4$ ή $N > 0,5$ ή $N = 1, 2, \dots$

Επομένως, από τη σχέση (5) για $N = 1$, έχουμε: $f' = 6 \text{ Hz}$.

Επομένως, η ελάχιστη μεταβολή (κατά απόλυτη τιμή) που πρέπει να υποστεί η συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών είναι:

$$|\Delta f| = |f' - f| = 2 \text{ Hz}.$$

53. α. Από το δοθέν διάγραμμα του πλάτους προκύπτει ότι το σημείο Σ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,2 \text{ s}$, ενώ η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό

αρχίζει τη χρονική στιγμή $t_2 = 1,4 \text{ s}$. Έχουμε:

$$t_1 = \frac{r_2}{v_\delta} \text{ ή } r_2 = v_\delta t_1 \text{ ή } r_2 = 1 \text{ m}$$

$$\text{και } t_2 = \frac{r_1}{v_\delta} \text{ ή } r_1 = v_\delta t_2 \text{ ή } r_1 = 7 \text{ m}.$$

Επειδή το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Σ διπλασιάζεται μετά την έναρξη της συμβολής των δύο κυμάτων σε αυτό, στο σημείο Σ συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.

β. Έστω λ το μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Έχουμε: $v_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = 2 \text{ m}$.

Επειδή στο σημείο Σ συμβαίνει ενισχυτική συμβολή, έχουμε: $r_1 - r_2 = N\lambda$ ή $N = 3$.

Έστω r'_1 και r'_2 οι αποστάσεις του σημείου Δ από τις δύο πηγές. Επειδή το σημείο Δ ανήκει στην ίδια υπερβολή ενισχυτικής συμβολής με το σημείο Σ, έχουμε: $r'_1 - r'_2 = N\lambda$

$$\text{ή } r'_1 - r'_2 = 3\lambda \text{ (1)}.$$

Επειδή το σημείο Δ είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ έχουμε:

$$r'_1 + r'_2 = d \text{ (2)}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει: $2r'_1 = 3\lambda + d$

$$\text{ή } r'_1 = \frac{3\lambda + d}{2} \text{ ή } r'_1 = 6,75 \text{ m}.$$

γ. Επειδή είναι $A < |y|$, τις χρονικές στιγμές στις οποίες η απομάκρυνση του σημείου Σ είναι ίση $y = -5\sqrt{3} \cdot 10^{-3} \text{ m}$, το πλάτος της ταλάντωσης του είναι:

$$A_\Sigma = 2A \text{ ή } A_\Sigma = 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Σ τις παραπάνω χρονικές στιγμές. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του

σημείου Σ έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D A_{\Sigma}^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D y^2$$

$$\text{ή } m \omega^2 A_{\Sigma}^2 = m v^2 + m \omega^2 y^2$$

$$\text{ή } v = \omega \sqrt{A_{\Sigma}^2 - y^2} \quad \text{ή } v = 2\pi f_1 \sqrt{A_{\Sigma}^2 - y^2}$$

$$\text{ή } v = 25\pi \cdot 10^{-3} \text{ m/s.}$$

δ. Έστω ένα τυχαίο σημείο Z αποσβεστικής συμβολής που βρίσκεται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και απέχει από τις πηγές Π_1 και Π_2 αποστάσεις r_1'' και r_2'' αντίστοιχα. Για το σημείο Z έχουμε:

$$r_1'' - r_2'' = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (3)$$

$$\text{και } r_1'' + r_2'' = d \quad (4).$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (3) και

$$(4), \text{ προκύπτει: } 2r_1'' = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} + d$$

$$\text{ή } r_1'' = (2N + 1) \frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2}.$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των σημείων αποσβεστικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ, λύνουμε την ανίσωση: $0 \leq r_1'' \leq d$

$$\text{ή } 0 \leq (2N + 1) \frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \leq d$$

$$\text{ή } -\frac{2d}{\lambda} \leq 2N + 1 < \frac{2d}{\lambda}$$

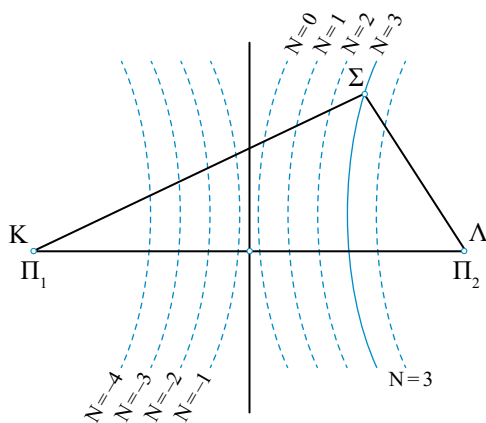
$$\text{ή } \frac{-\frac{2d}{\lambda} - 1}{2} \leq N \leq \frac{\frac{2d}{\lambda} - 1}{2}$$

$$\text{ή } -4,25 \leq N \leq 3,25$$

$$\text{ή } N = -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3.$$

Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι υπερβολές αποσβεστικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ καθώς και η

υπερβολή ενισχυτικής συμβολής που διέρχεται από το σημείο Σ.



Επομένως, το πλήθος των σημείων αποσβεστικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΣ είναι ίσο με 7.

ε. Έστω λ_2 το νέο μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Έχουμε: $v_{\delta} = \lambda_2 f_2$ ή $\lambda_2 = 1 \text{ m}$.

Για να παραμένει το σημείο Σ σημείο ενισχυτικής συμβολής, πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη: $r_1 - r_2 = N \lambda_2$ (5), με $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Από τη σχέση (5) με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών προκύπτει: $N = 6$.

Επομένως, το σημείο Σ παραμένει σημείο ενισχυτικής συμβολής και το πλάτος της ταλάντωσής του μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό παραμένει: $A_{\Sigma} = 2A$.

$$\text{Ο ζητούμενος είναι: } \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2} D_2 A_{\Sigma}^2}{\frac{1}{2} D_1 A_{\Sigma}^2}$$

$$\text{ή } \frac{E_1}{E_2} = \frac{m \omega_2^2}{m \omega_1^2} \quad \text{ή } \frac{E_1}{E_2} = \frac{(2\pi f_2)^2}{(2\pi f_1)^2}$$

$$\text{ή } \frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{f_2}{f_1} \right)^2 \quad \text{ή } \frac{E_1}{E_2} = 4.$$

54. α. Το σημείο Σ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία φτάνει σε αυτό από το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π_2 . Έχουμε: $t_1 = \frac{r_2}{v_\delta}$ ή $r_2 = v_\delta t_1$
ή $r_2 = 0,8 \text{ m}$.

Η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Σ αρχίζει τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία φτάνει σε αυτό το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π_1 , οπότε μεταβάλλονται το πλάτος και η ενέργεια της ταλάντωσής του.

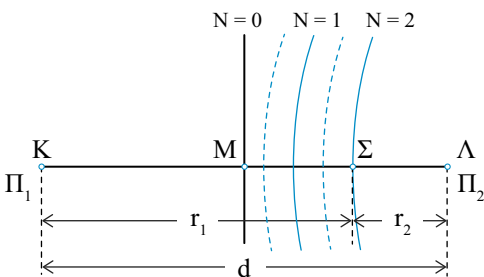
Από τη δοθείσα εξίσωση της ταλάντωσης των δύο πηγών προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = 0,04 \text{ m}$. Από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 το σημείο Σ ταλαντώνεται με πλάτος $A_1 = A$.

Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Σ από τη χρονική στιγμή t_2 και μετά. Έχουμε: $E_2 = 4E_1$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D A_2^2 = 4 \frac{1}{2} D A_1^2 \quad \text{ή } A_2 = 2A_1$$

$$\text{ή } A_2 = 2A \quad \text{ή } A_2 = 0,08 \text{ m}.$$

Επομένως, στο σημείο Σ από τη χρονική στιγμή t_2 και μετά συμβαίνει ενισχυτική συμβολή. Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι υπερβολές ενισχυτικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΜΣ.



Για το σημείο Σ, έχουμε: $r_1 - r_2 = N\lambda$

$$\text{ή } r_1 - r_2 = 2\lambda \quad \text{ή } r_1 = r_2 + 2\lambda \quad (1)$$

όπου λ το μήκος κύματος των δύο κυμάτων.

Από τη δοθείσα εξίσωση της ταλάντωσης των δύο πηγών προκύπτει: $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$.

Έστω f η συχνότητα των δύο κυμάτων. Έχουμε: $\omega = 2\pi f$ ή $f = 10 \text{ Hz}$.

Το μήκος κύματος των δύο κυμάτων υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = 0,2 \text{ m}$.

Επομένως, με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (1), έχουμε: $r_1 = 1,2 \text{ m}$.

Η χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $t_2 = \frac{r_1}{v_\delta}$ ή $t_1 = 0,6 \text{ s}$.

β. Έστω y η απομάκρυνση του σημείου Σ τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της επιτάχυνσής του είναι: $a = 160\sqrt{3} \text{ m/s}^2$

$$\text{Έχουμε: } a = \omega^2 |y| \quad \text{ή } |y| = 0,04\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\text{ή } y = \pm 0,04\sqrt{3} \text{ m}.$$

Επειδή είναι $A < |y| < 2A$, τις παραπάνω χρονικές στιγμές το σημείο Σ ταλαντώνεται λόγω της συμβολής των δύο κυμάτων, με πλάτος $A_2 = 0,08 \text{ m}$. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Σ τις παραπάνω χρονικές στιγμές. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Σ, έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή } \frac{1}{2} D A_2^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D y^2$$

$$\text{ή } m \omega^2 A_2^2 = m v^2 + m \omega^2 y^2$$

$$\text{ή } v = \omega \sqrt{A_2^2 - y^2}$$

$$\text{ή } v = 0,8\pi \text{ m/s}.$$

γ. Έστω d η απόσταση μεταξύ δύο πηγών. Είναι: $d = r_1 + r_2$ ή $d = 2 \text{ m}$.

Έστω ένα τυχαίο σημείο Z αποσβεστικής συμβολής επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $ΚΛ$, το οποίο απέχει από τις πηγές Π_1 και Π_2 αποστάσεις r_1' και r_2' αντίστοιχα. Για το σημείο Z έχουμε: $r_1' + r_2' = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$ (2)

$$\text{και } r_1' + r_2' = d \quad (3).$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (2) και (3) έχουμε: $2r_1' = (2N+1)\frac{\lambda}{2} + d$

$$\text{ή } r_1' = (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2}.$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των σημείων αποσβεστικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $ΜΛ$, λύνουμε την ανίσωση: $\frac{d}{2} \leq r_1' \leq d$

$$\text{ή } \frac{d}{2} \leq (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \leq d$$

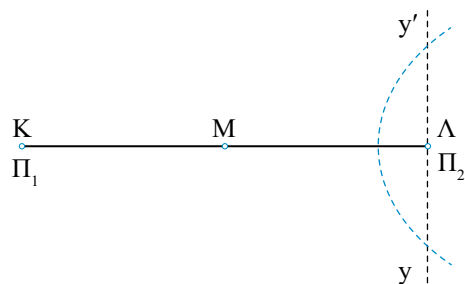
$$\text{ή } 0 \leq 2N+1 \leq \frac{2d}{\lambda}$$

$$\text{ή } -\frac{1}{2} \leq N \leq \frac{\frac{2d}{\lambda} - 1}{2}$$

$$\text{ή } -\frac{1}{2} \leq N \leq 9,5$$

$$\text{ή } N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Καθεμία από τις παραπάνω υπερβολές αποσβεστικής συμβολής τέμνει την ευθεία $y'y$ σε δύο σημεία, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Επομένως, το πλήθος των σημείων αποσβεστικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στην ευθεία $y'y$ είναι ίσο με 20.

δ. Επειδή η ενέργεια της ταλάντωσης του σημείου Σ μετά την έναρξη της συμβολής στο σημείο αυτό γίνεται ίση με μηδέν, στο σημείο Σ συμβαίνει αποσβεστική συμβολή. Έστω f' η νέα συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών.

$$\text{Έχουμε: } |r_1 - r_2| = (2N+1)\frac{\lambda'}{2}$$

$$\text{ή } |r_1 - r_2| = (2N+1)\frac{v_\delta}{2f'}$$

$$\text{ή } f' = \frac{(2N+1)v_\delta}{2|r_1 - r_2|}$$

$$\text{ή } f' = 2,5(2N+1) \quad (4), \text{ με } N = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Έχουμε: } f' > 10 \text{ Hz}$$

$$\text{ή, λόγω της σχέσης (4): } 2,5(2N+1) > 10$$

$$\text{ή } 2N+1 > 4 \quad \text{ή } N > 1,5$$

$$\text{ή } N = 2, 3, 4, \dots$$

Από τη σχέση (4) για $N = 2$ προκύπτει: $f' = 12,5 \text{ Hz}$.

Επομένως, η ελάχιστη αύξηση της συχνότητας ταλάντωσης των δύο πηγών, ώστε στο σημείο Σ να συμβαίνει αποσβεστική συμβολή είναι: $\Delta f = f' - f$ ή $\Delta f = 2,5 \text{ Hz}$.

55. α. Έστω t'_1 η χρονική στιγμή στην οποία φτάνει στο σημείο Σ το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π₁. Έχουμε: $t'_1 = \frac{r_1}{v_\delta}$.

Η χρονική στιγμή t_1 στην οποία φτάνει στο σημείο Σ το πρώτο «όρος» του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π₁ είναι η χρονική στιγμή στην οποία το σημείο Σ φτάνει για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή t'_1 στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσης που εκτελεί εξαιτίας του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π₁.

Επομένως, έχουμε: $t_1 = t'_1 + \frac{T}{4}$

$$\text{ή } t_1 = t'_1 + \frac{1}{4f} \quad \text{ή } t_1 = \frac{r_1}{v_\delta} + \frac{1}{4f}$$

$$\text{ή } r_1 = 3 \text{ m.}$$

β. Το μήκος κύματος των δύο κυμάτων υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = 2 \text{ m}$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΣΛ, έχουμε: $d^2 = r_1^2 + r_2^2$

$$\text{ή } r_2 = \sqrt{d^2 - r_1^2} \quad \text{ή } r_2 = 4 \text{ m.}$$

Για να συμβαίνει στο σημείο Σ αποσβεστική συμβολή, πρέπει να ισχύει:

$$r_1 - r_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (1), \text{ με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (1), έχουμε: $N = -1$.

Επομένως, το σημείο Σ είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής.

γ. Έστω t'_2 η χρονική στιγμή στην οποία φτάνει στο σημείο Σ το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π₂. Έχουμε:

$$t'_2 = \frac{r_2}{v_\delta} \quad \text{ή } t'_2 = 1 \text{ s.}$$

Η χρονική στιγμή t_2 στην οποία φτάνει στο σημείο Σ η πρώτη «κοιλιάδα» του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π₂ είναι η χρονική στιγμή στην οποία το σημείο αυτό φτάνει για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή t'_2 στην ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσης που εκτελεί εξαιτίας του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π₂.

$$\text{Επομένως, έχουμε: } t_2 = t'_2 + \frac{3T}{4}$$

$$\text{ή } t_2 = 1,375 \text{ s.}$$

δ. Έστω ένα τυχαίο σημείο ενισχυτικής συμβολής που βρίσκεται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και απέχει από τις πηγές Π₁ και Π₂ αποστάσεις r'_1 και r'_2 αντίστοιχα. Έχουμε: $r'_1 - r'_2 = N\lambda$ (2) και $r'_1 + r'_2 = d$ (3).

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (2) και (3) προκύπτει: $2r'_1 = N\lambda + d$

$$\text{ή } r'_1 = \frac{N\lambda + d}{2} \quad (4).$$

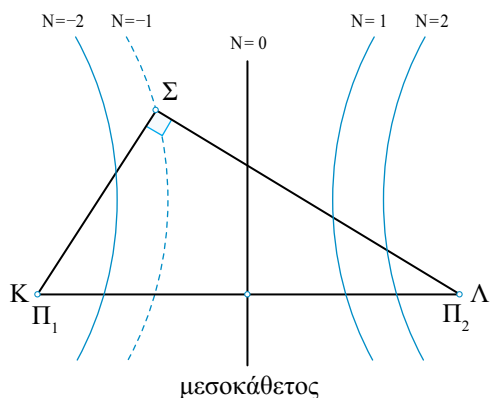
Για να υπολογίσουμε το πλήθος των σημείων ενισχυτικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ, λύνουμε την αντί-

$$\text{σωση: } 0 \leq r'_1 \leq d \quad \text{ή } 0 \leq \frac{N\lambda + d}{2} \leq d$$

$$\text{ή } -\frac{d}{\lambda} \leq N \leq \frac{d}{\lambda} \quad \text{ή } -2,5 \leq N \leq 2,5$$

$$\text{ή } N = 0, \pm 1, \pm 2.$$

Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι υπερβολές ενισχυτικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ καθώς και η υπερβολή αποσβεστικής συμβολής που διέρχεται από το σημείο Σ.



Όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, το πλήθος των σημείων ενισχυτικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΣΛ είναι ίσο με 3.

ε. Από τη σχέση (4) για $N = 2$ προκύπτει η απόσταση από την πηγή Π_1 του πλησιέστερου σημείου προς την πηγή Π_2 στο οποίο συμβαίνει ενισχυτική συμβολή. Είναι: $r'_1 = 4,5 \text{ m}$.

4.3 Στάσιμα κύματα

ΘΕΜΑΤΑ Α

Θέματα πολλαπλής επιλογής

5. γ	6. δ	7. γ	8. β	9. β	10. α	11. β	12. γ	13. δ
14. α	15. α	16. α	17. δ	18. α	19. γ	20. δ	21. β	22. β
23. α	24. γ	25. β	26. β					

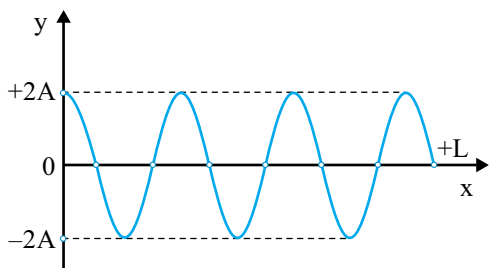
Θέματα του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

27.	α. Σ	β. Λ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Λ
28.	α. Σ	β. Λ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Λ
29.	α. Σ	β. Σ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Λ
30.	α. Σ	β. Λ	γ. Λ	δ. Σ	ε. Σ

31. Σωστή επιλογή είναι η β.

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος κάποια χρονική στιγμή στην οποία τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους. Από το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος προκύπτει ότι το μήκος της χορδής εί-

$$\text{ναι: } L = 3\lambda + \frac{\lambda}{4} \quad \text{ή} \quad L = \frac{13\lambda}{4}.$$



32. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Έστω λ_A το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στο ελαστικό μέσο Α και λ_B το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στο ελαστικό μέσο Β. Είναι: $\frac{\lambda_A}{2} = 2 \frac{\lambda_B}{2}$

$$\text{ή } \lambda_A = 2\lambda_B \quad (1).$$

Για τις ταχύτητες διάδοσης v_A και v_B των κυμάτων στα ελαστικά μέσα Α και Β αντίστοιχα ισχύει: $v_A = \lambda_A f_A$ και $v_B = \lambda_B f_B$.

Επειδή τα δύο ελαστικά μέσα είναι πανομοιότυπα, ισχύει: $v_A = v_B$ ή $\lambda_A f_A = \lambda_B f_B$

$$\text{ή } f_B = 2f_A \quad \text{ή} \quad f_A = \frac{f_B}{2}.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Έστω $|A'|_A$ το πλάτος της ταλάντωσης των κοιλιών στο ελαστικό μέσο Α και $|A'|_B$ το πλάτος της ταλάντωσης των κοιλιών στο ελαστικό μέσο Β. Είναι: $|A'|_A = \frac{|A'|_B}{2}$

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των κοιλιών στο ελαστικό μέσο Α είναι:

$$v_{\max(A)} = \omega_A |A'|_A \quad \text{ή} \quad v_{\max(A)} = 2\pi f_A |A'|_A \quad (1).$$

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των κοιλιών στο ελαστικό μέσο Β είναι:

$$v_{\max(B)} = \omega_B |A'|_B \quad \text{ή} \quad v_{\max(B)} = 2\pi f_B |A'|_B \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{v_{\max(A)}}{v_{\max(B)}} = \frac{2\pi f_A |A'|_A}{2\pi f_B |A'|_B} \quad \text{ή} \quad \frac{v_{\max(A)}}{v_{\max(B)}} = \frac{1}{4}$$

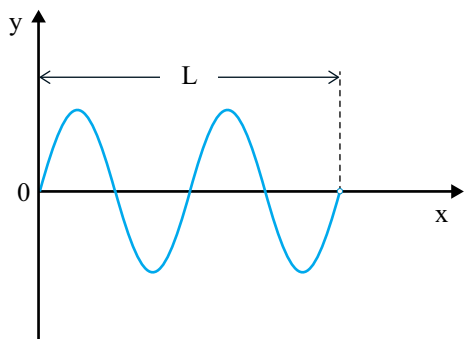
$$\text{ή } v_{\max(A)} = \frac{v_{\max(B)}}{4}.$$

33. Σωστή επιλογή είναι η α.

Έστω f η αρχική συχνότητα ταλάντωσης της χορδής, για την οποία σχηματίζονται στη χορδή τέσσερις κοιλίες συνολικά.

Στο διάγραμμα του σχήματος (1) απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος κάποια χρονική στιγμή στην οποία τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους.

Σύμφωνα με το στιγμιότυπο του σχήματος (1), ισχύει: $L = 2\lambda$ ή $L = 2 \frac{v_\delta}{f}$ (1).

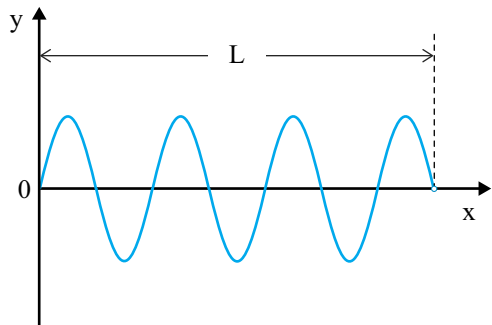


Σχήμα 1

Έστω f' η νέα συχνότητα ταλάντωσης της χορδής, για την οποία σχηματίζονται στη χορδή οκτώ κοιλίες συνολικά.

Αν μεταβάλουμε τη συχνότητα ταλάντωσης της χορδής, ώστε να σχηματίζονται στη χορδή οκτώ κοιλίες συνολικά, τότε σύμφωνα με το στιγμιότυπο του σχήματος (2) ισχύει:

$$L = 4\lambda' \quad \text{ή} \quad L = 2 \frac{v_\delta}{f'} \quad (2).$$



Σχήμα 2

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$$\frac{2v_\delta}{f} = \frac{4v_\delta}{f'} \quad \text{ή} \quad f' = 2f.$$

34. Σωστή επιλογή είναι η β.

Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου M υπολογίζεται από τη σχέση:

$$|A'|_M = 2A \left| \sin \left(\frac{2\pi x_M}{\lambda} \right) \right| \quad \text{ή} \quad |A'|_M = 2A.$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο M έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D(A'_M)^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} Dy^2$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} D(2A)^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} DA^2$$

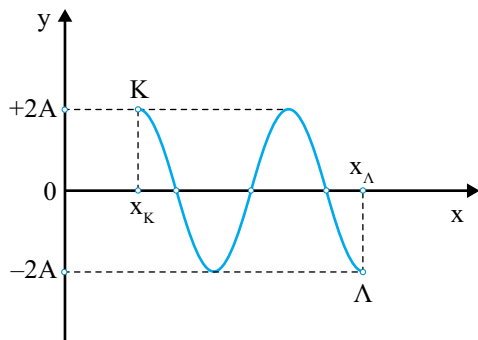
$$\text{ή} \quad m\omega^2 4A^2 = mv^2 + m\omega^2 A^2$$

$$\text{ή} \quad v = \omega\sqrt{3}A \quad \text{ή} \quad v = 2\pi f\sqrt{3}A.$$

35. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Επειδή τα υλικά σημεία K και Λ έχουν πλάτος $2A$, είναι κοιλίες του στάσιμου κύματος.

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος μεταξύ των υλικών σημείων K και Λ κάποια χρονική στιγμή στην οποία τα σημεία K και Λ βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης τους. Όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο, είναι: $(K\Lambda) = \frac{3\lambda}{2}$.



B. Σωστή επιλογή είναι η β.

Επειδή μεταξύ των υλικών σημείων Κ και Λ σχηματίζονται τρεις δεσμοί, η διαφορά φάσης των ταλαντώσεών τους είναι $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$.

Επομένως, τα σημεία Κ και Λ έχουν κάθε χρονική στιγμή αντίθετες απομακρύνσεις. Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$y_{\Lambda} = -y_{\text{K}} \quad \text{ή} \quad y_{\Lambda} = -A.$$

36. A. Σωστή επιλογή είναι η β.

Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$|A'|_{\text{K}} = 2A \left| \sin \left(\frac{2\pi x_{\text{K}}}{\lambda} \right) \right|$$

$$\text{ή} \quad |A'|_{\text{K}} = 2A \left| \sin(2,5\pi) \right|$$

$$\text{ή} \quad |A'|_{\text{K}} = 2A \left| \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right|$$

$$\text{ή} \quad |A'|_{\text{K}} = 2A \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| \quad \text{ή} \quad |A'|_{\text{K}} = 0.$$

Συνεπώς, στο σημείο Κ σχηματίζεται δεσμός.

B. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Οι θέσεις των κοιλιών στον άξονα $x'Ox$ δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\text{κοιλ.}} = N \frac{\lambda}{2}, \quad \text{με} \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των κοιλιών που σχηματίζονται μεταξύ των υλικών σημείων Κ και Λ, λύνουμε την ανίσωση:

$$x_{\text{K}} < x_{\text{κοιλ.}} < x_{\Lambda} \quad \text{ή} \quad 1,25\lambda < N \frac{\lambda}{2} < 4,25\lambda$$

$$\text{ή} \quad 2,5 < N < 8,5$$

$$\text{ή} \quad N = 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

Επομένως, μεταξύ των υλικών σημείων Κ και Λ σχηματίζονται έξι (6) κοιλίες.

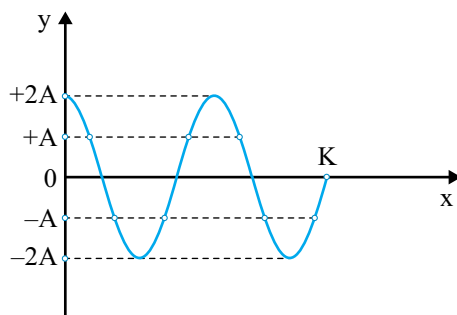
37. A. Σωστή επιλογή είναι η β.

Έστω ένα υλικό σημείο Ζ της χορδής, ίδιας μάζας με το υλικό σημείο Ο, του οποίου η ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση με το 1/4 της ενέργειας ταλάντωσης του σημείου Ο. Έστω $|A'|_{\text{Z}}$ το πλάτος τη ταλάντωσης του υλικού σημείου Ζ. Είναι:

$$E_{\text{Z}} = \frac{1}{4} E_{\text{O}} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D (A'_{\text{Z}})^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} D (A'_{\text{O}})^2$$

$$\text{ή} \quad (A'_{\text{Z}})^2 = \frac{1}{4} (2A)^2 \quad \text{ή} \quad |A'|_{\text{Z}} = A.$$

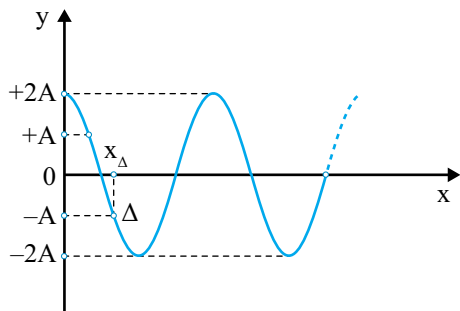
Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στη χορδή μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Κ κάποια χρονική στιγμή στην οποία τα υλικά σημεία της χορδής που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους.



Επειδή μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Κ υπάρχουν επτά σημεία τα οποία έχουν πλάτος ταλάντωσης ίσο με Α, τότε όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο είναι: $x_{\text{K}} = \frac{7\lambda}{4}$.

B. Σωστή επιλογή είναι η β.

Έστω Δ το δεύτερο κατά σειρά σημείο του θετικού ημιμάζονα Οχ το οποίο έχει την ίδια μάζα με το σημείο Ο και η ενέργεια της ταλάντωσής του είναι ίση με το 1/4 της ενέργειας ταλάντωσης του σημείου Ο. Επομένως, το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Δ είναι ίσο με Α. Όπως προκύπτει από το ακόλουθο στιγμιότυπο, μεταξύ του σημείου Ο και του σημείου Δ σχηματίζεται ένας δεσμός. Επομένως, η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Δ και Ο είναι ίση με π rad.



Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Ο είναι: $y_O = 2A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$. Επομένως, η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Δ είναι:

$$y_\Delta = |A'|_\Delta \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi\right)$$

$$\text{ή } y_\Delta = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} + \pi\right) \text{ (S.I.)}$$

38. Σωστή επιλογή είναι η β.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$y_K = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right)\eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y_K = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)\eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y_K = A\eta\mu\omega t \text{ (1)}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Λ από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση:

$$y_\Lambda = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda}\right)\eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y_\Lambda = 2A\sigma\upsilon\nu(4\pi)\eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y_\Lambda = 2A\eta\mu\omega t \text{ (2)}$$

Όπως προκύπτει από τις σχέσεις (1) και (2), η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι: $\Delta\phi = 0$.

Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$\alpha_\Lambda = +\alpha_{\max(\Lambda)} \quad \text{ή} \quad -\omega^2 y_\Lambda = +\omega^2 |A'|_\Lambda$$

$$\text{ή } y_\Lambda = -|A'|_\Lambda$$

Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 το υλικό σημείο Λ βρίσκεται στην ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσής του. Επειδή τα υλικά σημεία της χορδής που ταλαντώνονται φτάνουν ταυτόχρονα στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους και η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι ίση με μηδέν, η απομάκρυνση του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $y_K = -|A'|_K$.

Επομένως, η επιτάχυνση του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\alpha_K = -\omega^2 y_K \quad \text{ή} \quad \alpha_K = +\omega^2 |A'|_K$$

$$\text{ή } \alpha_K = +\omega^2 A \text{ (3)}$$

Η μέγιστη επιτάχυνση του ταλαντούμενου σημείου Λ είναι: $\alpha_{\max(\Lambda)} = \omega^2 |A'|_\Lambda$

$$\text{ή } \alpha_{\max(\Lambda)} = \omega^2 2A \text{ (4)}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει: $\alpha_K = + \frac{\alpha_{\max(\Lambda)}}{2}$.

39. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία έχει ληφθεί το στιγμιότυπο το υλικό σημείο $O(x=0)$ βρίσκεται στη θέση απομάκρυνσης $y = +A$. Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του υλικού σημείου O τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$U_o = \frac{1}{2}Dy^2 \quad \text{ή} \quad U_o = \frac{1}{2}DA^2.$$

Έστω K_o η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου O τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο O έχουμε:

$$E_o = K_o + U_o \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}D(2A)^2 = K + \frac{1}{2}DA^2$$

$$\text{ή} \quad K = \frac{3}{2}DA^2.$$

Συνεπώς, τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$\frac{K_o}{U_o} = \frac{\frac{3}{2}DA^2}{\frac{1}{2}DA^2} \quad \text{ή} \quad \frac{K_o}{U_o} = 3 \quad (1).$$

Η σχέση (1) ισχύει τη χρονική στιγμή t_1 για όλα τα σημεία της χορδής που ταλαντώνονται. Επομένως, η κινητική ενέργεια της χορδής και η ελαστική δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης τη χρονική στιγμή t_1 συνδέονται με τη σχέση $K = 3U$.

40. Α. Σωστή επιλογή είναι η β .

Τα υλικά σημεία της χορδής τα οποία ταλαντώνονται διέρχονται ταυτόχρονα από τις θέσεις ισορροπίας τους και φτάνουν ταυτόχρονα στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης τους.

Αφού τη χρονική στιγμή t_1 το υλικό σημείο O βρίσκεται σε θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης, τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \frac{T}{2}$

θα βρεθεί σε θέση μέγιστης αρνητικής απομάκρυνσης. Επομένως, το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή t_2 απεικονίζεται ορθά στο διάγραμμα β .

B. Σωστή επιλογή είναι η γ .

Επειδή τη χρονική t_1 τα υλικά σημεία της χορδής που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσης τους, τη χρονική στιγμή $t' = t_1 + \frac{T}{4}$ θα διέρχονται όλα μαζί από τη θέση ισορροπίας τους. Επομένως, τη χρονική στιγμή $t_3 = t_1 + \frac{T}{8}$ τα υλικά σημεία της χορδής που ταλαντώνονται βρίσκονται σε θέσεις ανάμεσα στη θέση ισορροπίας τους και σε κάποια από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης τους. Επομένως, τη χρονική στιγμή t_3 η χορδή έχει και κινητική και δυναμική ενέργεια.

41. Σωστή επιλογή είναι η β .

Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου

$$K \text{ είναι: } |A'|_K = 2A \left| \sin \left(\frac{2\pi x_K}{\lambda} \right) \right|$$

$$\text{ή} \quad |A'|_K = 2A \left| \sin(\pi) \right| \quad \text{ή} \quad |A'|_K = 2A.$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου

$$\Lambda \text{ είναι: } |A'|_\Lambda = 2A \left| \sin \left(\frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda} \right) \right|$$

$$\text{ή} \quad |A'|_\Lambda = 2A \left| \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right| \quad \text{ή} \quad |A'|_\Lambda = A.$$

Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{v_{\max(K)}}{v_{\max(\Lambda)}} = \frac{\omega|A'|_K}{\omega|A'|_\Lambda}$$

$$\text{ή } \frac{v_{\max(K)}}{v_{\max(\Lambda)}} = \frac{2A}{A} \quad \text{ή } \frac{v_{\max(K)}}{v_{\max(\Lambda)}} = 2.$$

42. Σωστή επιλογή είναι η β.

Οι θέσεις των δεσμών στον θετικό ημιάξονα δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\text{δεσμ}} = (2N+1)\frac{\lambda}{4}, \text{ με } N = 0, 1, 2, \dots (1).$$

Η θέση του σημείου Δ προκύπτει από τη σχέση (1) για $N = 1$. Είναι: $x_\Delta = \frac{3\lambda}{4}$.

Η οριζόντια απόσταση του σημείου Δ από το σημείο Ο είναι: $\Delta x = x_\Delta - x_O$

$$\text{ή } \Delta x = \frac{3\lambda}{4} - 0 \quad \text{ή } \Delta x = \frac{3\lambda}{4}.$$

Τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σημείο Ο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, η απόσταση μεταξύ των σημείων Ο και Δ γίνεται ελάχιστη. Είναι: $r_{\min} = \Delta x$ ή $r_{\min} = \frac{3\lambda}{4}$.

Τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σημείο Ο βρίσκεται σε κάποια από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του, η απόσταση μεταξύ των σημείων Ο και Δ γίνεται μέγιστη. Είναι:

$$r_{\max} = \sqrt{(A'_O)^2 + (\Delta x)^2}$$

$$\text{ή } r_{\max} = \sqrt{(2A)^2 + (\Delta x)^2}$$

$$\text{ή } r_{\max} = \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{3\lambda}{4}\right)^2}$$

$$\text{ή } r_{\max} = \frac{5\lambda}{4}.$$

Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{\frac{5\lambda}{4}}{\frac{3\lambda}{4}} \quad \text{ή} \quad \frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{5}{3}.$$

43. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Οι θέσεις των κοιλιών στον άξονα $x'Ox$ δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\text{κοιλ}} = N\frac{\lambda}{2}, \text{ με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των κοιλιών που σχηματίζονται μεταξύ των υλικών σημείων Κ και Λ, λύνουμε την ανίσωση:

$$x_K < x_{\text{κοιλ}} < x_\Lambda \quad \text{ή} \quad -2,75\lambda < N\frac{\lambda}{2} < 2,25\lambda$$

$$\text{ή} \quad -5,5 < N < 4,5$$

$$\text{ή} \quad N = -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4.$$

Επομένως, μεταξύ των σημείων Κ και Λ σχηματίζονται **10** κοιλίες.

Β. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Οι θέσεις των δεσμών στον άξονα $x'Ox$ δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\text{δεσμ}} = (2N+1)\frac{\lambda}{4}, \text{ με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των δεσμών που σχηματίζονται μεταξύ των υλικών σημείων Κ και Λ, λύνουμε την ανίσωση:

$$x_K < x_{\text{δεσμ}} < x_\Lambda$$

$$\text{ή} \quad -2,25\lambda < (2N+1)\frac{\lambda}{4} < 2,75\lambda$$

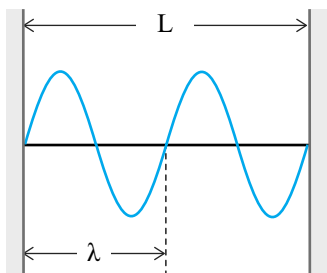
$$\text{ή} \quad -9 < 2N+1 < 11 \quad \text{ή} \quad -5 < N < 5$$

$$\text{ή} \quad N = -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4.$$

Επομένως, μεταξύ των σημείων Κ και Λ σχηματίζονται **9** δεσμοί.

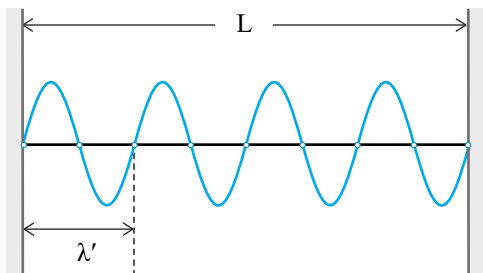
44. Σωστή επιλογή είναι η β.

Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στη χορδή κάποια χρονική στιγμή στην οποία τα σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους.



Από τη μορφή του στιγμιότυπου προκύπτει ότι το μήκος της χορδής είναι: $L = 2\lambda$ (1).

Έστω λ' το νέο μήκος κύματος των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή. Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στη χορδή κάποια χρονική στιγμή, μετά τη μεταβολή του μήκους κύματος των δύο κυμάτων, στην οποία τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους.



Από τη μορφή του στιγμιότυπου προκύπτει:

$$L = 4\lambda' \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$2\lambda = 4\lambda' \quad \text{ή} \quad \lambda' = \frac{\lambda}{2}.$$

Το ζητούμενο ποσοστό προκύπτει:

$$\pi = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = -50\%.$$

45. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Έστω λ το μήκος κύματος των δύο κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή. Για να δημιουργείται στάσιμο κύμα στη χορδή, πρέπει να ισχύει:

$$L = N \frac{\lambda}{2}, \quad \text{με } N = 0, 1, 2, \dots (1).$$

Από τη σχέση (1), έχουμε:

$$L = N \frac{v_\delta}{2f} \quad \text{ή} \quad f = N \frac{v_\delta}{2L}$$

ή $f = 2N$ (S.I.) με $N = 0, 1, 2, \dots$ (2).

Σύμφωνα με την εκφώνηση, είναι:

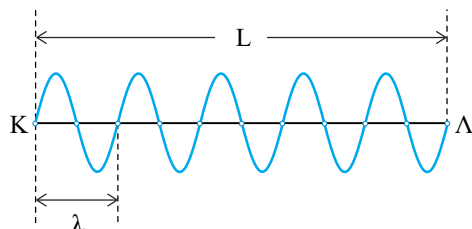
$$19 \text{ Hz} \leq f \leq 21 \text{ Hz} \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (2):}$$

$$\text{ή } 19 \leq 2N \leq 21 \quad \text{ή } 9,5 \leq N \leq 10,5$$

$$\text{ή } N = 10.$$

Επομένως, από τη σχέση (1) για $N = 10$ προκύπτει: $L = 5\lambda$.

Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στη χορδή κάποια χρονική στιγμή στην οποία τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους.



Από τη μορφή του στιγμιότυπου προκύπτει ότι στη χορδή σχηματίζονται **10 κοιλίες**.

46. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Κ από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση:

$$y_K = 2A \sin\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right) \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$\text{ή } y_K = 2A \sin(\pi) \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$\text{ή } y_K = -2A \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$\text{ή } y_K = 2A \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi\right) \quad (1).$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$y_\Lambda = 2A \sin\left(\frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda}\right) \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$\text{ή } y_\Lambda = 2A \sin(4\pi) \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$\text{ή } y_\Lambda = 2A \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι τα σημεία Κ και Λ είναι κοιλίες του στάσιμου κύματος και η διαφορά φάσης των ταλαντώσεών τους είναι: $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$. Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $y_\Lambda = -y_K$

$$\text{ή } y_\Lambda = -A.$$

Έστω v_Λ η ταχύτητα του ταλαντούμενου υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο Λ έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D(A'_\Lambda)^2 = \frac{1}{2} m v_\Lambda^2 + \frac{1}{2} D y_\Lambda^2$$

$$\text{ή} \quad m \omega^2 (2A)^2 = m v_\Lambda^2 + m \omega^2 A^2$$

$$\text{ή } v_\Lambda = \pm \sqrt{3} \omega A \quad \text{ή} \quad v_\Lambda = \pm \sqrt{3} \frac{2\pi}{T} A$$

$$\text{ή } v_\Lambda = \pm 2\sqrt{3} \frac{\pi A}{T}.$$

Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα του υλικού σημείου Κ είναι θετική, η ταχύτητα του σημείου Λ, την ίδια χρονική στιγμή, είναι

$$\text{αρνητική. Επομένως, είναι: } v_\Lambda = -2\sqrt{3} \frac{\pi A}{T}$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η α.

Τα σημεία Κ και Λ φτάνουν ταυτόχρονα στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους. Επειδή η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$, τις χρονικές στιγμές στις οποίες το υλικό σημείο Κ φτάνει στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του το υλικό σημείο Λ φτάνει στην ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσής του, και αντίστροφα. Επομένως, η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σημείων Κ και Λ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής τους είναι: $\Delta y_{\max} = |A'|_K + |A'|_\Lambda$

$$\text{ή } \Delta y_{\max} = 4A \quad \text{ή} \quad \Delta y_{\max} = 2\lambda.$$

Η οριζόντια απόσταση μεταξύ των σημείων

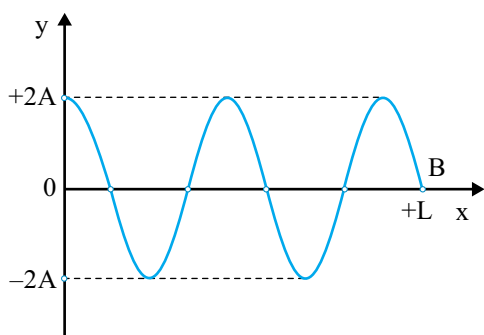
$$Κ και Λ είναι: \Delta x = x_\Lambda - x_K \quad \text{ή} \quad \Delta x = \frac{3\lambda}{2}.$$

Τις χρονικές στιγμές στις οποίες τα σημεία Κ και Λ φτάνουν στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους η μεταξύ τους απόσταση γίνεται μέγιστη. Είναι:

$$r_{\max} = \sqrt{(\Delta y_{\max})^2 + (\Delta x)^2} \quad \text{ή} \quad r_{\max} = 2,5\lambda.$$

47. Α. Σωστή επιλογή είναι η α.

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος κάποια χρονική στιγμή στην οποία τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται με συχνότητα f_1 βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους.



Από το στιγμιότυπο προκύπτει ότι το μήκος της χορδής είναι: $L = 2,25\lambda_1$ (1), όπου λ_1 το μήκος κύματος των δύο κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή.

Έστω f_2 η νέα συχνότητα ταλάντωσης του υλικού σημείου O, για την οποία υπάρχουν 11 υλικά σημεία συνολικά στη χορδή με μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης ίση με το μισό της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης του υλικού σημείου O.

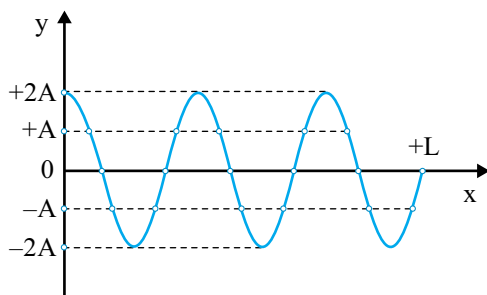
Έστω Z ένα από τα υλικά σημεία αυτά. Είναι:

$$v_{\max(Z)} = \frac{v_{\max(O)}}{2} \quad \text{ή} \quad \omega|A'|_Z = \frac{\omega|A'|_O}{2}$$

$$\text{ή} \quad |A'|_Z = \frac{2A}{2} \quad \text{ή} \quad |A'|_Z = A.$$

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου

κύματος στη χορδή κάποια χρονική στιγμή στην οποία τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται με συχνότητα f_2 βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους.



Έστω λ_2 το νέο μήκος κύματος των δύο κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή. Από το παραπάνω στιγμιότυπο προκύπτει: $L = 2,75\lambda_2$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$2,25\lambda_1 = 2,75\lambda_2 \quad \text{ή} \quad 2,25 \frac{v_\delta}{f_1} = 2,75 \frac{v_\delta}{f_2}$$

$$\text{ή} \quad f_2 = \frac{2,75}{2,25} f_1 \quad \text{ή} \quad f_2 = 11 \text{ Hz}.$$

Επομένως η μεταβολή της συχνότητας ταλάντωσης του υλικού σημείου O είναι:

$$\Delta f = f_2 - f_1 \quad \text{ή} \quad \Delta f = +2 \text{ Hz}.$$

B. Σωστή επιλογή είναι η α.

Για να δημιουργείται στάσιμο κύμα στη χορδή, πρέπει να ισχύει:

$$L = (2N + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad \text{με } N = 0, 1, 2, \dots \quad (3).$$

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$L = (2N + 1) \frac{v_\delta}{4f}$$

$$\text{ή} \quad f = \frac{(2N + 1)v_\delta}{4L}, \quad \text{με } N = 0, 1, 2, \dots \quad (4).$$

Η ελάχιστη συχνότητα ταλάντωσης του σημείου Ο για την οποία δημιουργείται στάσιμο κύμα στη χορδή προκύπτει από τη σχέση (4)

$$\text{για } N = 0. \text{ Είναι: } f = \frac{v_\delta}{4L} \quad \text{ή} \quad f = \frac{\lambda_1 f_1}{4L}$$

$$\text{ή, λόγω της σχέσης (1): } f = \frac{f_1}{9} \quad \text{ή} \quad f = 1 \text{ Hz.}$$

48. Α. Σωστή επιλογή είναι η β.

Για το σημείο Κ ισχύει:

$$E_K = E_O \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D(A'_K)^2 = \frac{1}{2} D(A'_O)^2$$

$$\text{ή} \quad m\omega^2 (A'_K)^2 = m\omega^2 (A'_O)^2$$

$$\text{ή} \quad |A'|_K = |A'|_O \quad \text{ή} \quad |A'|_K = 2A.$$

Για το σημείο Λ ισχύει:

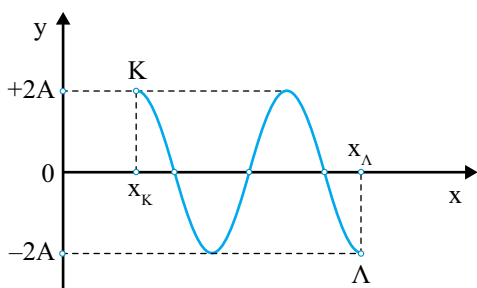
$$E_\Lambda = E_O \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D(A'_\Lambda)^2 = \frac{1}{2} D(A'_O)^2$$

$$\text{ή} \quad m\omega^2 (A'_\Lambda)^2 = m\omega^2 (A'_O)^2$$

$$\text{ή} \quad |A'|_\Lambda = |A'|_O \quad \text{ή} \quad |A'|_\Lambda = 2A.$$

Επομένως, στα σημεία Κ και Λ σχηματίζονται κοιλίες του στάσιμου κύματος.

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος μεταξύ των σημείων Κ και Λ κάποια χρονική στιγμή στην οποία τα σημεία αυτά βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους.



Από το παραπάνω στιγμιότυπο προκύπτει:

$$x_\Lambda - x_K = 1,5\lambda \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,4 \text{ m.}$$

Τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου που ταλαντώνονται ευθυγραμμίζονται κάθε $T/2$.

$$\text{Επομένως, είναι: } \frac{T}{2} = 0,1 \text{ s} \quad \text{ή} \quad T = 0,2 \text{ s.}$$

Επειδή μεταξύ των σημείων Κ και Λ σχηματίζονται τρεις δεσμοί, η διαφορά φάσης των ταλαντώσεών τους είναι ίση με $\pi \text{ rad}$. Επομένως, η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση στην οποία φτάνουν τα υλικά σημεία Κ και Λ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής τους είναι:

$$\Delta y_{\max} = |A'|_K + |A'|_\Lambda \quad \text{ή} \quad \Delta y_{\max} = 4A$$

$$\text{ή} \quad A = 0,1 \text{ m.}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που σχηματίζεται στο ελαστικό μέσο δίνεται από τη

$$\text{σχέση: } y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

$$\text{ή} \quad y = 0,2 \sin(5\pi x) \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.).}$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η β.

Επειδή τα υλικά σημεία Κ και Λ είναι κοιλίες του στάσιμου κύματος και η διαφορά φάσης των ταλαντώσεών τους είναι ίση με $\pi \text{ rad}$,

$$\text{κάθε χρονική στιγμή ισχύει: } y_\Lambda = -y_K$$

$$\text{ή} \quad \omega^2 y_\Lambda = -\omega^2 y_K \quad \text{ή} \quad a_K = -a_\Lambda.$$

49. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Όπως προκύπτει από το δοθέν στιγμιότυπο η απομάκρυνση του υλικού σημείου Ο τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T}{8}$ είναι: $y_O = +0,1\sqrt{2} \text{ m}$.

$$\text{Είναι: } y_O = 2A \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} t_1\right)$$

$$\text{ή} \quad y_O = 2A \eta\mu \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad y_O = +A\sqrt{2} \quad \text{ή} \quad A = 0,1 \text{ m.}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Β δίνεται από τη σχέση:

$$|A'|_B = 2A \left| \sin \left(\frac{2\pi x_B}{\lambda} \right) \right|$$

$$\text{ή } |A'|_B = 2A \left| \sin \frac{\pi}{4} \right| \quad \text{ή } |A'|_B = \sqrt{2}A$$

$$\text{ή } |A'|_B = 0,1\sqrt{2} \text{ m.}$$

50. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Όπως προκύπτει από το δοθέν στιγμιότυπο, τη χρονική στιγμή t_1 η απομάκρυνση του υλικού σημείου Ο είναι $y_O = +\frac{A}{2}$.

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$U_O = \frac{1}{2} D y_O^2 \quad \text{ή} \quad U_O = \frac{1}{8} D A^2 \quad (1).$$

Έστω K_O η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου Ο τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Ο έχουμε:

$$E_O = K_O + U_O \quad \text{ή} \quad K_O = E_O - U_O$$

$$\text{ή} \quad K_O = \frac{1}{2} D (2A)^2 - \frac{1}{8} D A^2$$

$$\text{ή} \quad K_O = \frac{15}{8} D A^2 \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και

$$(2) \text{ προκύπτει: } \frac{K_O}{U_O} = 15 \quad (3).$$

Τη χρονική στιγμή t_1 ο λόγος της κινητικής ενέργειας προς τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ο ίδιος για όλα τα υλικά σημεία της χορδής που ταλαντώνονται. Επομένως, ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{K}{U} = 15.$$

Β. Σωστή επιλογή είναι η α.

Τη χρονική στιγμή t_1 ο λόγος της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου Λ προς τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του είναι ίσος με τον αντίστοιχο λόγο για το υλικό σημείο Ο. Επομένως, είναι:

$$\frac{K_\Lambda}{U_\Lambda} = 15 \quad \text{ή} \quad K_\Lambda = 15 U_\Lambda \quad (4).$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$|A'|_\Lambda = 2A \left| \sin \left(\frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda} \right) \right|$$

$$\text{ή} \quad |A'|_\Lambda = 2A \left| \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right| \quad \text{ή} \quad |A'|_\Lambda = \sqrt{2}A.$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Λ έχουμε:

$$E_\Lambda = K_\Lambda + U_\Lambda \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (4):}$$

$$E_\Lambda = 16 U_\Lambda \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D (A'_\Lambda)^2 = 16 \frac{1}{2} D y_\Lambda^2$$

$$\text{ή} \quad y_\Lambda = \pm \frac{|A'|_\Lambda}{4} \quad \text{ή} \quad y_\Lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} A.$$

Οι θέσεις των δεσμών στον ημιάξονα Οx δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\text{δεσμ}} = (2N+1) \frac{\lambda}{4}, \quad \text{με } N = 0, 1, 2, \dots$$

Το πλήθος των δεσμών που σχηματίζονται μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Λ υπολογίζεται από τη σχέση: $0 < x_{\text{δεσμ}} < x_\Lambda$

$$\text{ή} \quad 0 < (2N+1) \frac{\lambda}{4} < \frac{3\lambda}{8}$$

$$\text{ή} \quad 0 < 2N+1 < 1,5$$

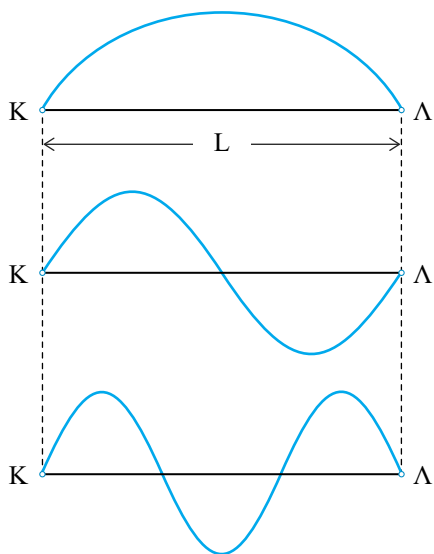
$$\text{ή} \quad -0,5 < N < 0,25 \quad \text{ή} \quad N = 0.$$

Επειδή μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Λ σχηματίζεται ένας δεσμός, η διαφορά φάσης των ταλαντώσεών τους είναι: $\Delta\phi = \pi \text{ rad.}$

Επειδή η απομάκρυνση του υλικού σημείου Ο τη χρονική στιγμή t_1 είναι αρνητική, η απομάκρυνση του υλικού σημείου Λ την ίδια χρονική στιγμή είναι θετική. Επομένως, είναι: $y_A = +\frac{A\sqrt{2}}{4}$.

51. Α. Σωστή επιλογή είναι η α.

Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί μερικά από τα στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος που μπορούν να δημιουργηθούν στη χορδή.



Όπως προκύπτει από τα στιγμιότυπα του παραπάνω σχήματος, για να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα στη χορδή ΚΛ, πρέπει να ισχύει:

$$L = N \frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad L = N \frac{v_\delta}{2f}, \quad \text{με } N = 1, 2, \dots \quad (1).$$

Από τα στιγμιότυπα του παραπάνω σχήματος προκύπτει ότι η τιμή του αριθμού N είναι ίση με το πλήθος των κοιλιών που σχηματίζονται στη χορδή.

Όταν η συχνότητα διέγερσης της χορδής είναι ίση με f_1 , η σχέση (1) γράφεται:

$$L = N \frac{v_\delta}{2f_1}, \quad \text{με } N = 1, 2, \dots \quad (2).$$

Έστω f_2 η νέα συχνότητα διέγερσης της χορδής. Είναι:

$$f_2 = f_1 + \frac{50}{100} f_1 \quad \text{ή} \quad f_2 = 1,5 f_1 \quad \text{ή} \quad f_2 = 12 \text{ Hz}.$$

Όταν η συχνότητα διέγερσης της χορδής είναι ίση με f_2 , η σχέση (1) γράφεται:

$$L = (N+2) \frac{v_\delta}{2f_2}, \quad \text{με } N = 1, 2, \dots \quad (3).$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$N \frac{v_\delta}{2f_1} = (N+2) \frac{v_\delta}{2f_2} \quad \text{ή} \quad (N+2)f_1 = Nf_2$$

$$\text{ή} \quad N = \frac{2f_1}{f_2 - f_1} \quad \text{ή} \quad N = 4.$$

Επομένως, όταν η συχνότητα διέγερσης της χορδής είναι ίση με f_1 , στη χορδή σχηματίζονται τέσσερις (4) κοιλίες.

Β. Σωστή επιλογή είναι η α.

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f = \frac{Nv_\delta}{2L}, \quad \text{με } N = 1, 2, \dots \quad (4).$$

Η ελάχιστη συχνότητα διέγερσης της χορδής, για να σχηματιστεί σε αυτή στάσιμο κύμα, προκύπτει από τη σχέση (4) για

$$N = 1. \text{ Είναι: } f_{\min} = \frac{v_\delta}{2L} \quad (5).$$

Από τη σχέση (2) για $N = 4$, προκύπτει:

$$f_1 = \frac{2v_\delta}{L} \quad (6).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (5) και (6), έχουμε:

$$\frac{f_{\min}}{f_1} = \frac{\frac{v_\delta}{2L}}{\frac{2v_\delta}{L}} \quad \text{ή} \quad \frac{f_{\min}}{f_1} = \frac{1}{4} \quad \text{ή} \quad f_{\min} = 2 \text{ Hz}.$$

52. Α. Σωστή επιλογή είναι η α.

Στο στάσιμο κύμα όλα τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται φτάνουν ταυτόχρονα στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους. Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 η ελαστική δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης της χορδής είναι μέγιστη, τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται τη χρονική στιγμή t_1 σε κάποια από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους. Επομένως, είναι: $v_K = 0$.

Β. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 η ελαστική δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης της χορδής γίνεται μέγιστη για τέταρτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$, τα υλικά σημεία τη χορδής που ταλαντώνονται βρίσκονται σε κάποια από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους για τέταρτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$. Τα υλικά σημεία της χορδής που ταλαντώνονται αρχίζουν την ταλάντωσή τους, εξαιτίας της δημιουργίας του στάσιμου κύματος στη χορδή, τη χρονική στιγμή $t = 0$ από τη θέση ισορροπίας τους. Εφόσον, τη χρονική στιγμή t_1 φτάνουν για τέταρτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ σε κάποια από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους, ισχύει: $t_1 = 7/4 T$, όπου T η περίοδος ταλάντωσης των ταλαντούμενων υλικών σημείων. Από το δοθέν στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή t_1 προκύπτει: $11\frac{\lambda}{4} = 1,1$ ή $\lambda = 0,4$ m.

Είναι: $v_s = \frac{\lambda}{T}$ ή $T = 0,4$ s.

Επομένως, είναι: $t_1 = 0,7$ s.

Γ. Σωστή επιλογή είναι η β.

Όπως προκύπτει από το δοθέν στιγμιότυπο το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ είναι $|A'|_K = 0,1$ m.

Εφόσον μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Κ σχηματίζεται ένας δεσμός, η διαφορά φάσης των ταλαντώσεών τους είναι ίση με π rad.

Επομένως τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία το υλικό σημείο Ο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, το υλικό σημείο Κ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με αρνητική ταχύτητα. Είναι:

$$v_K = -v_{\max(K)} \quad \text{ή} \quad v_K = -\omega|A'|_K$$

$$\text{ή} \quad v_K = -\frac{2\pi}{T}|A'|_K \quad \text{ή} \quad v_K = -\frac{\pi}{2} \text{ m/s.}$$

53. Α. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Είναι: $a_{\max(K)} = a_{\max(O)}$

$$\text{ή} \quad \omega^2|A'|_K = \omega^2|A'|_O \quad \text{ή} \quad |A'|_K = |A'|_O$$

$$\text{ή} \quad |A'|_K = 2A.$$

Επομένως, το υλικό σημείο Κ είναι κοιλία του στάσιμου κύματος. Επειδή το υλικό σημείο Κ είναι η πλησιέστερη προς το υλικό σημείο Ο

$$\text{κοιλία, ισχύει: } x_K = +\frac{\lambda}{2}.$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$y_K = 2A\sin\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right)\eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή} \quad y_K = 2A\sin(\pi)\eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή} \quad y_K = -2A\eta\mu\omega t$$

$$\text{ή} \quad y_K = 2A\eta\mu(\omega t + \pi) \quad (1).$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Μ είναι:

$$y_M = 2A \sin\left(\frac{2\pi x_M}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y_M = 2A \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y_M = 2A \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y_M = 2A \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y_M = -A \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y_M = A \eta\mu(\omega t + \pi) \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Μ είναι ίση με μηδέν. Επομένως, η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση στην οποία φτάνουν τα υλικά σημεία Κ και Μ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής τους, είναι:

$$\Delta y_{\max} = |A'|_K - |A'|_M \quad \text{ή} \quad \Delta y_{\max} = 2A - A$$

$$\text{ή } \Delta y_{\max} = A.$$

B. Σωστή επιλογή είναι η α.

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του ταλαντούμενου υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$v_K = \omega A'_K \sin(\omega t)$$

$$\text{ή } v_K = \omega 2A \sin\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right) \sin(\omega t)$$

$$\text{ή } v_K = \omega 2A \sin(\pi) \sin(\omega t)$$

$$\text{ή } v_K = -2\omega A \sin(\omega t) \quad (3).$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του ταλαντούμενου υλικού σημείου Μ δίνεται από τη σχέση:

$$v_M = \omega A'_M \sin(\omega t)$$

$$\text{ή } v_M = \omega 2A \sin\left(\frac{2\pi x_M}{\lambda}\right) \sin(\omega t)$$

$$\text{ή } v_M = \omega 2A \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) \sin(\omega t)$$

$$\text{ή } v_M = -\omega A \sin(\omega t) \quad (4).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (4) και

$$(3) \text{ προκύπτει: } \frac{v_M}{v_K} = +\frac{1}{2}$$

$$\text{ή } v_M = +\frac{v_K}{2}.$$

54. α. Από τη δοθείσα εξίσωση της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο $O(x = 0)$ εξαιτίας κάθε κύματος προκύπτει:

$$A = 0,2 \text{ m και } \omega = 4\pi \text{ rad/s.}$$

Έστω T η περίοδος των δύο τρέχοντων κυμάτων (1) και (2). Έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad T = 0,5 \text{ s.}$$

Έστω λ το μήκος κύματος των δύο τρέχοντων κυμάτων. Είναι:

$$v_\delta = \lambda f \quad \text{ή} \quad v_\delta = \frac{\lambda}{T} \quad \text{ή} \quad \lambda = 1 \text{ m.}$$

Η εξίσωση του κύματος (1) δίνεται από τη

$$\text{σχέση: } y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi(2t - x) \text{ (S.I.).}$$

Η εξίσωση του κύματος (2) δίνεται από τη σχέση:

$$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } y_2 = 0,2\eta\mu 2\pi(2t + x) \text{ (S.I.).}$$

β. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y = 0,4\sigma\upsilon\nu(2\pi x)\eta\mu(4\pi t) \text{ (S.I.) (1).}$$

γ. Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου K υπολογίζεται από τη σχέση:

$$|A'|_K = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right| \quad \text{ή} \quad |A'|_K = 0,2 \text{ m.}$$

δ. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών του στάσιμου κύματος είναι:

$$\Delta x_\Delta = \frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad \Delta x_\Delta = 0,5 \text{ m.}$$

ε. Η απομάκρυνση y_K του υλικού σημείου K τη χρονική στιγμή $t = 0,25 \text{ s}$ προκύπτει από τη σχέση (1), θέτοντας σε αυτήν όπου x το $x_K = +\frac{1}{6} \text{ m}$ και όπου t το $t_1 = 0,25 \text{ s}$. Είναι:

$$y_K = 0,4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\eta\mu\pi \text{ m} \quad \text{ή} \quad y_K = 0.$$

55. α. Η δοθείσα εξίσωση του κύματος (1) γράφεται:

$$y = 0,05\eta\mu 2\pi\left(5t - \frac{10x}{3}\right) \text{ (S.I.) (1).}$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση (1) με τη γενική εξίσωση του κύματος που γνωρίζουμε από τη θεωρία, προκύπτει: $A = 0,05 \text{ m}$,

$$\frac{1}{T} = 5 \text{ s}^{-1} \quad \text{ή} \quad T = 0,2 \text{ s}$$

$$\text{και } \frac{1}{\lambda} = \frac{10}{3} \text{ m}^{-1} \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,3 \text{ m.}$$

Το αρμονικό κύμα (2) έχει ίδιο μήκος κύματος και ίδιο πλάτος με το κύμα (1), αλλά διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'Ox$.

Εφόσον τα δύο κύματα διαδίδονται στο ίδιο ελαστικό μέσο, έχουν την ίδια ταχύτητα διάδοσης και, συνεπώς, το ίδιο μήκος κύματος. Επομένως, η εξίσωση του κύματος (2) δίνεται από τη σχέση:

$$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } y_2 = 0,05\eta\mu 2\pi\left(5t + \frac{10x}{3}\right) \text{ (S.I.).}$$

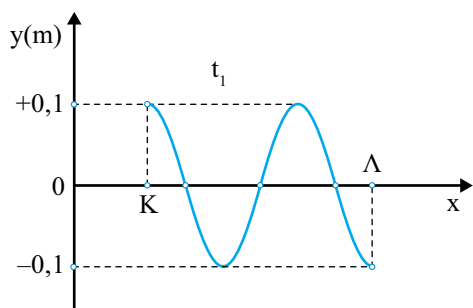
β. Επειδή το σημείο Μ βρίσκεται στο μέσον της απόστασης μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών, είναι κοιλία του στάσιμου κύματος. Επομένως, η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσής του είναι: $v_{\max(M)} = \omega |A'|_M$

$$\text{ή } v_{\max(M)} = \frac{2\pi}{T} \cdot 2A$$

$$\text{ή } v_{\max(M)} = \pi \text{ m/s.}$$

γ. Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος μεταξύ των υλικών σημείων Κ και Λ μια χρονική στιγμή t_1 στην οποία τα σημεία Κ και Λ βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους. Από το στιγμιότυπο προκύπτει ότι:

$$(ΚΛ) = \frac{3\lambda}{2} \text{ ή } (ΚΛ) = 0,45 \text{ m.}$$



δ. Επειδή ανάμεσα στα σημεία Κ και Λ σχηματίζονται τρεις δεσμοί, η διαφορά φάσης των ταλαντώσεών τους είναι ίση με $\pi \text{ rad}$. Εφόσον τα σημεία Κ και Λ είναι κοιλίες και η διαφορά φάσης των ταλαντώσεών τους είναι ίση με $\pi \text{ rad}$, έχουν κάθε χρονική στιγμή αντίθετες απομακρύνσεις. Επομένως, ο ζητούμενος λόγος των επιταχύνσεων των σημείων Κ και Λ τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\frac{a_K}{a_\Lambda} = \frac{-\omega^2 y_K}{-\omega^2 y_\Lambda} \text{ ή } \frac{a_K}{a_\Lambda} = \frac{y_K}{y_\Lambda} \text{ ή } \frac{a_K}{a_\Lambda} = -1.$$

56. α. Από τις δοθείσες εξισώσεις των δύο κυμάτων τα οποία δημιουργούν το στάσιμο κύμα στο ελαστικό μέσο προκύπτει:

$$A = 0,4 \text{ m, } \frac{1}{T} = \frac{1}{2,5} \text{ s}^{-1} \text{ ή } f = 2,5 \text{ Hz}$$

$$\text{και } \frac{1}{\lambda} = 2 \text{ m}^{-1} \text{ ή } \lambda = 0,5 \text{ m.}$$

$$\text{Είναι: } \omega = 2\pi f \text{ ή } \omega = 5\pi \text{ rad/s.}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται στο ελαστικό μέσο δίνεται από τη

$$\text{σχέση: } y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y = 0,8 \sin(4\pi x) \eta\mu(5\pi t) \text{ (S.I.).}$$

β. Η οριζόντια απόσταση μεταξύ ενός δεσμού και της επόμενης από αυτόν κοιλίας είναι:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{4} \text{ ή } \Delta x = 0,125 \text{ m.}$$

γ. Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Μ δίνεται από τη σχέση:

$$|A'|_M = 2A \left| \sin\left(\frac{2\pi x_M}{\lambda}\right) \right|$$

$$\text{ή } |A'|_M = 0,8 \left| \sin 4\pi \right| \text{ m ή } |A'|_M = 0,8 \text{ m}$$

$$\text{ή } |A'_M| = 2A.$$

Επομένως, **στο σημείο Μ σχηματίζεται κοιλία.**

δ. Η θέση των κοιλιών στον θετικό ημιάξονα Οχ δίνεται από τη σχέση:

$$x_{\text{κοιλ}} = N \frac{\lambda}{2}, \text{ με } N = 0, 1, 2, \dots (1).$$

Αν θέσουμε $N = 2$ στη σχέση (1), προκύπτει η θέση x_2 της δεύτερης κοιλίας, δεξιά του σημείου Ο. Είναι: $x_2 = +0,5 \text{ m}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας για τη συγκεκριμένη κοιλία δίνεται από τη σχέση:

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x_2}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y = 0,8 \sin(2\pi) \eta\mu(5\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή } y = 0,8 \eta\mu(5\pi t) \text{ (S.I.)}$$

ε. Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Ο τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$y_O = 2A \sin\left(\frac{2\pi \cdot 0}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t_1)$$

$$\text{ή } y_O = 0,8 \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

$$\text{ή } y_O = +0,8 \text{ m.}$$

Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Μ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$y_M = 2A \sin\left(\frac{2\pi x_M}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t_1)$$

$$\text{ή } y_M = 0,8 \sin(4\pi) \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

$$\text{ή } y_M = +0,8 \text{ m.}$$

Οι θέσεις των δεσμών στον ημιάξονα Οx δίνονται από τη σχέση:

$$x_\delta = (2N+1)\frac{\lambda}{4}, \text{ με } N = 0, 1, 2, \dots (2).$$

Το πλήθος των δεσμών που σχηματίζονται μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Μ υπολογίζεται λύνοντας την ανίσωση:

$$0 < x_\delta < x_M \text{ ή } 0 < (2N+1)\frac{\lambda}{4} < x_M$$

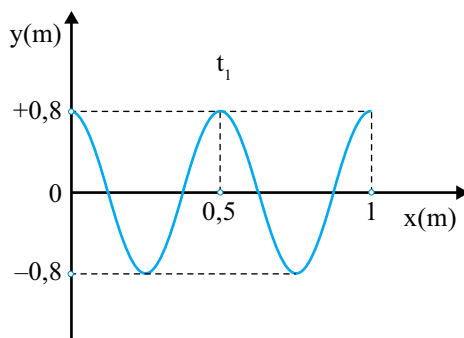
$$\text{ή } 0 < 2N+1 < \frac{4x_M}{\lambda}$$

$$\text{ή } -\frac{1}{2} < N < \frac{2x_M}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

$$\text{ή } -\frac{1}{2} < N < 3,5 \text{ ή } N = 0, 1, 2, 3.$$

Επομένως, μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Μ σχηματίζονται τέσσερις δεσμοί.

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Μ τη χρονική στιγμή t_1 .



57. α. Οι δοθείσες εξισώσεις των δύο τρεχόντων κυμάτων γράφονται:

$$y_1 = 0,1 \eta\mu 2\pi(5t - 10x) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{και } y_2 = 0,1 \eta\mu 2\pi(5t + 10x) \text{ (S.I.)}$$

Οι γενικές εξισώσεις των τρέχοντων κυμάτων των οποίων η συμβολή δημιουργεί το στάσιμο κύμα στη χορδή είναι οι:

$$y_1 = A \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) (1)$$

$$\text{και } y_2 = A \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) (2).$$

Συγκρίνοντας τις δοθείσες εξισώσεις των τρέχοντων κυμάτων με τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει: $A = 0,1 \text{ m}$,

$$\frac{1}{T} = 5 \text{ s}^{-1} \text{ ή } f = 5 \text{ Hz}$$

$$\text{και } \frac{1}{\lambda} = 10 \text{ m}^{-1} \text{ ή } \lambda = 0,1 \text{ m.}$$

$$\text{Είναι: } \omega = 2\pi f \text{ ή } \omega = 10\pi \text{ rad/s.}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y = 0,2 \sin(20\pi x) \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.).}$$

β. Οι θέσεις των κοιλιών στον άξονα $x'Ox$ δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\text{κοιλ.}} = N \frac{\lambda}{2}, \text{ με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των κοιλιών που σχηματίζονται μεταξύ των υλικών σημείων K και Λ , λύνουμε την ανίσωση:

$$x_K < x_{\text{κοιλ.}} < x_\Lambda \quad \text{ή} \quad x_K < N \frac{\lambda}{2} < x_\Lambda$$

$$\text{ή} \quad \frac{2x_K}{\lambda} < N < \frac{2x_\Lambda}{\lambda}$$

$$\text{ή} \quad -4,4 < N < 3$$

$$\text{ή} \quad N = -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2.$$

Επομένως, μεταξύ των υλικών σημείων K και Λ σχηματίζονται **επτά (7) κοιλίες**.

Οι θέσεις των δεσμών στον άξονα $x'Ox$ δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\text{δεσμ.}} = (2N+1) \frac{\lambda}{4}, \text{ με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των δεσμών που σχηματίζονται μεταξύ των υλικών σημείων K και Λ , λύνουμε την ανίσωση:

$$x_K < x_{\text{δεσμ.}} < x_\Lambda \quad \text{ή} \quad x_K < (2N+1) \frac{\lambda}{4} < x_\Lambda$$

$$\text{ή} \quad \frac{4x_K}{\lambda} < 2N+1 < \frac{4x_\Lambda}{\lambda}$$

$$\text{ή} \quad -8,8 < 2N+1 < 6$$

$$\text{ή} \quad -4,9 < N < 2,5$$

$$\text{ή} \quad N = -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2.$$

Επομένως, μεταξύ των σημείων K και Λ σχηματίζονται **επτά (7) δεσμοί**.

γ. Η ταχύτητα του ταλαντούμενου υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\Lambda = \omega A'_\Lambda \sin(\omega t_1)$

$$\text{ή} \quad v_\Lambda = \omega 2A \sin\left(\frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda}\right) \sin(\omega t_1)$$

$$\text{ή} \quad v_\Lambda = 2\pi \sin(3\pi) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ m/s}$$

$$\text{ή} \quad v_\Lambda = -\sqrt{2}\pi \text{ m/s.}$$

δ. Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$|A'|_\Lambda = 2A \left| \sin\left(\frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda}\right) \right|$$

$$\text{ή} \quad |A'|_\Lambda = 2A \left| \sin(3\pi) \right|$$

$$\text{ή} \quad |A'|_\Lambda = 2A$$

$$\text{ή} \quad |A'|_\Lambda = 0,2 \text{ m.}$$

Έστω y_Λ η απομάκρυνση του σημείου Λ από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t_2 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Λ έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D(A'_\Lambda)^2 = \frac{1}{2} m v_\Lambda^2 + \frac{1}{2} D y_\Lambda^2$$

$$\text{ή} \quad m \omega^2 (A'_\Lambda)^2 = m v_\Lambda^2 + m \omega^2 y_\Lambda^2$$

$$\text{ή} \quad y_\Lambda = + \sqrt{(A'_\Lambda)^2 - \left(\frac{v_\Lambda}{\omega}\right)^2}$$

$$\text{ή} \quad y_\Lambda = +0,1 \text{ m.}$$

Η επιτάχυνση του σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_2 δίνεται από τη σχέση:

$$a_\Lambda = -\omega^2 y_\Lambda \quad \text{ή} \quad a_\Lambda = -100 \text{ m/s}^2.$$

58. α. Συγκρίνοντας τη δοθείσα εξίσωση με την εξίσωση του στάσιμου κύματος που γνωρίζουμε από τη θεωρία προκύπτει:

$$2A = 0,4 \text{ m} \quad \text{ή} \quad A = 0,2 \text{ m},$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = 10\pi x \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,2 \text{ m} \quad \text{και} \quad \omega = 10\pi \text{ rad/s}.$$

Έστω T η περίοδος των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή. Είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $T = 0,2 \text{ s}$.

Οι εξισώσεις των δύο τρέχοντων δίνονται από τις σχέσεις:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή} \quad y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi(5t - 5x) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{και} \quad y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή} \quad y_2 = 0,2\eta\mu 2\pi(5t + 5x) \text{ (S.I.)}$$

β. Το πλάτος του υλικού σημείου K υπολογίζεται από τη σχέση:

$$|A'|_K = 2A \left| \sin\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right) \right|$$

$$\text{ή} \quad |A'|_K = 0,4 \left| \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right| \quad \text{ή} \quad |A'|_K = 0.$$

Επομένως, **στο σημείο K σχηματίζεται δεσμός.**

γ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου M δίνεται από τη σχέση:

$$y_M = 2A \sin\left(\frac{2\pi x_M}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή} \quad y_M = 0,4 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή} \quad y_M = -0,2\eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή} \quad y_M = 0,2\eta\mu(10t + \pi) \text{ (S.I.) (1).}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου N δίνεται από τη σχέση:

$$y_N = 2A \sin\left(\frac{2\pi x_N}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή} \quad y_N = 0,4 \sin(4\pi) \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή} \quad y_N = 0,4\eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.) (2).}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων M και N είναι $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$.

δ. Όπως προκύπτει από τη σχέση (1) το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου M είναι:

$$|A'|_M = 0,2 \text{ m}.$$

Επειδή η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των σημείων M και N είναι $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$, τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το υλικό σημείο N φτάνει στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του το υλικό σημείο M θα φτάνει στην ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσής του. Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$y_M = -|A'|_M \quad \text{ή} \quad y_M = -0,2 \text{ m}.$$

59. α. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με τη γενική μορφή της εξίσωσης του στάσιμου κύματος:

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{προκύπτει: } 2A = 0,2 \text{ m} \quad \text{ή} \quad A = 0,1 \text{ m}$$

$$\text{και} \quad \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{5\pi x}{3} \quad \text{ή} \quad \lambda = 1,2 \text{ m}.$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου M υπολογίζεται από τη σχέση:

$$|A'|_M = 2A \left| \sin\left(\frac{2\pi x_M}{\lambda}\right) \right|$$

$$\text{ή } |A'|_M = 2A \left| \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right| \quad \text{ή } |A'|_M = A$$

$$\text{ή } |A'|_M = 0,1 \text{ m.}$$

Για το υλικό σημείο M ισχύει:

$$v_{\max(M)} = \omega |A'|_M \quad \text{ή} \quad v_{\max(M)} = 2\pi f |A'|_M$$

$$\text{ή } f = 10 \text{ Hz.}$$

Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων είναι:

$$v_g = \lambda f \quad \text{ή} \quad v_g = 12 \text{ m/s.}$$

β. Είναι: $\omega = 2\pi f$ ή $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου M από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση:

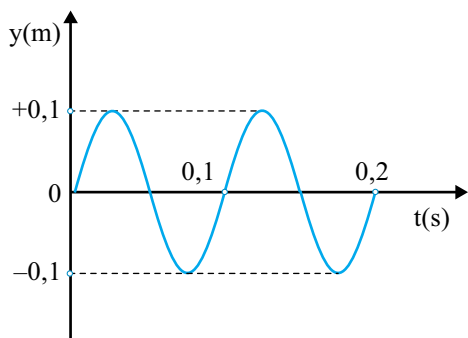
$$y_M = 2A \sin\left(\frac{2\pi x_M}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y_M = 0,2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \eta\mu(20\pi t) \quad (\text{S.I.})$$

$$\text{ή } y_M = 0,1 \eta\mu(20\pi t) \quad (\text{S.I.}) \quad (1).$$

Η περίοδος των δύο τρέχοντων κυμάτων είναι: $T = \frac{1}{f}$ ή $T = 0,1 \text{ s}$.

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται η γραφική παράσταση της σχέσης (1) από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 0,2 \text{ s}$.



γ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου N από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση:

$$y_N = 2A \sin\left(\frac{2\pi x_N}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y_N = 0,2 \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \eta\mu(20\pi t) \quad (\text{S.I.})$$

$$\text{ή } y_N = 0,1 \eta\mu(20\pi t) \quad (\text{S.I.}) \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων M και N είναι: $\Delta\phi = 0$.

δ. Έστω v_M το μέτρο της ταχύτητας του υλικού σημείου M τις χρονικές στιγμές στις οποίες είναι: $y_M = +0,06 \text{ m}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο M έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D(A'_M)^2 = \frac{1}{2} m v_M^2 + \frac{1}{2} D y_M^2$$

$$\text{ή } m \omega^2 (A'_M)^2 = m v_M^2 + m \omega^2 y_M^2$$

$$\text{ή } v_M = \omega \sqrt{(A'_M)^2 - y_M^2}$$

$$\text{ή } |v_M| = 1,6\pi \text{ m/s.}$$

60. α. Συγκρίνοντας τη δοθείσα εξίσωση με τη γενική μορφή της εξίσωσης του στάσιμου

$$\text{κύματος: } y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t),$$

$$\text{προκύπτει: } 2A = 0,4 \text{ m} \quad \text{ή} \quad A = 0,2 \text{ m,}$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = 4\pi x \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,5 \text{ m}$$

$$\text{και } \omega = 20\pi \text{ rad/s.}$$

Έστω T η περίοδος των δύο τρέχοντων κυμάτων. Είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ή $T = 0,1 \text{ s}$.

Οι εξισώσεις των δύο εγκάρσιων αρμονικών κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα

στη χορδή είναι: $y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

ή $y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi(10t - 2x)$ (S.I.)

και $y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$

ή $y_2 = 0,2\eta\mu 2\pi(10t + 2x)$ (S.I.).

β. Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του ταλαντούμενου υλικού σημείου K δίνεται από τη σχέση: $a_K = -\omega^2 A'_K \eta\mu(\omega t)$

ή $a_K = -\omega^2 2A \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$

ή $a_K = -1.600\eta\mu(20\pi t)$ (S.I.).

γ. Οι θέσεις των δεσμών στον άξονα x' Ο x δίνονται από τη σχέση: $x_{\text{δεσμ}} = (2N+1)\frac{\lambda}{4}$, με $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των δεσμών που σχηματίζονται μεταξύ των υλικών σημείων K και M , λύνουμε της ανίσωση:

$x_K < x_{\text{δεσμ}} < x_M$ ή $x_K < (2N+1)\frac{\lambda}{4} < x_M$

ή $0,5 < (2N+1)\frac{1}{8} < 0,75$ ή $4 < 2N+1 < 6$

ή $3 < 2N < 5$ ή $1,5 < N < 2,5$ ή $N = 2$.

Επομένως μεταξύ των σημείων K και M σχηματίζεται ένας δεσμός.

δ. Εφόσον ανάμεσα στα σημεία K και M σχηματίζεται ένας δεσμός, η διαφορά φάσης των ταλαντώσεών τους είναι ίση με $\pi \text{ rad}$. Συνεπώς, τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το υλικό

σημείο K βρίσκεται στη θέση μέγιστης αρνητικής απομάκρυνσης, η απομάκρυνση του σημείου M είναι:

$y_M = +|A'|_M$ ή $y_M = +2A \left| \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_M}{\lambda}\right) \right|$

ή $y_M = +0,4 \text{ m}$.

6.1. α. Έστω λ το μήκος κύματος των κυμάτων (1) και (2). Είναι:

$v_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = \frac{v_\delta}{f}$ ή $\lambda = 0,4 \text{ m}$.

Οι εξισώσεις των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή δίνονται από τις

σχέσεις: $y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)$

ή $y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi(20t - 2,5x)$ (S.I.)

και $y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right)$

ή $y_2 = 0,2\eta\mu 2\pi(20t + 2,5x)$ (S.I.).

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται

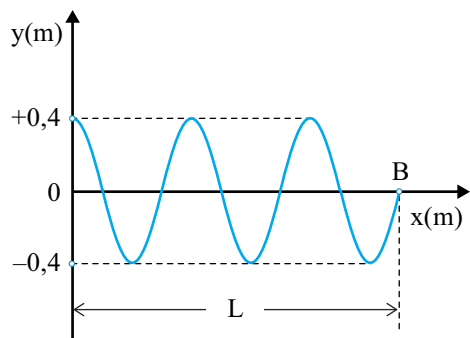
από τη σχέση: $y = 2A \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$

ή $y = 2A \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu(2\pi ft)$

ή $y = 0,4 \sigma\upsilon\nu(5\pi x) \eta\mu(40\pi t)$ (S.I.).

β. Στο διάγραμμα του επόμενου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος που σχηματίζεται στη χορδή κάποια χρονική στιγμή στην οποία το άκρο O βρίσκεται στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του. Από το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος προκύπτει ότι το μήκος της χορδής είναι:

$L = \frac{11\lambda}{4}$ ή $L = 1,1 \text{ m}$.



γ. Η ταχύτητα του ταλαντούμενου υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $v_K = \omega A'_K \sin(\omega t_1)$

$$\text{ή } v_K = 2\pi f 2A \sin\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right) \sin(\omega t_1)$$

$$\text{ή } v_K = 16\pi \sin(\pi) \sin(2\pi) \text{ m/s}$$

$$\text{ή } v_K = -16\pi \text{ m/s.}$$

δ. Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ είναι: $|A'_K| = 2A \left| \sin\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right) \right|$

$$\text{ή } |A'_K| = 0,4 \text{ m.}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ είναι: $|A'_\Lambda| = 2A \left| \sin\left(\frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda}\right) \right|$

$$\text{ή } |A'_\Lambda| = 0,4 \text{ m.}$$

Τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία το άκρο Ο βρίσκεται στην ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσής του, όλα τα ταλαντούμενα σημεία της χορδής βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους. Επομένως, ισχύει:

$$\frac{U_K}{U_\Lambda} = \frac{\frac{1}{2} D_K (A'_K)^2}{\frac{1}{2} D_\Lambda (A'_\Lambda)^2} \quad \text{ή} \quad \frac{U_K}{U_\Lambda} = \frac{m(2\pi f)^2 (A'_K)^2}{m(2\pi f)^2 (A'_\Lambda)^2}$$

$$\text{ή } \frac{U_K}{U_\Lambda} = \left(\frac{A'_K}{A'_\Lambda}\right)^2 \quad \text{ή} \quad \frac{U_K}{U_\Lambda} = 1.$$

ε. Έστω λ' το νέο μήκος κύματος και f' η νέα συχνότητα των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή. Εφόσον σχηματίζονται τρεις κοιλίες συνολικά στη χορδή, ισχύει:

$$L = \frac{\lambda'}{4} + \lambda' \quad \text{ή} \quad L = \frac{5\lambda'}{4} \quad \text{ή} \quad L = \frac{5 v_\delta}{4 f'}$$

$$\text{ή } f' = \frac{5 v_\delta}{4 L} \quad \text{ή} \quad f' = \frac{100}{11} \text{ Hz.}$$

62. α. Η συχνότητα του στάσιμου κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$f = \frac{N}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad f = 5 \text{ Hz.}$$

Από το δοθέν στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος προκύπτει: $2A = 0,4 \text{ m}$

$$\text{ή } A = 0,2 \text{ m} \quad \text{και} \quad \lambda = 0,4 \text{ m.}$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του ταλαντούμενου υλικού σημείου Μ δίνεται από τη σχέση: $v_M = \omega A'_M \sin(\omega t)$

$$\text{ή } v_M = 2\pi f 2A \sin\left(\frac{2\pi x_M}{\lambda}\right) \sin(2\pi f t)$$

$$\text{ή } v_M = 4\pi \sin(2\pi) \sin(10\pi t)$$

$$\text{ή } v_M = 4\pi \sin(10\pi t) \text{ (S.I.).}$$

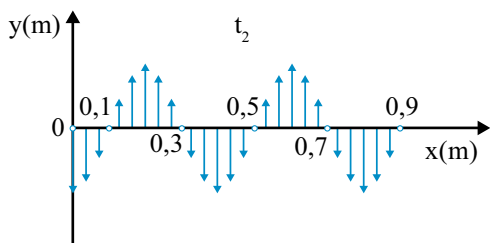
β. Η περίοδος των δύο τρέχοντων κυμάτων που σχηματίζουν το στάσιμο κύμα στη χορδή

$$\text{είναι: } T = \frac{1}{f} \quad \text{ή} \quad T = 0,2 \text{ s.}$$

$$\text{Είναι: } t_2 = t_1 + 0,05 \text{ s} \quad \text{ή} \quad t_2 = t_1 + \frac{T}{4}.$$

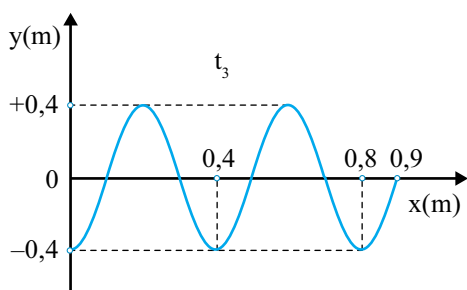
Εφόσον τη χρονική στιγμή t_1 όλα τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους, τη χρονική στιγμή t_2 όλα τα υλικά σημεία που

ταλαντώνονται διέρχονται ταυτόχρονα από τις θέσεις ισορροπίας τους. Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \frac{T}{4}$.



Είναι: $t_3 = t_1 + 0,1 \text{ s}$ ή $t_3 = t_1 + \frac{T}{2}$.

Εφόσον τη χρονική στιγμή t_1 όλα τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους, τη χρονική στιγμή t_3 θα βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους που έχουν αντίθετη απομάκρυνση από αυτές όπου βρίσκονταν τη χρονική στιγμή t_1 . Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή t_3 .



γ. Η επιτάχυνση του σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_4 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a_\Lambda = -\omega^2 A'_\Lambda \eta\mu(\omega t_4)$$

$$\text{ή } a_\Lambda = -\omega^2 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda}\right)\eta\mu(2\pi f t_4)$$

$$\text{ή } a_\Lambda = +400 \text{ m/s}^2.$$

$$\delta. \text{ Είναι: } t_1 = \frac{5T}{4} \text{ ή } t_1 = 0,25 \text{ s.}$$

63. α. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι ίση με $\lambda/2$. Είναι:

$$\frac{\lambda}{2} = 0,15 \text{ m} \text{ ή } \lambda = 0,3 \text{ m.}$$

Τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου που ταλαντώνονται διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους κάθε $T/2$, όπου T η περίοδος των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή. Είναι:

$$\frac{T}{2} = 0,05 \text{ s} \text{ ή } T = 0,1 \text{ s.}$$

Η ταχύτητα διάδοσης των δύο τρέχοντων κυμάτων είναι: $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$ ή $v_\delta = 3 \text{ m/s}$.

β. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Ο δίνεται από τη σχέση:

$$y_O = 2A\eta\mu(\omega t) \text{ ή } y_O = 2A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$\text{ή } y_O = 0,2\eta\mu(20\pi t) \text{ (S.I.) (1).}$$

γ. Οι θέσεις των κοιλιών στον άξονα $x'Ox$ δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\text{κοιλ}} = N\frac{\lambda}{2}, \text{ με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ (3).}$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των κοιλιών που σχηματίζονται μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Μ, λύνουμε την ανίσωση:

$$0 < x_{\text{κοιλ}} < x_M \text{ ή } 0 < N\frac{\lambda}{2} < x_M$$

$$\text{ή } 0 < N < \frac{2x_M}{\lambda} \quad \text{ή } 0 < N < \frac{20}{3}$$

$$\text{ή } N = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Επομένως, το πλήθος των κοιλιών που σχηματίζονται μεταξύ των σημείων Ο και Μ είναι ίσο με 6.

Οι θέσεις των κοιλιών που σχηματίζονται μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Μ προκύπτουν από τη σχέση (3). Είναι:

$$\text{Για } N = 1: x_1 = +0,15 \text{ m.}$$

$$\text{Για } N = 2: x_2 = +0,3 \text{ m.}$$

$$\text{Για } N = 3: x_3 = +0,45 \text{ m.}$$

$$\text{Για } N = 4: x_4 = +0,6 \text{ m.}$$

$$\text{Για } N = 5: x_5 = +0,75 \text{ m.}$$

$$\text{Για } N = 6: x_6 = +0,9 \text{ m.}$$

δ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Μ δίνεται από τη σχέση:

$$y_M = 2A \sin\left(\frac{2\pi x_M}{\lambda}\right) \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

$$\text{ή } y_M = 0,2 \sin\left(\frac{20\pi}{3}\right) \eta\mu(20\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή } y_M = -0,1 \eta\mu(20\pi t)$$

$$\text{ή } y_M = 0,1 \eta\mu(20\pi t + \pi) \text{ (S.I.) (2).}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Μ και Ο είναι $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$.

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Μ είναι $|A'|_M = 0,1 \text{ m}$.

Συνεπώς, τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το υλικό σημείο Ο διέρχεται από τη θέση ισορ-

ροπίας του κινούμενο με θετική ταχύτητα, το υλικό σημείο Μ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο με αρνητική ταχύτητα. Επομένως, η ταχύτητα του υλικού σημείου Μ τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $v_M = -v_{\max(M)}$

$$\text{ή } v_M = -\frac{2\pi}{T} |A'|_M \quad \text{ή } v_M = -2\pi \text{ m/s.}$$

64. α. Η οριζόντια απόσταση μεταξύ του υλικού σημείου Ο και του πλησιέστερου προς αυτό δεσμού είναι ίση με $\lambda/4$. Είναι:

$$\frac{\lambda}{4} = 0,1 \text{ m} \quad \text{ή } \lambda = 0,4 \text{ m.}$$

Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων της ελαστικής δυναμικής ενέργειας της χορδής είναι ίσο με $T/2$. Είναι:

$$\frac{T}{2} = 0,1\pi \text{ s} \quad \text{ή } T = 0,2\pi \text{ s.}$$

$$\text{Είναι: } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή } \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Για το υλικό σημείο Ο ισχύει:

$$|v_O| = v_{\max(O)} \quad \text{ή } |v_O| = \omega |A'|_O$$

$$\text{ή } |v_O| = \omega 2A \quad \text{ή } A = 0,2 \text{ m.}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται

$$\text{από τη σχέση: } y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y = 0,4 \sin(5\pi x) \eta\mu(10t) \text{ (S.I.).}$$

β. Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$|A'|_K = 2A \left| \sin\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right) \right|$$

$$\text{ή } |A'|_K = 0,4 \left| \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right| \text{ m}$$

$$\text{ή } |A'|_K = 0,2\sqrt{2} \text{ m.}$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2} D(A'_K)^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2} m \omega^2 (A'_K)^2$$

$$\text{ή} \quad E = 8 \cdot 10^{-3} \text{ J.}$$

γ. Η χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο υλικό σημείο Κ δίνεται από τη σχέση: $\Sigma F = -Dy$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = -m \omega^2 A'_K \eta \mu(\omega t)$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = -m \omega^2 2A \sigma \nu \nu \left(\frac{2\pi x_K}{\lambda} \right) \eta \mu(\omega t)$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = 0,04 \sqrt{2} \eta \mu(10t) \text{ (S.I.).}$$

δ. Έστω y_K η απομάκρυνση του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Κ έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} D(A'_K)^2 = \frac{1}{2} m v_K^2 + \frac{1}{2} D y_K^2$$

$$\text{ή} \quad m \omega^2 (A'_K)^2 = m v_K^2 + m \omega^2 y_K^2$$

$$\text{ή} \quad |y_K| = \sqrt{(A'_K)^2 - \left(\frac{v_K}{\omega} \right)^2} \quad \text{ή} \quad |y_K| = 0,2 \text{ m.}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a_K = \omega^2 |y_K| \quad \text{ή} \quad a_K = 20 \text{ m/s}^2.$$

65. α. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με τη γενική εξίσωση του στάσιμου κύματος που γνωρίζουμε από τη θεωρία, προκύπτει: $2A = 0,08 \text{ m}$ ή $A = 0,04 \text{ m}$,

$$5\pi x = \frac{2\pi x}{\lambda} \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,4 \text{ m}$$

$$\text{και} \quad \omega = 20\pi \text{ rad/s.}$$

Έστω T η περίοδος των δύο τρέχοντων κυμάτων.

$$\text{Είναι:} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad T = 0,1 \text{ s.}$$

Οι εξισώσεις των δύο τρέχοντων κυμάτων δίνονται από τις σχέσεις:

$$y_1 = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad y_1 = 0,04 \eta \mu 2\pi(10t - 2,5x) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{και} \quad y_2 = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή} \quad y_2 = 0,04 \eta \mu 2\pi(10t + 2,5x) \text{ (S.I.).}$$

β. Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$|A'_K| = 2A \left| \sigma \nu \nu \left(\frac{2\pi x_K}{\lambda} \right) \right|$$

$$\text{ή} \quad |A'_K| = 2A \left| \sigma \nu \nu(4\pi) \right| \quad \text{ή} \quad |A'_K| = 2A.$$

Επομένως, στο σημείο Κ σχηματίζεται κοι-
λία του στάσιμου κύματος.

γ. Εφόσον τα υλικά σημεία Κ και Λ είναι κοι-
λίες και ανάμεσά τους σχηματίζονται τρεις
δεσμοί, η απόσταση μεταξύ των θέσεων
ισορροπίας τους είναι: $\Delta x = 1,5\lambda$

$$\text{ή} \quad x_\Lambda - x_K = 1,5\lambda \quad \text{ή} \quad x_\Lambda = x_K + 1,5\lambda$$

$$\text{ή} \quad x_\Lambda = +1,4 \text{ m.}$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του ταλα-
ντούμενου υλικού σημείου Λ δίνεται από τη
σχέση: $v_\Lambda = \omega A'_K \sigma \nu \nu(\omega t)$

$$\text{ή} \quad v_\Lambda = \omega 2A \sigma \nu \nu \left(\frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda} \right) \sigma \nu \nu(\omega t)$$

$$\text{ή} \quad v_\Lambda = 1,6\pi \sigma \nu \nu(7\pi) \sigma \nu \nu(20\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή} \quad v_\Lambda = -1,6\pi \sigma \nu \nu(20\pi t) \text{ (S.I.).}$$

δ. Επειδή μεταξύ των υλικών σημείων Κ και Λ σχηματίζονται τρεις δεσμοί, η διαφορά φάσης των ταλαντώσεών τους είναι $\Delta\varphi = \pi \text{ rad}$. Εφόσον τα υλικά σημεία Κ και Λ έχουν διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \pi \text{ rad}$, τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το υλικό σημείο Λ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, το υλικό σημείο Κ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με αρνητική ταχύτητα. Είναι:

$$v_K = -v_{\max(K)} \quad \text{ή} \quad v_K = -\omega|A'|_K$$

$$\text{ή} \quad v_K = -\omega 2A \quad \text{ή} \quad v_K = -1,6\pi \text{ m/s.}$$

66. α. Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο είναι: $|A'|_O = 2A$ ή $|A'|_O = 0,2 \text{ m}$. Η οριζόντια απόσταση του σημείου Ο από τον πλησιέστερο δεσμό είναι $\Delta x = \frac{\lambda}{4}$. Η μέγιστη απόσταση στην οποία φτάνει το σημείο Ο από τον πλησιέστερο δεσμό κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του είναι:

$$\Delta y_{\max} = \sqrt{(|A'|_O)^2 + (\Delta x)^2}$$

$$\text{ή} \quad (\Delta y_{\max})^2 = (|A'|_O)^2 + \left(\frac{\lambda}{4}\right)^2$$

$$\text{ή} \quad \lambda = 0,8 \text{ m.}$$

$$\text{Είναι: } \omega = 2\pi f \quad \text{ή} \quad \omega = 10\pi \text{ rad/s.}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή} \quad y = 0,2 \sin(2,5\pi x) \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.).}$$

β. Οι θέσεις των κοιλιών στον θετικό ημιάξονα Οχ δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\text{κοιλ}} = N \frac{\lambda}{2}, \quad \text{με } N = 0, 1, 2, \dots$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των κοιλιών που σχηματίζονται μεταξύ των σημείων Κ και Λ, λύνουμε την ανίσωση:

$$x_K < x_{\text{κοιλ}} < x_\Lambda \quad \text{ή} \quad x_K < N \frac{\lambda}{2} < x_\Lambda$$

$$\text{ή} \quad \frac{2x_K}{\lambda} < N < \frac{2x_\Lambda}{\lambda} \quad \text{ή} \quad 1 < N < 6$$

$$\text{ή} \quad N = 2, 3, 4, 5.$$

Επομένως, μεταξύ των σημείων Κ και Λ σχηματίζονται **τέσσερις (4) κοιλίες**.

Οι θέσεις των δεσμών στον θετικό ημιάξονα Οχ δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\text{δεσμ}} = (2N+1) \frac{\lambda}{4}, \quad \text{με } N = 0, 1, 2, \dots$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των δεσμών που σχηματίζονται μεταξύ των σημείων Κ και Λ, λύνουμε την ανίσωση:

$$x_K < x_{\text{δεσμ}} < x_\Lambda \quad \text{ή} \quad x_K < (2N+1) \frac{\lambda}{4} < x_\Lambda$$

$$\text{ή} \quad \frac{4x_K}{\lambda} < 2N+1 < \frac{4x_\Lambda}{\lambda}$$

$$\text{ή} \quad 2 < 2N+1 < 12 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} < N < 5,5$$

$$\text{ή} \quad N = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Επομένως, μεταξύ των σημείων Κ και Λ σχηματίζονται **πέντε (5) δεσμοί**.

γ. Επειδή μεταξύ των υλικών σημείων Κ και Λ σχηματίζονται πέντε δεσμοί, η διαφορά φάσης των ταλαντώσεών τους είναι $\Delta\varphi = \pi \text{ rad}$.

δ. Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ είναι:

$$|A'|_K = 2A \left| \sin\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right) \right|$$

$$\text{ή} \quad |A'|_K = 2A |\sin \pi| \quad \text{ή} \quad |A'|_K = 0, 2 \text{ m.}$$

Εφόσον η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι $\Delta\varphi = \pi \text{ rad}$, τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το υλικό σημείο Λ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με αρνητική ταχύτητα, το υλικό σημείο Κ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα. Δηλαδή, είναι:

$$v_K = +v_{\max(K)} \quad \text{ή} \quad v_K = +\omega |A'_K|$$

$$\text{ή} \quad v_K = +2\pi \text{ m/s.}$$

ε. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Κ έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad U = \frac{1}{2}(A'_K)^2 - \frac{1}{2}mv_K^2$$

$$\text{ή} \quad U = \frac{1}{2}m\omega^2(A'_K)^2 - \frac{1}{2}mv_K^2$$

$$\text{ή} \quad U = 0,01 \text{ J.}$$

67. α. Από το δοθέν στιγμιότυπο, προκύπτει ότι η απομάκρυνση του υλικού σημείου Ο τη χρονική στιγμή t_1 είναι $y_O = +0,2 \text{ m}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Ο έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad E = 4U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}D(A'_O)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}Dy_O^2$$

$$\text{ή} \quad |A'_O|_0 = 2y_O \quad \text{ή} \quad |A'_O|_0 = 0,4 \text{ m.}$$

Η απόσταση μεταξύ των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο είναι:

$$d = 2|A'_O|_0 \quad \text{ή} \quad d = 0,8 \text{ m.}$$

β. Από το δοθέν στιγμιότυπο προκύπτει:

$$\frac{9\lambda}{4} = 0,9 \text{ m} \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,4 \text{ m.}$$

$$\text{Είναι: } |A'_O|_0 = 2A \quad \text{ή} \quad 2A = 0,4 \text{ m.}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του ταλαντούμενου σημείου Ο δίνεται από τη σχέση: $y = 2A\eta\mu(\omega t)$ (1).

Από τη σχέση (1) για $y_O = +0,2 \text{ m}$ και $t = t_1 = \frac{\pi}{120} \text{ s}$, προκύπτει: $\frac{1}{2} = \eta\mu(\omega t_1)$ (2).

Οι λύσεις της εξίσωσης (2) είναι οι:

$$\omega t_1 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \quad \text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (3),$$

$$\omega t_1 = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad \text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (4).$$

Από τη σχέση (3) για $\kappa = 0$ προκύπτει:

$$\omega = 20 \text{ rad/s.}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση: $y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\eta\mu(\omega t)$

$$\text{ή} \quad y = 0,4\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\eta\mu(20t) \text{ (S.I.).}$$

γ. Είναι: $v_A = \omega A'_\Lambda \sigma\upsilon\nu(\omega t_1)$

$$\text{ή} \quad v_A = \omega 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right)\sigma\upsilon\nu(\omega t_1)$$

$$\text{ή} \quad v_A = 8\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ m/s}$$

$$\text{ή} \quad v_A = +6 \text{ m/s.}$$

68. α. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Ο δίνεται από τη σχέση: $y_O = 2A\eta\mu\omega t$ (1).

Από τη σύγκριση τη δοθείσας εξίσωσης με την εξίσωση (1) προκύπτει:

$$2A = 0,5 \text{ m} \quad \text{ή} \quad A = 0,25 \text{ m}$$

$$\text{και } \omega = 10\pi \text{ rad/s.}$$

Έστω T η περίοδος των δύο τρέχοντων κυμάτων. Είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $T = 0,2 \text{ s.}$

Οι θέσεις των δεσμών στον άξονα $x'Ox$ δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\text{δεσμ}} = (2N+1)\frac{\lambda}{4}, \text{ με } N = 0, 1, 2, \dots (2).$$

Η θέση του πέμπτου δεσμού στον θετικό ημιάξονα προκύπτει από τη σχέση (2) για $N = 4$.

$$\text{Είναι: } x_5 = 9\frac{\lambda}{4} \text{ ή } \lambda = 0,4 \text{ m.}$$

Οι εξισώσεις των δύο αρμονικών κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή

$$\text{είναι οι: } y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } y_1 = 0,25\eta\mu 2\pi(5t - 2,5x) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{και } y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } y_2 = 0,25\eta\mu 2\pi(5t + 2,5x) \text{ (S.I.).}$$

β. Η επιτάχυνση του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha_K = -\omega^2 A'_K \eta\mu(\omega t_1)$$

$$\text{ή } \alpha_K = -\omega^2 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right)\eta\mu(\omega t_1)$$

$$\text{ή } \alpha_K = -500\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{6}\right)\eta\mu\left(\frac{5\pi}{6}\right) \text{ m/s}^2$$

$$\text{ή } a_K = +125\sqrt{3} \text{ m/s}^2.$$

γ. Οι θέσεις των κοιλιών στον άξονα $x'Ox$ δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\text{κοιλ}} = N\frac{\lambda}{2}, \text{ με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των κοιλιών που σχηματίζονται μεταξύ των υλικών σημείων Λ και Μ, λύνουμε την ανίσωση:

$$x_\Lambda < x_{\text{κοιλ}} < x_M \text{ ή } x_\Lambda < N\frac{\lambda}{2} < x_M$$

$$\text{ή } \frac{2x_\Lambda}{\lambda} < N < \frac{2x_M}{\lambda} \text{ ή } -1,5 < N < 2,5$$

$$\text{ή } N = -1, 0, +1, +2.$$

Επομένως, μεταξύ των σημείων Λ και Μ σχηματίζονται **τέσσερις (4) κοιλίες**.

Οι θέσεις των δεσμών στον άξονα $x'Ox$ δίνονται από τη σχέση (2).

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των δεσμών που σχηματίζονται μεταξύ των σημείων Λ και Μ, λύνουμε την ανίσωση:

$$x_\Lambda < x_{\text{δεσμ}} < x_M \text{ ή } x_\Lambda < (2N+1)\frac{\lambda}{4} < x_M$$

$$\text{ή } \frac{4x_\Lambda}{\lambda} < 2N+1 < \frac{4x_M}{\lambda}$$

$$\text{ή } -3 < 2N+1 < 5 \text{ ή } -2 < N < 2$$

$$\text{ή } N = -1, 0, +1.$$

Επομένως, μεταξύ των σημείων Λ και Μ σχηματίζονται **τρεις (3) δεσμοί**.

δ. Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Λ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$|A'|_\Lambda = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda}\right)\right| \text{ ή } |A'|_\Lambda = 0.$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Μ υπολογίζεται από τη σχέση:

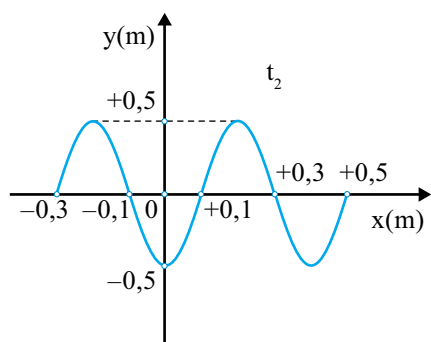
$$|A'|_M = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_M}{\lambda}\right)\right| \text{ ή } |A'|_M = 0.$$

Επομένως, τα σημεία Λ και Μ είναι δεσμοί του στάσιμου κύματος. Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Ο ($x = 0$) τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $y_0 = 2A\eta\mu(\omega t_2)$ ή $y_0 = 0,5\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) \text{ m}$

$$\text{ή } y_0 = -0,5 \text{ m.}$$

Επομένως, τη χρονική στιγμή t_2 τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε κάποια από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής

τους. Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή t_2 μεταξύ των σημείων Λ και Μ.



Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Ο τη χρονική στιγμή t_3 είναι: $y_O = 2A\eta\mu(\omega t_3)$

ή $y_O = +0,5\eta\mu(2\pi)$ m ή $y_O = 0$.

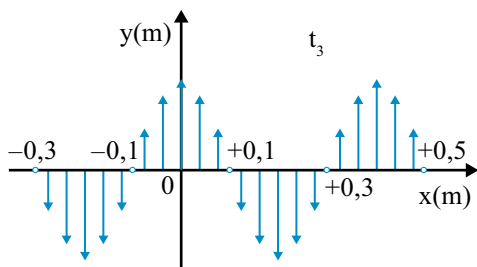
Επομένως, τη χρονική στιγμή t_3 τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους.

Η ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο τη χρονική στιγμή t_3 είναι:

$$v_O = \omega A'_O \sigma\upsilon\nu(\omega t_3) \quad \text{ή} \quad v_O = \omega 2A \sigma\upsilon\nu(\omega t_3)$$

ή $v_O = 5\pi \sigma\upsilon\nu(2\pi)$ m/s ή $v_O = +5\pi$ m/s.

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή t_3 .



69. α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Κ προκύπτει: $\omega = 10\pi \text{ rad/s}$.

Έστω f η συχνότητα ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ. Είναι: $\omega = 2\pi f$ ή $f = 5 \text{ Hz}$.

Έστω λ το μήκος κύματος των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στο ελαστικό μέσο. Είναι: $v_g = \lambda f$

$$\text{ή } \lambda = 0,2 \text{ m.}$$

Οι θέσεις των δεσμών στον θετικό ημιάξονα Οχ δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\text{δεσμ}} = (2N+1)\frac{\lambda}{4}, \text{ με } N = 0, 1, 2, \dots (1).$$

Οι θέσεις των κοιλιών στον θετικό ημιάξονα x'Οχ δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\text{κοιλ}} = N\frac{\lambda}{2}, \text{ με } N = 0, 1, 2, \dots (2).$$

Η θέση του πρώτου δεσμού του στάσιμου κύματος στον θετικό ημιάξονα προκύπτει από τη σχέση (1) για $N = 0$. Είναι:

$$x_{\text{δεσμ}(1)} = +0,05 \text{ m.}$$

Η θέση της τρίτης κοιλίας του στάσιμου κύματος στον θετικό ημιάξονα προκύπτει από τη σχέση (2) για $N = 2$. Είναι:

$$x_{\text{κοιλ}(3)} = +0,2 \text{ m.}$$

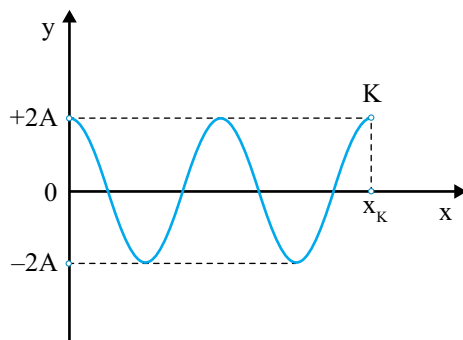
Επομένως, η ζητούμενη απόσταση είναι:

$$\Delta x = x_{\text{κοιλ}(3)} - x_{\text{δεσμ}(1)} \text{ ή } \Delta x = 0,15 \text{ m.}$$

β. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Κ προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσής του είναι:

$$|A'|_K = 0,2 \text{ m} \text{ ή } |A'|_K = 2A.$$

Επομένως, στο σημείο Κ σχηματίζεται κοιλία. Σύμφωνα με την εκφώνηση, μεταξύ του υλικού σημείου Ο και του υλικού σημείου Κ σχηματίζονται άλλες τρεις κοιλίες. Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Κ κάποια χρονική στιγμή στην οποία το υλικό σημείο Ο βρίσκεται στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του.



Από το διάγραμμα προκύπτει ότι η θέση του υλικού σημείου Κ στον θετικό ημιάξονα Οχ, είναι: $x_K = +2\lambda$ ή $x_K = +0,4 \text{ m}$.

γ. Το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί το σημείο Κ στο χρονικό διάστημα Δt , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 , είναι: $N = f\Delta t$ ή $N = f(t_1 - 0)$

$$\text{ή } N = 10 \text{ ταλαντώσεις.}$$

Σε κάθε ταλάντωση το υλικό σημείο Κ διανύει διάστημα ίσο με $4|A'_K|$. Επομένως, το διάστημα που διανύει το υλικό σημείο Κ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $s = N4|A'_K|$ ή $s = 40|A'_K|$ ή $s = 8 \text{ m}$.

δ. Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του ταλαντούμενου υλικού σημείου Λ δίνεται από τη σχέση: $\alpha_\Lambda = -\omega^2 A'_\Lambda \eta\mu(\omega t)$

$$\text{ή } \alpha_\Lambda = -\omega^2 2A \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } \alpha_\Lambda = -200 \sigma\upsilon\nu(7\pi) \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή } \alpha_\Lambda = +200 \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.)}$$

ε. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Λ από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση:

$$y_\Lambda = 2A \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } y_\Lambda = 0,2 \sigma\upsilon\nu(7\pi) \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή } y_\Lambda = -0,2 \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.)}$$

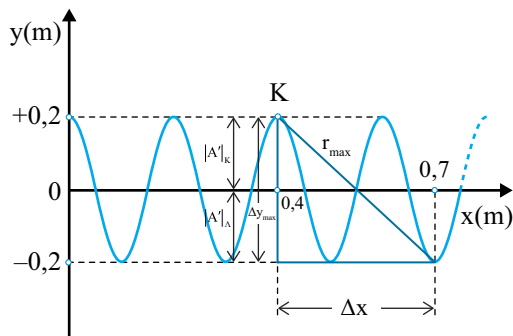
$$\text{ή } y_\Lambda = 0,2 \eta\mu(10\pi t + \pi) \text{ (S.I.)}$$

Από τις χρονικές εξισώσεις των απομακρύνσεων των υλικών σημείων Κ και Λ προκύπτει ότι η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Λ και Κ είναι $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$. Επομένως, τις χρονικές στιγμές στις οποίες το υλικό σημείο Κ βρίσκεται στη θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης, το υλικό σημείο Λ βρίσκεται στη θέση μέγιστης αρνητικής απομάκρυνσης. Τα υλικά σημεία Κ και Λ απέχουν μεταξύ τους τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση τις χρονικές στιγμές στις οποίες φτάνουν στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους. Σύμφωνα με το στιγμιότυπο του ακόλουθου σχήματος, η μέγιστη απόσταση μεταξύ των σημείων Κ και Λ υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } r_{\max} = \sqrt{(\Delta y_{\max})^2 + (\Delta x)^2}$$

$$\text{ή } r_{\max} = \sqrt{(|A'|_K + |A'|_\Lambda)^2 + (x_\Lambda - x_K)^2}$$

$$\text{ή } r_{\max} = 0,5 \text{ m.}$$



70. α. Από το διάγραμμα (α) προκύπτει: $\lambda = 0,3 \text{ m}$, ενώ από το διάγραμμα (β) προκύπτει: $T = 0,2\pi \text{ s}$ και $|A'|_\Lambda = 0,8 \text{ m}$.

$$\text{Είναι: } |A'|_\Lambda = 2A \left| \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda}\right) \right|$$

$$\text{ή } A = \frac{|A'|_\Lambda}{2 \left| \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda}\right) \right|}$$

$$\text{ή } A = 0,4 \text{ m.}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = 2A \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

$$\text{ή } y = 0,8 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{20\pi x}{3}\right) \eta\mu(10t) \text{ (S.I.)}$$

β. Επειδή είναι $|A'|_\Lambda = 2A$, στο υλικό σημείο Λ σχηματίζεται κοιλία του στάσιμου κύματος.

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του υλικού σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha_\Lambda = -\omega^2 A'_\Lambda \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } \alpha_\Lambda = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 2A \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda}\right) \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

$$\text{ή } \alpha_\Lambda = -80 \sigma\upsilon\nu(6\pi) \eta\mu(10t) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή } \alpha_\Lambda = -80 \eta\mu(10t) \text{ (S.I.)}$$

γ. Οι θέσεις των δεσμών στον θετικό ημιάξονα Ox δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\text{δεσμ}} = (2N+1)\frac{\lambda}{4}, \text{ με } N = 0, 1, 2, \dots$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των δεσμών που σχηματίζονται μεταξύ των υλικών σημείων O και Λ , λύνουμε την ανίσωση:

$$0 < x_{\text{δεσμ}} < x_{\Lambda} \quad \text{ή} \quad 0 < (2N+1)\frac{\lambda}{4} < x_{\Lambda}$$

$$\text{ή} \quad 0 < 2N+1 < \frac{4x_{\Lambda}}{\lambda} \quad \text{ή} \quad 0 < 2N+1 < 12$$

$$\text{ή} \quad -\frac{1}{2} < N < 5,5 \quad \text{ή} \quad N = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Επομένως, μεταξύ των σημείων O και Λ σχηματίζονται **6 δεσμοί**.

δ. Το πλάτος της ταλάντωσης των κοιλιών είναι: $|A'|_{\text{κοιλ}} = 2A$ ή $|A'|_{\text{κοιλ}} = 0,8 \text{ m}$.

Από το δοθέν στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή t_1 προκύπτει ότι οι κοιλίες τη χρονική στιγμή t_1 έχουν απομάκρυνση: $y_{\text{κοιλ}} = \pm 0,4 \text{ m}$ ή $|y|_{\text{κοιλ}} = \frac{|A'|_{\text{κοιλ}}}{2}$.

Ο λόγος της κινητικής ενέργειας προς τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης μιας κοιλίας του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή t_1

$$\text{είναι: } \frac{K_{\text{κοιλ}}}{U_{\text{κοιλ}}} = \frac{E_{\text{κοιλ}} - U_{\text{κοιλ}}}{U_{\text{κοιλ}}}$$

$$\text{ή} \quad \frac{K_{\text{κοιλ}}}{U_{\text{κοιλ}}} = \frac{E_{\text{κοιλ}}}{U_{\text{κοιλ}}} - 1$$

$$\text{ή} \quad \frac{K_{\text{κοιλ}}}{U_{\text{κοιλ}}} = \frac{\frac{1}{2}D(A'_{\text{κοιλ}})^2}{\frac{1}{2}D(y_{\text{κοιλ}})^2} - 1$$

$$\text{ή} \quad \frac{K_{\text{κοιλ}}}{U_{\text{κοιλ}}} = 3.$$

Ο λόγος της κινητικής ενέργειας προς τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ο ίδιος

για όλα τα ταλαντούμενα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου τη χρονική στιγμή t_1 .

Επομένως, για το υλικό σημείο Λ τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$\frac{K_{\Lambda}}{U_{\Lambda}} = 3 \quad \text{ή} \quad U_{\Lambda} = \frac{K_{\Lambda}}{3}.$$

Έστω v_{Λ} το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Λ έχουμε: $E_{\Lambda} = K_{\Lambda} + U_{\Lambda}$

$$\text{ή} \quad E_{\Lambda} = K_{\Lambda} + \frac{K_{\Lambda}}{3} \quad \text{ή} \quad E_{\Lambda} = \frac{4}{3}K_{\Lambda}$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}D(A'_{\Lambda})^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}mv_{\Lambda}^2$$

$$\text{ή} \quad m\omega^2(A'_{\Lambda})^2 = \frac{4}{3}mv_{\Lambda}^2 \quad \text{ή} \quad v_{\Lambda} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega|A'_{\Lambda}|$$

$$\text{ή} \quad v_{\Lambda} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2\pi}{T}|A'_{\Lambda}| \quad \text{ή} \quad v_{\Lambda} = 4\sqrt{3} \text{ m/s}.$$

71. α. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών του στάσιμου κύματος είναι ίση με $\lambda/2$. Επομένως, είναι: $\frac{\lambda}{2} = 0,25 \text{ m}$

$$\text{ή} \quad \lambda = 0,5 \text{ m}.$$

Η απόσταση μεταξύ των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του υλικού σημείου O , στο οποίο σχηματίζεται κοιλία, είναι ίση με $4A$. Επομένως, είναι: $4A = 0,1$ ή $A = 0,025 \text{ m}$.

Από το δοθέν διάγραμμα της επιτάχυνσης του υλικού σημείου K σε συνάρτηση με τον χρόνο προκύπτει: $\frac{3T}{2} = 0,15\pi \text{ s}$ ή $T = 0,1 \text{ s}$.

$$\text{Είναι: } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \omega = 20\pi \text{ rad/s}.$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση: $y = 2A\sigma\upsilon\upsilon\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\eta\mu(\omega t)$

$$\text{ή} \quad y = 0,05\sigma\upsilon\upsilon(4\pi x)\eta\mu(20\pi t) \text{ (S.I.)}.$$

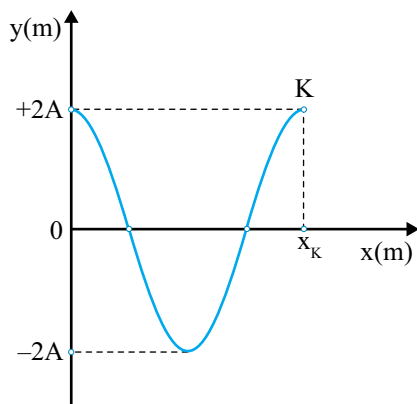
β. Από το δοθέν διάγραμμα της επιτάχυνσης του υλικού σημείου Κ σε συνάρτηση με τον χρόνο προκύπτει ακόμη: $a_{\max(K)} = 200 \text{ m/s}^2$.

Είναι: $a_{\max(K)} = \omega^2 |A'|_K$ ή $|A'|_K = 0,05 \text{ m}$.

γ. Το πλάτος της ταλάντωσης μιας κοιλίας είναι: $|A'|_{\text{κοιλ.}} = 2A$ ή $|A'|_{\text{κοιλ.}} = 0,05 \text{ m}$.

Επειδή ισχύει: $|A'|_K = 2A$, στο σημείο Κ σχηματίζεται κοιλία του στάσιμου κύματος. Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Κ κάποια χρονική στιγμή στην οποία το υλικό σημείο Κ βρίσκεται στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του. Από το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος προκύπτει ότι η θέση του σημείου Κ στον ημιάξονα Οχ, είναι:

$x_K = +\lambda$ ή $x_K = +0,5 \text{ m}$.



δ. Οι θέσεις των δεσμών στον ημιάξονα Οχ δίνονται από τη σχέση: $x_{\text{δεσμ.}} = (2N+1)\frac{\lambda}{4}$,

με $N = 0, 1, 2, 3, \dots$ (1).

Η θέση του τρίτου δεσμού στον θετικό ημιάξονα προκύπτει από τη σχέση (1) για $N = 2$. Είναι: $x_{\text{δεσμ}(3)} = 5\frac{\lambda}{4}$

ή $x_{\text{δεσμ}(3)} = +0,625 \text{ m}$.

Οι θέσεις των κοιλιών στον ημιάξονα Οχ δίνονται από τη σχέση:

$x_{\text{κοιλ.}} = N\frac{\lambda}{2}$, με $N = 0, 1, 2, 3, \dots$ (2).

Η θέση της τρίτης κοιλίας δεξιά του σημείου Ο προκύπτει από τη σχέση (2) για $N = 3$. Είναι:

$x_{\text{κοιλ}(3)} = +1,5\lambda$ ή $x_{\text{κοιλ}(3)} = +0,75 \text{ m}$.

Για το υλικό σημείο Λ, ισχύει: $|A'|_{\Lambda} = \frac{|A'|_K}{2}$

ή $2A \left| \sin\left(\frac{2\pi x_{\Lambda}}{\lambda}\right) \right| = A$

ή $\left| \sin\left(\frac{2\pi x_{\Lambda}}{\lambda}\right) \right| = \frac{1}{2}$

ή $\sin\left(\frac{2\pi x_{\Lambda}}{\lambda}\right) = \pm \frac{1}{2}$. Επομένως είναι:

$\sin\left(\frac{2\pi x_{\Lambda}}{\lambda}\right) = +\frac{1}{2}$ (3),

$\sin\left(\frac{2\pi x_{\Lambda}}{\lambda}\right) = -\frac{1}{2}$ (4).

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$\sin\left(\frac{2\pi x_{\Lambda}}{\lambda}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

ή $\frac{2\pi x_{\Lambda}}{\lambda} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ (5),

$\frac{2\pi x_{\Lambda}}{\lambda} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3}$ (6).

Από τη σχέση (5) προκύπτει:

$x_{\Lambda} = \kappa\lambda + \frac{\lambda}{6}$, με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ (7).

Από τη σχέση (6) προκύπτει:

$x_{\Lambda} = \kappa\lambda - \frac{\lambda}{6}$, με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ (8).

Από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\sin\left(\frac{2\pi x_{\Lambda}}{\lambda}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\text{ή } \frac{2\pi x_{\Lambda}}{\lambda} = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \quad (9),$$

$$\frac{2\pi x_{\Lambda}}{\lambda} = 2\kappa\pi + 2\pi - \frac{2\pi}{3} \quad (10).$$

Από τη σχέση (9) προκύπτει:

$$x_{\Lambda} = \kappa\lambda + \frac{\lambda}{3}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots (11).$$

Από τη σχέση (10) προκύπτει:

$$x_{\Lambda} = \kappa\lambda + \frac{2\lambda}{3}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots (12).$$

Το σημείο Λ βρίσκεται μεταξύ του τρίτου δεσμού και της τρίτης κοιλίας δεξιά του σημείου Ο. Επομένως, ισχύει:

$$x_{\text{δεσμ}(3)} < x_{\Lambda} < x_{\text{κοιλ}(3)} \quad (13).$$

Από τη σχέση (13), λόγω της σχέσης (7),

$$\text{έχουμε: } 0,625 < 0,5\kappa + \frac{0,5}{6} < 0,75$$

$$\text{ή } 3,75 < 3\kappa + 0,5 < 4,5$$

$$\text{ή } \frac{3,25}{3} < \kappa < \frac{4}{3} \quad \text{ή } 1,08 < \kappa < 1,33.$$

Δεν υπάρχει ακέραια τιμή του κ.

Από τη σχέση (13), λόγω της σχέσης (8),

$$\text{έχουμε: } 0,625 < 0,5\kappa - \frac{0,5}{6} < 0,75$$

$$\text{ή } 3,75 < 3\kappa - 0,5 < 4,5$$

$$\text{ή } \frac{4,25}{3} < \kappa < \frac{5}{3} \quad \text{ή } 1,41 < \kappa < 1,66.$$

Δεν υπάρχει ακέραια τιμή του κ.

Από τη σχέση (13), λόγω της σχέσης (11),

$$\text{έχουμε: } 0,625 < 0,5\kappa + \frac{0,5}{3} < 0,75$$

$$\text{ή } 1,875 < 1,5\kappa + 0,5 < 2,25$$

$$\text{ή } \frac{1,375}{1,5} < \kappa < \frac{1,75}{1,5}$$

$$\text{ή } 0,91 < \kappa < 1,16 \quad \text{ή } \kappa = 1.$$

Από τη σχέση (11) για κ = 1, προκύπτει:

$$x_{\Lambda} = +\frac{2}{3} \text{ m.}$$

Από τη σχέση (13), λόγω της σχέσης (12),

$$\text{έχουμε: } 0,625 < 0,5\kappa + \frac{1}{3} < 0,75$$

$$\text{ή } 1,875 < 1,5\kappa + 1 < 2,25$$

$$\text{ή } \frac{0,875}{1,5} < \kappa < \frac{1,25}{1,5} \quad \text{ή } 0,58 < \kappa < 0,83.$$

Δεν υπάρχει ακέραια τιμή του κ.

Επομένως, η θέση του σημείου Λ είναι:

$$x_{\Lambda} = +\frac{2}{3} \text{ m.}$$

ε. Η αρχική συχνότητα διάδοσης των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή είναι:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{ή } f = 10 \text{ Hz.}$$

Η ταχύτητα διάδοσης των τρέχοντων κυμάτων είναι: $v_{\delta} = \lambda f$ ή $v_{\delta} = 5 \text{ m/s.}$

Έστω λ' και f' το νέο μήκος κύματος και η νέα συχνότητα αντίστοιχα των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στο ελαστικό μέσο. Εφόσον τα σημεία Ο και Κ παραμένουν κοιλίες και ανάμεσά τους σχηματίζονται τέσσερις δεσμοί, ισχύει:

$$x_K = 2\lambda' \quad \text{ή } \lambda' = 0,25 \text{ m.}$$

Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων είναι η ίδια. Επομένως, είναι:

$$v_{\delta} = \lambda' f' \quad \text{ή } f' = 20 \text{ Hz.}$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{f' - f}{f} \cdot 100\% \quad \text{ή } \pi = 100\%.$$

72. α. Από τη δοθείσα εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Κ προκύπτει:

$\omega = 2\pi \text{ rad/s}$. Έστω f η συχνότητα ταλάντωσης του σημείου Κ. Είναι: $\omega = 2\pi f$

ή $f = 1 \text{ Hz}$.

Το μήκος κύματος των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στο ελαστικό μέσο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_s = \lambda f \quad \text{ή} \quad \lambda = 3 \text{ m}.$$

Από τη δοθείσα εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Κ προκύπτει ακόμη:

$$A'_K = -0,4 \text{ m}.$$

$$\text{Είναι: } A'_K = 2A \sin\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή} \quad A = \frac{A'_K}{2 \sin\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right)}$$

$$\text{ή} \quad A = \frac{A'_K}{2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \quad \text{ή} \quad A = 0,4 \text{ m}.$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση: $y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta \mu(\omega t)$

$$\text{ή} \quad y = 0,8 \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) \eta \mu(2\pi t) \text{ (S.I.)}$$

β. Οι θέσεις των δεσμών στον άξονα $x'Ox$ δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\text{δεσμ}} = (2N+1) \frac{\lambda}{4}, \text{ με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Το πλήθος των δεσμών μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Κ υπολογίζεται λύνοντας την ανίσωση: $0 < x_{\text{δεσμ}} < x_K$

$$\text{ή} \quad 0 < (2N+1) \frac{\lambda}{4} < x_K \quad \text{ή} \quad 0 < 2N+1 < \frac{4x_K}{\lambda}$$

$$\text{ή} \quad 0 < 2N+1 < \frac{4}{3} \quad \text{ή} \quad -\frac{1}{2} < N < \frac{1}{6}$$

$$\text{ή} \quad N = 0.$$

Επομένως, μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Κ σχηματίζεται ένας δεσμός. Εφόσον μεταξύ των σημείων Ο και Κ σχηματίζεται ένας δεσμός, η διαφορά φάσης των ταλαντώσεών τους είναι $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$.

Επομένως, τις χρονικές στιγμές στις οποίες το υλικό σημείο Ο βρίσκεται στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του, το υλικό σημείο Κ βρίσκεται στην ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσής του. Η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Κ είναι: $\Delta y_{\max} = |A'|_O + |A'|_K$

$$\text{ή} \quad \Delta y_{\max} = 2A + |A'|_K \quad \text{ή} \quad \Delta y_{\max} = 1,2 \text{ m}.$$

γ. Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το υλικό σημείο Ο βρίσκεται στη θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης, το υλικό σημείο Κ βρίσκεται στη θέση μέγιστης αρνητικής απομάκρυνσης. Δηλαδή, είναι:

$$y_K = -|A'|_K \quad \text{ή} \quad y_K = -0,4 \text{ m}.$$

Η επιτάχυνση του σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$a_K = -\omega^2 y_K \quad \text{ή} \quad a_K = +16 \text{ m/s}^2.$$

δ. Έστω λ' το νέο μήκος κύματος των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στο ελαστικό μέσο. Εφόσον στο σημείο Κ σχηματίζεται η τέταρτη κοιλία δεξιά του σημείου Ο, ισχύει:

$$x_K = 2\lambda' \quad \text{ή} \quad \lambda' = 0,5 \text{ m}.$$

Η ταχύτητα διάδοσης των δύο τρέχοντων κυμάτων είναι η ίδια. Έστω f' η νέα συχνότητα των δύο κυμάτων. Είναι:

$$v_s = \lambda' f' \quad \text{ή} \quad f' = 6 \text{ Hz}.$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης του υλικού σημείου K μετά τη μεταβολή της συχνότητας των δύο τρέχοντων κυμάτων, είναι:

$$E_K = \frac{1}{2} D(A'_K)^2 \quad \text{ή} \quad E_K = \frac{1}{2} m \omega'^2 (2A)^2$$

$$\text{ή} \quad E_K = \frac{1}{2} m (2\pi f')^2 4A^2$$

$$\text{ή} \quad E_K = 8\pi^2 m f'^2 A^2$$

$$\text{ή} \quad E_K = 9.216 \cdot 10^{-4} \text{ J.}$$

73. α. Από το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος προκύπτει ότι: $3\lambda = 6 \text{ m}$ ή $\lambda = 2 \text{ m}$.

Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου O είναι ίσο με $2A$. Επομένως, η απόσταση μεταξύ των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του σημείου O είναι ίση με $4A$. Επομένως, είναι: $4A = 0,4 \text{ m}$ ή $A = 0,1 \text{ m}$.

Το ελάχιστο χρονικό διάστημα μετάβασης του υλικού σημείου O από τη μια ακραία θέση στην άλλη είναι ίσο με $T/2$. Επομένως, είναι: $\frac{T}{2} = 0,1 \text{ s}$ ή $T = 0,2 \text{ s}$.

$$\text{Είναι: } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \omega = 10\pi \text{ rad/s.}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή} \quad y = 0,2 \sin(\pi x) \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.).}$$

β. Από το δοθέν στιγμιότυπο προκύπτει ότι η απομάκρυνση του υλικού σημείου O τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $y_0 = +0,1\sqrt{2} \text{ m}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο O έχου-

$$\text{με: } E = K + U \quad \text{ή} \quad K = \frac{1}{2} D(A'_0)^2 - \frac{1}{2} D y_0^2.$$

Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$\frac{K}{U} = \frac{\frac{1}{2} D(A'_0)^2 - \frac{1}{2} D y_0^2}{\frac{1}{2} D y_0^2}$$

$$\text{ή} \quad \frac{K}{U} = \frac{(A'_0)^2 - y_0^2}{y_0^2} \quad \text{ή} \quad \frac{K}{U} = \frac{(2A)^2 - y_0^2}{y_0^2}$$

$$\text{ή} \quad \frac{K}{U} = 1 \quad (1).$$

Η σχέση (1) ισχύει τη χρονική στιγμή t_1 για όλα τα ταλαντούμενα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου.

γ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου O δίνεται από τη σχέση:

$$y_0 = 2A \eta\mu(\omega t) \quad \text{ή} \quad y_0 = 0,2 \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.)} \quad (2).$$

Από τη σχέση (2) για $y_0 = +0,1\sqrt{2} \text{ m}$ και $t = t_1$ προκύπτει: $\eta\mu(10\pi t_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{ή} \quad \eta\mu(10\pi t_1) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right). \text{ Είναι:}$$

$$10\pi t_1 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (3),$$

$$10\pi t_1 = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4}, \quad \text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (4).$$

Από τη σχέση (3) για $\kappa = 0$, προκύπτει:

$$t_1 = 0,025 \text{ s.}$$

Από τη σχέση (3) για $\kappa = 1$, προκύπτει:

$$t_1 = 0,225 \text{ s.}$$

Από τη σχέση (4) για $\kappa = 0$, προκύπτει:

$$t_1 = 0,075 \text{ s.}$$

Από τη σχέση (4) για $\kappa = 1$, προκύπτει:

$$t_1 = 0,275 \text{ s.}$$

Εφόσον το υλικό σημείο Ο τη χρονική στιγμή t_1 διέρχεται από τη θέση με απομάκρυνση $y_O = +0,1\sqrt{2} \text{ m}$ για **πρώτη φορά** μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$, δεκτή λύση είναι η $t_1 = 0,025 \text{ s}$.

δ. Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Ο τη χρονική στιγμή t_2 προκύπτει από τη σχέση (2), θέτοντας σε αυτήν όπου t το t_2 . Είναι:

$$y_O = 0,2\eta\mu(10\pi t_2) \quad \text{ή} \quad y_O = 0,2\eta\mu\frac{3\pi}{2} \text{ m}$$

$$\text{ή} \quad y_O = -0,2 \text{ m}.$$

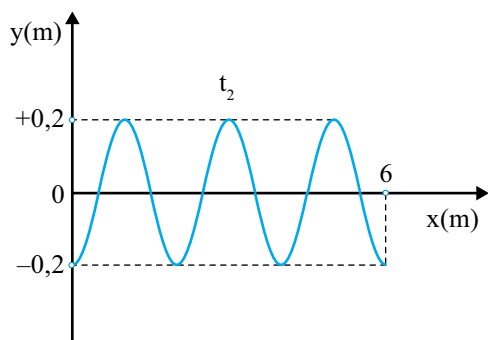
Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_2 δίνεται από τη σχέση:

$$y_\Lambda = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda}\right)\eta\mu(\omega t_2)$$

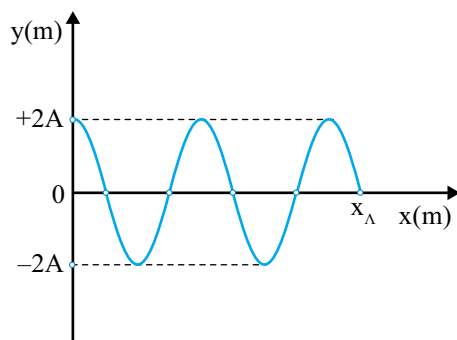
$$\text{ή} \quad y_\Lambda = 2A\sigma\upsilon\nu(6\pi)\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) \text{ m}$$

$$\text{ή} \quad y_\Lambda = -0,2 \text{ m}.$$

Όπως φαίνεται από το δοθέν στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος, μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Λ σχηματίζονται έξι δεσμοί. Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος μεταξύ των σημείων Ο και Λ ($x_\Lambda = +6 \text{ m}$) τη χρονική στιγμή t_2 .



74. α. Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Λ κάποια χρονική στιγμή στην οποία τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους. Από το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, προκύπτει: $x_\Lambda = +\frac{9\lambda}{4}$ ή $\lambda = 0,4 \text{ m}$.



β. Από το δοθέν διάγραμμα της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Κ από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με τον χρόνο προκύπτει: $T = \frac{1}{18} \text{ s}$ ή $f = 18 \text{ Hz}$

$$\text{και} \quad |A'|_K = 0,1 \text{ m}.$$

$$\text{Είναι:} \quad |A'|_K = 2A \left| \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right) \right| \quad \text{ή} \quad A = 0,1 \text{ m}.$$

$$\text{Είναι:} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \omega = 36\pi \text{ rad/s}.$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή} \quad y = 0,2\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\eta\mu(36\pi t) \text{ (S.I.)}.$$

γ. Ανάμεσα στα σημεία Μ και Ν σχηματίζεται ένας δεσμός. Επομένως, η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Μ και Ν είναι $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$. Εφόσον τα υλικά σημεία Μ και Ν είναι κοιλίες και η διαφορά φάσης των ταλαντώσεών τους είναι ίση με $\pi \text{ rad}$, οι απομακρύνσεις y_M και y_N από τη θέση ισορροπίας των υλικών σημείων Μ και Ν, αντίστοιχα, συνδέονται κάθε χρονική στιγμή με τη σχέση: $y_M = -y_N$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Μ έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D(A'_M)^2 = \frac{1}{2} m v_M^2 + \frac{1}{2} D y_M^2$$

$$\text{ή } m \omega^2 (2A)^2 = m v_M^2 + m \omega^2 y_M^2$$

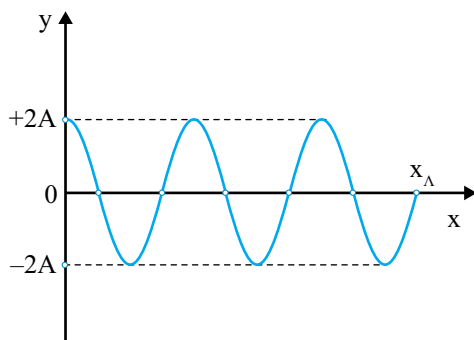
$$\text{ή } y_M = \pm \sqrt{4A^2 - \left(\frac{v_M}{\omega}\right)^2}$$

$$\text{ή } y_M = \pm 0,1\sqrt{3} \text{ m.}$$

Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 το σημείο Μ επιβραδύνεται κινούμενο με θετική ταχύτητα εί-
ναι: $y_M = +0,1\sqrt{3} \text{ m}$.

Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 είναι:
 $y_N = -0,1\sqrt{3} \text{ m}$.

δ. Έστω λ' και f' το νέο μήκος κύματος και η νέα συχνότητα αντίστοιχα των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή. Στο διάγραμμα του επόμενου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος μεταξύ των σημείων Ο και Λ κάποια χρονική στιγμή στην οποία τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους.



Από το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος

$$\text{προκύπτει: } x_\Lambda = \frac{11\lambda'}{4} \text{ ή } \lambda' = \frac{3,6}{11} \text{ m.}$$

$$\text{Είναι: } v_\delta = \lambda' f' \text{ ή } f' = \frac{v_\delta}{\lambda'} \text{ ή } f' = \frac{\lambda f}{\lambda'}$$

$$\text{ή } f' = 22 \text{ Hz.}$$

Η επί τοις εκατό (%) μεταβολή της ενέργειας ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο υπολογί-

$$\text{ζεται από τη σχέση: } \pi = \frac{E'_O - E_O}{E_O} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left(\frac{E'_O}{E_O} - 1 \right) \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left[\frac{\frac{1}{2} D_{\text{τελ}} (A'_{O(\text{τελ})})^2}{\frac{1}{2} D_{\text{αρχ}} (A'_{O(\text{αρχ})})^2} - 1 \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left[\frac{m(2\pi f')^2 (2A)^2}{m(2\pi f)^2 (2A)^2} - 1 \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left[\left(\frac{f'}{f} \right)^2 - 1 \right] \cdot 100\% \text{ ή } \pi = 49,38\%.$$

75. α. Από τη δοθείσα εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Ο προκύπτει:

$$2A = 0,02 \text{ m ή } A = 0,01 \text{ m}$$

$$\text{και } \omega = 20\pi \text{ rad/s.}$$

Έστω f η συχνότητα ταλάντωσης του σημείου Ο. Είναι: $\omega = 2\pi f$ ή $f = 10 \text{ Hz}$.

Η απόσταση του πλησιέστερου δεσμού από το δεξί άκρο Γ της χορδής, το οποίο είναι επίσης δεσμός, είναι ίση με $\lambda/2$. Επομένως, είναι: $\frac{\lambda}{2} = 0,3 \text{ m}$ ή $\lambda = 0,6 \text{ m}$.

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση: $y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu(\omega t)$

$$\text{ή } y = 0,02 \eta\mu\left(\frac{10\pi x}{3}\right) \eta\mu(20\pi t) \text{ (S.I.).}$$

β. Έστω ένα υλικό σημείο Ζ της χορδής, ίδιας μάζας με το υλικό σημείο Ο, για το οποίο ισχύει: $E_Z = \frac{1}{4} E_O$ ή $\frac{1}{2} D(A'_Z)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} D(A'_O)^2$

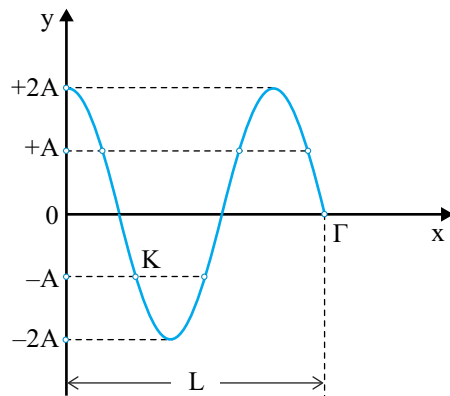
$$\text{ή } |A'_Z| = \frac{|A'_O|}{2} \quad \text{ή } |A'_Z| = \frac{2A}{2}$$

$$\text{ή } |A'_Z| = A.$$

Επομένως, στη χορδή υπάρχουν πέντε υλικά σημεία τα οποία έχουν πλάτος ταλάντωσης ίσο με A .

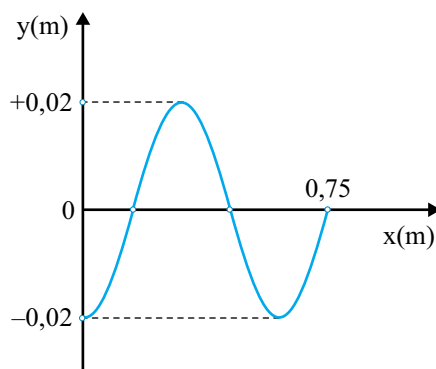
Στο διάγραμμα του σχήματος 1 απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος κάποια χρονική στιγμή στην οποία το υλικό σημείο Ο βρίσκεται στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του. Από το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος προκύπτει:

$$L = \frac{5\lambda}{4} \quad \text{ή } L = 0,75 \text{ m}.$$



Σχήμα 1

γ. Το ζητούμενο στιγμιότυπο απεικονίζεται στο διάγραμμα του σχήματος 2.



Σχήμα 2

δ. Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ είναι: $|A'_K| = A$ ή $|A'_K| = 0,01 \text{ m}$.

Από το στιγμιότυπο του σχήματος (1) προκύπτει ότι τα υλικά σημεία Ο και Κ έχουν ανάμεσά τους έναν δεσμό. Επομένως, οι ταλαντώσεις των υλικών σημείων Ο και Κ έχουν κάθε χρονική στιγμή διαφορά φάσης ίση με $\pi \text{ rad}$.

Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Ο προκύπτει ότι: $\varphi_0 = 20\pi \text{ (S.I.)}$.

Επομένως, η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ είναι η:

$$\varphi_K = 20\pi t + \pi \text{ (S.I.)}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

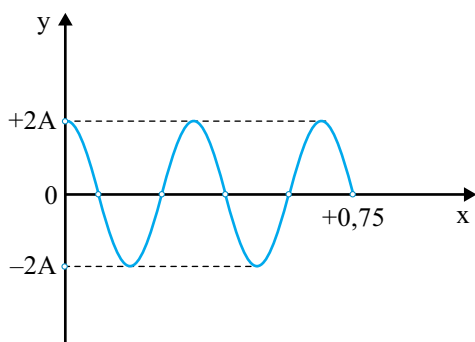
$$y_K = |A'|_K \eta\mu\varphi_K$$

$$\text{ή } y_K = 0,01\eta\mu(20\pi t + \pi) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή } y_K = -0,01\eta\mu(20\pi t) \text{ (S.I.)}$$

ε. Έστω λ' και f' το νέο μήκος κύματος και η νέα συχνότητα αντίστοιχα των τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή.

Στο διάγραμμα του σχήματος 3 απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος κάποια χρονική στιγμή στην οποία τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσης τους.



Σχήμα 3

Από το στιγμιότυπο του σχήματος 3 προκύπτει: $L = \frac{9\lambda'}{4}$ ή $\lambda' = \frac{1}{3} \text{ m}$.

Επομένως, είναι: $v_\delta = \lambda' f'$

$$\text{ή } f' = \frac{v_\delta}{\lambda'} \text{ ή } f' = \frac{\lambda f}{\lambda'}$$

$$\text{ή } f' = 18 \text{ Hz}$$

76. α. Στο δοθέν στιγμιότυπο οι κοιλίες του στάσιμου κύματος βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης τους. Από το δοθέν στιγμιότυπο προκύπτει: $2A = 0,04 \text{ m}$

$$\text{ή } A = 0,02 \text{ m και } \lambda = 0,6 \text{ m}$$

Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου Ο γίνεται ίση με μηδέν για τέταρτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$, ισχύει:

$$t_1 = \frac{7T}{4} \text{ ή } T = 0,1 \text{ s}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κυμάτων δίνεται τη σχέση:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$\text{ή } y = 0,04\sigma\upsilon\nu\left(\frac{10\pi x}{3}\right)\eta\mu(20\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$\beta. \text{ Είναι: } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ ή } \omega = 20\pi \text{ rad/s}$$

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha_K = -\omega^2 A'_K \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } \alpha_K = -\omega^2 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right)\eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } \alpha_K = -160\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}\right)\eta\mu(20\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή } \alpha_K = -80\sqrt{2}\eta\mu(20\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$\gamma. \text{ Είναι: } v_{\max(\Lambda)} = v_{\max(\text{O})}$$

$$\text{ή } \omega|A'|_\Lambda = \omega|A'|_O \text{ ή } |A'|_\Lambda = |A'|_O$$

$$\text{ή } |A'|_\Lambda = 2A$$

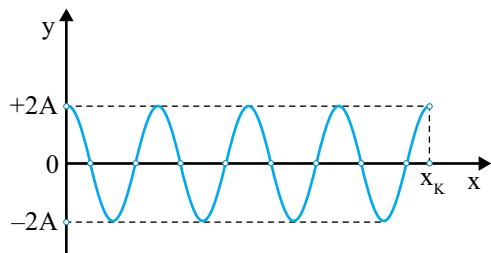
Επομένως, στο σημείο Λ σχηματίζεται η δεύτερη κοιλία του στάσιμου κύματος δεξιά του σημείου Ο. Επομένως, είναι:

$$x_\Lambda = +\lambda \text{ ή } x_\Lambda = +0,6 \text{ m}$$

δ. Η αρχική συχνότητα των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή είναι:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{ή} \quad f = 10 \text{ Hz.}$$

Έστω λ' το νέο μήκος κύματος των δύο τρέχοντων κυμάτων. Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Λ κάποια χρονική στιγμή στην οποία τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους.



Από το στιγμιότυπο προκύπτει:

$$x_{\Lambda} = +4\lambda' \quad \text{ή} \quad \lambda' = 0,15 \text{ m.}$$

Έστω f' η νέα συχνότητα των τρέχοντων κυμάτων. Είναι: $v_{\delta} = \lambda' f' \quad \text{ή} \quad \lambda f = \lambda' f'$

$$\text{ή} \quad f' = \frac{\lambda f}{\lambda'} \quad \text{ή} \quad f' = 40 \text{ Hz.}$$

Ο ζητούμενος λόγος υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } \frac{E_{K(1)}}{E_{K(2)}} = \frac{\frac{1}{2} D_1 (A'_{K(1)})^2}{\frac{1}{2} D_2 (A'_{K(2)})^2}$$

$$\text{ή} \quad \frac{E_{K(1)}}{E_{K(2)}} = \left[\frac{2\pi f \cdot 2A \sin\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right)}{2\pi f' \cdot 2A \sin\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda'}\right)} \right]^2$$

$$\text{ή} \quad \frac{E_{K(1)}}{E_{K(2)}} = \frac{1}{32}$$

77. α. Η απόσταση μεταξύ των θέσεων ισορροπίας δύο διαδοχικών κοιλιών είναι ίση με $\lambda/2$. Είναι: $\frac{\lambda}{2} = 0,05 \text{ m} \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,1 \text{ m.}$

Έστω A το πλάτος των δύο κυμάτων των οποίων η συμβολή δημιουργεί το στάσιμο κύμα στο ελαστικό μέσο. Αφού τα σημεία K και Λ είναι διαδοχικές κοιλίες του στάσιμου κύματος έχουν διαφορά φάσης $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$. Η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση στην οποία φτάνουν τα σημεία K και Λ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής τους είναι:

$$\Delta y_{\max} = |A'|_K + |A'|_{\Lambda} \quad \text{ή} \quad \Delta y_{\max} = 4A$$

$$\text{ή} \quad 4A = 0,16 \text{ m} \quad \text{ή} \quad A = 0,04 \text{ m.}$$

Τα σημεία K και Λ διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους κάθε $T/2$. Είναι:

$$\frac{T}{2} = 0,1 \text{ s} \quad \text{ή} \quad T = 0,2 \text{ s.}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

$$\text{ή} \quad y = 0,08 \sin(20\pi x) \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.).}$$

β. Οι θέσεις των κοιλιών στον θετικό ημιάξονα OX δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\text{κοιλ}} = N \frac{\lambda}{2}, \quad \text{με } N = 0, 1, 2, \dots \text{ (1).}$$

Η θέση του σημείου K προκύπτει από τη σχέση (1) για $N = 1$. Είναι:

$$x_K = +\frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad x_K = +0,05 \text{ m.}$$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των κοιλιών που σχηματίζονται μεταξύ των υλικών σημείων K και M, λύνουμε την ανίσωση:

$$x_K < x_{\text{κοιλ}} < x_M \quad \text{ή} \quad x_K < N \frac{\lambda}{2} < x_M$$

$$\text{ή } \frac{2x_K}{\lambda} < N < \frac{2x_M}{\lambda} \quad \text{ή } 1 < N < 4,4$$

$$\text{ή } N = 2, 3, 4.$$

Επομένως, μεταξύ των υλικών σημείων Κ και Μ σχηματίζονται **3 κοιλίες**.

Οι θέσεις τους προκύπτουν από τη σχέση (1):

$$\text{Για } N = 2: x_1 = +0,1 \text{ m.}$$

$$\text{Για } N = 3: x_2 = +0,15 \text{ m.}$$

$$\text{Για } N = 4: x_3 = +0,2 \text{ m.}$$

$$\gamma. \text{ Είναι: } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή } \omega = 10\pi \text{ rad/s.}$$

Έστω υ η ταχύτητα του ταλαντούμενου υλικού σημείου Ο τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο Ο έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή } E = 2K$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D(2A)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2$$

$$\text{ή } m \omega^2 4A^2 = 2m v^2$$

$$\text{ή } v = +\sqrt{2} \omega A \quad \text{ή } v = +0,4\pi\sqrt{2} \text{ m/s.}$$

δ. Έστω y_0 η απομάκρυνση του υλικού σημείου Ο τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Ο έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή } E = 2U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} D(2A)^2 = 2 \frac{1}{2} D y_0^2$$

$$\text{ή } y_0 = +\sqrt{2} A \quad \text{ή } y_0 = +0,04\sqrt{2} \text{ m.}$$

Μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Κ σχηματίζεται ένας δεσμός, οπότε η διαφορά φάσης των ταλαντώσεών τους είναι $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$.

Εφόσον τα υλικά σημεία Ο και Κ είναι κοιλίες του στάσιμου κύματος και η διαφορά φά-

σης των ταλαντώσεών τους είναι $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$, η απομάκρυνση του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$y_K = -y_O \quad \text{ή } y_K = -0,04\sqrt{2} \text{ m.}$$

Η κατακόρυφη απόσταση των υλικών σημείων Ο και Κ τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\Delta y = |y_O| + |y_K| \quad \text{ή } \Delta y = 0,08\sqrt{2} \text{ m.}$$

Η απόσταση μεταξύ των θέσεων ισορροπίας των υλικών σημείων Ο και Κ είναι:

$$\Delta x = x_K - x_O \quad \text{ή } \Delta x = 0,05 \text{ m.}$$

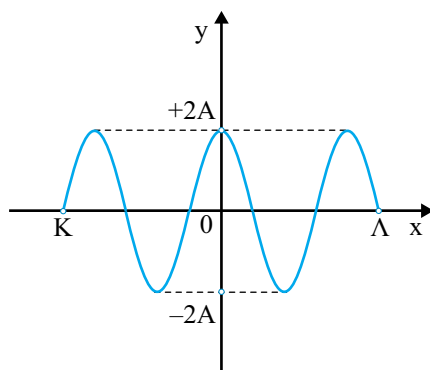
Επομένως, η απόσταση μεταξύ των σημείων Ο και Κ τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$d = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta x)^2} \quad \text{ή } d = \sqrt{153} \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

78. α. Έστω λ το μήκος κύματος των δύο τρέχοντων κυμάτων. Είναι:

$$v_\delta = \lambda f \quad \text{ή } \lambda = 2 \text{ m.}$$

Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος κάποια χρονική στιγμή στην οποία τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους.



Όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο, το μήκος L τη χορδής ΚΛ είναι:

$$L = 2,5\lambda \quad \text{ή} \quad L = 5 \text{ m.}$$

β. Έστω A το πλάτος των δύο τρέχοντων κυμάτων που συμβάλλουν για να δημιουργήσουν το στάσιμο κύμα. Είναι:

$$v_o = v_{\max(O)} \quad \text{ή} \quad v_o = \omega |A'|_o$$

$$\text{ή} \quad |A'|_o = \frac{v_{\max(O)}}{2\pi f} \quad \text{ή} \quad |A'|_o = 0,04 \text{ m}$$

$$\text{ή} \quad 2A = 0,04 \text{ m} \quad \text{ή} \quad A = 0,02 \text{ m.}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται κατά μήκος της χορδής δίνεται από τη σχέση: $y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu(2\pi ft)$

$$\text{ή} \quad y = 0,04 \sin(\pi x) \eta\mu(10\pi t),$$

$$\text{για} \quad -2,5 \text{ m} \leq x \leq 2,5 \text{ m.}$$

γ. Έστω y_o η απομάκρυνση του σημείου O τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο O , εξαιτίας του στάσιμου κύματος που έχει δημιουργηθεί στη χορδή, έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad E = 2U$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} DA_o'^2 = 2 \frac{1}{2} D y_o^2$$

$$\text{ή} \quad |y_o| = \frac{\sqrt{2}}{2} |A'|_o$$

$$\text{ή} \quad |y_o| = 0,02\sqrt{2} \text{ m.}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης του υλικού σημείου O τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha = \omega^2 |y_o| \quad \text{ή} \quad \alpha = 20\sqrt{2} \text{ m/s}^2.$$

δ. Επειδή η απόσταση d του υλικού σημείου Σ από το άκρο Λ της χορδής ισούται με $\lambda/4$, το σημείο Σ είναι κοιλία. Συνεπώς, ισχύει ότι:

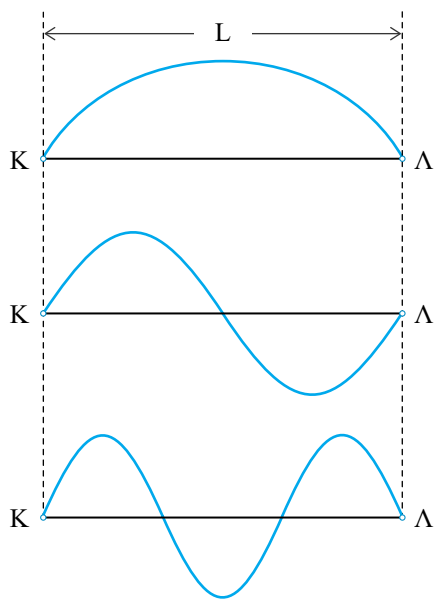
$$|A'|_{\Sigma} = 2A \quad \text{ή} \quad |A'|_{\Sigma} = 0,04 \text{ m.}$$

Η ενέργεια ταλάντωσης του υλικού σημείου Σ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2} DA_{\Sigma}'^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2} m \omega^2 A_{\Sigma}'^2$$

$$\text{ή} \quad E = 8 \cdot 10^{-4} \text{ J.}$$

ε. Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί μερικά από τα στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος που μπορούν να δημιουργηθούν στη χορδή ΚΛ.



Όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα, για να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα στη χορδή ΚΛ, πρέπει να ισχύει:

$$L = N \frac{\lambda}{2} \quad \text{με} \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

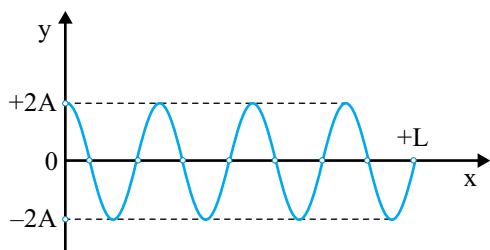
Από τη τελευταία σχέση προκύπτει:

$$L = \frac{Nv_\delta}{2f} \quad \text{ή} \quad f = \frac{Nv_\delta}{2L}$$

ή $f = N$ (S.I.), με $N = 1, 2, 3, \dots$ (1).

Η ελάχιστη τιμή της συχνότητας των δύο τρέχοντων κυμάτων για την οποία δημιουργείται στάσιμο κύμα στη χορδή προκύπτει από τη σχέση (1) για $N = 1$. Είναι: $f_{\min} = 1 \text{ Hz}$.

79. α. Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στη χορδή κάποια χρονική στιγμή στην οποία τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους.



Από το παραπάνω στιγμιότυπο προκύπτει:

$$L = \frac{15\lambda}{4} \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,4 \text{ m}.$$

Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών ευθυγραμμίσεων των υλικών σημείων της χορδής είναι ίσο με $T/2$. Είναι:

$$\frac{T}{2} = 0,05 \text{ s} \quad \text{ή} \quad T = 0,1 \text{ s}.$$

Στο παραπάνω χρονικό διάστημα τα υλικά σημεία που διανύουν τη μεγαλύτερη απόσταση είναι οι κοιλίες.

Η απόσταση που διανύουν οι κοιλίες στο χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών ευ-

θυγραμμίσεων της χορδής, είναι ίση με $4A$.

Είναι: $4A = 0,4 \text{ m}$ ή $A = 0,1 \text{ m}$.

Η εξίσωση που περιγράφει το στάσιμο κύμα που σχηματίζεται στη χορδή είναι η:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

$$\text{ή} \quad y = 0,2\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\eta\mu(20\pi t) \text{ (S.I.)}.$$

β. Οι θέσεις των κοιλιών στον ημιάξονα Ox δίνονται από τη σχέση:

$$x_{\text{κοιλ.}} = N\frac{\lambda}{2}, \quad \text{με } N = 0, 1, 2, \dots \text{ (1)}.$$

Η θέση x_3 της τρίτης κοιλίας στον θετικό ημιάξονα προκύπτει από τη σχέση (1) για $N = 3$.

Είναι: $x_3 = +0,6 \text{ m}$.

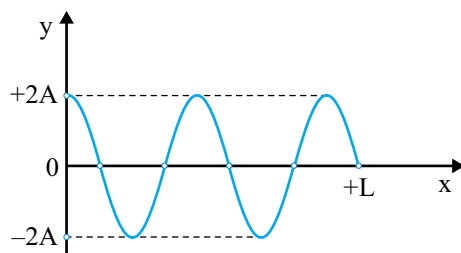
Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης της τρίτης κοιλίας, δεξιά του σημείου O δίνεται από τη σχέση:

$$v = \frac{2\pi}{T} 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_3}{\lambda}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

$$\text{ή} \quad v = 4\pi\sigma\upsilon\nu(3\pi)\sigma\upsilon\nu(20\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή} \quad v = -4\pi\sigma\upsilon\nu(20\pi t) \text{ (S.I.)}.$$

γ. Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στη χορδή κάποια χρονική στιγμή, μετά τη μεταβολή της συχνότητας ταλάντωσης του υλικού σημείου O , στην οποία τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους.



Έστω f' η νέα συχνότητα ταλάντωσης του σημείου Ο και λ' το νέο μήκος κύματος των τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή. Από το παραπάνω στιγμιότυπο προκύπτει: $L = \frac{9\lambda'}{4}$ ή $\lambda' = \frac{2}{3} \text{ m}$.

Η αρχική συχνότητα ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο είναι: $f = \frac{1}{T}$ ή $f = 10 \text{ Hz}$.

Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή είναι: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = 4 \text{ m/s}$.

Η ταχύτητα διάδοσης των δύο τρέχοντων κυμάτων μετά τη μεταβολή της συχνότητας ταλάντωσης του σημείου Ο παραμένει σταθερή. Είναι: $v_\delta = \lambda' f'$ ή $f' = 6 \text{ Hz}$.

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{E_{\text{τελ.}(O)} - E_{\text{αρχ.}(O)}}{E_{\text{αρχ.}(O)}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2} D'(2A)^2 - \frac{1}{2} D(2A)^2}{\frac{1}{2} D(2A)^2} \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left[\frac{m(\omega')^2}{m\omega^2} - 1 \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left[\left(\frac{2\pi f'}{2\pi f} \right)^2 - 1 \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = -64\%.$$

δ. Για να σχηματίζεται στάσιμο κύμα στη χορδή, πρέπει να ισχύει: $L = (2N+1) \frac{\lambda}{4}$

$$\text{ή } L = (2N+1) \frac{v_\delta}{4f} \text{ ή } f = \frac{(2N+1)v_\delta}{4L}$$

$$\text{ή } f = \frac{2N+1}{1,5}, \text{ με } N = 0, 1, 2, \dots (2) \text{ (S.I.)}$$

Η ελάχιστη συχνότητα ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο για την οποία σχηματίζεται στάσιμο κύμα στη χορδή προκύπτει από τη σχέση (2) για $N = 0$. Είναι: $f_{\min} = \frac{2}{3} \text{ Hz}$.

80. α. Η ελάχιστη απόσταση στην οποία φτάνουν δύο διαδοχικές κοιλίες κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής τους (τις χρονικές στιγμές στις οποίες διέρχονται από τις θέσεις ισορροπίας τους) είναι ίση με την απόσταση μεταξύ των θέσεων ισορροπίας τους. Δηλαδή, είναι:

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2} \text{ ή } \lambda = 0,6 \text{ m}.$$

Η διαφορά φάσης μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών του στάσιμου κύματος είναι $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$. Επομένως, η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση στην οποία φτάνουν δύο διαδοχικές κοιλίες κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής τους (τις χρονικές στιγμές στις οποίες φτάνουν σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους) είναι: $\Delta y_{\max} = 4A$.

Η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής

$$\text{τους είναι: } d_{\max} = \sqrt{(\Delta y_{\max})^2 + d_{\min}^2}$$

$$\text{ή } d_{\max}^2 = 16A^2 + \frac{\lambda^2}{4} \text{ ή } A = 0,1 \text{ m}.$$

Το ελάχιστο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί για να μεταβούν δύο διαδοχικές κοιλίες από τις θέσεις όπου η μεταξύ τους απόσταση είναι μέγιστη στις θέσεις όπου η μεταξύ τους απόσταση είναι ελάχιστη είναι ίσο με $T/4$. Είναι: $\Delta t = \frac{T}{4}$ ή $T = 0,4 \text{ s}$.

Οι εξισώσεις των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή

δίνονται από τις σχέσεις:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } y_1 = 0,1\eta\mu 2\pi\left(2,5t - \frac{5x}{3}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{και } y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } y_2 = 0,1\eta\mu 2\pi\left(2,5t + \frac{5x}{3}\right) \text{ (S.I.)}$$

β. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

$$\text{ή } y = 0,2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{10\pi x}{3}\right)\eta\mu(5\pi t) \text{ (S.I.) (1)}$$

γ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Ο προκύπτει από τη σχέση (1), θέτοντας σε αυτήν όπου $x = 0$. Είναι:

$$y_o = 0,2\eta\mu(5\pi t) \text{ (S.I.) (2)}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Κ προκύπτει από τη σχέση (1), θέτοντας σε αυτήν όπου x το $x_K = +0,5$ m.

$$\text{Είναι: } y_K = 0,2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{3}\right)\eta\mu(5\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή } y_K = 0,1\eta\mu(5\pi t) \text{ (S.I.) (3)}$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Ο και Κ είναι: $\Delta\phi = 0$.

δ. Έστω y_o η απομάκρυνση του υλικού σημείου Ο τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο Ο, έχουμε:

$$E = K + U$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}D(A'_o)^2 = \frac{1}{2}mv_o^2 + \frac{1}{2}Dy_o^2$$

$$\text{ή } m\omega^2(A'_o)^2 = mv_o^2 + m\omega^2y_o^2$$

$$\text{ή } y_o = \pm\sqrt{(2A)^2 - \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2}$$

$$\text{ή } y_o = \pm 0,1\sqrt{3} \text{ m.}$$

Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 το σημείο Ο κινείται επιταχυνόμενο με θετική ταχύτητα είναι: $y_o = -0,1\sqrt{3} \text{ m}$.

Ο λόγος της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\frac{K_o}{U_o} = \frac{\frac{1}{2}mv_o^2}{\frac{1}{2}Dy_o^2} \quad \text{ή} \quad \frac{K_o}{U_o} = \frac{mv_o^2}{m\omega^2y_o^2}$$

$$\text{ή } \frac{K_o}{U_o} = \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad K_o = \frac{U_o}{3}$$

Επειδή τα υλικά σημεία της χορδής που ταλαντώνονται διέρχονται ταυτόχρονα από τις θέσεις ισορροπίας τους και φτάνουν ταυτόχρονα στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους, η σχέση που συνδέει την κινητική τους ενέργεια με τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσής τους είναι κάθε χρονική στιγμή ίδια για όλα τα ταλαντούμενα υλικά σημεία. Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 για το υλικό σημείο Κ ισχύει: $K_K = \frac{U_K}{3}$.

Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ είναι:

$$|A'|_K = 0,1 \text{ m.}$$

Έστω y_K η απομάκρυνση του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 .

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ έχουμε:

$$E_K = K_K + U_K \quad \text{ή} \quad E_K = \frac{4}{3} U_K$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} D(A'_K)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} D y_K^2$$

$$\text{ή} \quad y_K = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} |A'_K|$$

$$\text{ή} \quad y_K = \pm 0,05\sqrt{3} \text{ m.}$$

Επειδή η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Ο και Κ είναι $\Delta\varphi = 0$, η απομάκρυνση του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 είναι $y_K = -0,05\sqrt{3} \text{ m}$.

Το μέτρο της επιτάχυνσης του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$a_K = -\omega^2 y_K \quad \text{ή} \quad a_K = +12,5\sqrt{3} \text{ m/s}^2.$$

4.3 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

ΘΕΜΑΤΑ Α

Θέματα πολλαπλής επιλογής

3. γ	4. β	5. α	6. δ	7. δ	8. δ	9. γ	10. β	11. α
12. δ	13. β							

Θέματα του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

14.	α. Σ	β. Λ	γ. Σ	δ. Λ	ε. Σ
15.	α. Σ	β. Σ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Λ
16.	α. Σ	β. Σ	γ. Λ	δ. Λ	ε. Σ
17.	α. Σ	β. Λ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Σ
18.	α. Λ	β. Σ	γ. Σ	δ. Λ	ε. Σ
19.	α. Σ	β. Σ	γ. Σ	δ. Σ	ε. Λ
20.	α. Σ	β. Σ	γ. Λ	δ. Λ	ε. Σ
21.	α. Σ	β. Σ	γ. Σ	δ. Λ	ε. Λ

22. Σωστή επιλογή είναι η γ.

Οι δοθείσες εξισώσεις γράφονται:

$$B_1 = 10^{-2} \eta \mu 2\pi (15 \cdot 10^{14} t - 5 \cdot 10^7 x) \text{ (S.I.) (1)}$$

$$B_2 = 10^{-2} \eta \mu 2\pi (10^8 t - 0,5x) \text{ (S.I.) (2)}$$

$$B_3 = 10^{-2} \eta \mu 2\pi (6 \cdot 10^{14} t - 2 \cdot 10^6 x) \text{ (S.I.) (3)}.$$

Ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στο κενό, όταν η ταχύτητα διάδοσής του είναι:

$v_\delta = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Από την εξίσωση (1) προκύπτει: $\frac{1}{T_1} = 15 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ ή $f_1 = 15 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

και $\frac{1}{\lambda_1} = 5 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ ή $\lambda_1 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ m}$.

Είναι: $v_{\delta(1)} = \lambda_1 f_1$ ή $v_{\delta(1)} = 3 \cdot 10^7 \text{ m/s}$.

Από την εξίσωση (2) προκύπτει:

$$\frac{1}{T_2} = 10^8 \text{ s}^{-1} \text{ ή } f_2 = 10^8 \text{ Hz}$$

και $\frac{1}{\lambda_2} = 0,5 \text{ m}^{-1}$ ή $\lambda_2 = 2 \text{ m}$.

Είναι: $v_{\delta(2)} = \lambda_2 f_2$ ή $v_{\delta(2)} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Από την εξίσωση (3) προκύπτει:

$$\frac{1}{T_3} = 6 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1} \text{ ή } f_3 = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

και $\frac{1}{\lambda_3} = 2 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$ ή $\lambda_3 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

Είναι: $v_{\delta(3)} = \lambda_3 f_3$ ή $v_{\delta(3)} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Αφού είναι $v_{\delta(3)} = c$, η εξίσωση που περιγράφει το ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διαδίδεται στο κενό είναι η 3.

23. Α. Σωστή επιλογή είναι η β.

Έστω v_δ η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο διαφανές υλικό.

Είναι: $\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = v_\delta$ ή $v_\delta = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε: $v_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = \frac{v_\delta}{f}$

ή $\lambda = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ή $\lambda = 300 \text{ nm}$.

Β. Σωστή επιλογή είναι η α.

Έστω λ_0 το μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό. Το μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό υπολογίζεται από τη σχέση: $c = \lambda_0 f$

ή $\lambda_0 = 4,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ή $\lambda_0 = 450 \text{ nm}$.

Επομένως, η ακτινοβολία ανήκει στην ορατή περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος.

24. Α. Σωστή επιλογή επιλογή είναι η β.

Έστω v_δ η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο διαφανές υλικό. Εί-

ναι: $v_\delta = c - \frac{20}{100}c$ ή $v_\delta = 0,8c$

ή $v_\delta = 2,4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Κατά τη διάδοση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο διαφανές υλικό, ισχύει:

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = v_\delta \text{ ή } \frac{E_{\max}}{B_{\max}} = 2,4 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Από το πρώτο ζεύγος των εξισώσεων προκύπτει: $E_{\max} = 60 \text{ V/m}$ και $B_{\max} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

Στην περίπτωση του πρώτου ζεύγους των εξισώσεων, ισχύει: $\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Από το δεύτερο ζεύγος των εξισώσεων προκύπτει: $E_{\max} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$

και $B_{\max} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ T}$.

Στην περίπτωση του δεύτερου ζεύγους των εξισώσεων, ισχύει: $\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = 2,4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Από το τρίτο ζεύγος των εξισώσεων προκύπτει: $E_{\max} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$

και $B_{\max} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ T}$.

Στην περίπτωση του τρίτου ζεύγους των εξισώσεων, ισχύει: $\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = 2,4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Επομένως, το πρώτο ζεύγος των εξισώσεων δεν περιγράφει ορθά το ηλεκτρομαγνητικό κύμα κατά τη διάδοσή του στο διαφανές υλικό.

Από το δεύτερο ζεύγος των εξισώσεων προκύπτει: $\frac{1}{T_2} = 10^8 \text{ s}^{-1}$ ή $f_2 = 10^8 \text{ Hz}$

και $\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{2,4} \text{ m}^{-1}$ ή $\lambda_2 = 2,4 \text{ m}$.

Επομένως, η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που αντιστοιχεί στο δεύτερο ζεύγος των εξισώσεων είναι:

$v_{\delta(2)} = \lambda_2 f_2$ ή $v_{\delta(2)} = 2,4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Από το τρίτο ζεύγος των εξισώσεων προκύπτει ότι: $\frac{1}{T_3} = 10^8 \text{ s}^{-1}$ ή $f_3 = 10^8 \text{ Hz}$

και $\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{2} \text{ m}^{-1}$ ή $\lambda_3 = 2 \text{ m}$.

Επομένως, η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος, είναι:

$v_{\delta(3)} = \lambda_3 f_3$ ή $v_{\delta(3)} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Επομένως, στο δεύτερο ζεύγος των εξισώσεων ισχύει: $\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = 2,4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

και $v_{\delta(2)} = 2,4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

B. Σωστή επιλογή είναι η β.

Έστω λ_0 το μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό. Το μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$c = \lambda_0 f \text{ ή } \lambda_0 = 3 \text{ m}.$$

Επομένως, το ηλεκτρομαγνητικό κύμα ανήκει στα ραδιοκύματα.

25. A. Σωστή επιλογή είναι η α.

Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με την χρονική εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που γνωρίζουμε από τη θεωρία προκύπτει: $E_{\max} = 30 \text{ V/m}$,

$$\frac{1}{T} = 6 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \text{ ή } f = 6 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$$

$$\text{και } \frac{1}{\lambda} = 2 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1} \text{ ή } \lambda = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_{\delta} = \lambda f \text{ ή } v_{\delta} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Αφού είναι $v_{\delta} = c$, το ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στο κενό.

B. Σωστή επιλογή είναι η α.

$$\text{Είναι: } \frac{E_{\max}}{B_{\max}} = c \text{ ή } B_{\max} = \frac{E_{\max}}{c}$$

$$\text{ή } B_{\max} = 10^{-7} \text{ T}.$$

Η χρονική εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος κατά τη διάδοσή του στο κενό δίνεται από τη

$$\text{σχέση: } B = B_{\max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } B = 10^{-7} \eta \mu 2\pi (6 \cdot 10^{10} t - 2 \cdot 10^2 x) \text{ (S.I.).}$$

26. α. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με τη χρονική εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου που γνωρίζουμε από τη θεωρία προκύπτει: $\frac{1}{T} = 9 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$

ή $f = 9 \cdot 10^7 \text{ Hz}$ και $B_{\max} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ T}$.

Έστω λ το μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στον αέρα. Είναι:

$c = \lambda f$ ή $\lambda = (10/3) \text{ m}$.

β. Είναι: $\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = c$ ή $E_{\max} = 600 \text{ V/m}$.

γ. Η χρονική εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος, όταν αυτό διαδίδεται στον αέρα, δίνεται από τη σχέση: $E = E_{\max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$

ή $E = 600 \eta \mu 2\pi (9 \cdot 10^7 t - 0,3x) \text{ (S.I.)}$.

δ. Είναι: $\frac{E}{B} = c$ ή $B = \frac{E}{c}$ ή $B = 5 \cdot 10^{-7} \text{ T}$.

27. α. Είναι: $\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = c$ ή $B_{\max} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ T}$.

β. Έστω λ το μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό. Είναι: $c = \lambda f$

ή $\lambda = \frac{c}{f}$ ή $\lambda = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ή $\lambda = 400 \text{ nm}$.

Από το μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό διαπιστώνουμε ότι το ηλεκτρομαγνητικό κύμα ανήκει στην **ορατή περιοχή του φάσματος**.

γ. Είναι: $\frac{E}{B} = c$ ή $E = 3 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$.

δ. Η χρονική εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύ-

ματος κατά τη διάδοσή του στο κενό δίνεται από τη σχέση:

$E = 6 \cdot 10^{-2} \eta \mu 2\pi \left(75 \cdot 10^{13} t - \frac{10^7}{4} x \right) \text{ (S.I.)}$.

Η χρονική εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος κατά τη διάδοσή του στο κενό δίνεται από τη

σχέση: $B = B_{\max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$

ή $B = 5 \cdot 10^{-10} \eta \mu 2\pi \left(75 \cdot 10^{13} t - \frac{10^7}{4} x \right) \text{ (S.I.)}$.

28. α. Από τις δοθείσες εξισώσεις προκύπτουν: $E_{\max} = 90 \text{ V/m}$ και $B_{\max} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ T}$.

Έστω v_δ η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Είναι: $\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = v_\delta$

ή $v_\delta = 1,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Επειδή είναι $v_\delta \neq c$, το κύμα διαδίδεται σε κάποιο υλικό μέσο.

β. Από τις δοθείσες εξισώσεις προκύπτει:

$\frac{1}{T} = 5 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ ή $f = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

Έστω λ_0 το μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό. Είναι: $c = \lambda_0 f$

ή $\lambda_0 = \frac{c}{f}$ ή $\lambda_0 = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ή $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$.

Επομένως, το ηλεκτρομαγνητικό κύμα ανήκει στην **ορατή περιοχή του φάσματος**.

γ. Έστω λ το μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο υλικό μέσο. Είναι:

$v_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = \frac{v_\delta}{f}$ ή $\lambda = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$\pi = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \cdot 100\% \text{ ή } \pi = -100\%.$

29. α. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με την εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που γνωρίζουμε από τη θεωρία προκύπτει:

$$E_{\max} = 10^{-3} \text{ V/m} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\lambda} = 200 \text{ m}^{-1}$$

$$\text{ή } \lambda = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m. Είναι: } c = \lambda f \text{ ή } f = 6 \cdot 10^{10} \text{ Hz.}$$

β. Έστω $B_{\max}$ το πλάτος της έντασης του μαγνητικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Είναι: $\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = c$ ή $B_{\max} = \frac{E_{\max}}{c}$

$$\text{ή } B_{\max} = \frac{10^{-11}}{3} \text{ T.}$$

Η χρονική εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου δίνεται από τη σχέση:

$$B = B_{\max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } B = \frac{10^{-11}}{3} \eta \mu 2\pi (6 \cdot 10^{10} t - 200x) \text{ (S.I.).}$$

γ. Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των σημείων Κ και Λ είναι: $\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda}$

ή $\Delta\phi = 240\pi \text{ rad}$. Τα σημεία Κ και Λ βρίσκονται σε συμφωνία φάσης. Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει: $E_K = E_\Lambda = +6 \cdot 10^{-4} \text{ V/m}$.

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο σημείο Λ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{E_\Lambda}{B_\Lambda} = c \quad \text{ή } B_\Lambda = +2 \cdot 10^{-12} \text{ T.}$$

δ. Το πλήθος των μηκών κύματος που αντιστοιχούν στην απόσταση ΚΛ υπολογίζεται από τη σχέση: $N = \frac{(ΚΛ)}{\lambda}$ ή $N = \frac{d}{\lambda}$

$$\text{ή } N = 120 \text{ μήκη κύματος.}$$

30. α. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται:

$$B = 27 \cdot 10^{-7} \eta \mu 2\pi (6 \cdot 10^{15} t - 2 \cdot 10^7 x) \text{ (S.I.).}$$

Από τη σύγκριση της παραπάνω εξίσωσης με τη χρονική εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που γνωρίζουμε από τη θεωρία προκύπτει:

$$\frac{1}{T} = 6 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1} \quad \text{ή } f = 6 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\text{και } \frac{1}{\lambda} = 2 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \quad \text{ή } \lambda = \frac{1}{2} 10^{-7} \text{ m.}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Επειδή είναι $v_\delta = c$, το ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στο κενό.

β. Είναι: $\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = c$ ή $E_{\max} = 810 \text{ V/m}$.

Η χρονική εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος κατά τη διάδοσή του στο κενό δίνεται από τη

$$\text{σχέση: } E = E_{\max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } E = 810 \eta \mu 2\pi (6 \cdot 10^{15} t - 2 \cdot 10^7 x) \text{ (S.I.).}$$

γ. Έστω v'_δ η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο διαφανές υλικό. Είναι: $v'_\delta = c - \frac{50}{100} c$ ή $v'_\delta = 1,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Έστω λ' το μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο διαφανές υλικό. Είναι: $v'_\delta = \lambda' f$ ή $\lambda' = 25 \cdot 10^{-9} \text{ m}$.

δ. Η χρονική εξίσωση της φάσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος κατά τη διάδοσή του στο διαφανές υλικό δίνεται από τη σχέση:

$$\phi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda'} \right) \quad \text{ή } \phi = 2\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda'} \right)$$

$$\text{ή } \phi = 2\pi (6 \cdot 10^{15} t - 4 \cdot 10^7 x) \text{ (S.I.).}$$

Θέματα Επανάληψης

Μηχανική ταλαντώσεις

Θέμα 1ο

α. Έστω η τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, στην οποία η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας είναι x . Στη θέση αυτήν ισχύει: $\Sigma F = -F_{ελ}$ ή $\Sigma F = -kx$. Επομένως, το σώμα Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = 0,4 \text{ m}$. Έστω ω η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης.

Είναι: $v = v_{\max}$ ή $v = \omega A$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

β. Η σταθερά του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $k = m\omega^2$ ή $k = 100 \text{ N/m}$.

γ. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ από τη θέση ισορροπίας είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος δίνεται από τη σχέση: $v = \omega A \sin(\omega t + \phi_0)$ ή $v = 4 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) (1)}$.

δ. Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta \ell = 0,2 \text{ m}$ για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι $x = -0,2 \text{ m}$ και η ταχύτητά του είναι αρνητική. Έστω v' η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ έχουμε: $E = K + U$ ή $\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}Dx^2$ ή $v' = -2\sqrt{3} \text{ m/s}$.

ε. Έστω t_2 η χρονική στιγμή στην οποία η φάση της ταλάντωσης είναι $\phi = (2\pi/3) \text{ rad}$.

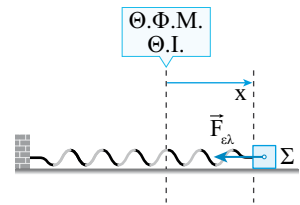
Είναι: $\phi = \omega t_2 + \frac{\pi}{2}$ ή $t_2 = \frac{\pi}{60} \text{ s}$. Η απομάκρυνση x_2 του σώματος Σ από τη θέση ισορροπίας

τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $x_2 = A \sin(\omega t_2 + \phi_0)$ ή $x_2 = 0,4 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ m}$

ή $x_2 = 0,2\sqrt{3} \text{ m}$. Έστω v_2 η ταχύτητα του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_2 . Από τη σχέση (1)

για $t = t_2$ έχουμε: $v_2 = 4 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ m/s}$ ή $v_2 = -2 \text{ m/s}$. Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma Fv \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -Dx_2v_2 \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = +40\sqrt{3} \text{ J/s}.$$



Θέμα 2ο

α. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης. Είναι: $v_0 = v_{\max}$ ή $v_0 = \omega A$ ή $A = 0,1 \text{ m}$.

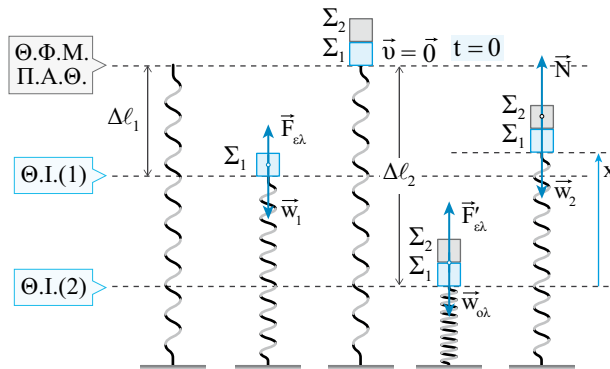
β. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ_1 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $U = \frac{1}{2}Dx^2$ ή $U = \frac{1}{2}D[A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)]^2$ ή $U = \frac{1}{2}DA^2\eta\mu^2(\omega t + \varphi_0)$ ή $U = 2\eta\mu^2(10t) \text{ (S.I.)}$.

γ. Έστω ότι στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell_1$. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F_{\epsilon\lambda} = 0$ ή $mg = k\Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,1 \text{ m}$.

Τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα βρίσκεται στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας είναι: $x = +0,1 \text{ m}$ ή $x = +A$.

Επομένως, τις παραπάνω χρονικές στιγμές η ταχύτητα του σώματος Σ_1 είναι $v = 0$.

δ. Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 μηδενίζεται στιγμιαία για πέμπτη φορά μετά την εκτόξευσή του, το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης ($x = -A$). Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 τοποθετούμε ακαριαία πάνω στο σώμα Σ_1 (χωρίς αρχική ταχύτητα) ένα άλλο σώμα Σ_2 , η θέση αυτή είναι η πάνω ακραία θέση της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 .



Επομένως, το πλάτος A' της ταλάντωσης του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι: $A' = \Delta\ell_2$, όπου $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{\text{ολ}} - F'_{\epsilon\lambda} = 0$ ή $(m_1 + m_2)g = k\Delta\ell_2$ ή $\Delta\ell_2 = 0,125 \text{ m}$. Επομένως, είναι: $A' = 0,125 \text{ m}$.

ε. Έστω η τυχαία θέση της τροχιάς του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, στην οποία η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων [Θ.Ι.(2)] είναι x . Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα

Σ_2 στην τυχαία αυτή θέση δίνεται από τη σχέση: $\Sigma F_2 = -D_2 x$ ή $N - w_2 = -m_2 \omega_2^2 x$

$$\text{ή } N = m_2 g - m_2 \frac{k}{m_1 + m_2} x \quad (1).$$

Για να χαθεί η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων πρέπει η δύναμη επαφής $\vec{N}$ να γίνει ίση με μηδέν

$$(N = 0). \text{ Από τη σχέση (1) για } N = 0, \text{ έχουμε: } 0 = m_2 g - m_2 \frac{k}{m_1 + m_2} x \quad \text{ή } x = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$$

ή $x = +0,125 \text{ m}$. Επειδή ισχύει: $|x| = A'$, η ταχύτητα των δύο σωμάτων όταν διέρχονται από τη θέση όπου η δύναμη επαφής $\vec{N}$ μηδενίζεται είναι $v = 0$. Επομένως, η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων δεν χάνεται οριακά.

Θέμα 3ο

Βλέπε βασική λυμένη άσκηση 7: 3.3 Ενεργειακή προσέγγιση.

α. $\omega = 5 \text{ rad/s}$.

β. $A = 0,4 \text{ m}$.

γ. $x = 0,4\eta\mu(5t) \text{ (S.I.)}$.

δ. i. $A' = 0,2 \text{ m}$. ii. $d = 1,142 \text{ m}$.

Θέμα 4ο

α. Έστω $\Delta\ell$ η παραμόρφωση των δύο ελατηρίων στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(1)]. Στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(1)] ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή } F - F_{\epsilon\lambda(1)} - F_{\epsilon\lambda(2)} = 0 \quad \text{ή } F = k_1 \Delta\ell + k_2 \Delta\ell \quad (1).$$

Στην τυχαία θέση με απομάκρυνση x από τη Θ.Ι.(1), που φαίνεται στο διπλανό σχήμα,

$$\text{ισχύει: } \Sigma F = F - F'_{\epsilon\lambda(1)} - F'_{\epsilon\lambda(2)}$$

$$\text{ή } \Sigma F = F - k_1(\Delta\ell + x) - k_2(\Delta\ell + x)$$

$$\text{ή } \Sigma F = F - k_1 \Delta\ell - k_1 x - k_2 \Delta\ell - k_2 x$$

$$\text{ή λόγω της σχέσης (1): } \Sigma F = -(k_1 + k_2)x.$$

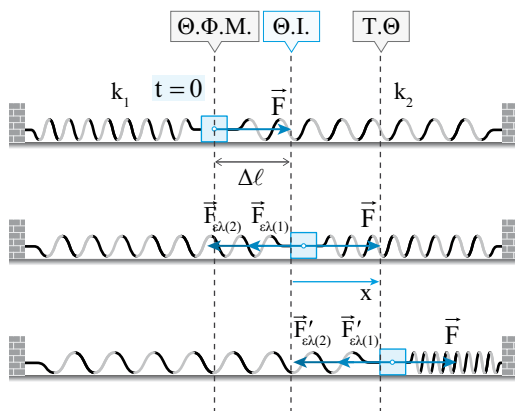
Επομένως, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k_1 + k_2$.

$$\text{Η περίοδος της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad \text{ή } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

$$\text{ή } T = 0,2\pi \text{ s}.$$

β. Επειδή το σώμα ξεκινά να ταλαντώνεται από τη θέση όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος, το πλάτος A της ταλάντωσης είναι: $A = \Delta\ell$. Από τη σχέση (1) έχουμε: $\Delta\ell = \frac{F}{k_1 + k_2}$

$$\text{ή } A = 0,2 \text{ m}. \text{ Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι: } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή } \omega = 10 \text{ rad/s}.$$



Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (2). Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι $x = +A$. Επομένως, από τη σχέση (2) για $t = 0$ και $x = +A$ έχουμε: $+A = A\eta\mu\varphi_0$ ή $\eta\mu\varphi_0 = 1$ (3).

Επειδή ισχύει $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ rad, η λύση της εξίσωσης (3) είναι: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad.

Επομένως, η σχέση (2) γράφεται: $x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.).

γ. Έστω $\Delta\ell'$ η παραμόρφωση των δύο ελατηρίων τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο (1) είναι $U_{\varepsilon\lambda(1)} = 2$ J.

$$\text{Είναι: } U_{\varepsilon\lambda(1)} = \frac{1}{2}k_1(\Delta\ell')^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\ell' = \sqrt{\frac{2U_{\varepsilon\lambda(1)}}{k_1}} \quad \text{ή} \quad \Delta\ell' = 0,2 \text{ m.}$$

Εφόσον είναι $\Delta\ell' = \Delta\ell$, το σώμα τη χρονική στιγμή t_1 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Επομένως, το μέτρο v της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$v = v_{\max} \quad \text{ή} \quad v = \omega A \quad \text{ή} \quad v = 2 \text{ m/s.}$$

δ. Μετά την αφαίρεση του ελατηρίου (2) η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μεταβάλλεται. Έστω ότι στη νέα θέση ισορροπίας [Θ.Ι.(2)] το ελατήριο (1) είναι επιμηκνυμένο κατά $\Delta\ell_2$. Στη Θ.Ι. (2) ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $F - F''_{\varepsilon\lambda(1)} = 0$ ή $F = k_1\Delta\ell_2$ ή $\Delta\ell_2 = 0,8$ m.

Το μέτρο της απομάκρυνσης x' του σώματος από τη Θ.Ι. (2) αμέσως μετά την αφαίρεση του ελατηρίου (2) είναι: $|x'| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell$ ή $|x'| = 0,6$ m. Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά την αφαίρεση του ελατηρίου. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά την αφαίρεση του ελατηρίου (2) έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}k_1A'^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k_1x'^2 \quad \text{ή} \quad A'^2 = \frac{mv^2}{k_1} + x'^2 \quad \text{ή} \quad A' = \frac{\sqrt{52}}{10} \text{ m.}$$

Έστω ω' η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την αφαίρεση του ελατηρίου (2). Είναι: $k_1 = m_1\omega'^2$ ή $\omega' = 5$ rad/s. Η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης που αποκτά το σώμα κατά τη διάρκεια της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί μετά την αφαίρεση του ελατηρίου (2) είναι: $\alpha_{\max} = \omega'^2 A'$ ή $\alpha_{\max} = 2,5\sqrt{52} \text{ m/s}^2$.

Θέμα 5ο

α. Το σώμα Σ_2 στο χρονικό διάστημα Δt , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κοπή του νήματος μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν καρφωθεί στο ελατήριο (2), εκτελεί ελεύθερη πτώση. Είναι: $h = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$ ή $h = \frac{1}{2}gt_1^2$ ή $t_1 = 0,1\sqrt{3}$ s. Έστω T_1 η περίοδος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κοπή του νήματος. Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$, ισχύει: $t_1 = \frac{T_1}{2}$ ή $T_1 = 0,2\sqrt{3}$ s.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κοπή του νήματος είναι:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \quad \text{ή} \quad \omega_1 = \frac{10\pi\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s.} \quad \text{Η σταθερά } k_1 \text{ του ελατηρίου (1) υπολογίζεται από τη σχέση:}$$

$$D = m_1\omega_1^2 \quad \text{ή} \quad k_1 = m_1\omega_1^2 \quad \text{ή} \quad k_1 = 2.000 \text{ N/m.}$$

β. Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\vec{\Sigma}\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 + w_2 + T' - T - F_{ελ} = 0$

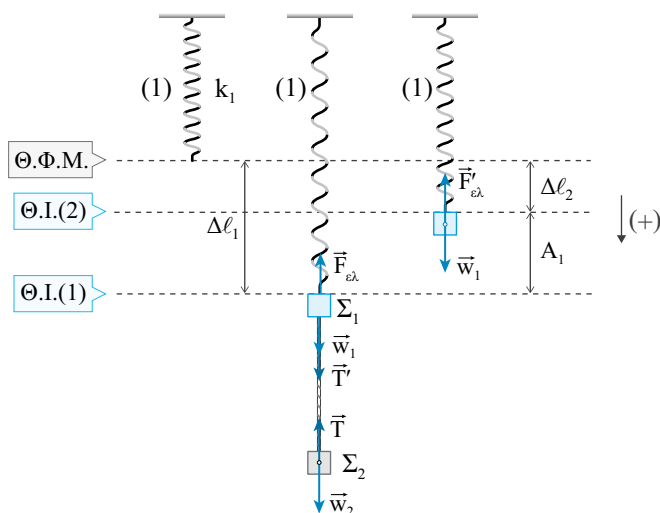
$$\text{ή} \quad (m_1 + m_2)g = k_1\Delta\ell_1 \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k_1} \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_1 = 0,05 \text{ m.}$$

Μετά την κοπή του νήματος το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας (2) [Θ.Ι.(2)], όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας (2). Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\vec{\Sigma}\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F'_{ελ} = 0$

$$\text{ή} \quad m_1g = k_1\Delta\ell_2 \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_2 = \frac{m_1g}{k_1} \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_2 = 0,03 \text{ m.} \quad \text{Όπως προκύπτει από το σχήμα, το πλάτος}$$

A_1 της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κοπή του νήματος είναι: $A_1 = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2$

$$\text{ή} \quad A_1 = 0,02 \text{ m.} \quad \text{Επομένως, η ενέργεια της ταλάντωσης είναι: } E = \frac{1}{2}kA_1^2 \quad \text{ή} \quad E = 0,4 \text{ J.}$$



γ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] δίνεται από τη σχέση: $x = A_1\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (1). Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας (2) είναι $x = +A_1$. Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = +A_1$ έχουμε: $+A_1 = A_1\eta\mu\varphi_0$ ή $\eta\mu\varphi_0 = 1$ ή $\eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ή $\varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ (2).

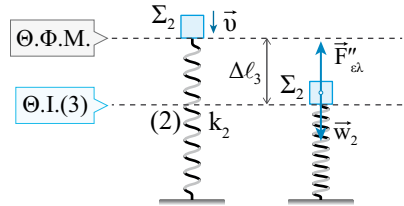
Επειδή είναι $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi \text{ rad}$ από τη σχέση (2) για $\kappa = 0$ προκύπτει: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του ταλαντούμενου σώματος Σ_1 δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = -\omega^2 A_1 \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ή} \quad \alpha = -\frac{20}{3} \eta \mu\left(\frac{10\pi\sqrt{3}}{3}t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.}).$$

δ. Έστω v η ταχύτητα του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία καρφώνεται στο ελατήριο (2). Είναι: $v = gt_1$ ή $v = \sqrt{3} \text{ m/s}$. Έστω ότι στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 [Θ.Ι.(3)], που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell_3$. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_2 - F''_{\epsilon\lambda} = 0$ ή $m_2 g = k_2 \Delta\ell_3$ ή $\Delta\ell_3 = 0,1 \text{ m}$. Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 έχουμε: $E = K + U$ ή $\frac{1}{2} k_2 A_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} k_2 (\Delta\ell_3)^2$ ή $A_2 = 0,2 \text{ m}$.



Θέμα 6ο

α. Η γωνιακή συχνότητα ω_1 της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ πριν καρφωθεί στο ελατήριο (2) υπολογίζεται από τη σχέση: $D_1 = m\omega_1^2$ ή $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ ή $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$. Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ πριν καρφωθεί στο ελατήριο (2).

Είναι: $v_0 = v_{\max} = \omega_1 A_1$ ή $A_1 = 0,8 \text{ m}$.

β. Η απομάκρυνση x του σώματος από τη Θ.Ι. του πριν καρφωθεί στο ελατήριο (2) δίνεται από τη σχέση: $x = A_1 \eta \mu(\omega_1 t + \varphi_0)$ (1). Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ από τη θέση ισορροπίας του [Θ.Ι.(1)] είναι $x = 0$ και η ταχύτητά του είναι θετική ($v > 0$). Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $x = 0$ προκύπτει: $0 = A_1 \eta \mu \varphi_0$ ή $\eta \mu \varphi_0 = 0$ ή $\eta \mu \varphi_0 = \eta \mu 0$ (2).

Επειδή ισχύει $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, οι λύσεις της εξίσωσης (2) είναι: $\varphi_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος Σ δίνεται από τη σχέση: $v = v_{\max} \sin(\omega_1 t + \varphi_0)$ (3).

Για $t = 0$ και $\varphi_0 = 0$ από τη σχέση (3) προκύπτει $v = v_{\max} \sin 0 > 0$.

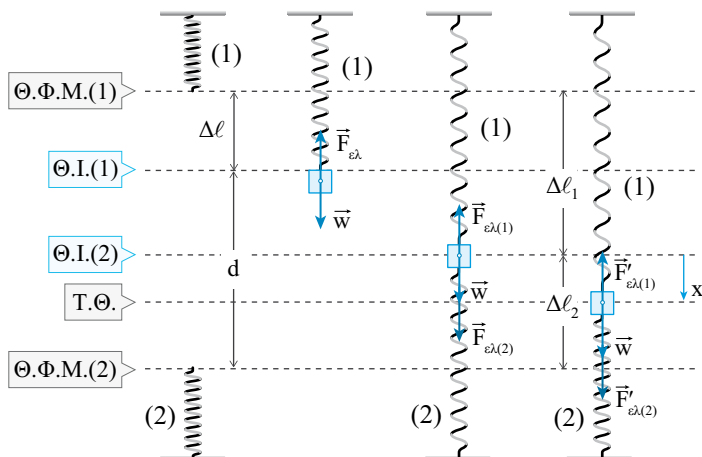
Για $t = 0$ και $\varphi_0 = \pi \text{ rad}$ από τη σχέση (3) προκύπτει: $v = v_{\max} \sin \pi < 0$. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $v > 0$, δεκτή λύση είναι η $\varphi_0 = 0$. Επομένως, η σχέση (3) γράφεται:

$$v = \omega A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0) \quad \text{ή} \quad v = 8 \sin(10t) \quad (\text{S.I.}).$$

γ. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_1 , ακριβώς πριν καρφωθεί στο ελατήριο (2). Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ πριν καρφωθεί στο ελατήριο (2) έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} k_1 A_1^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k_1 d^2 \quad \text{ή} \quad v_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m} (A_1^2 - d^2)} \quad \text{ή} \quad v_1 = 4\sqrt{3} \text{ m/s}.$$

δ. Το σώμα Σ μετά το κάρφωμά του στο ελατήριο (2) εκτελεί ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας (2) [Θ.Ι.(2)] που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου (1) και $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου (2) στη [Θ.Ι.(2)].

Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w + F_{el(2)} - F_{el(1)} = 0$ ή $mg + k_2 \Delta\ell_2 = k_1 \Delta\ell_1$ (4).

Θεωρούμε τη τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος Σ που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, στην οποία η απομάκρυνση του σώματος Σ από τη Θ.Ι.(2) είναι ίση με x. Στη θέση αυτήν ισχύει:

$$\Sigma F = w + F'_{el(2)} - F'_{el(1)} \quad \text{ή} \quad \Sigma F = w + k_2 (\Delta\ell_2 - x) - k_1 (\Delta\ell_1 + x)$$

$$\text{ή} \quad \Sigma F = mg + k_2 \Delta\ell_2 - k_2 x - k_1 \Delta\ell_1 - k_1 x \quad \text{ή} \quad \Sigma F = mg + k_2 \Delta\ell_2 - k_1 \Delta\ell_1 - (k_1 + k_2)x$$

$$\text{ή λόγω της σχέσης (4):} \quad \Sigma F = -(k_1 + k_2)x.$$

Επομένως, το σώμα Σ μετά το κάρφωμά του στο ελατήριο (2) εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D_2 = k_1 + k_2$.

ε. Έστω $\Delta\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου (1) στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ

[Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F_{el} = 0$ ή $mg = k_1 \Delta\ell$

$$\text{ή} \quad \Delta\ell = 0,1 \text{ m. Από το σχήμα προκύπτει ότι: } d + \Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_1 = d + \Delta\ell - \Delta\ell_2 \quad (5).$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (5) στη σχέση (4) έχουμε:

$$mg + k_2 \Delta\ell_2 = k_1 (d + \Delta\ell - \Delta\ell_2) \quad \text{ή} \quad mg + k_2 \Delta\ell_2 = k_1 (d + \Delta\ell) - k_1 \Delta\ell_2$$

$$\text{ή} \quad mg + (k_1 + k_2) \Delta\ell_2 = k_1 (d + \Delta\ell) \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_2 = 0,2 \text{ m.}$$

Το μέτρο της απομάκρυνσης x_1 του σώματος Σ από τη Θ.Ι.(2) τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς μετά το κάρφωμα του στο ελατήριο (2) είναι: $|x_1| = \Delta\ell_2$ ή $|x_1| = 0,2 \text{ m}$.

Έστω E_2 ενέργεια της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ μετά το κάρφωμά του στο ελατήριο (2).

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ μετά το κάρφωμά του

$$\text{στο ελατήριο (2) έχουμε: } E_2 = K + U \quad \text{ή} \quad E_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x_1^2 \quad \text{ή} \quad E_2 = 56 \text{ J.}$$

Η ενέργεια E_1 της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ πριν καρφωθεί στο ελατήριο (2) είναι:

$$E_1 = \frac{1}{2} k_1 A_1^2 \quad \text{ή} \quad E_1 = 64 \text{ J.} \quad \text{Ο ζητούμενος λόγος είναι: } \frac{E_1}{E_2} = \frac{8}{7}.$$

Θέμα 7ο

α. Το σώμα υπό τη δράση της δύναμης $\vec{F}$ εκτελεί ταλάντωση γύρω από τη Θ.Ι.(2) που φαίνεται στο σχήμα 1. Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. (2). Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $F + w - F'_{\varepsilon\lambda} = 0$ ή $F + mg = k\Delta\ell_1$ (1).

Θεωρούμε την τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος Σ που φαίνεται στο σχήμα 1, στην οποία η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] είναι ίση με x . Στη θέση αυτήν ισχύει: $\Sigma F = w + F - F'_{\varepsilon\lambda}$

$$\text{ή } \Sigma F = mg + F - k(\Delta\ell_1 + x) \quad \text{ή } \Sigma F = mg + F - k\Delta\ell_1 - kx \quad \text{ή λόγω της σχέσης(1): } \Sigma F = -kx.$$

Επομένως, το σώμα Σ υπό τη δράση της δύναμης $\vec{F}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς: $D = k$.

β. Το σώμα Σ αρχίζει να ταλαντώνεται υπό τη δράση της δύναμης $\vec{F}$ από τη θέση όπου ισορροπούσε αρχικά [Θ.Ι.(1)]. Επομένως, όπως προκύπτει από το σχήμα 1 το πλάτος A της ταλάντωσης που εκτελεί είναι: $A = \Delta\ell_1 - \Delta\ell$ (2), όπου $\Delta\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(1).

$$\text{Στη Θ.Ι.(1) ισχύει: } \Sigma\vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w - F_{\varepsilon\lambda} = 0 \quad \text{ή} \quad mg = k\Delta\ell \quad \text{ή} \quad \Delta\ell = 0,1 \text{ m.}$$

$$\text{Από τη σχέση (1) προκύπτει: } \Delta\ell_1 = \frac{F + mg}{k} \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_1 = 0,3 \text{ m.}$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (2) έχουμε: $A = 0,2 \text{ m}$.

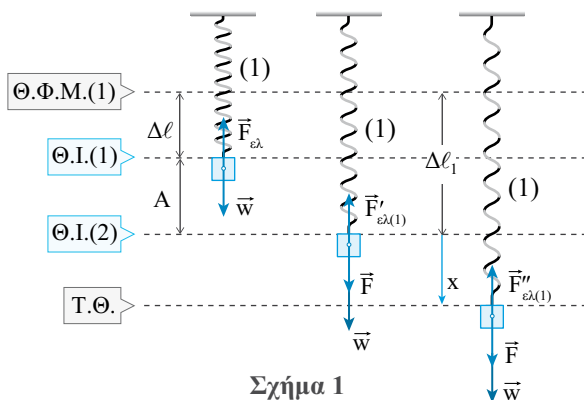
Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ (3).

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι $x = +A$. Από τη σχέση (3) για $t = 0$ και $x = +A$ έχουμε: $+A = A\eta\mu\varphi_0$ ή $\eta\mu\varphi_0 = 1$ (4).

Επειδή ισχύει $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, η λύση της εξίσωσης (4) είναι $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0), \quad \text{όπου } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s,} \quad \text{οπότε } \alpha = -20\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$



Σχήμα 1

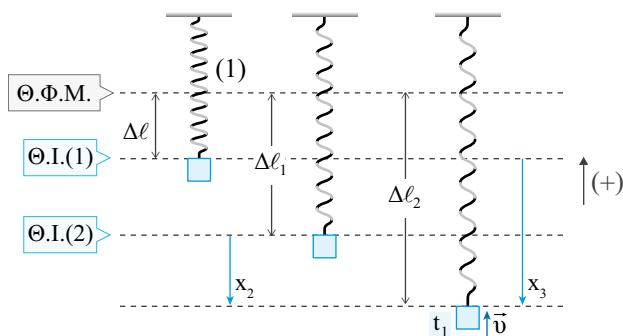
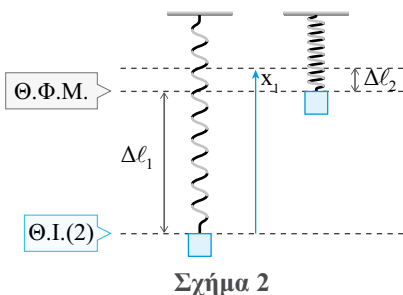
γ. Έστω $\Delta\ell_2$ η παραμόρφωση του ελατηρίου τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_2)^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_2 = \sqrt{\frac{2U_{ελ}}{k}} \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_2 = 0,4 \text{ m.}$$

Έστω ότι το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_1 είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell_2$. Όπως προκύπτει από το σχήμα 2 η απομάκρυνση x_1 του σώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] είναι: $x_1 = +(\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2)$

ή $x_1 = +0,7 > A$ άτοπο. Έστω ότι το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_1 είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell_2$. Όπως προκύπτει από το σχήμα 3 η απομάκρυνση x_2 του σώματος από

τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] είναι: $x_2 = -(\Delta\ell_2 - \Delta\ell_1)$ ή $x_2 = -0,1 \text{ m}$.



Σχήμα 3

Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα διέρχεται για δεύτερη φορά από τη θέση με απομάκρυνση x_2 η ταχύτητά του είναι θετική. Έστω v η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα υπό τη δράση της δύναμης

$$\vec{F} \text{ έχουμε: } E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \quad \text{ή} \quad v = +\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x_2^2)} \quad \text{ή} \quad v = +\sqrt{3} \text{ m/s.}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από

$$\text{τη σχέση: } \frac{dK}{dt} = \Sigma Fv \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -Dx_2v \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -kx_2v \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = +10\sqrt{3} \text{ J/s.}$$

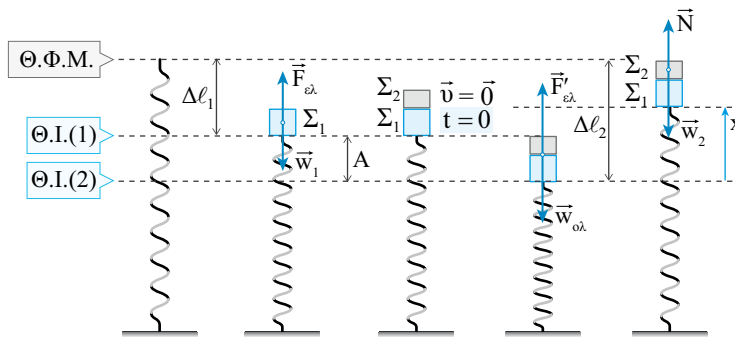
δ. Μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας του [Θ.Ι.(1)]. Το μέτρο της απομάκρυνσης x_3 του σώματος από τη Θ.Ι.(1) αμέσως μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ (βλ. σχήμα 3) είναι: $|x_3| = \Delta\ell_1 - \Delta\ell + |x_2|$ ή $|x_3| = 0,3 \text{ m}$. Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx_3^2 \quad \text{ή} \quad A' = \sqrt{\frac{m}{k}v^2 + x_3^2} \quad \text{ή} \quad A' = 0,2\sqrt{3} \text{ m.}$$

ε. Επειδή το πλάτος A' είναι μεγαλύτερο από την επιμήκυνση $\Delta\ell$ του ελατηρίου στη Θ.Ι. (1), η ελάχιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας που αποθηκεύεται στο ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ είναι ίση με μηδέν (στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος). Το ζητούμενο έργο της δύναμης του ελατηρίου από τη χρονική στιγμή t_1 μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο γίνεται ελάχιστη για πρώτη φορά μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ υπολογίζεται από τη σχέση: $W_{F_{ελ}} = U_{ελ(αρχ)} - U_{ελ(τελ)}$ ή $W_{F_{ελ}} = \frac{1}{2}k\Delta\ell_2^2 - 0$ ή $W_{F_{ελ}} = 8 \text{ J}$.

Θέμα 8ο

α. Έστω $\Delta\ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{ελ} = 0$ ή $Mg = k\Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,05 \text{ m}$. Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{ολ} - F'_{ελ} = 0$ ή $(M+m)g = k\Delta\ell_2$ ή $\Delta\ell_2 = 0,1 \text{ m}$. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα των δύο σωμάτων. Όπως προκύπτει από το επόμενο σχήμα είναι: $A = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$ ή $A = 0,05 \text{ m}$.



β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2)\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Είναι: $v_{\max} = \omega A$ ή $v_{\max} = 0,5 \text{ m/s}$.

γ. Η νέα μέγιστη τιμή της ταχύτητας του συστήματος των δύο σωμάτων είναι: $v'_{\max} = v_{\max} + 1,5 \text{ m/s}$ ή $v'_{\max} = 2 \text{ m/s}$. Έστω A' το νέο πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων. Είναι: $v'_{\max} = \omega A'$ ή $A' = 0,2 \text{ m}$. Θεωρούμε μια τυχαία θέση πάνω από τη θέση ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων με απομάκρυνση $x(x > 0)$.

Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα Σ_2 στην τυχαία θέση δίνεται από τη σχέση:

$\Sigma F_2 = -D_2 x$ ή $N - w_2 = -m_2 \omega^2 x$ ή $N = m_2 g - m_2 \omega^2 x$ (1). Για να χαθεί η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων, πρέπει η δύναμη επαφής $\vec{N}$ να γίνει ίση με μηδέν ($N = 0$). Από τη σχέση (1) για $N = 0$ προκύπτει: $0 = m_2 g - m_2 \omega^2 x$ ή $x = +\frac{g}{\omega^2}$ ή $x = +0,1 \text{ m}$.

Επομένως, η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων χάνεται σε μια θέση πάνω από τη θέση ισορροπίας (2), η οποία απέχει από αυτήν απόσταση $0,1 \text{ m}$.

δ. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συστήματος των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή στην οποία χάνεται η επαφή τους. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων έχουμε: $E = K + U$ ή $\frac{1}{2} k A'^2 = \frac{1}{2} (M + m) v^2 + \frac{1}{2} k x^2$ ή $v = \sqrt{3} \text{ m/s}$.

ε. Επειδή ισχύει $|x| = \Delta \ell_2$ η απώλεια της επαφής μεταξύ των δύο σωμάτων χάνεται στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Μετά την απώλεια της επαφής του σώματος Σ_2 με το σώμα Σ_1 , το σώμα Σ_1 συνεχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας (1). Αμέσως μετά την απώλεια της επαφής των δύο σωμάτων, το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 είναι $v = \sqrt{3} \text{ m/s}$ και το μέτρο της απομάκρυνσής του x_1 από τη θέση ισορροπίας (1) είναι: $|x_1| = \Delta \ell_1$ ή $|x_1| = 0,05 \text{ m}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας E' της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την απώλεια της επαφής του με το σώμα Σ_2 έχουμε: $E' = K + U$ ή $E' = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} k x_1^2$ ή $E' = 3,5 \text{ J}$.

Θέμα 9ο

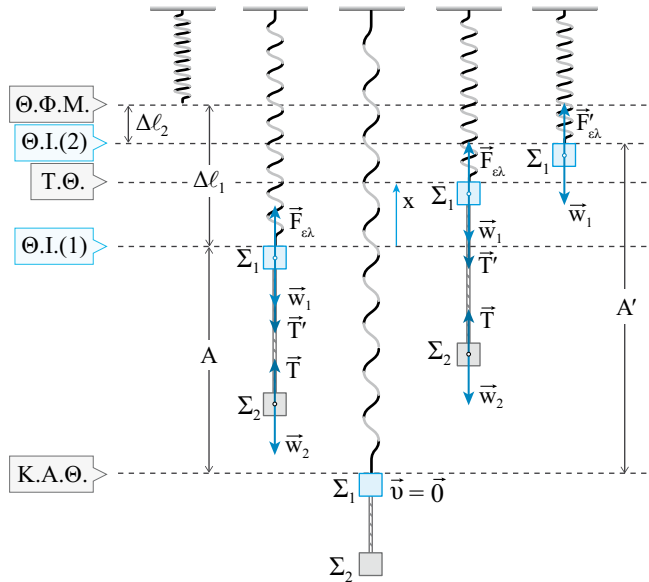
α. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα των δύο σωμάτων υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2) \omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$ ή $\omega = 5 \text{ rad/s}$.

Η σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_1 είναι: $D_1 = m_1 \omega^2$ ή $D_1 = 75 \text{ N/m}$.

Η σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_2 είναι: $D_2 = m_2 \omega^2$ ή $D_2 = 25 \text{ N/m}$.

β. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα των δύο σωμάτων είναι $A = 0,2 \text{ m}$.

Θεωρούμε την τυχαία θέση της τροχιάς του συστήματος των δύο σωμάτων που φαίνεται στο επόμενο σχήμα με απομάκρυνση x από τη Θ.Ι.(1). Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 στην τυχαία θέση είναι το βάρος του $\vec{w}_2$ και η τάση του νήματος $\vec{T}$.



Επειδή το σώμα Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς D_2 , ισχύει:

$$\Sigma F = -D_2 x \quad \text{ή} \quad T - w_2 = -D_2 x \quad \text{ή} \quad T = m_2 g - D_2 x \quad \text{ή} \quad T = 10 - 25x \text{ (S.I.)}, \text{ με } -0,2 \text{ m} \leq x \leq 0,2 \text{ m} \quad (1).$$

γ. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι το μέτρο της τάσης του νήματος γίνεται μέγιστο για $x = -A = -0,2 \text{ m}$ (κάτω ακραία θέση), ενώ γίνεται ελάχιστο για $x = +A = +0,2 \text{ m}$ (πάνω ακραία θέση). Από τη σχέση (1) για $x = -A = -0,2 \text{ m}$ προκύπτει: $T_{\max} = 15 \text{ N}$. Από τη σχέση (1) για $x = +A = +0,2 \text{ m}$ προκύπτει: $T_{\min} = 5 \text{ N}$. Επομένως, είναι: $\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = 3$.

δ. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται μέγιστη στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων. Η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι:

$$t_1 = 2T_1 \quad \text{ή} \quad t_1 = 2 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,8\pi \text{ s}.$$

ε. Έστω $\Delta \ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 + w_2 + T' - T - F_{\text{ελ}} = 0$ ή $(m_1 + m_2)g = k\Delta \ell_1$ ή $\Delta \ell_1 = 0,4 \text{ m}$. Έστω $\Delta \ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F'_{\text{ελ}} = 0$ ή $m_1 g = k\Delta \ell_2$ ή $\Delta \ell_2 = 0,3 \text{ m}$. Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κοπή του νήματος. Όπως προκύπτει από το σχήμα, είναι: $A' = \Delta \ell_1 - \Delta \ell_2 + A$ ή $A' = 0,3 \text{ m}$. Επομένως, η ενέργεια της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κοπή του νήματος είναι:

$$E = \frac{1}{2} D A'^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2} k A'^2 \quad \text{ή} \quad E = 4,5 \text{ J}.$$

Θέμα 10ο

α. Έστω $\Delta\ell$ η παραμόρφωση των δύο ελατηρίων στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 .

Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 ισχύει: $\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_{1x} - F_{ελ(1)} - F_{ελ(2)} = 0$

ή $m_1 g_{ημφ} = k_1 \Delta\ell + k_2 \Delta\ell$ ή $m_1 g_{ημφ} = (k_1 + k_2) \Delta\ell$ (1).

Σε μία τυχαία θέση με απομάκρυνση $\bar{x}$ κάτω από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης [Θ.Ι.(1)] ισχύει:

$\Sigma F = w_{1x} - F_{ελ(1)} - F_{ελ(2)}$ ή $\Sigma F = m_1 g_{ημφ} - k_1 (\Delta\ell + x) - k_2 (\Delta\ell + x)$

ή $\Sigma F = m_1 g_{ημφ} - k_1 \Delta\ell - k_1 x - k_2 \Delta\ell - k_2 x$ ή, λόγω της σχέσης (1), $\Sigma F = -(k_1 + k_2) x$.

Επομένως, το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς: $D = k_1 + k_2$.

β. Από τη σχέση (1) προκύπτει: $\Delta\ell = \frac{m_1 g_{ημφ}}{k_1 + k_2}$ ή $\Delta\ell = 0,05 \text{ m}$.

Επειδή το σώμα Σ_1 αφήνεται ελεύθερο να ταλαντωθεί από τη θέση όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος, το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί είναι: $A = \Delta\ell$ ή $A = 0,05 \text{ m}$.

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$. Η γωνιακή συχνότητα της

ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m_1 \omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1}}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Η χρονική

εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση:

$x = A \eta\mu(\omega t + \phi_0)$ ή $x = 0,05 \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.).

γ. Έστω ω' η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 . Είναι: $D = (m_1 + m_2) \omega'^2$ ή $\omega' = 5 \text{ rad/s}$. Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $D_2 = m_2 \omega'^2$ ή $D_2 = 150 \text{ N/m}$.

δ. Το πλάτος A' της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα των δύο σωμάτων είναι $A' = \Delta\ell_2$, όπου $\Delta\ell_2$ η παραμόρφωση των δύο ελατηρίων στη Θ.Ι. της ταλάντωσης του συστήματος των

δύο σωμάτων [Θ.Ι.(2)]. Στη Θ.Ι.(2), ισχύει: $\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_{ολ(x)} - F'_{ελ(1)} - F'_{ελ(2)} = 0$

ή $(m_1 + m_2) g_{ημφ} = k_1 \Delta\ell_2 + k_2 \Delta\ell_2$ ή $\Delta\ell_2 = 0,2 \text{ m}$. Επομένως, είναι: $A' = 0,2 \text{ m}$.

Επειδή το σώμα Σ_2 δεν κινείται στον άξονα $y'y$ ισχύει: $\Sigma \vec{F}_y = \vec{0}$ ή $N - w_{2y} = 0$

ή $N = m_2 g_{συνφ}$ ή $N = 30\sqrt{3} \text{ N}$.

Θεωρούμε μια τυχαία θέση με απομάκρυνση x ($x > 0$) από τη θέση ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων [Θ.Ι.(2)]. Επειδή το σώμα Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, στην τυχαία θέση ισχύει: $\Sigma F_2 = -D_2 x$ ή $T_{\sigma\tau\alpha\tau} - m_2 g_{ημφ} = -D_2 x$ ή $T_{\sigma\tau\alpha\tau} = m_2 g_{ημφ} - D_2 x$ (1).

Από τη σχέση (1) για $x = -A'$ έχουμε: $T_{\sigma\tau\alpha\tau(\max)} = m_2 g_{ημφ} + D_2 A'$ (2) ή $T_{\sigma\tau\alpha\tau(\max)} = 60 \text{ N}$.

Για να μην ολισθαίνει το σώμα Σ_2 σε σχέση με το σώμα Σ_1 πρέπει να ισχύει:

$T_{\sigma\tau\alpha\tau(\max)} \leq \mu_s N$ ή $\mu_s \geq \frac{T_{\sigma\tau\alpha\tau(\max)}}{N}$ ή $\mu_s \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ή $\mu_{s(\min)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Θέμα 11ο

α. Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα Σ_1 και Σ_2 στις αρχικές θέσεις ισορροπίας τους Θ.Ι.(1) και Θ.Ι.(2) αντίστοιχα.

Στη Θ.Ι.(1) ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή } F_{ελ(1)} - w_1 - T = 0 \quad \text{ή } k_1 \Delta \ell_1 = m_1 g + T$$

$$\text{ή } T = 30 \text{ N. Είναι: } T' = T \quad \text{ή } T' = 30 \text{ N.}$$

Επειδή ισχύει $T' > w_2 = m_2 g$, το ελατήριο (2) στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 [Θ.Ι.(2)] είναι επιμηκνυμένο. Έστω $\Delta \ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου (2) στη Θ.Ι.(2). Στη Θ.Ι.(2) ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{ή } T' - w_2 - F_{ελ(2)} = 0 \quad \text{ή } T' = m_2 g + k_2 \Delta \ell_2$$

$$\text{ή } \Delta \ell_2 = 0,2 \text{ m.}$$

Μετά την κοπή του νήματος το σώμα Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη Θ.Ι.(3) που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Έστω $\Delta \ell_3$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(3).

$$\text{Στη Θ.Ι.(3) ισχύει: } \Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή } w_2 - F'_{ελ(2)} = 0 \quad \text{ή } m_2 g = k_2 \Delta \ell_3 \quad \text{ή } \Delta \ell_3 = 0,1 \text{ m.}$$

Όπως προκύπτει από το σχήμα, το πλάτος A_2 της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κοπή του νήματος, είναι: $A_2 = \Delta \ell_2 + \Delta \ell_3$ ή $A_2 = 0,3 \text{ m}$.

Μετά την κοπή του νήματος το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη Θ.Ι.(4) που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Έστω $\Delta \ell_4$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(4).

$$\text{Στη Θ.Ι.(4) ισχύει: } \Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή } w_1 - F'_{ελ(1)} = 0 \quad \text{ή } m_1 g = k_1 \Delta \ell_4 \quad \text{ή } \Delta \ell_4 = 0,1 \text{ m.}$$

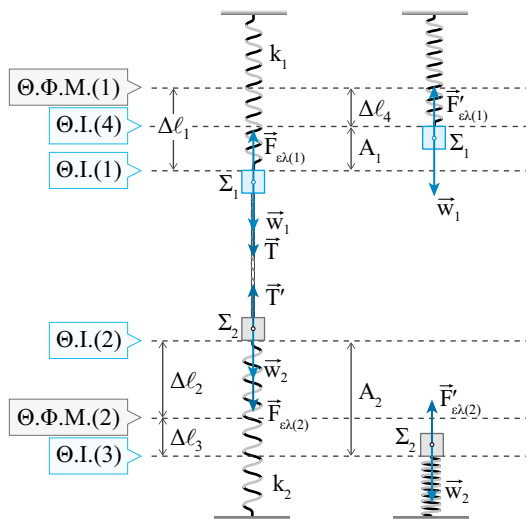
Όπως προκύπτει από το σχήμα το πλάτος A_1 της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κοπή του νήματος, είναι: $A_1 = \Delta \ell_1 - \Delta \ell_4$ ή $A_1 = 0,3 \text{ m}$.

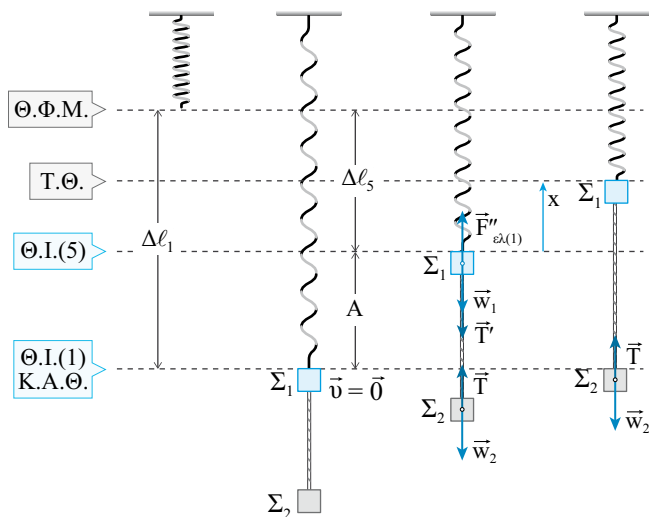
β. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ_2 από τη Θ.Ι.(3) είναι $x = +A_2$. Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x = +A_2$, η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 είναι $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $k_2 = m_2 \omega_2^2$ ή $\omega_2 = 10 \text{ rad/s}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 από τη Θ.Ι.(3) δίνεται από τη σχέση:

$$x_2 = A_2 \eta \mu(\omega_2 t + \phi_0) \quad \text{ή} \quad x_2 = 0,3 \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{S.I.}).$$

γ. Αν αποσυνδέσουμε το ελατήριο (2), τότε το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας (5) [Θ.Ι.(5)], που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.





Έστω $\Delta \ell_5$ η επιμήκυνση του ελατηρίου (1) στη Θ.Ι.(5). Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:
 $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_2 + w_1 + T' - T - F''_{\epsilon\lambda(1)} = 0$ ή $(m_1 + m_2)g = k_1 \Delta \ell_5$ ή $\Delta \ell_5 = 0,2 \text{ m}$. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 . Όπως προκύπτει από το σχήμα, είναι: $A = \Delta \ell_1 - \Delta \ell_5$ ή $A = 0,2 \text{ m}$.

Η γωνιακή συχνότητα ω' της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα των δύο σωμάτων υπολογίζεται από τη σχέση: $k_1 = (m_1 + m_2) \omega'^2$ ή $\omega' = 5\sqrt{2}$ rad/s.

Θεωρούμε την τυχαία θέση της τροχιάς του συστήματος των δύο σωμάτων που φαίνεται στο σχήμα. Επειδή το σώμα Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς D_2 , ισχύει: $\Sigma F_x = -D_2 x$ ή $T - w_2 = -m_2 \omega'^2 x$ ή $T = m_2 g - m_2 \omega'^2 x$ ή $T = 10 - 50x$ (S.I.) (1).

Το νήμα χαλαρώνει, όταν η τάση του νήματος που ασκείται στο σώμα Σ_2 γίνει ίση με μηδέν ($T=0$). Από τη σχέση (1) για $T=0$ προκύπτει: $x=+0,2\text{ m}$. Εφόσον είναι $x=A$, το νήμα οριακά δεν χαλαρώνει. Επομένως, από τη σχέση (1) για $x=-A=-0,2\text{ m}$ προκύπτει: $T_{\max}=20\text{ N}$.

Από τη σχέση (1) για $x = +A = +0,2 \text{ m}$ προκύπτει: $T_{\min} = 0$.

δ. Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία η τάση του νήματος γίνεται ελάχιστη για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σύστημα των δύο σωμάτων βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης ($x = +A$). Επειδή είναι $x = \Delta \ell_2$, η πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων ταυτίζεται με τη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Μετά την κοπή του νήματος που συνδέει το σώμα Σ_1 με το σώμα Σ_2 , το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη Θ.Ι.(4). Επομένως, το πλάτος A' της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κοπή του νήματος είναι: $A' = \Delta \ell_4$ ή $A' = 0,1 \text{ m}$. Η ενέργεια της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κοπή του νήματος είναι: $E = \frac{1}{2} k_1 A'^2$ ή $E = 0,5 \text{ J}$.

Θέμα 12ο

α. Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = m_1 g h \quad \text{ή} \quad |v_1| = 8 \text{ m/s}.$$

Έστω v'_2 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

Είναι: $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$ ή $v'_2 = +4 \text{ m/s}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το

σώμα Σ_2 μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m_2 \omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$ ή $\omega = 5 \text{ rad/s}$.

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης μετά την κρούση. Είναι: $v'_2 = v_{\text{max}}$ ή $v'_2 = \omega A$ ή $A = 0,8 \text{ m}$.

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 από τη Θ.Ι. μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0) \quad \text{ή} \quad x = 0,8 \eta \mu(5t) \text{ (S.I.)}.$$

β. Έστω $\Delta \ell$ η συσπίρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 . Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_2 - F_{\text{ελ}} = 0$ ή $m_2 g = k \Delta \ell$ ή $\Delta \ell = 0,4 \text{ m}$.

Ο ζητούμενος λόγος είναι:
$$\frac{U_{\text{ελ(max)}}}{U_{\text{max}}} = \frac{\frac{1}{2} k (\Delta \ell + A)^2}{\frac{1}{2} k A^2} \quad \text{ή} \quad \frac{U_{\text{ελ(max)}}}{U_{\text{max}}} = 2,25.$$

γ. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_2 γίνεται μέγιστο για πρώτη φορά μετά την κρούση τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το σώμα Σ_2 βρίσκεται στην κάτω ακραία

θέση της ταλάντωσης ($x = +A$). Είναι: $t_1 = \frac{T}{4}$ ή $t_1 = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega}$ ή $t_1 = 0,1\pi \text{ s}$.

Αμέσως μετά την κρούση το σώμα Σ_1 αποκτά ταχύτητα $\bar{v}'_1$, της οποίας η αλγεβρική τιμή υπολο-

γίζεται από τη σχέση: $v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$ ή $v'_1 = -4 \text{ m/s}$. Έστω h' το ύψος πάνω από τη Θ.Ι. του

σώματος Σ_2 στο οποίο βρίσκεται το σώμα Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 .

Είναι: $h' = |v'_1| t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$ ή $h' = 0,756 \text{ m}$. Η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων τη χρονική

στιγμή t_1 είναι: $d = h' + A$ ή $d = 1,556 \text{ m}$.

δ. Έστω $\Delta \ell'$ η παραμόρφωση του ελατηρίου τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ_2 από το ελατήριο είναι $F_{\text{ελ}} = 15 \text{ N}$. Είναι: $F_{\text{ελ}} = k \Delta \ell'$ ή $\Delta \ell' = 0,2 \text{ m}$.

Αν τις παραπάνω χρονικές στιγμές το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta \ell'$, τότε η απομάκρυνση του σώματος Σ_2 από τη Θ.Ι. είναι: $x = -(\Delta \ell - \Delta \ell')$ ή $x = -0,2 \text{ m}$.

Επομένως, η επιτάχυνση του σώματος Σ_2 είναι: $a = -\omega^2 x$ ή $a = +5 \text{ m/s}^2$.

Αν το ελατήριο τις παραπάνω χρονικές στιγμές είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell'$, τότε η απομάκρυνση του σώματος Σ_2 από τη Θ.Ι. είναι: $x = -(\Delta\ell + \Delta\ell')$ ή $x = -0,6$ m. Επομένως, η επιτάχυνση του σώματος Σ_2 είναι: $\alpha = -\omega^2 x$ ή $a = +15$ m/s².

Θέμα 13ο

α. Έστω $\Delta\ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ_2 . Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_2 - F_{ελ} = 0$ ή $m_2 g = k\Delta\ell$ ή $\Delta\ell = 0,1$ m. Έστω Α το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m_2 v^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 \text{ ή } A = 0,3 \text{ m.}$$

β. Έστω $\bar{v}'_1$ και $\bar{v}'_2$ οι ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα, αμέσως μετά την κρούση. Επειδή το σώμα Σ_2 τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, βρίσκεται στη θέση ισορροπίας, ισχύει: $|v'_2| = v_{\max}$ ή $|v'_2| = \omega A$ ή $|v'_2| = \sqrt{\frac{k}{m_2}} A$ ή $|v'_2| = 3$ m/s.

Το σώμα Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση έως τη χρονική στιγμή $t = 0,4$ s στην οποία φτάνει στο έδαφος εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου $g = 10$ m/s². Επομένως, ισχύει: $h = |v'_1|t + \frac{1}{2}gt^2$ ή $|v'_1| = 6$ m/s.

γ. Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων $\bar{v}'_1$ και $\bar{v}'_2$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1) \text{ και } v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε: $\frac{v'_1}{v'_2} = \frac{m_1 - m_2}{2m_1} \quad (3).$

Αν θεωρήσουμε ως θετική τη φορά της ταχύτητας $\bar{v}'_1$, από τη σχέση (3) προκύπτει:

$$-\frac{6}{3} = \frac{m_1 - m_2}{2m_1} \text{ ή } m_2 = 5m_1 \text{ ή } m_1 = 0,2 \text{ kg.}$$

δ. Από τη σχέση (2) για $m_2 = 5m_1$ προκύπτει: $v_1 = 9$ m/s. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1}$

ή $\frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_1 v_0^2 = -m_1 gh$ ή $|v_0| = \sqrt{145}$ m/s. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi = \frac{\frac{1}{2}m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2}m_1 v_0^2} \cdot 100\% \text{ ή } \pi = 31\%.$$

Θέμα 14ο

α. Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} k A_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + \frac{1}{2} k d^2 \quad \text{ή} \quad A_1 = 0,2\sqrt{2} \text{ m.}$$

β. Έστω $\Delta\ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ_1 . Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{ελ} = 0$ ή $m_1 g = k \Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,1 \text{ m}$.

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του σώματος Σ_1 από τη Θ.Ι. τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση είναι: $|x| = \Delta\ell + \Delta\ell_1$ ή $|x| = 0,2 \text{ m}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} k A_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

ή $|v_1| = 2 \text{ m/s}$. Έστω v'_2 η ταχύτητα του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου – Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_2 μετά την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_2} \quad \text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -m_2 g h \quad \text{ή} \quad |v_2'| = 5 \text{ m/s.}$$

γ. Για την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v'_2 του σώματος Σ_2 μετά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας $\bar{v}_1$, ισχύει:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \quad \text{ή} \quad +5 \text{ m/s} = \frac{8}{5} (+2 \text{ m/s}) + \left(-\frac{3}{5}\right) v_2 \quad \text{ή} \quad v_2 = -3 \text{ m/s.}$$

Η ορμή του σώματος Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2(\text{μετά})} - \vec{p}_{2(\text{πριν})}$ ή αλγεβρικά:

$$\Delta p_2 = m_2 v'_2 - m_2 v_2 \quad \text{ή} \quad \Delta p_2 = +8 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \quad \text{ή} \quad |\Delta p_2| = 8 \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$$

δ. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v'_1 του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v'_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_1 = \left[\frac{2}{5} (-3 \text{ m/s}) + \frac{3}{5} (+2 \text{ m/s}) \right] \quad \text{ή} \quad v'_1 = 0.$$

Επομένως, το σώμα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσης που εκτελεί μετά την κρούση. Δηλαδή, ισχύει: $x = +A_2$, όπου A_2 το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 μετά την κρούση. Είναι: $A_2 = \Delta\ell + \Delta\ell_1$ ή $A_2 = 0,2 \text{ m}$.

Εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη Θ.Ι. είναι $x = +A_2$, η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση είναι: $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_1 \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 από τη Θ.Ι. μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$x = A_2 \eta \mu(\omega t + \phi_0) \quad \text{ή} \quad x = 0,2 \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{S.I.}).$$

ε. Είναι: $F_{ελ(\text{max})} = k(\Delta\ell_1 + A_2)$ ή $F_{ελ(\text{max})} = 120 \text{ N}$. Εφόσον ισχύει $A_2 > \Delta\ell_1$, είναι: $F_{ελ(\text{min})} = 0$.

Θέμα 15ο

α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 πριν από την κρούση είναι $A_1 = 0,3 \text{ m}$ και η γωνιακή της συχνότητα είναι $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Η ενέργεια της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 πριν από την κρούση είναι: $E = \frac{1}{2} D A_1^2$ ή $E = \frac{1}{2} m_2 \omega^2 A_1^2$ ή $E = 18 \text{ J}$.

β. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ_2 από τη Θ.Ι. τη χρονική στιγμή $t = 0,2\pi \text{ s}$. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης για $t = 0,2\pi \text{ s}$ προκύπτει: $x = 0,3\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$

ή $x = +0,3 \text{ m}$ ή $x = +A_1$. Επομένως τη χρονική στιγμή $t = 0,2\pi \text{ s}$ ακριβώς πριν από την κρούση η ταχύτητα του σώματος Σ_2 είναι: $v_2 = 0$. Έστω v'_2 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος

Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Είναι: $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$ ή $v'_2 = \frac{2}{5}(-10 \text{ m/s})$ ή $v'_2 = -4 \text{ m/s}$.

Η σταθερά του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση: $k = m_2 \omega^2$ ή $k = 400 \text{ N/m}$.

Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2} k A_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2} k x^2 \text{ ή } A_2 = 0,5 \text{ m}.$$

γ. Επειδή το ελατήριο είναι οριζόντιο, η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου ταυτίζεται με τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος Σ_2 από τη Θ.Ι. τις χρονικές στιγμές μετά την κρούση στις οποίες η κινητική του ενέργεια γίνεται ίση με τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης ($K = U$). Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το

σώμα Σ_2 μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$ ή $E = 2U$ ή $\frac{1}{2} k A_2^2 = 2 \frac{1}{2} k x_1^2$ ή $x_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A_2$
ή $x_1 = \pm 0,25\sqrt{2} \text{ m}$ ή $|x_1| = 0,25\sqrt{2} \text{ m}$.

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_2 τις παραπάνω χρονικές στιγμές είναι:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = |\Sigma F| \text{ ή } \left| \frac{dp}{dt} \right| = D|x_1| \text{ ή } \left| \frac{dp}{dt} \right| = k|x_1| \text{ ή } \left| \frac{dp}{dt} \right| = 100\sqrt{2} \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

δ. Έστω v'_1 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση.

Είναι: $v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$ ή $v'_1 = +6 \text{ m/s}$. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{|\Delta K_1|}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\% \text{ ή } \pi = \frac{\left| \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right|}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \text{ ή } \pi = 64\%.$$

Θέμα 16ο

α. Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1} + W_{N_1} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -m_1 g \eta \mu \phi s_1 + 0 \quad \text{ή} \quad |v_1| = 2 \text{ m/s.}$$

Έστω v'_1 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση.

$$\text{Είναι: } v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_1 = 0. \quad \text{Έστω } v'_2 \text{ η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος } \Sigma_2$$

$$\text{αμέσως μετά την κρούση. Είναι: } v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_2 = +2 \text{ m/s.}$$

β. Έστω α το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Ισχύει: $\Sigma F_x = m_1 \alpha$ ή $w_{1x} = m_1 \alpha$ ή $m_1 g \eta \mu \phi = m_1 \alpha$ ή $\alpha = 5 \text{ m/s}^2$.

$$\text{Η χρονική στιγμή } t_1 \text{ υπολογίζεται από τη σχέση: } s_2 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,4\pi \text{ s.}$$

Έστω T η περίοδος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_2 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά μετά την κρούση,

$$\text{ισχύει: } t_1 = \frac{T}{2} \quad \text{ή} \quad T = 0,8\pi \text{ s.}$$

γ. Έστω ω η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση.

Είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 2,5 \text{ rad/s}$. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Είναι: $v'_2 = v_{\text{max}}$ ή $v'_2 = \omega A$ ή $A = 0,8 \text{ m}$. Η σταθερά του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση: $k = m_2 \omega^2$ ή $k = 25 \text{ N/m}$. Εφόσον για $t = 0$ είναι $x = 0$ και $v > 0$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$. Η χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα Σ_2 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$\Sigma F = -Dx \quad \text{ή} \quad \Sigma F = -kA \eta \mu(\omega t + \phi_0) \quad \text{ή} \quad \Sigma F = -20 \eta \mu(2,5t) \text{ (S.I.)}$$

δ. Η δυναμική ενέργεια U της ταλάντωσης σε συνάρτηση

με την απομάκρυνση x δίνεται από τη σχέση: $U = \frac{1}{2} D x^2$

$$\text{ή} \quad U = \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{ή} \quad U = 12,5 x^2 \text{ (1), με } -0,8 \text{ m} \leq x \leq +0,8 \text{ m.}$$

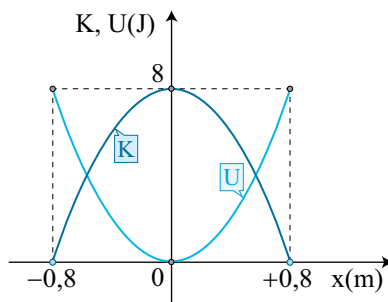
Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που

εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad K = E - U \quad \text{ή} \quad K = \frac{1}{2} k A^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{ή} \quad K = 8 - 12,5 x^2$$

(2), με $-0,8 \text{ m} \leq x \leq +0,8 \text{ m}$. Στο διάγραμμα του διπλα-

νού σχήματος απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις των σχέσεων (1) και (2).



Θέμα 17ο

α. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση, έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = m_1 g h \quad \text{ή} \quad v_1 = 2 \text{ m/s.}$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$
ή $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$ ή $v = 0,5 \text{ m/s.}$

β. Έστω $\Delta \ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_2 - F_{\text{ελ}} = 0$ ή $m_2 g = k \Delta \ell$

ή $\Delta \ell = 0,3 \text{ m.}$ Έστω $\Delta \ell'$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης

του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{\text{ολ}} - F'_{\text{ελ}} = 0$

ή $(m_1 + m_2) g = k \Delta \ell'$ ή $\Delta \ell' = 0,4 \text{ m.}$ Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος

από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x| = \Delta \ell' - \Delta \ell$

ή $|x| = +0,1 \text{ m.}$ Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την

κρούση έχουμε: $E = K + U$ ή $\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k x^2$ ή $A = 0,1\sqrt{2} \text{ m.}$

γ. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{K_{I(\text{πριν})} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})}}{K_{I(\text{πριν})}} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 75\%.$$

δ. Έστω $\Delta \ell_1$ η παραμόρφωση του ελατηρίου τη χρονική στιγμή t_1 .

Είναι: $U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell_1)^2$ ή $\Delta \ell_1 = 0,5 \text{ m.}$ Έστω ότι το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_1 είναι επιμη-

κυμένο κατά $\Delta \ell_1$. Σε αυτήν την περίπτωση η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$x_1 = +(\Delta \ell_1 + \Delta \ell')$ ή $x_1 = +0,9 \text{ m} > A$ άτοπο.

Έστω ότι το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_1 είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta \ell_1$. Σε αυτήν την περί-

πτωση η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)]

τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $x_1 = -(\Delta \ell_1 - \Delta \ell')$ ή $x_1 = -0,1 \text{ m.}$ Έστω v_1 η ταχύτητα του συσσω-

ματώματος τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του συσσωμα-

τώματος έχουμε: $E = K + U$ ή $\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2$ ή $v_1 = \pm 0,5 \text{ m/s.}$

Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το συσσωμάτωμα διέρχεται για πρώτη φορά μετά την κρούση από τη θέση με απομάκρυνση $x_1 = -0,1 \text{ m}$ η ταχύτητα του είναι αρνητική.

Επομένως, είναι: $v_1 = -0,5 \text{ m/s}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του συσσωματώματος έχουμε: $E = K + U$ ή $dE = dK + dU$ ή $0 = dK + dU$ ή $\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt}$ ή $\frac{dU}{dt} = -\Sigma Fv$ ή $\frac{dU}{dt} = kxv$. Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα είναι: $\frac{dU}{dt} = kx_1v_1$ ή $\frac{dU}{dt} = +5 \text{ J/s}$.

Θέμα 18ο

α. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι: $A_1 = d$ ή $A_1 = 0,2 \text{ m}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $D_1 = m_1\omega_1^2$ ή $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$ ή $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$.

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας είναι $x = +A_1$, η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 δίνεται από τη σχέση:

$$x_1 = A_1 \eta \mu(\omega_1 t + \phi_0) \quad \text{ή} \quad x_1 = 0,2 \eta \mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.}).$$

β. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D_1 A_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} D_1 x^2 \quad \text{ή} \quad k A_1^2 = m_1 v_1^2 + k \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \text{ή} \quad v_1 = \sqrt{3} \text{ m/s}.$$

Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 πριν από την κρούση είναι: $A_2 = d$ ή $A_2 = 0,2 \text{ m}$. Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 πριν από την κρούση έχουμε: $E = K + U$ ή $\frac{1}{2} D_2 A_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} D_2 x^2$ ή $k A_2^2 = m_2 v_2^2 + k \left(\frac{d}{2}\right)^2$ ή $v_2 = 0,5\sqrt{3} \text{ m/s}$.

γ. Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται από την κρούση εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας τη θέση όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Θεωρούμε μια τυχαία θέση της τροχιάς του συσσωματώματος με απομάκρυνση $\bar{x}$ από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Στην τυχαία θέση, θεωρώντας ως θετική τη φορά της απομάκρυνσης $\bar{x}$, ισχύει:

$$\Sigma F = -F_{\epsilon\lambda(1)} - F_{\epsilon\lambda(2)} \quad \text{ή} \quad \Sigma F = -k_1 x - k_2 x \quad \text{ή} \quad \Sigma F = -2kx. \text{ Επομένως το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς } D = 2k.$$

δ. Έστω $\bar{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$ ή $m_2 v_2 - m_1 v_1 = (m_1 + m_2) \bar{v}$ ή $\bar{v} = +0,2\sqrt{3} \text{ m/s}$. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \quad \text{ή} \quad 2kA^2 = (m_1 + m_2)v^2 + 2k\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

ή $A = 0,1\sqrt{1,3} \text{ m}$. Το μέτρο του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\left|\frac{dp}{dt}\right|_{\max} = \Sigma F_{\max} \quad \text{ή} \quad \left|\frac{dp}{dt}\right|_{\max} = DA \quad \text{ή} \quad \left|\frac{dp}{dt}\right|_{\max} = 20\sqrt{1,3} \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

Θέμα 19ο

α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του συσσωματώματος προκύπτουν:

$\omega = 5 \text{ rad/s}$, $\alpha_{\max} = 10\sqrt{3} \text{ m/s}^2$ και $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$. Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Είναι: $\alpha_{\max} = \omega^2 A_2$ ή $A_2 = 0,4\sqrt{3} \text{ m}$. Η ενέργεια της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα υπολογίζεται από τη σχέση: $E = \frac{1}{2}kA_2^2$ ή $E = 96 \text{ J}$.

β. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του συσσωματώματος δίνεται από τη σχέση:

$$v = \omega_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0) \quad \text{ή} \quad v = 2\sqrt{3} \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) (1)}.$$

Από τη σχέση (1) για $t = 0$ προκύπτει: $v = 0$.

γ. Η μάζα του σώματος Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2)\omega^2$ ή $k = (m_1 + m_2)\omega^2$ ή $m_2 = 12 \text{ kg}$. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δυο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}} \quad \text{ή} \quad m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0 \quad \text{ή} \quad v_1 = 4 \text{ m/s}.$$

Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων εξαιτίας της κρούσης είναι: $E_{\text{απωλ}} = K_{\text{ολ(πριν)}} - K_{\text{ολ(μετά)}} \quad \text{ή} \quad E_{\text{απωλ}} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - 0 \quad \text{ή} \quad E_{\text{απωλ}} = \frac{384}{9} \text{ J}.$

δ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος δίνεται από τη σχέση:

$$x = A_2 \eta \mu(\omega_2 t + \varphi_0) \quad \text{ή} \quad x = 0,4\sqrt{3} \eta \mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) (2)}.$$

Έστω x η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη Θ.Ι. τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση. Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι: $x = +0,4\sqrt{3} \text{ m}$. Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{ή} \quad A_1 = 0,8 \text{ m}.$$

Η γωνιακή συχνότητα ω_1 της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m_1 \omega_1^2$ ή $k = m_1 \omega_1^2$ ή $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$.

Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας που αποκτά το σώμα Σ_1 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης που εκτελεί πριν από την κρούση είναι: $v_{\max} = \omega_1 A_1$ ή $v_{\max} = 8 \text{ m/s}$.

Θέμα 206

α. Η δύναμη που ασκείται στο συσσωμάτωμα από το ελατήριο μηδενίζεται στη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Επομένως, το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση είναι $A = \Delta \ell_2$, όπου $\Delta \ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Στη Θ.Ι.(2) ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{ολ} - F_{ελ} = 0$ ή $(m_1 + m_2)g = k\Delta \ell_2$ ή $\Delta \ell_2 = 0,1 \text{ m}$ ή $A = 0,1 \text{ m}$.

β. Έστω $\Delta \ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F'_{ελ} = 0$ ή $m_1 g = k\Delta \ell_1$ ή $\Delta \ell_1 = 0,05 \text{ m}$. Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x| = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1$ ή $|x| = 0,05 \text{ m}$.

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{ή} \quad v = 0,5\sqrt{3} \text{ m/s}.$$

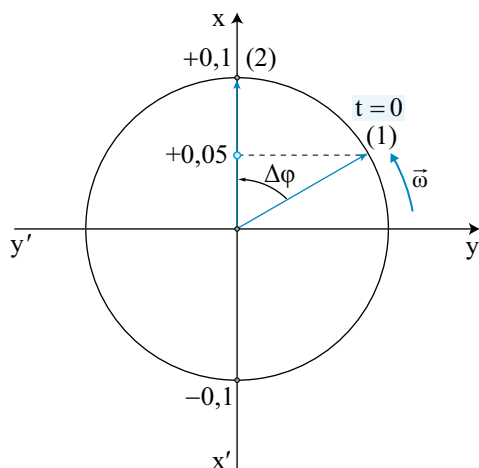
γ. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$ ή $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$ ή $v_1 = \sqrt{3} \text{ m/s}$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε: $K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w_1}$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -m_1 g h \quad \text{ή} \quad |v_0| = 2\sqrt{3} \text{ m/s} \quad \text{Το ζητούμενο ποσοστό είναι:}$$

$$\pi = \frac{K_{1(πριν)} - K_{ολ(μετά)}}{K_{1(αρχ)}} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 12,5\%.$$

δ. Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά για την ταλάντωση που εκτελεί το συσσωμάτωμα τη φορά προς τα πάνω, τότε η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αμέσως μετά την κρούση είναι $x = +0,05 \text{ m}$. Η χρονική στιγμή t_1 ισούται με το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta \phi$ που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Είναι:

$$\text{συν}\Delta \phi = \frac{0,05}{0,1} \quad \text{ή} \quad \text{συν}\Delta \phi = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \Delta \phi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}.$$



Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2)\omega^2$

$$\text{ή } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad \text{ή } \omega = 10 \text{ rad/s. Είναι: } \omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad \text{ή } \Delta t = \frac{\pi}{30} \text{ s} \quad \text{ή } t_1 = \frac{\pi}{30} \text{ s.}$$

Θέμα 21ο

α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση είναι $A = 0,3 \text{ m}$ και η γωνιακή της συχνότητα είναι $\omega_2 = 5 \text{ rad/s}$. Η ενέργεια της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα υπολογίζεται από τη σχέση: $E = \frac{1}{2}kA^2$ ή $E = 4,5 \text{ J}$.

β. Η σταθερά επαναφοράς του συσσωματώματος δίνεται από τη σχέση:

$$D = (m_1 + m_2)\omega_2^2 \quad \text{ή } k = (m_1 + m_2)\omega_2^2 \quad \text{ή } m_1 + m_2 = 4 \text{ kg (1).}$$

Έστω x η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος για $t = 0$ προκύπτει: $x = 0,3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$ ή $x = +0,3 \text{ m}$.

Έστω $\Delta\ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στην αρχική Θ.Ι. του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{\epsilon\lambda} = 0$ ή $m_1g = k\Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = \frac{m_1g}{k}$ (2).

Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι. της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)].

Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{\sigma\lambda} - F'_{\epsilon\lambda} = 0$ ή $(m_1 + m_2)g = k\Delta\ell_2$

ή $\Delta\ell_2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$ (3). Η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $x = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$ ή, λόγω των σχέσεων (2) και (3): $x = \frac{m_2g}{k}$ ή $m_2 = 3 \text{ kg}$. Από τη σχέση (1) για $m_2 = 3 \text{ kg}$ προκύπτει: $m_1 = 1 \text{ kg}$.

γ. Έστω T_1 η περίοδος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση.

Είναι: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$ ή $T_1 = 0,2\pi \text{ s}$. Έστω Δt το χρονικό διάστημα της κίνησης του σώματος Σ_1

από τη χρονική στιγμή στην οποία αφέθηκε ελεύθερο να ταλαντωθεί μέχρι τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την κρούση. Είναι: $\Delta t = \frac{T_1}{4}$ ή $\Delta t = 0,05\pi \text{ s}$. Στο χρονικό διάστημα Δt το σώμα

Σ_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση, οπότε ισχύει: $h = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$ ή $h = 0,0125\pi^2 \text{ m}$.

δ. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι $x = +0,3 \text{ m} = +A$, η ταχύτητα του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση είναι $v = 0$. Έστω v_1 και v_2 τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα ακριβώς πριν από την κρούση.

Είναι: $v_2 = g\Delta t$ ή $v_2 = 0,5\pi$ m/s. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα πάνω, έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$
 ή $m_1v_1 - m_2v_2 = 0$ ή $v_1 = 3v_2$ ή $v_1 = 1,5\pi$ m/s. Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση. Είναι: $v_1 = v_{\max}$ ή $v_1 = \frac{2\pi}{T_1}A_1$ ή $A_1 = 0,15\pi$ m.

Θέμα 22ο

α. Είναι: $v = \frac{\sqrt{3}}{2}v_{\max}$ ή $v = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega A$ ή $v = 0,75\sqrt{3}$ m/s.

β. Το διάστημα s_1 που διανύει το συσσωμάτωμα μέχρι να ακινητοποιηθεί στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $s_1 = |x| + A$, όπου x η απομάκρυνση του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση. Η μάζα του συσσωματώματος υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2)\omega^2$ ή $m_1 + m_2 = \frac{k}{\omega^2}$ ή $m_1 + m_2 = 16$ kg (1).

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$ ή $\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}Dx^2$ ή $kA^2 = (m_1 + m_2)v^2 + kx^2$
 ή $|x| = 0,15$ m. Επομένως, είναι: $s_1 = 0,45$ m.

γ. Έστω $\Delta\ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στην αρχική Θ.Ι. του σώματος Σ_2 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_{2x} - F_{ελ} = 0$ ή $m_2g\eta\mu\phi = k\Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = \frac{m_2g\eta\mu\phi}{k}$ (2).

Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι. της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)].

Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_{ολ(x)} - F'_{ελ} = 0$ ή $(m_1 + m_2)g\eta\mu\phi = k\Delta\ell_2$

ή $\Delta\ell_2 = \frac{(m_1 + m_2)g\eta\mu\phi}{k}$ (3). Είναι: $|x| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$, ή λόγω των σχέσεων (2) και (3):

$|x| = \frac{m_1g\eta\mu\phi}{k}$ ή $m_1 = 12$ kg. Από τη σχέση (1) για $m_1 = 12$ kg προκύπτει $m_2 = 4$ kg.

δ. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από την Α.Δ.Ο για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$
 ή $m_1v_1 = (m_1 + m_2)v$ ή $v_1 = \sqrt{3}$ m/s. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1} + W_N$ ή $\frac{1}{2}m_1v_1^2 - 0 = m_1g\eta\mu\phi s + 0$ ή $s = 0,3$ m.

ε. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος δίνεται από τη σχέση:

$\frac{dK}{dt} = \Sigma Fv$ ή $\frac{dK}{dt} = -Dxv$ (2). Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος μηδενίζεται, όταν: $x = 0$ ή $v = 0$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $x = +0,15 \text{ m}$ κινούμενο με θετική ταχύτητα. Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος μηδενίζεται για δεύτερη φορά μετά την κρούση τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία η ταχύτητά του μηδενίζεται ($v = 0$) για πρώτη φορά μετά την κρούση.

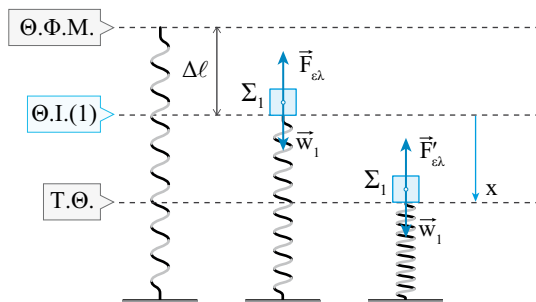
Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι: $x_1 = -A$ ή $x_1 = -0,3 \text{ m}$.

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $\frac{dp}{dt} = \Sigma F$ ή $\frac{dp}{dt} = -Dx_1$ ή $\frac{dp}{dt} = +120 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$.

Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το συσσωμάτωμα από το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $F_{ελ} = k(\Delta\ell_2 + A)$ ή λόγω της σχέσης (3): $F_{ελ} = (m_1 + m_2)g\eta\mu\phi + kA$ ή $F_{ελ} = 200 \text{ N}$.

Θέμα 23ο

α.



Έστω $\Delta\ell$ η συσπίρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{ελ} = 0$ ή $m_1 g = k\Delta\ell$ (1).

Θεωρούμε την τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος Σ_1 που φαίνεται στο σχήμα με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας. Αν θεωρήσουμε ως θετική τη φορά της απομάκρυνσης x , τότε για τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα Σ_1 στην τυχαία θέση ισχύει: $\Sigma F = w_1 - F'_{ελ}$ ή $\Sigma F = m_1 g - k(\Delta\ell + x)$ ή $\Sigma F = m_1 g - k\Delta\ell - kx$ ή, λόγω της σχέσης (1): $\Sigma F = -kx$ (2).

Επομένως το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς: $D = k$.

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m_1 v_0^2 + \frac{1}{2}kd^2 \quad \text{ή} \quad A = \sqrt{\frac{m_1}{k}v_0^2 + d^2} \quad \text{ή} \quad A = 0,2\sqrt{2} \text{ m}.$$

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m_1 \omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$ ή $\omega = 5\sqrt{2} \text{ rad/s}$.

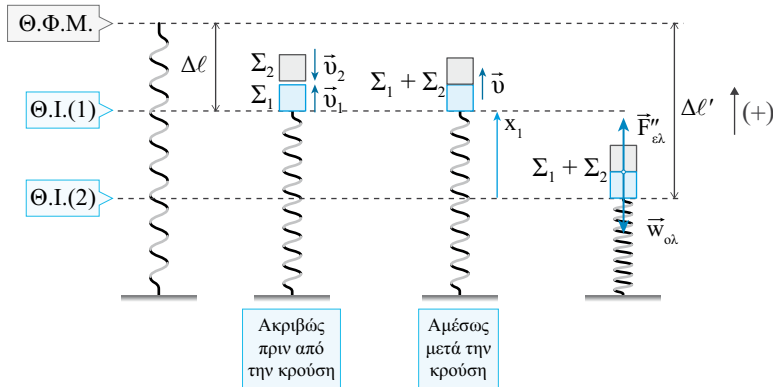
Από τη σχέση (1) έχουμε: $\Delta\ell = \frac{m_1 g}{k}$ ή $\Delta\ell = 0,2 \text{ m}$.

Η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα Σ_1 μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές στις οποίες σώμα Σ_1 διέρχεται από τη θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Το μέτρο της επιτάχυνσης a του σώματος Σ_1 τις παραπάνω χρονικές στιγμές υπολογίζεται από τη σχέση:

$$|a| = \omega^2|x| \quad \text{ή} \quad |a| = \omega^2\Delta\ell \quad \text{ή} \quad |a| = 10 \text{ m/s}^2.$$

γ. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση.

$$\text{Είναι: } v_1 = v_{\max} \quad \text{ή} \quad v_1 = \omega A \quad \text{ή} \quad v_1 = 2 \text{ m/s}.$$



Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά προς τα πάνω, έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}} \quad \text{ή} \quad m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$ ή $v = 1 \text{ m/s}$. Το ποσό θερμότητας που παράγεται κατά την κρούση είναι:

$$Q = K_{\text{ολ(πριν)}} - K_{\text{ολ(μετά)}} \quad \text{ή} \quad Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \quad \text{ή} \quad Q = 3 \text{ J}.$$

δ. Έστω $\Delta\ell'$ η συσπίρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_{\text{ολ}} - F_{\text{ελ}}'' = 0$

ή $(m_1 + m_2)g = k\Delta\ell' \quad \text{ή} \quad \Delta\ell' = 0,3 \text{ m}$. Η απομάκρυνση x_1 του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] αμέσως μετά την κρούση είναι: $x_1 = +(\Delta\ell' - \Delta\ell)$

ή $x_1 = +0,1 \text{ m}$. Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά τη κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του συσσωματώματος έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} k A'^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 \quad \text{ή} \quad A' = 0,2 \text{ m}.$$

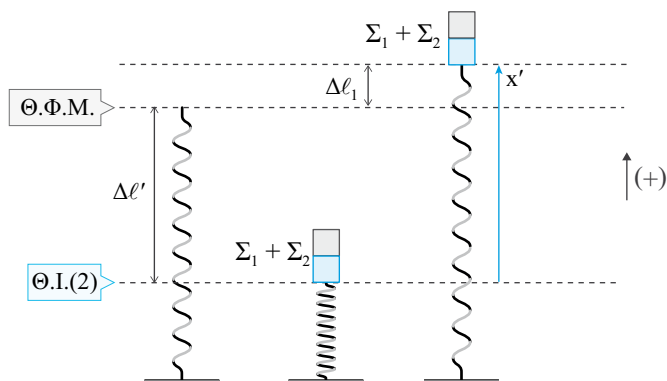
Η γωνιακή συχνότητα ω' της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση υπολο-

γίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2) \omega'^2 \quad \text{ή} \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega' = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s}.$

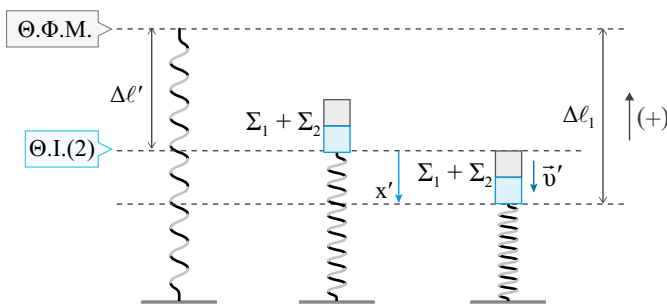
Η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης που αποκτά το συσσωμάτωμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης

του είναι: $\alpha_{\max} = \omega'^2 A \quad \text{ή} \quad \alpha_{\max} = \frac{20}{3} \text{ m/s}^2.$

ε. Έστω $\Delta\ell_1$ η παραμόρφωση του ελατηρίου τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία η δυναμική του ενέργεια είναι $U_{\text{ελ}} = 8 \text{ J}$ για πρώτη φορά μετά την κρούση. Είναι: $U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_1)^2$ ή $\Delta\ell_1 = 0,4 \text{ m}$. Έστω ότι το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_2 είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell_1$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Η απομάκρυνση x' του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $x' = +(\Delta\ell' + \Delta\ell_1)$ ή $x' = +0,7 \text{ m} > A'$ (άτοπο). Έστω ότι το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_2 είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell_1$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Επειδή είναι $\Delta\ell_1 > \Delta\ell'$ το συσσωμάτωμα βρίσκεται σε μια θέση κάτω από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Η απομάκρυνση x' του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $x' = -(\Delta\ell_1 - \Delta\ell')$ ή $x' = -0,1 \text{ m}$. Τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση με απομάκρυνση $x' = -0,1 \text{ m}$ για πρώτη φορά μετά την κρούση η ταχύτητά του είναι αρνητική. Έστω v' η ταχύτητα του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_2 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του συσσωματώματος έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 + \frac{1}{2}kx'^2 \quad \text{ή} \quad v' = -1 \text{ m/s}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma Fv \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -Dx'v' \quad \text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = -10 \text{ J/s}.$$

Θέμα 24ο

α. Έστω x η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αμέσως μετά την κρούση. Είναι: $U = \frac{1}{2}Dx^2$ ή $|x| = 0,1 \text{ m}$. Η μάζα του συσσωματώματος υπολογίζεται από τη σχέση: $D = (m_1 + m_2)\omega^2$ ή $k = (m_1 + m_2)\omega^2$ ή $m_1 + m_2 = 4 \text{ kg}$.

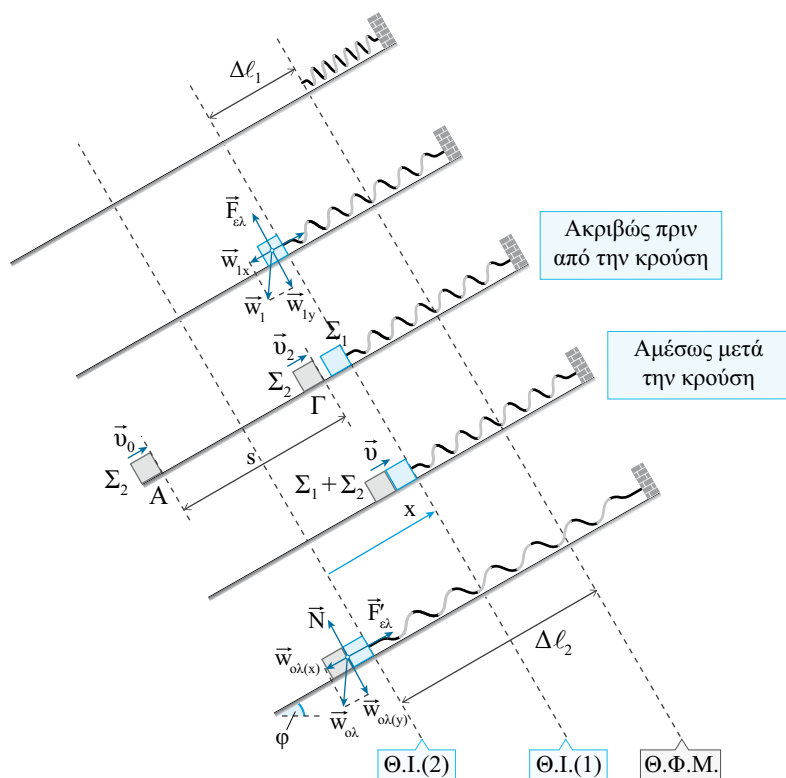
Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{ή} \quad v = 0,5\sqrt{3} \text{ m/s}.$$

β. i. Η μέγιστη τιμή της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο συσσωμάτωμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης είναι: $\Sigma F_{\max} = DA$ ή $\Sigma F_{\max} = kA$ ή $\Sigma F_{\max} = 20 \text{ N}$.

ii. Το χρονικό διάστημα Δt μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος είναι: $\Delta t = \frac{T}{2}$ ή $\Delta t = \frac{(2\pi/\omega)}{2}$ ή $\Delta t = \frac{\pi}{\omega}$ ή $\Delta t = 0,2\pi \text{ s}$.

γ.



i. Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι. (1)]. Έχουμε: $\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_{1x} - F_{ελ} = 0$ ή $m_1 g \sin \varphi = k \Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = \frac{m_1 g \sin \varphi}{k}$ (1).

Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_{ολ(x)} - F'_{ελ} = 0$

$$\text{ή } (m_1 + m_2)g\mu\phi = k\Delta\ell_2 \quad \text{ή } \Delta\ell_2 = \frac{(m_1 + m_2)g\mu\phi}{k} \quad (2).$$

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη Θ.Ι. (2) αμέσως μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση: $|x| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$ ή, λόγω των σχέσεων (1) και (2):

$$|x| = \frac{m_2 g \mu \phi}{k} \quad \text{ή } m_2 = \frac{k|x|}{g \mu \phi} \quad \text{ή } m_2 = 2 \text{ kg. Επομένως, είναι: } m_1 = 2 \text{ kg.}$$

ii. Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση. Από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή } m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \quad \text{ή } v_2 = \sqrt{3} \text{ m/s.}$$

δ. i. Για να υπολογίσουμε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας $\bar{v}_0$ του σώματος Σ_2 , εφαρμόζουμε το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνησή του πριν από την κρούση μεταξύ των θέσεων Α και Γ που φαίνονται στο προηγούμενο σχήμα. Είναι: $K_\Gamma - K_A = W_{w_2} + W_{N_2}$

$$\text{ή } \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_2 v_0^2 = -m_2 g \mu \phi s + 0 \quad \text{ή } v_0 = 4 \text{ m/s.}$$

ii. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{Q_K}{K_{αρχ(\Sigma_2)}} \cdot 100\% \quad \text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2}{\frac{1}{2} m_2 v_0^2} \cdot 100\% \quad \text{ή } \pi = 9,375\%.$$

Θέμα 25ο

α. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 στο ανώτερο σημείο Δ της τροχιάς που διαγράφει μετά την κρούση. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 στη θέση Δ είναι το βάρος του $\vec{w}_2$ και η τάση $\vec{T}$ του νήματος. Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα Σ_2 στη θέση Δ δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Συνεπώς, ισχύει:

$$\Sigma F = F_c \quad \text{ή } T + m_2 g = \frac{m_2 v^2}{\ell} \quad \text{ή } T = \frac{m_2 v^2}{\ell} - m_2 g \quad (1).$$

Για να εκτελέσει το σώμα Σ_2 ανακύκλωση μετά την κρούση, θα πρέπει να φτάσει στη θέση Δ με το νήμα τεντωμένο. Συνεπώς, θα πρέπει στη θέση Δ να ισχύει: $T \geq 0$ ή, λόγω της σχέσης (1):

$$\frac{m_2 v^2}{\ell} - m_2 g \geq 0 \quad \text{ή } v \geq \sqrt{g\ell} \quad (2). \text{ Σύμφωνα με τη σχέση (2) το μέτρο της ελάχιστης ταχύτητας}$$

που πρέπει να έχει το σώμα Σ_2 στο ανώτερο σημείο Δ της τροχιάς του, ώστε να εκτελέσει ανακύκλωση είναι: $v_{\min} = \sqrt{g\ell}$ (3). Έστω v'_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Γ (θέση του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση) και Δ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το σώμα Σ_2 μετά την κρούση έχουμε:

$E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} = E_{\mu\eta\chi(\Delta)}$ ή $K_{\Gamma} + U_{\Gamma} = K_{\Delta} + U_{\Delta}$ (4). Αν θεωρήσουμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Γ, τότε η σχέση (4) γράφεται:

$$\frac{1}{2}m_2v_2'^2 + 0 = \frac{1}{2}m_2v_{\min}^2 + m_2g2\ell \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (3): } v_2' = \sqrt{5g\ell} \quad \text{ή } v_2' = 2 \text{ m/s.}$$

β. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ακριβώς πριν από την κρούση ισχύει: $K = \frac{1}{3}U$ (5).

Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης ακριβώς πριν από την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1

$$\text{πριν από την κρούση έχουμε: } E = K + U \quad \text{ή} \quad E = \frac{U}{3} + U \quad \text{ή} \quad E = \frac{4U}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{4}{3}\frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{ή } x = +\frac{\sqrt{3}}{2}A \quad \text{ή } x = +0,2\sqrt{3} \text{ m. Έστω } v_1 \text{ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος } \Sigma_1 \text{ ακριβώς πριν από την κρούση. Από τη σχέση (5) έχουμε: } \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{3}\frac{1}{2}kx^2 \quad \text{ή } v_1 = 2 \text{ m/s.}$$

γ. Έστω v_1' η ταχύτητα του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})}$ ή $m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2'$ ή $v_1' = 0$. Επομένως, το σώμα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης. Εφόσον η Θ.Ι. της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 δεν μεταβάλλεται κατά την κρούση, το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση είναι:

$A_2 = |x| = 0,2\sqrt{3} \text{ m}$. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη Θ.Ι. είναι $x = +A_2$, η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση είναι $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m_1\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος Σ_1 μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = -\omega^2 A_2 \eta\mu(\omega t + \phi_0) \quad \text{ή} \quad \alpha = -20\sqrt{3}\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

δ. Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων ακριβώς πριν από την κρούση είναι:

$$K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 \quad \text{ή} \quad K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = 8 \text{ J. Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων ακριβώς μετά την κρούση είναι: } K_{\text{ολ}(\text{μετά})} = \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad \text{ή} \quad K_{\text{ολ}(\text{μετά})} = 8 \text{ J.}$$

Επειδή είναι $K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = K_{\text{ολ}(\text{μετά})}$, η κρούση είναι ελαστική.

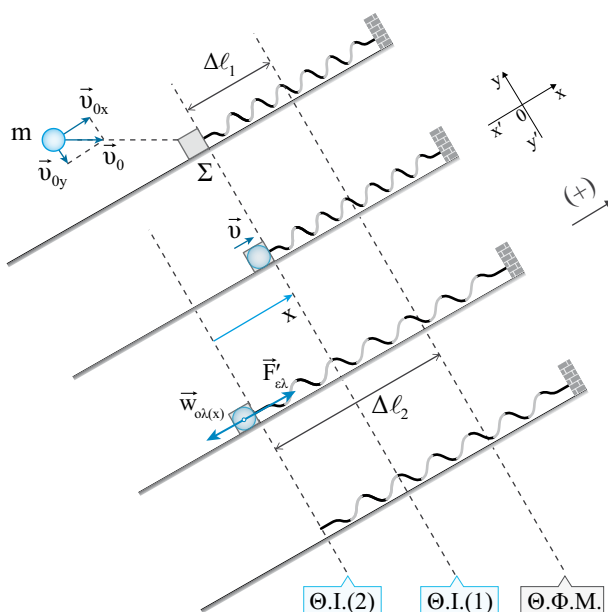
ε. Έστω v' το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή στην οποία διέρχεται από τη θέση Ζ, όπου το νήμα γίνεται οριζόντιο για πρώτη φορά μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις Γ και Ζ της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το σώμα Σ_2 μετά την κρούση έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} = E_{\mu\eta\chi(Z)} \quad \text{ή} \quad K_{\Gamma} + U_{\Gamma} = K_Z + U_Z \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + 0 = m_2g\ell + \frac{1}{2}m_2v'^2 \quad \text{ή} \quad v' = \sqrt{2,4} \text{ m/s.}$$

Το μέτρο της τάσης του νήματος που ασκείται στο σώμα Σ_2 στη θέση Z υπολογίζεται από τη σχέση: $\Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = F_{\kappa}$ ή $T = \frac{m_2 v'^2}{\ell}$ ή $T = 120 \text{ N}$. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_2 στη θέση Z υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = |\Sigma F| \quad \dot{\eta} \quad \left| \frac{dp}{dt} \right| = \sqrt{T^2 + w_2^2} \quad \dot{\eta} \quad \left| \frac{dp}{dt} \right| = 40\sqrt{10} \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

Θέμα 26ο

 α 

Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}_0$ που έχει το βλήμα πριν από την κρούση σε δύο κάθετες μεταξὺ τους συνιστώσες $\vec{v}_{0x}$ και $\vec{v}_{0y}$, όπως φαίνονται στο σχήμα. Έστω u το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων στον άξονα $x'Ox$ κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{0\lambda, x(\pi o u \nu)} = \vec{p}_{0\lambda, x(\mu e \tau \acute{\alpha})} \quad \acute{\eta} \quad m v_{0x} = (M + m)v \quad \acute{\eta} \quad m v_0 \sigma u \nu \varphi = (M + m)v \quad \acute{\eta} \quad v = \mathbf{0,25 \, m/s.}$$

β. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{K_{\beta\lambda,(\pi_{\text{priv}})} - K_{\text{o}\lambda,(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})}}{K_{\beta\lambda,(\pi_{\text{priv}})}} \cdot 100\% \quad \eta \quad \pi = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(M+m)v^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} \cdot 100\% \quad \eta \quad \pi = \mathbf{93,75\%}.$$

γ. Έστω $\Delta \ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ [Θ.Ι.(1)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_x - F_{\varepsilon 1} = 0$ ή $Mg \eta \mu \varphi = k \Delta \ell_1$

ή $\Delta\ell_1 = 0,15\sqrt{3}$ m. Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_{ολ(x)} - F'_{ελ} = 0$ ή $(M+m)g\eta\mu\phi = k\Delta\ell_2$ ή $\Delta\ell_2 = 0,2\sqrt{3}$ m. Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος από τη Θ.Ι. (2) αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$ ή $|x| = 0,05\sqrt{3}$ m. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$ ή $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + \frac{1}{2}kx^2$ ή $A = 0,1$ m.

δ. Θεωρούμε μια τυχαία θέση με απομάκρυνση $x(x > 0)$ από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Στην τυχαία θέση ισχύει: $\Sigma F = -Dx$ ή $F'_{ελ} - w_{ολ(x)} = -kx$ ή $F_{ελ} = (M+m)g\eta\mu\phi - kx$ ή $F_{ελ} = 20\sqrt{3} - 100x$ (S.I.), με $-0,1 \text{ m} \leq x \leq +0,1 \text{ m}$.

Θέμα 27ο

α. Το σώμα Σ_2 από τη χρονική στιγμή $t = 0$ στην οποία αφέθηκε ελεύθερο να κινηθεί έως τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την κρούση εκτελεί ελεύθερη πτώση. Επομένως, είναι:

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2 \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,3\pi \text{ s.}$$

β. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση είναι $A_1 = 0,8$ m, η γωνιακή της συχνότητα είναι $\omega_1 = 5$ rad/s και η αρχική της φάση είναι $\phi_0 = (\pi/2)$ rad. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$v = \omega_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_0) \quad \text{ή} \quad v = 4 \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) (1).}$$

Έστω v_1 η ταχύτητα του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Από τη σχέση (1) για $t = t_1 = 0,3\pi$ s προκύπτει ότι: $v_1 = +4$ m/s. Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση. Είναι: $v_2 = gt_1$ ή $v_2 = 3\pi$ m/s.

γ. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση στον άξονα $x'x$ έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ,x(\text{πριν})} = \vec{p}_{ολ,x(\text{μετά})} \quad \text{ή} \quad m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v \quad \text{ή} \quad v = 1 \text{ m/s.}$$

Η σταθερά του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση: $k = m_1 \omega^2$ ή $k = 25$ N/m.

Η απομάκρυνση x_1 του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την κρούση υπολογίζεται από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 , αν θέσουμε σε αυτήν όπου $t = t_1 = 0,3\pi$ s. Επομένως, είναι: $x_1 = 0,8\eta\mu(2\pi)$ m ή $x_1 = 0$.

Συνεπώς, τη χρονική στιγμή t_1 ακριβώς πριν από την κρούση το σώμα Σ_1 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο με θετική ταχύτητα. Εφόσον η Θ.Ι. της ταλάντωσης του συσσω-

ματώματος είναι η ίδια με τη Θ.Ι. της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 , το πλάτος A_2 της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v = \omega_2 A_2 \quad \text{ή} \quad v = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} A_2 \quad \text{ή} \quad A_2 = 0,4 \text{ m.}$$

Θέμα 28ο

α. Είναι: $m = m_1 + m_2$ ή $m = 3m_1$ ή $m_1 = 1 \text{ kg}$. Επομένως, είναι: $m_2 = 2m_1$ ή $m_2 = 2 \text{ kg}$.

Έστω v_1 η ταχύτητα του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την έκρηξη. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την έκρηξη, θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά προς τα κάτω, έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$ ή $0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$ ή $v_1 = -2\sqrt{3} \text{ m/s}$.

Η ενέργεια που ελευθερώθηκε κατά την έκρηξη υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_{ελευθ} = K_{ολ(μετά)} - K_{ολ(πριν)} \quad \text{ή} \quad E_{ελευθ} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - 0 \quad \text{ή} \quad E_{ελευθ} = 9 \text{ J.}$$

β. Έστω $\Delta \ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ . Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F_{ελ} = 0$ ή $mg = k\Delta \ell_1$ ή $\Delta \ell_1 = 0,3 \text{ m}$.

Έστω $\Delta \ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 . Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F'_{ελ} = 0$ ή $m_1 g = k\Delta \ell_2$ ή $\Delta \ell_2 = 0,1 \text{ m}$.

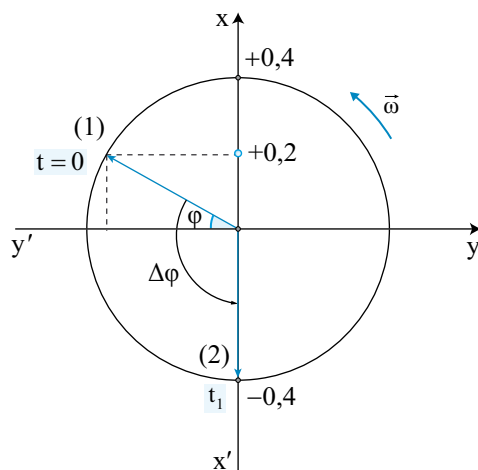
Το μέτρο της απομάκρυνσης x του σώματος Σ_1 από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x| = \Delta \ell_1 - \Delta \ell_2$ ή $|x| = 0,2 \text{ m}$. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη έχουμε: $E = K + U$ ή $\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} k x^2$ ή $A = 0,4 \text{ m}$.

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την έκρηξη υπολογίζεται από τη σχέση: $\frac{dK}{dt} = \Sigma F v$ ή $\frac{dK}{dt} = -D x v_1$ ή $\frac{dK}{dt} = +40\sqrt{3} \text{ J/s}$.

δ. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_1 \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s.}$$

Έστω t_1 η χρονική στιγμή στην οποία το σώμα Σ_1 ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την έκρηξη. Η χρονική στιγμή t_1 ισούται με το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta \phi$ που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Έστω ϕ η οξεία γωνία που σχηματίζει το περιστρεφόμενο



διάνυσμα με τον άξονα $y'y$ τη χρονική στιγμή $t = 0$. Από το σχήμα προκύπτει ότι: $\eta\mu\varphi = \frac{0,2}{0,4}$

ή $\eta\mu\varphi = \frac{1}{2}$ ή $\varphi = \frac{\pi}{6}$ rad. Όπως προκύπτει από το σχήμα η γωνία $\Delta\varphi$ είναι ίση με:

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad. Είμαι: } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\pi}{15} \text{ s} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{\pi}{15} \text{ s.}$$

Θέμα 29ο

α. Έστω $\Delta\ell$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ . Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F_{ελ} = 0$ ή $Mg = k\Delta\ell$ ή $\Delta\ell = 0,4 \text{ m}$. Έστω A_1 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ πριν από την έκρηξη. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ πριν από την έκρηξη έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 \quad \text{ή} \quad A_1 = 0,5 \text{ m.}$$

β. Είναι: $U_{ελ(max)} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell + A_1)^2$ ή $U_{ελ(max)} = 121,5 \text{ J}$.

γ. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γίνεται μέγιστη στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ πριν από την έκρηξη ($x = +A_1$). Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 , ακριβώς πριν την έκρηξη, η ταχύτητα του σώματος Σ είναι $v = 0$. Έστω v_1 και v_2 τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την έκρηξη.

$$\text{Ισχύει: } K_{2(μετά)} = \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad \text{ή} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2K_{2(μετά)}}{m_2}} \quad (1).$$

Έστω T η περίοδος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη. Επειδή το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κάθε $0,1\pi \text{ s}$, ισχύει:

$$\frac{T}{2} = 0,1\pi \text{ s} \quad \text{ή} \quad T = 0,2\pi \text{ s. Είμαι: } T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \quad \text{ή} \quad m_1 = 3 \text{ kg. Επειδή είναι } M = m_1 + m_2, \text{ προκύπτει}$$

ότι: $m_2 = 9 \text{ kg}$. Επομένως από τη σχέση (1) προκύπτει: $v_2 = 2 \text{ m/s}$.

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την έκρηξη, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα πάνω, έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$ ή $0 = m_2v_2 - m_1v_1$ ή $v_1 = 6 \text{ m/s}$.

Έστω $\Delta\ell'$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 . Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{ελ} = 0$ ή $m_1g = k\Delta\ell'$ ή $\Delta\ell' = 0,1 \text{ m}$.

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του σώματος Σ_1 από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης αμέσως μετά την έκρηξη είναι: $x = +(\Delta\ell - \Delta\ell' + A_1)$ ή $x = +0,8 \text{ m}$.

Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη έχουμε:

$$E_2 = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{ή} \quad A_2 = 1 \text{ m.}$$

δ. Έστω v η ταχύτητα του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_2 . Τη χρονική στιγμή t_2 ισχύει:

$$\frac{dx}{dt} = -5 \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad v = -5 \text{ m/s.} \quad \text{Έστω } x' \text{ η απομάκρυνση του σώματος } \Sigma_1 \text{ τη χρονική στιγμή } t_2.$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την έκρηξη έχουμε:

$$E_2 = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} k A_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} k x'^2 \quad \text{ή} \quad x' = \pm 0,5\sqrt{3} \text{ m.}$$

Αμέσως μετά την έκρηξη η απομάκρυνση και η ταχύτητα του σώματος Σ_1 είναι θετικές ($x > 0$, $v > 0$). Η ταχύτητα του σώματος Σ_1 γίνεται για πρώτη φορά ίση με $v = -5 \text{ m/s}$ τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία το σώμα Σ_1 διέρχεται από μία θέση του θετικού ημιάξονα κινούμενο με αρνητική ταχύτητα. Συνεπώς, τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $x' = +0,5\sqrt{3} \text{ m}$. Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$\frac{dv}{dt} = \alpha \quad \text{ή} \quad \frac{dv}{dt} = -\omega'^2 x', \quad \text{όπου } \omega' = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \omega' = 10 \text{ rad/s.} \quad \text{Οπότε προκύπτει: } \frac{dv}{dt} = -50\sqrt{3} \text{ m/s}^2.$$

Θέμα 306

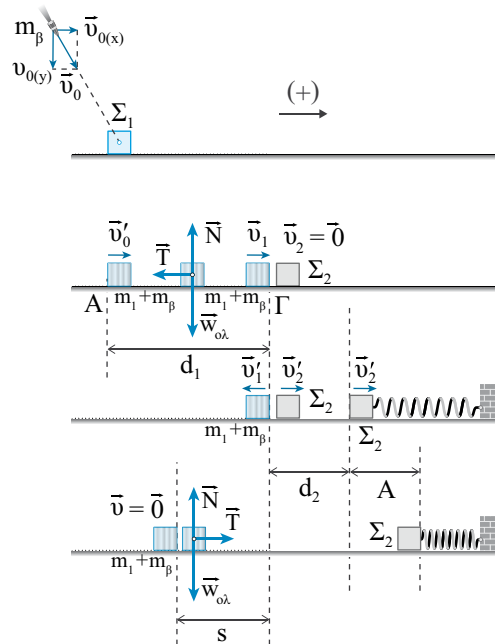
α. Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}_0$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες $\vec{v}_{0x}$ και $\vec{v}_{0y}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Έστω v'_0 το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση του βλήματος με το σώμα Σ_1 . Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά την κρούση στον άξονα $x'x$ έχουμε: $\vec{p}_{ολ,x}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ,x}(\text{μετά})$
ή $m v_0 \sin \varphi = (m + m_1) v'_0$ ή $v'_0 = 6 \text{ m/s}$.

Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά την κρούση με το σώμα Σ_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{K_{βλ(\text{πριν})} - K_{ολ(\text{μετά})}}{K_{βλ(\text{πριν})}} \cdot 100\%$$

$$\text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m) v_0'^2}{\frac{1}{2} m v_0^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 97,5\%.$$



β. Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα του συσσωματώματος ακριβώς πριν από τη κρούση του με το σώμα Σ_2 . Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του συσσωματώματος από τη θέση Α, αμέσως μετά την πλαστική κρούση, μέχρι τη θέση Γ, ακριβώς πριν την κρούση του με το σώμα Σ_2 , έχουμε: $K_\Gamma - K_A = W_T + W_N + W_{ολ}$

$$\text{ή } \frac{1}{2}(m+m_1)v_1^2 - \frac{1}{2}(m+m_1)v_0^2 = -\mu(m+m_1)gd_1 + 0 + 0 \quad \text{ή } |v_1| = 4 \text{ m/s.}$$

Έστω v'_1 και v'_2 οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων του συσσωματώματος και του σώματος Σ_2 αντίστοιχα αμέσως μετά την ελαστική τους κρούση. Είναι:

$$v'_1 = \frac{m+m_1-m_2}{m+m_1+m_2}v_1 \quad \text{ή } v'_1 = -2 \text{ m/s} \quad \text{και} \quad v'_2 = \frac{2(m+m_1)}{m+m_1+m_2}v_1 \quad \text{ή } v'_2 = +2 \text{ m/s.}$$

Η ενέργεια που μεταβιβάζεται από το συσσωμάτωμα στο σώμα Σ_2 κατά την ελαστική κρούση

$$\text{είναι: } E_{\text{μετ}} = \Delta K_2 \quad \text{ή} \quad E_{\text{μετ}} = K_{2(\text{μετά})} - K_{2(\text{πριν})} \quad \text{ή} \quad E_{\text{μετ}} = \frac{1}{2}m_2v_2'^2 - 0 \quad \text{ή} \quad E_{\text{μετ}} = 6 \text{ J.}$$

γ. Το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την ελαστική κρούση κινείται με σταθερή ταχύτητα $\bar{v}'_2$ και καρφώνεται στο ελατήριο, το οποίο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Η γωνιακή συχνότητα της ταλά-

ντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m_2\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$

ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Έστω Α το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 .

Είναι: $v'_2 = v_{\text{max}}$ ή $v'_2 = \omega A$ ή $A = 0,2 \text{ m}$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη Θ.Ι. του κινούμενο με θετική ταχύτητα.

Επομένως, η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 είναι $\phi_0 = 0$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ ή $x = 0,2\eta\mu(10t)$ (S.I.).

δ. Το σώμα Σ_2 στο χρονικό διάστημα Δt_1 , από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την ελαστική κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν καρφωθεί στο ελατήριο, κινείται ευθύγραμμα και

ομαλά με ταχύτητα $\bar{v}'_2$. Είναι: $v'_2 = \frac{d_2}{\Delta t_1}$ ή $\Delta t_1 = \frac{d_2}{v'_2}$ ή $\Delta t_1 = 0,5 \text{ s}$.

Το χρονικό διάστημα Δt_2 της κίνησης του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά το κάρφωμά του στο ελατήριο μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία για

πρώτη φορά είναι: $\Delta t_2 = \frac{1}{4}T$ ή $\Delta t_2 = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega}$ ή $\Delta t_2 = 0,05\pi \text{ s}$.

Το χρονικό διάστημα Δt της κίνησης του σώματος Σ_2 από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την ελαστική κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά

είναι: $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ ή $\Delta t = \left(0,5 + \frac{\pi}{20}\right) \text{ s}$.

Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση του με το σώμα Σ_2 κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα $\bar{v}'_1$ εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Έστω α το μέτρο της επιβράδυνσης του συσσωματώματος. Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε:

$$\Sigma F_x = (m + m_1)\alpha \quad \text{ή} \quad \mu N = (m + m_1)\alpha \quad \text{ή} \quad \mu(m + m_1)g = (m + m_1)\alpha \quad \text{ή} \quad \alpha = 5 \text{ m/s}^2.$$

Έστω $\Delta t_{\text{ολ}}$ το χρονικό διάστημα κίνησης του συσσωματώματος από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση του με το Σ_2 μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται.

$$\text{Είναι: } v = |v'_1| - \alpha \Delta t_{\text{ολ}} \quad \text{ή} \quad 0 = |v'_1| - \alpha \Delta t_{\text{ολ}} \quad \text{ή} \quad \Delta t_{\text{ολ}} = \frac{|v'_1|}{\alpha} \quad \text{ή} \quad \Delta t_{\text{ολ}} = 0,4 \text{ s}.$$

Επειδή είναι $\Delta t_{\text{ολ}} < \Delta t$, τη χρονική στιγμή στην οποία το σώμα Σ_2 ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά, το συσσωμάτωμα έχει ήδη ακινητοποιηθεί. Επομένως, η ζητούμενη απόσταση μεταξύ του σώματος Σ_2 και του συσσωματώματος είναι $d = s + A + d_2$, όπου s το διάστημα που διανύει το συσσωμάτωμα από τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση με το σώμα Σ_2 μέχρι τη χρονική στιγμή στην οποία ακινητοποιείται.

$$\text{Είναι: } s = |v'_1| \Delta t_{\text{ολ}} - \frac{1}{2} \alpha (\Delta t_{\text{ολ}})^2 \quad \text{ή} \quad s = 0,4 \text{ m}. \text{ Επομένως, είναι: } d = 1,6 \text{ m}.$$

Θέμα 31ο

α. Έστω T η περίοδος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ . Είναι: $t = \frac{T}{2}$

$$\text{ή } T = 2t \quad \text{ή} \quad T = \frac{\pi}{5} \text{ s}. \text{ Η μάζα του σώματος } \Sigma \text{ υπολογίζεται από τη σχέση: } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{ή} \quad m = 1 \text{ kg}.$$

β. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ είναι: $A = \frac{d}{2}$ ή $A = 0,1 \text{ m}$.

Έστω ότι στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta \ell_1$. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w - F_{\text{ελ}} = 0$ ή $mg = k\Delta \ell_1$ ή $\Delta \ell_1 = 0,1 \text{ m}$.

Επειδή είναι $A = \Delta \ell_1$, τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ βρίσκεται στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Επομένως είναι: $U_{\text{ελ}} = 0$.

γ. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ δίνεται από τη σχέση:

$$x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0) \quad \text{ή} \quad x = 0,1 \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I.)}.$$

δ. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad E = K + \frac{U_{\max}}{2} \quad \text{ή} \quad E = K + \frac{E}{2} \quad \text{ή} \quad K = \frac{E}{2} \quad \text{ή} \quad K = \frac{\frac{1}{2}kA^2}{2} \quad \text{ή} \quad K = 0,25 \text{ J}.$$

ε. Το αρχικό πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης είναι: $A_0 = \Delta \ell_1$ ή $A_0 = 0,1 \text{ m}$.

Εφόσον η δύναμη που αντιτίθεται στην κίνηση του σώματος Σ είναι της μορφής $F' = -bv$, το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο σύμφωνα με τη σχέση:

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \quad \text{ή} \quad A = 0,1 e^{-\Lambda t} \quad (\text{S.I.}) \quad (1), \quad \text{όπου } \Lambda \text{ μια θετική σταθερά.}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης είναι $A_1 = 0,05 \text{ m}$. Από τη σχέση (1)

$$\text{για } A = A_1 \text{ και } t = t_1 \text{ έχουμε: } 0,05 = 0,1 e^{-\Lambda t_1} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t_1} \quad \text{ή} \quad 2 = e^{\Lambda t_1} \quad \text{ή} \quad \ln 2 = \ln e^{\Lambda t_1}$$

$$\text{ή} \quad \ln 2 = \Lambda t_1 \quad \text{ή} \quad \Lambda = \frac{\ln 2}{t_1}. \quad \text{Έστω } A_2 \text{ το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή } t_2.$$

$$\text{Από τη σχέση (1) για } t = t_2 \text{ έχουμε: } A_2 = A_0 e^{-\Lambda t_2} \quad \text{ή} \quad A_2 = A_0 e^{-\Lambda 2t_1} \quad \text{ή} \quad A_2 = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{t_1} 2t_1}$$

$$\text{ή} \quad A_2 = A_0 e^{-2 \ln 2} \quad \text{ή} \quad A_2 = \frac{A_0}{e^{\ln 2^2}} \quad \text{ή} \quad A_2 = \frac{A_0}{4} \quad \text{ή} \quad A_2 = 0,025 \text{ m}.$$

Το έργο της δύναμης αντίστασης που δέχεται το σώμα Σ στο χρονικό διάστημα από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$W_{F'} = E_{\text{τελ}} - E_{\text{αρχ}} \quad \text{ή} \quad W_{F'} = \frac{1}{2} D A_2^2 - \frac{1}{2} D A_1^2 \quad \text{ή} \quad W_{F'} = 937,5 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$$

Θέμα 32ο

α. Έστω ότι στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ₁ το ελατήριο (1) είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta \ell_1$.

$$\text{Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: } \Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_1 - F_{\text{ελ}(1)} = 0 \quad \text{ή} \quad m_1 g = k_1 \Delta \ell_1 \quad (1).$$

Έστω ότι στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ₂ το ελατήριο (2) είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta \ell_2$.

$$\text{Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: } \Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_2 - F_{\text{ελ}(2)} = 0 \quad \text{ή} \quad m_2 g = k_2 \Delta \ell_2 \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{k_1 \Delta \ell_1}{k_2 \Delta \ell_2} \quad \text{ή} \quad \frac{k_2}{k_1} = \frac{\Delta \ell_1}{\Delta \ell_2} \quad \text{ή, επειδή } \Delta \ell_1 = 4 \Delta \ell_2, \quad \text{ή} \quad k_2 = 400 \text{ N/m}.$$

β. Έστω T_1 η περίοδος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ₁.

Το σώμα Σ₁ ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή:

$$t_1 = \frac{T_1}{2} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \quad \text{ή} \quad t_1 = 0,1 \text{ s}. \quad \text{Έστω } T_2 \text{ η περίοδος της απλής αρμονικής ταλάντωσης}$$

που εκτελεί το σώμα Σ₂.

Το σώμα Σ_2 ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή:

$$t_2 = \frac{T_2}{4} \quad \text{ή} \quad t_2 = \frac{1}{4} 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} \quad \text{ή} \quad t_2 = 0,025\pi \text{ s.}$$

Συνεπώς, το σώμα Σ_2 ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά νωρίτερα από το σώμα Σ_1 .

γ. Το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 είναι: $A_1 = d$
ή $A_1 = 0,1 \text{ m}$. Έστω A_2 το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 .

$$\text{Είναι: } v_0 = \omega_2 A_2 \quad \text{ή} \quad v_0 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} A_2 \quad \text{ή} \quad A_2 = 0,05 \text{ m. Είναι: } \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2} k_1 A_1^2}{\frac{1}{2} k_2 A_2^2} \quad \text{ή} \quad \frac{E_1}{E_2} = 1.$$

δ. i. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι $x = +A_1$, η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί είναι $\varphi_{01} = (\pi/2) \text{ rad}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 είναι:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 10 \text{ rad/s. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος } \Sigma_1 \text{ από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση: } x = A_1 \eta\mu(\omega_1 t + \varphi_{01}) \quad \text{ή} \quad x = 0,1\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.).}$$

ii. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί είναι $\varphi_{02} = 0$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 είναι: $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega_2 = 20 \text{ rad/s.}$

Η χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο σώμα Σ_2 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του δίνεται από τη σχέση: $\Sigma F = -D_2 x \quad \text{ή} \quad \Sigma F = -k_2 A_2 \eta\mu(\omega_2 t + \varphi_{02})$
ή $\Sigma F = -20\eta\mu(20t) \text{ (S.I.).}$

ε. Οι ιδιοσυχνότητες των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων που εκτελούν τα σώματα Σ_1 και Σ_2 υπολογίζονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις:

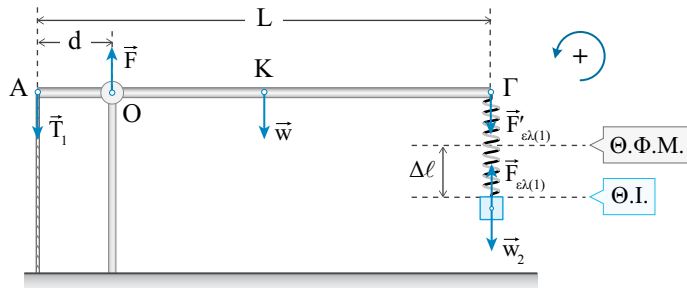
$$f_{0(1)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad \text{ή} \quad f_{0(1)} = \frac{5}{\pi} \text{ Hz.} \quad f_{0(2)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad \text{ή} \quad f_{0(2)} = \frac{10}{\pi} \text{ Hz.}$$

Τα δύο συστήματα εκτελούν εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με την ίδια συχνότητα $f = (5/\pi) \text{ Hz}$. Εφόσον είναι $f = f_{0(1)}$ και $f \neq f_{0(2)}$, το σύστημα του ελατηρίου (1) και του σώματος Σ_1 βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού και ταλαντώνεται με το μέγιστο δυνατό πλάτος.

Θέμα 33ο

α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 πριν από την κρούση είναι το βάρος του $\vec{w}_2$ και η δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\lambda(1)}$ από το ελατήριο. Επειδή το σώμα Σ_2 ισορροπεί ακίνητο, ισχύει:

$$\vec{\Sigma F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad F_{\varepsilon\lambda(1)} - w_2 = 0 \quad \text{ή} \quad F_{\varepsilon\lambda(1)} = m_2 g \quad \text{ή} \quad F_{\varepsilon\lambda(1)} = 40 \text{ N}.$$



Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο πριν από την κρούση είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της K, η δύναμη $\vec{T}_1$ από το νήμα, η δύναμη $\vec{F}$ από τον άξονα περιστροφής της και η δύναμη $\vec{F}'_{\varepsilon\lambda(1)}$ από το ελατήριο. Είναι: $F'_{\varepsilon\lambda(1)} = F_{\varepsilon\lambda(1)}$ ή $F'_{\varepsilon\lambda(1)} = 40 \text{ N}$. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{T_1} + \tau_F + \tau_w + \tau_{F'_{\varepsilon\lambda(1)}} = 0 \quad \text{ή} \quad T_1 d + 0 - w \left(\frac{L}{2} - d \right) - F'_{\varepsilon\lambda(1)} (L - d) = 0$$

$$\text{ή} \quad T_1 = \frac{Mg \left(\frac{L}{2} - d \right) + F'_{\varepsilon\lambda(1)} (L - d)}{d} \quad \text{ή} \quad T_1 = 250 \text{ N.} \quad \text{Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμα:}$$

$$\vec{\Sigma F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad F - T_1 - w - F'_{\varepsilon\lambda(1)} = 0 \quad \text{ή} \quad F = T_1 + Mg + F'_{\varepsilon\lambda(1)} \quad \text{ή} \quad F = 315 \text{ N}.$$

β. Έστω v'_2 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Είναι:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{ή} \quad v'_2 = +2 \text{ m/s.} \quad \text{Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα}$$

$$\Sigma_2 \text{ μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: } D = m_2 \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega = 5 \text{ rad/s.}$$

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση.

$$\text{Είναι: } v'_2 = v_{\max} \quad \text{ή} \quad v'_2 = \omega A \quad \text{ή} \quad A = 0,4 \text{ m}.$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί είναι ίση με μηδέν ($\varphi_0 = 0$). Συνεπώς, η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_2 από τη θέση ισορροπίας μετά την κρούση είναι: $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ ή $x = 0,4 \sin(5t)$ (S.I.).

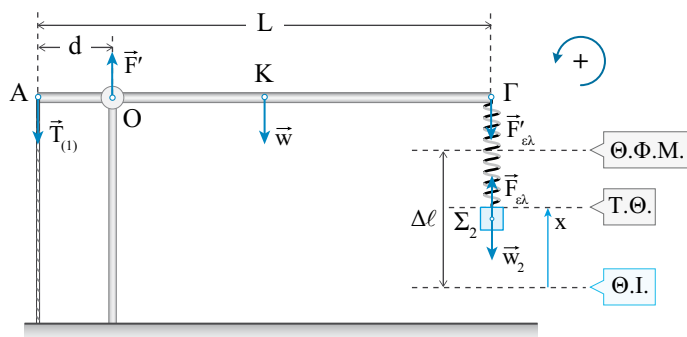
γ. Έστω $\Delta \ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 . Είναι:

$$F_{\varepsilon\lambda(1)} = k \Delta \ell \quad \text{ή} \quad \Delta \ell = 0,4 \text{ m.} \quad \text{Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα } \Sigma_2 \text{ από το ελατήριο γίνεται μέγιστο τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα } \Sigma_2 \text{ βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης που εκτελεί μετά την κρούση. Είναι: } F_{\varepsilon\lambda(\max)} = k(\Delta \ell + A) \quad \text{ή} \quad F_{\varepsilon\lambda(\max)} = 80 \text{ N}.$$

Επομένως, η μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 είναι: $F'_{\varepsilon\lambda(\max)} = F_{\varepsilon\lambda(\max)}$ ή $F'_{\varepsilon\lambda(\max)} = 80 \text{ N}$.

Εφόσον είναι $A = \Delta\ell$, η πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση είναι η θέση όπου το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα Σ_2 από το ελατήριο γίνεται ελάχιστο τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα Σ_2 βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης που εκτελεί μετά την κρούση. Είναι: $F_{\varepsilon\lambda(\min)} = 0$. Επομένως, η ελάχιστη τιμή του μέτρου της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 είναι: $F'_{\varepsilon\lambda(\min)} = F_{\varepsilon\lambda(\min)}$ ή $F'_{\varepsilon\lambda(\min)} = 0$.

δ. Θεωρούμε την τυχαία θέση της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 με απομάκρυνση $x(x > 0)$ που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Επειδή το Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ισχύει: $\Sigma F = -Dx$ ή $F_{\varepsilon\lambda} - w_2 = -kx$
ή $F_{\varepsilon\lambda} = m_2g - kx$ ή $F_{\varepsilon\lambda} = 40 - 100x$ (S.I.) (1), με $-0,4 \text{ m} \leq x \leq +0,4 \text{ m}$.

Η σχέση (1) δίνει την αλγεβρική τιμή της δύναμης που ασκείται στο σώμα Σ_2 από το ελατήριο σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του. Στην τυχαία θέση που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα είναι $F_{\varepsilon\lambda} > 0$, οπότε το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ_2 από το ελατήριο είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή της. Έστω $\vec{F}'_{\varepsilon\lambda}$ η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από το ελατήριο τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα Σ_2 βρίσκεται στην τυχαία θέση που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Για το μέτρο της δύναμης $\vec{F}'_{\varepsilon\lambda}$ ισχύει:

$$F'_{\varepsilon\lambda} = F_{\varepsilon\lambda} \text{ ή } F'_{\varepsilon\lambda} = 40 - 100x \text{ (S.I.) (2), με } -0,4 \text{ m} \leq x \leq +0,4 \text{ m.}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(O)} = 0$ ή $\tau_T + \tau_{F'} + \tau_w + \tau_{F'_{\varepsilon\lambda}} = 0$

$$\text{ή } Td - Mg\left(\frac{L}{2} - d\right) - F'_{\varepsilon\lambda}(L - d) = 0 \text{ ή } T = \frac{Mg\left(\frac{L}{2} - d\right) + F'_{\varepsilon\lambda}(L - d)}{d} \text{ ή, λόγω της σχέσης (2)}$$

$$T = 250 - 500x \text{ (S.I.) (3), με } -0,4 \text{ m} \leq x \leq 0,4 \text{ m.}$$

ε. Για να παραμένει συνεχώς οριζόντια η ράβδος κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 , πρέπει να ισχύει $0 \leq T \leq T_{\theta\rho}$ (4), ώστε το νήμα να μην χαλαρώσει ή να μην κοπεί.

Από τη σχέση (4), λόγω της σχέσης (3), έχουμε: $0 \leq 250 - 500x \leq 250$ (S.I.)

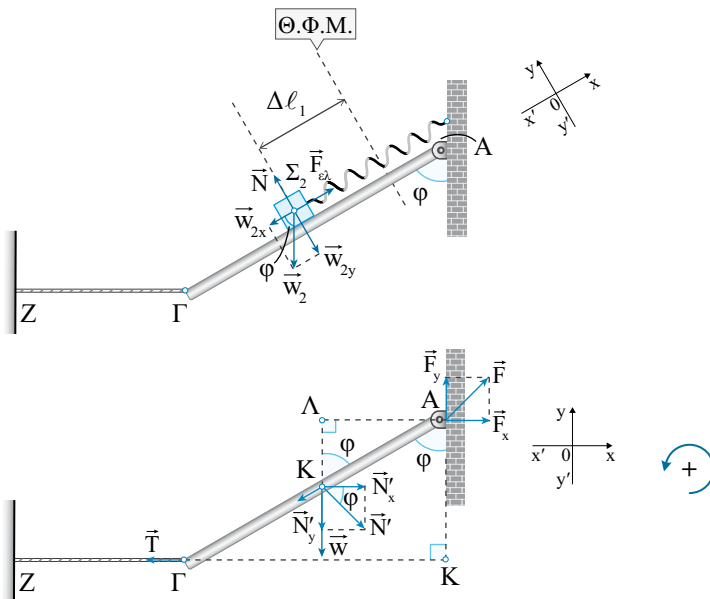
ή $-250 \leq 500x \leq 250$ (S.I.) ή $-0,5 \text{ m} \leq x \leq 0,5 \text{ m}$ (5). Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης που μπορεί να εκτελέσει το σώμα Σ_2 μετά την κρούση, ώστε η ράβδος να παραμένει συνεχώς οριζόντια κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 είναι: $A_{\max} = 0,5 \text{ m}$. Έστω $v'_{2(\max)}$ η μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας που μπορεί να έχει το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Είναι: $v'_{2(\max)} = \omega A_{\max}$ ή $v'_{2(\max)} = 2,5 \text{ m/s}$.

Η μέγιστη τιμή $v_{1(\max)}$ του μέτρου της ταχύτητας που μπορεί να έχει το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση, ώστε η ράβδος να παραμένει συνεχώς οριζόντια κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v'_{2(\max)} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1(\max)} \quad \text{ή} \quad v_{1(\max)} = \frac{(m_1 + m_2)}{2m_1} v'_{2(\max)} \quad \text{ή} \quad v_{1(\max)} = 6,25 \text{ m/s}.$$

Θέμα 34ο

α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 πριν από την κρούση είναι: το βάρος του $\vec{w}_2$, η δύναμη επαφής $\vec{N}$ από τη ράβδο και η δύναμη $\vec{F}_{\epsilon\lambda}$ από το ελατήριο. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο πριν από την κρούση είναι: το βάρος της $\vec{w}$, η τάση $\vec{T}$ του νήματος, η δύναμη $\vec{N}'$ ($\vec{N}' = -\vec{N}$) από το σώμα Σ_2 και η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση.



Επειδή το σώμα Σ_2 ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή αλγεβρικά: $\Sigma F_x = 0$ (1) και $\Sigma F_y = 0$ (2).

Από τη σχέση (2) έχουμε: $N - w_{2y} = 0$ ή $N = m_2 g \eta \mu \phi$ ή $N = 10\sqrt{3} \text{ N}$.

Είναι: $N' = N$ ή $N' = 10\sqrt{3} \text{ N}$. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(A)} = 0$

$$\text{ή } \tau_T + \tau_w + \tau_{N'} + \tau_F = 0 \text{ ή } -T(AK) + w(AA) + N' \frac{L}{2} = 0 \text{ ή } TL \sin \varphi = Mg \frac{L}{2} \eta \mu \varphi + N' \frac{L}{2}$$

$$\text{ή } T = \frac{Mg \eta \mu \varphi + N'}{2 \sin \varphi} \text{ ή } T = 20\sqrt{3} \text{ N.}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή αλγεβρικά: $\Sigma F_x = 0$ (3) και $\Sigma F_y = 0$ (4).

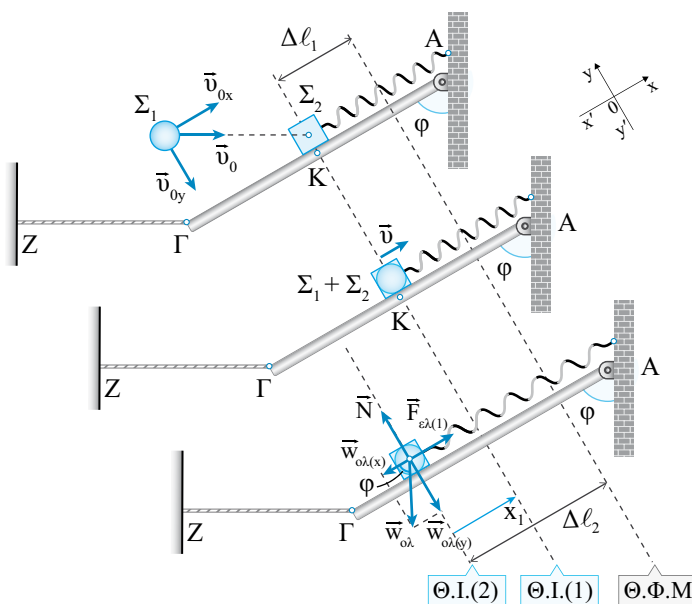
Από τη σχέση (3) έχουμε: $F_x + N'_x - T = 0$ ή $F_x = T - N'_x$ ή $F_x = T - N' \sin \varphi$ ή $F_x = 15\sqrt{3} \text{ N}$.

Από τη σχέση (4) έχουμε: $F_y - N'_y - w = 0$ ή $F_y = N'_y + w$ ή $F_y = N' \eta \mu \varphi + Mg$ ή $F_y = 35 \text{ N}$.

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ υπολογίζεται από τη σχέση: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ ή $F = 10\sqrt{19} \text{ N}$.

β. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 στον άξονα $x'x$ κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ,x(\piριν)} = \vec{p}_{ολ,x(\μετά)} \text{ ή } m_1 v_{0x} = (m_1 + m_2)v \text{ ή } m_1 v_0 \eta \mu \varphi = (m_1 + m_2)v \text{ ή } v = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s.}$$



Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση: $\pi = \frac{Q_K}{K_{ολ(\piριν)}} \cdot 100\%$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_0^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} \cdot 100\% \text{ ή } \pi = 62,5 \, \%.$$

γ. Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 [Θ.Ι.(1)]. Από τη σχέση (1) έχουμε: $w_{2x} - F_{ελ} = 0$ ή $m_2 g \sin\varphi = k\Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,1 \text{ m}$.

Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_{\omega\lambda(x)} - F_{ελ(1)} = 0$ ή $(m_1 + m_2)g \sin\varphi = k\Delta\ell_2$ ή $\Delta\ell_2 = 0,2 \text{ m}$.

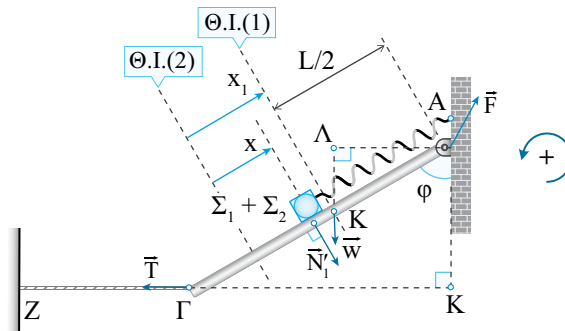
Το μέτρο της απομάκρυνσης x_1 του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)] αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x_1| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$ ή $|x_1| = 0,1 \text{ m}$.

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση, έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 \text{ ή } A = 0,2 \text{ m. Ισχύει: } D = m\omega^2 \text{ ή } K = (m_1 + m_2)\omega^2$$

ή $\omega = 5 \text{ rad/s}$. Επομένως, είναι: $|a_{\max}| = \omega^2 A = 5 \text{ m/s}^2$.

δ. Θεωρούμε την τυχαία θέση της τροχιάς του συσσωματώματος που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα με απομάκρυνση $x(x > 0)$ από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.



Στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)] ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \text{ ή } N_1 - w_{\omega\lambda(y)} = 0 \text{ ή } N_1 = (m_1 + m_2)g \eta \mu \varphi \text{ ή } N_1 = 20\sqrt{3} \text{ N.}$$

$$\text{Είναι: } N'_1 = N_1 \text{ ή } N'_1 = 20\sqrt{3} \text{ N.}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(A)} = 0$ ή $\tau_T + \tau_{N'_1} + \tau_w + \tau_F = 0$

$$\text{ή } -T(AK) + N'_1 \left(\frac{L}{2} + x_1 - x \right) + w(A\Lambda) + 0 = 0 \text{ ή } T = \frac{N'_1 \left(\frac{L}{2} + x_1 - x \right) + Mg \frac{L}{2} \eta \mu \varphi}{L \sin \varphi}$$

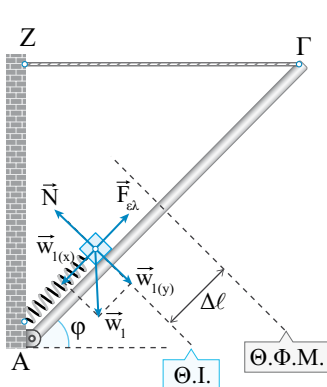
$$\text{ή } T = 32\sqrt{3} - 20\sqrt{3}x \text{ (S.I.) (5), με } -0,2 \text{ m} \leq x \leq 0,2 \text{ m.}$$

Από τη σχέση (5) για $x = -0,2 \text{ m}$, προκύπτει: $T_{\max} = 36\sqrt{3} \text{ N}$.

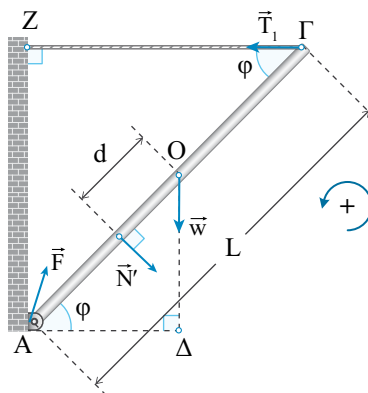
Από τη σχέση (5) για $x = +0,2 \text{ m}$, προκύπτει: $T_{\min} = 28\sqrt{3} \text{ N}$.

Θέμα 35ο

α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ είναι: το βάρος του $\vec{w}_1$, η δύναμη $\vec{F}_{ελ}$ από το ελατήριο και η δύναμη επαφής $\vec{N}$ από τη ράβδο, όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F}_y = 0$ ή $N - w_{1y} = 0$ ή $N = mg \sin \varphi$ ή $N = 5\sqrt{2} \text{ N}$.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της Ο, η δύναμη επαφής $\vec{N}'$ ($\vec{N}' = -\vec{N}$) από το σώμα Σ, η τάση $\vec{T}_1$ από το νήμα και η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση, όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_F + \tau_{N'} + \tau_w + \tau_{T_1} = 0 \quad \text{ή} \quad 0 - N' \left(\frac{L}{2} - d \right) - w(A\Delta) + T_1(AZ) = 0$$

$$\text{ή} \quad T_1 L \sin \varphi = N \left(\frac{L}{2} - d \right) + Mg \frac{L}{2} \sin \varphi \quad \text{ή} \quad T_1 = 12,5 \text{ N}.$$

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ μετά την εκτόξευσή του υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

Έστω Α το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ. Είναι: $v_0 = \omega A$ ή $A = 0,05 \text{ m}$.

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ βρίσκεται στη Θ.Ι. του κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί είναι $\varphi_0 = 0$.

Επομένως, η δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο σώμα Σ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του δίνεται από τη σχέση: $\Sigma F = -Dx$ ή $\Sigma F = -kA \sin(\omega t + \varphi_0)$ ή $\Sigma F = -5 \eta \mu(10t) \text{ (S.I.)}$.

γ. Έστω t_1 η ζητούμενη χρονική στιγμή. Είναι: $t_1 = \frac{3T}{4}$ ή $t_1 = \frac{3}{4} \frac{2\pi}{\omega}$ ή $t_1 = 0,15 \text{ s}$.

Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 . Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $T_2 - w_{2,3} - F_{ελ} = 0$
ή $T_2 = k\Delta\ell_1 + (m_2 + m_3)g$ ή $\Delta\ell_1 = 0,2 \text{ m}$.

Μετά την αποκόλληση των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 , το σώμα Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας (2) [Θ.Ι.(2)] με πλάτος A . Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_3 είναι: $A = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2$ (2), όπου $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(2). Στη Θ.Ι.(2) ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $F'_{ελ} - w_3 = 0$ ή $k\Delta\ell_2 = m_3g$ ή $\Delta\ell_2 = 0,1 \text{ m}$.

Συνεπώς, από τη σχέση (2) με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών προκύπτει: **$A = 0,3 \text{ m}$** .

β. Η γωνιακή συχνότητα τη ταλάντωσης του σώματος Σ_3 υπολογίζεται από τη σχέση:

$D = m_3\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_3}}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ_3 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί είναι $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_3 δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ ή **$x = 0,3\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.)**.

γ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ_3 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_1 . Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει: $K = 8U$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_3 έχουμε: $E = K + U$ ή $E = 9U$ ή $\frac{1}{2}DA^2 = 9\frac{1}{2}Dx^2$ ή $x = +\frac{A}{3}$
ή $x = +0,1 \text{ m}$. Εφόσον είναι $x = \Delta\ell_2$, τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_3 βρίσκεται στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Επομένως, η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου τη χρονική στιγμή t_1 είναι: **$U_{ελ} = 0$** .

δ. Έστω v_1 και v_2 τα μέτρα των ταχυτήτων και α_1 και α_2 τα μέτρα των επιταχύνσεων με τις οποίες κινούνται τα σώματα Σ_1 και Σ_2 τη χρονική στιγμή t_2 .

Είναι: $v_1 = v_2 = \omega R$ (1) ή $\frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_2}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R$ ή $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu}R$ ή $\alpha_1 = \alpha_2 = 3,75 \text{ m/s}^2$.

Εφόσον τη χρονική στιγμή t_2 τα σώματα Σ_1 και Σ_2 βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, ισχύει:

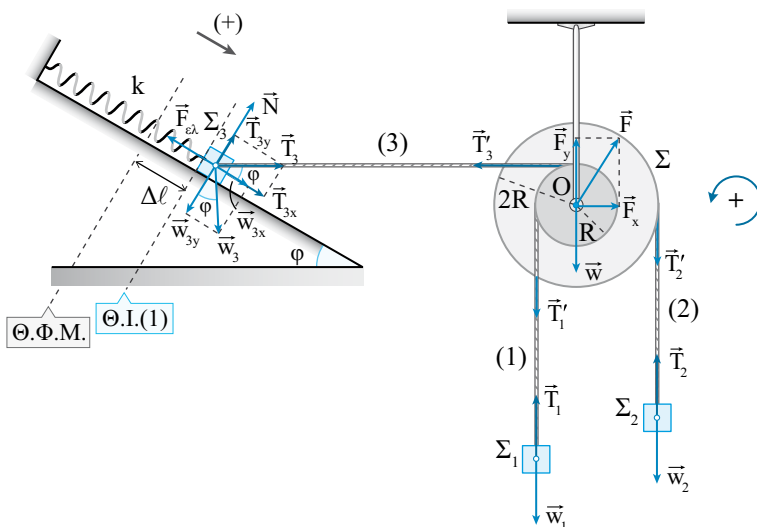
$h = s_1 + s_2$ ή $h = \frac{1}{2}\alpha_1 t_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_2 t_2^2$ ή **$t_2 = 0,6 \text{ s}$** .

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2$ ή $\omega = 9 \text{ rad/s}$. Από τη σχέση (1) προκύπτει: **$v_1 = v_2 = 2,25 \text{ m/s}$** .

Θέμα 37ο

α. Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα.



Επειδή το σώμα Σ_1 ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F}_y = \vec{0}$ ή $T_1 - w_1 = 0$ ή $T_1 = m_1 g$ ή $T_1 = 10 \text{ N}$.

Επειδή το σώμα Σ_2 ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F}_y = \vec{0}$ ή $T_2 - w_2 = 0$ ή $T_2 = m_2 g$ ή $T_2 = 15 \text{ N}$.

Είναι: $T'_1 = T_1$ ή $T'_1 = 10 \text{ N}$ και $T'_2 = T_2$ ή $T'_2 = 15 \text{ N}$.

Επειδή το στερεό σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(O)} = (1)$ και $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή αλγεβρικά: $\Sigma F_x = 0$ (2) και $\Sigma F_y = 0$ (3). Από τη σχέση (1) έχουμε: $\tau_F + \tau_w + \tau_{T_3} + \tau_{T'_1} + \tau_{T'_2} = 0$ ή $0 + 0 + T'_3 R + T'_1 R - T'_2 2R = 0$ ή $T'_3 = 2T'_2 - T'_1$ ή $T'_3 = 20 \text{ N}$. Από τη σχέση (2) έχουμε: $F_x - T'_3 = 0$ ή $F_x = 20 \text{ N}$.

Από τη σχέση (3) έχουμε: $F_y - T'_1 - T'_2 - w = 0$ ή $F_y = T'_1 + T'_2 + Mg$ ή $F_y = 40 \text{ N}$.

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο στερεό σώμα Σ από τον άξονα περιστροφής του υπολογίζεται από τη σχέση: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ ή $F = 10\sqrt{20} \text{ N}$.

β. Είναι: $T_3 = T'_3$ ή $T_3 = 20 \text{ N}$. Επειδή το σώμα Σ_3 ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \text{ ή } w_{3x} + T_{3x} - F_{\epsilon\lambda} = 0 \text{ ή } m_3 g \mu \phi + T_3 \sin \phi = k \Delta \ell \text{ ή } \Delta \ell = 0,12 \text{ m}.$$

γ. Μετά την κοπή του νήματος (3), το σώμα Σ_3 εκτελεί ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας (2) [Θ.Ι.(2)]. Έστω $\Delta \ell'$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(2). Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_{3x} - F'_{\epsilon\lambda} = 0$ ή $m_3 g \mu \phi = k \Delta \ell'$ ή $\Delta \ell' = 0,08 \text{ m}$.

Το πλάτος A της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_3 μετά την κοπή του νήματος είναι: $A = \Delta \ell - \Delta \ell'$ ή $A = 0,04 \text{ m}$. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ_3 βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $x = +A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί είναι $\phi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$. Η γωνιακή

συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_3 δίνεται από τη σχέση: $D = m_3 \omega^2$
ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος Σ_3 δίνεται από τη σχέση:

$$v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ή} \quad v = 0,4 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

δ. Έστω x η απομάκρυνση του σώματος Σ_3 από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_1 .

$$\text{Είναι: } x = A \sin(\omega t_1 + \varphi_0) \quad \text{ή} \quad x = 0,04 \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \text{ m} \quad \text{ή} \quad x = -0,02 \text{ m.}$$

Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_3 βρίσκεται σε μια θέση πάνω από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης [Θ.Ι.(2)]. Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα Σ_3 από το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $F_{ελ} = k(\Delta\ell' - |x|)$ ή $F_{ελ} = 18 \text{ N}$.

ε. Έστω v_3 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_3 ακριβώς πριν από την κρούση.

Είναι: $v_3 = \omega A$ ή $v_3 = 0,4 \text{ m/s}$. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_3 και Σ_4 κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας του σώματος Σ_4 ακριβώς πριν από την κρούση, έχουμε:
 $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \quad \text{ή} \quad m_4 v_0 - m_3 v_3 = (m_3 + m_4)v \quad \text{ή} \quad v = 0,8 \text{ m/s}$.

Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται από τη κρούση εκτελεί ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας (3) [Θ.Ι.(3)]. Έστω $\Delta\ell''$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(3). Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F}_x = \vec{0}$ ή $w_{ολ(x)} - F_{ελ}'' = 0$ ή $(m_3 + m_4)g \eta \mu \varphi = k \Delta\ell''$ ή $\Delta\ell'' = 0,16 \text{ m}$.

Το μέτρο της απομάκρυνσης x_1 του συσσωματώματος από τη Θ.Ι.(3) αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x_1| = \Delta\ell'' - \Delta\ell'$ ή $|x_1| = 0,08 \text{ m}$.

Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα έχουμε: $E = K + U$

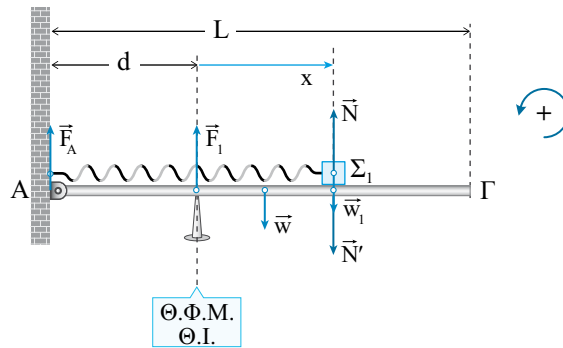
$$\text{ή} \quad \frac{1}{2} D A'^2 = \frac{1}{2} (m_3 + m_4) v^2 + \frac{1}{2} D x_1^2 \quad \text{ή} \quad k A'^2 = (m_3 + m_4) v^2 + k x_1^2 \quad \text{ή} \quad A' = 0,08\sqrt{3} \text{ m.}$$

Θέμα 38ο

α. Η ενέργεια που δαπανήσαμε μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$ είναι ίση με την ενέργεια της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$.

$$\text{Είναι: } W_F = E \quad \text{ή} \quad F s = \frac{1}{2} D A^2 \quad \text{ή} \quad A = 0,2 \text{ m.}$$

β. Μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας τη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Θεωρούμε την τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος Σ_1 που φαίνεται στο επόμενο σχήμα με απομάκρυνση $x(x > 0)$ από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_1 και στη σανίδα τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην τυχαία θέση με απομάκρυνση x .



Επειδή το σώμα Σ_1 δεν κινείται στον άξονα $y'y$, ισχύει: $\Sigma \vec{F}_y = \vec{0}$ ή $N - w_1 = 0$ ή $N = m_1 g$ ή $N = 10 \text{ N}$. Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη σανίδα από το σώμα Σ_1 είναι:

$N' = N$ ή $N' = 10 \text{ N}$. Επειδή η σανίδα ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(A)} = 0$ ή $\tau_{F_A} + \tau_{F_I} + \tau_w + \tau_{N'} = 0$

$$\text{ή } 0 + F_I d - w \frac{L}{2} - N'(d+x) = 0 \quad \text{ή } F_I = \frac{Mg \frac{L}{2} + N'(d+x)}{d} \quad \text{ή } F_I = 16 + 10x \text{ (S.I.) (1),}$$

με $-0,2 \text{ m} \leq x \leq +0,2 \text{ m}$. Επειδή η σανίδα ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

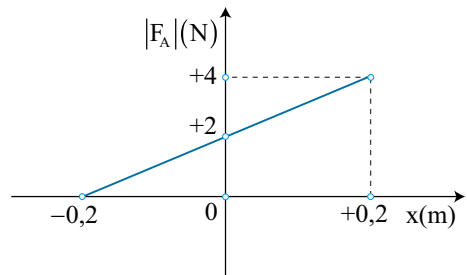
$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \quad \text{ή } F_A + F_I - w - N' = 0$$

$$\text{ή } F_A = Mg + N' - F_I \quad \text{ή, λόγω της σχέσης (1),}$$

$$\text{ή } F_A = -2 - 10x \text{ (S.I.)} \quad \text{ή } F_A = -(2 + 10x) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{ή } |F_A| = 2 + 10x \text{ (S.I.) (2), με } -0,2 \text{ m} \leq x \leq +0,2 \text{ m.}$$

Στο διάγραμμα του διπλανού σχήματος απεικονίζεται η γραφική παράσταση της σχέσης (2).



γ. Επειδή τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν ίσες μάζες και η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, ανταλλάσσουν ταχύτητες κατά την κρούση. Έστω v'_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Είναι: $v'_1 = v_2$ ή $v'_1 = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$.

Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή } \frac{1}{2} D A'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} D x_1'^2 \quad \text{ή } A' = \sqrt{\frac{m_1}{k} v_1'^2 + x_1'^2} \quad (2).$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση γίνεται μέγιστο, αν η κρούση πραγματοποιηθεί στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 πριν από την κρούση. Δηλαδή, είναι: $x_1 = +A$ ή $x_1 = +0,2 \text{ m}$.

δ. Από τη σχέση (2) για $x_1 = +0,2 \text{ m}$ προκύπτει ότι: $A'_{\max} = 0,4 \text{ m}$. Έστω v'_2 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Εφόσον τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες κατά την κρούση, ισχύει: $v'_2 = v_1$ ή $v'_2 = 0$.

Αμέσως μετά την κρούση το σώμα Σ_1 βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση x_1 κινούμενο με αρνητική ταχύτητα. Το σώμα Σ_1 συγκρούεται για δεύτερη φορά με το σώμα Σ_2 τη χρονική στιγμή στην οποία διέρχεται για πρώτη φορά μετά την κρούση από τη θέση με απομάκρυνση x_1 κινούμενο με θετική ταχύτητα. Το ζητούμενο χρονικό διάστημα Δt που μεσολαβεί μεταξύ των δύο κρούσεων ισούται με το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να διαγράψει το περιστρεφόμενο διάνυσμα τη γωνία $\Delta\varphi$ που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

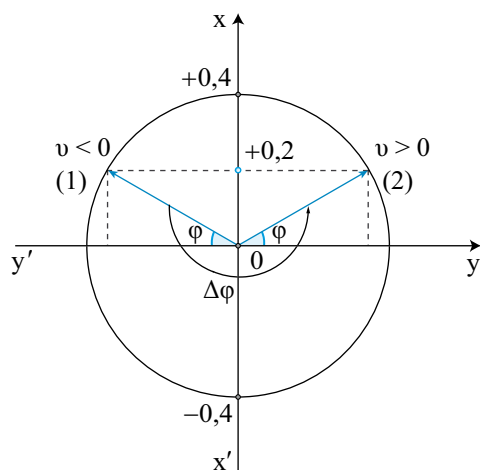
Η οξεία γωνία φ που σχηματίζει το περιστρεφόμενο διάνυσμα με τον άξονα $y'y$ στις θέσεις (1) και (2) που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα υπολογίζεται από τη σχέση: $\eta\mu\varphi = \frac{x_1}{A'_{\max}}$ ή $\eta\mu\varphi = \frac{1}{2}$ ή $\varphi = \frac{\pi}{6}$ rad.

Όπως προκύπτει από το σχήμα η γωνία $\Delta\varphi$ που διαγράφει το περιστρεφόμενο διάνυσμα είναι:

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\pi}{6} + \pi + \frac{\pi}{6} \right) \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = \frac{4\pi}{3} \text{ rad.} \quad \text{Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το}$$

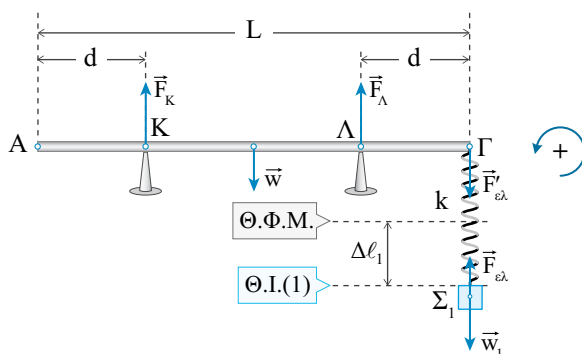
σώμα Σ_1 μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m_1\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

$$\text{Είναι: } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{2\pi}{15} \text{ s.}$$



Θέμα 39ο

α. Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα πριν από την κρούση.



Επειδή το σώμα Σ_1 ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_1 - F_{ελ} = 0$ ή $F_{ελ} = m_1g$ ή $F_{ελ} = 10 \text{ N}$.

Είναι: $F'_{ελ} = F_{ελ}$ ή $F'_{ελ} = 10 \text{ N}$. Επειδή η ράβδος ισορροπεί ισχύει: $\Sigma \tau_{(K)} = 0$

$$\text{ή } \tau_{F_K} + \tau_w + \tau_{F_A} + \tau_{F'_{ελ}} = 0 \quad \text{ή } 0 - w \left(\frac{L}{2} - d \right) + F_A (L - 2d) - F'_{ελ} (L - d) = 0$$

$$\text{ή } F_A = \frac{Mg \left(\frac{L}{2} - d \right) + F'_{ελ} (L - d)}{L - 2d} \quad \text{ή } F_A = 55 \text{ N. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη:}$$

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή } F_K + F_A - w - F'_{ελ} = 0 \quad \text{ή } F_K = Mg + F'_{ελ} - F_A \quad \text{ή } F_K = 35 \text{ N.}$$

β. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \quad \text{ή } m_2 v_0 = (m_1 + m_2) v \quad \text{ή } v = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s.}$$

Έστω $\Delta \ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(1)].

Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $F_{ελ} - w_1 = 0$ ή $k \Delta \ell_1 = m_1 g$ ή $\Delta \ell_1 = 0,05 \text{ m}$.

Έστω $\Delta \ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $F'_{ελ} - w_{ολ} = 0$

ή $k \Delta \ell_2 = (m_1 + m_2) g$ ή $\Delta \ell_2 = 0,1 \text{ m}$. Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x| = \Delta \ell_2 - \Delta \ell_1$ ή $|x| = 0,05 \text{ m}$.

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή } \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} D x^2 \quad \text{ή } A = 0,1 \text{ m.}$$

γ. Θεωρούμε μια τυχαία θέση με απομάκρυνση $x (x > 0)$ από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)]. Επειδή το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ισχύει: $\Sigma F = -Dx$ ή $F_{ελ} - w_{ολ} = -Dx$ ή $F_{ελ} = 20 - 200x$ (S.I.) (1), με $-0,1 \text{ m} \leq x \leq +0,1 \text{ m}$.

Επειδή η ράβδος ισορροπεί ισχύει: $\Sigma \tau_{(K)} = 0$ ή $\tau_{F_K} + \tau_w + \tau_{F_A} + \tau_{F'_{ελ}} = 0$

$$\text{ή } 0 - w \left(\frac{L}{2} - d \right) + F_A (L - 2d) - F'_{ελ} (L - d) = 0 \quad \text{ή } F_A = \frac{Mg \left(\frac{L}{2} - d \right) + F'_{ελ} (L - d)}{L - 2d}$$

ή λόγω της σχέσης (1) $F_A = 70 - 300x$ (S.I.) (2), με $-0,1 \text{ m} \leq x \leq +0,1 \text{ m}$.

δ. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $F_K + F_A - w - F'_{ελ} = 0$

ή $F_K = Mg + F'_{ελ} - F_A$ ή λόγω των σχέσεων (1) και (2): $F_K = 30 + 100x$ (S.I.) (3),

με $-0,1 \text{ m} \leq x \leq +0,1 \text{ m}$. Από τη σχέση (3) για $x = +A = +0,1 \text{ m}$ προκύπτει: $F_{K(\max)} = 40 \text{ N}$.

Από τη σχέση (3) για $x = -A = -0,1 \text{ m}$ προκύπτει: $F_{K(\min)} = 20 \text{ N}$.

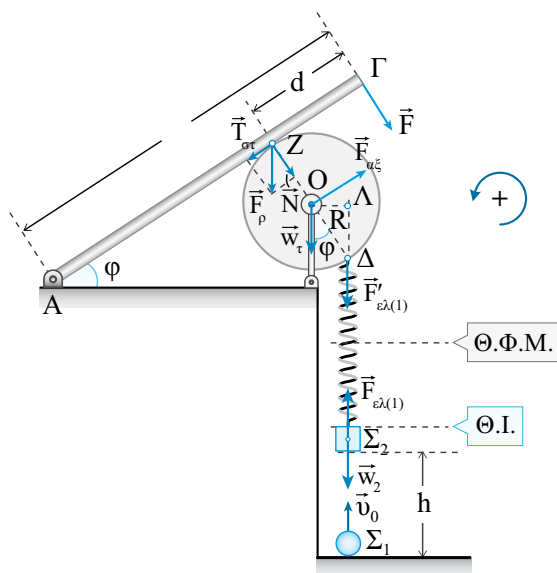
Επομένως, είναι: $\frac{F_{K(\max)}}{F_{K(\min)}} = 2$.

ε. Για να μην ανατρέπεται η ράβδος κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος, πρέπει να ισχύει: $F_K \geq 0$ (4) και $F_A \geq 0$ (5). Από τη σχέση (4) λόγω της σχέσης (3) προκύπτει: $30 + 100x \geq 0$ ή $x \geq -0,3 \text{ m}$ (6). Από τη σχέση (5) λόγω της σχέσης (2) προκύπτει:

$70 - 300x \geq 0$ ή $x \leq \frac{7}{30} \text{ m}$ (7). Από τις σχέσεις (6) και (7) προκύπτει ότι το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης που μπορεί να εκτελέσει το συσσωμάτωμα χωρίς η ράβδος να κινδυνεύει να ανατραπεί είναι: $A_{\max} = \frac{7}{30} \text{ m}$.

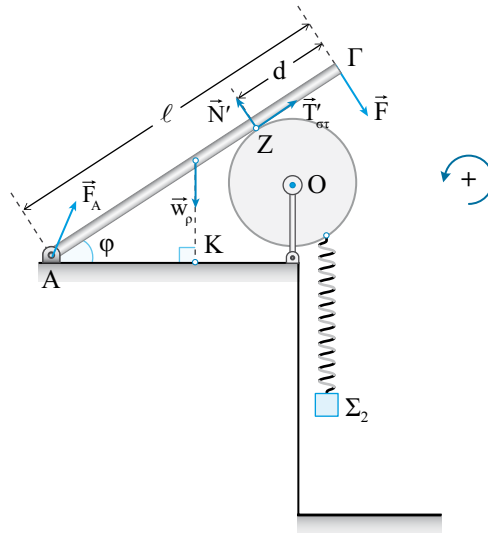
Θέμα 406

α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 είναι: το βάρος του $\vec{w}_2$ και η δύναμη από το ελατήριο $\vec{F}_{\epsilon\lambda(1)}$. Επειδή το σώμα Σ_2 ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $F_{\epsilon\lambda(1)} - w_2 = 0$ ή $F_{\epsilon\lambda(1)} = m_2 g$ ή $F_{\epsilon\lambda(1)} = 30 \text{ N}$.



Οι δυνάμεις που ασκούνται στη τροχαλία είναι: το βάρος της $\vec{w}_\tau$, η δύναμη $\vec{F}_\rho$ από τη ράβδο που αναλύεται στη στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau}$ και στη δύναμη $\vec{N}$, η δύναμη $\vec{F}_{\alpha\epsilon}$ από τον άξονα περιστροφής της και η δύναμη $\vec{F}'_{\epsilon\lambda(1)}$ από το ελατήριο ($\vec{F}'_{\epsilon\lambda(1)} = -\vec{F}_{\epsilon\lambda(1)}$). Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(O)} = 0$ ή $\tau_{T_{\sigma\tau}} + \tau_N + \tau_{w_\tau} + \tau_{F_{\alpha\epsilon}} + \tau_{F'_{\epsilon\lambda(1)}} = 0$ ή $T_{\sigma\tau}R + 0 + 0 + 0 - F'_{\epsilon\lambda(1)}(O\Lambda) = 0$ ή $T_{\sigma\tau}R = F'_{\epsilon\lambda(1)}R\eta\mu\phi$ ή $T'_{\sigma\tau} = F_{\epsilon\lambda(1)}\eta\mu\phi$ ή $T_{\sigma\tau} = 18 \text{ N}$.

β. Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη τροχαλία από τη ράβδο υπολογίζεται από τη σχέση: $F_\rho = \sqrt{T_{\sigma\tau}^2 + N^2}$ (1). Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\vec{w}_\rho$, οι δυνάμεις $\vec{T}'_{\sigma\tau}$ ($\vec{T}'_{\sigma\tau} = -\vec{T}_{\sigma\tau}$) και $\vec{N}'$ ($\vec{N}' = -\vec{N}$) από την τροχαλία, η δύναμη $\vec{F}$ και η δύναμη $\vec{F}_A$ από την άρθρωση.



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(A)} = 0$ ή $\tau_{F_A} + \tau_{w_p} + \tau_{N'} + \tau_{T_{\sigma\tau}} + \tau_F = 0$

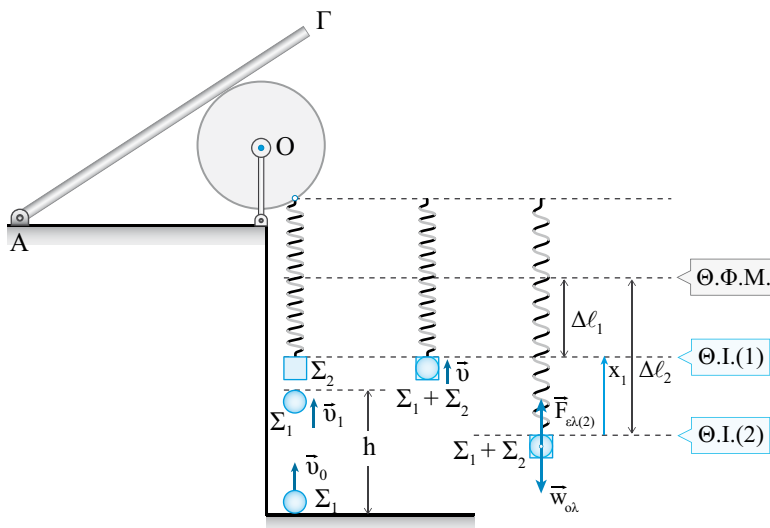
$$\text{ή } 0 - w_p(AK) + N'(\ell - d) + 0 - F\ell = 0 \quad \text{ή } N' \frac{2\ell}{3} = M_p g \frac{\ell}{2} \sin \varphi + F\ell \quad \text{ή } N' = \frac{3}{4} M_p g \sin \varphi + \frac{3}{2} F$$

ή $N = 84 \text{ N}$. Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στη σχέση (1) προκύπτει:

$$F_p = \sqrt{7.380} \text{ N} \quad \text{ή } F_p = 86 \text{ N}.$$

γ. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1} \quad \text{ή } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -m_1 g h \quad \text{ή } v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \quad \text{ή } v_1 = 2\sqrt{3} \text{ m/s}.$$



Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση, έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$

$$\text{ή } m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v \quad \text{ή } v = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s. Έστω } \Delta\ell_1 \text{ η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική θέση}$$

ισορροπίας του σώματος Σ_2 [Θ.Ι.(1) στο σχήμα]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή } F_{ελ(1)} - w_2 = 0 \quad \text{ή } k\Delta\ell_1 = m_2 g \quad \text{ή } \Delta\ell_1 = 0,3 \text{ m.}$$

Έστω $\Delta\ell_2$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2) στο σχήμα]. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $F_{ελ(2)} - w_{ολ} = 0$

$$\text{ή } k\Delta\ell_2 = (m_1 + m_2)g \quad \text{ή } \Delta\ell_2 = 0,4 \text{ m. Το μέτρο της απομάκρυνσης } x_1 \text{ του συσσωματώματος}$$

από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x_1| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$

$$\text{ή } |x_1| = 0,1 \text{ m. Έστω } A \text{ το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα έχουμε:}$$

$$E = K + U \quad \text{ή } \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} D x_1^2 \quad \text{ή } A = 0,2 \text{ m.}$$

δ. Θεωρούμε την τυχαία θέση με απομάκρυνση x ($x > 0$) από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος [Θ.Ι.(2)] που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Επειδή το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ισχύει:

$$\Sigma F = -Dx \quad \text{ή } F_{ελ} - w_{ολ} = -kx$$

$$\text{ή } F_{ελ} = (m_1 + m_2)g - kx.$$

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \quad \text{ή } \tau_{T_{στ}} + \tau_N + \tau_{F_{ελ}} + \tau_{w_{ελ}} + \tau_{F'_{ελ}} = 0$$

$$\text{ή } T_{στ} R + 0 + 0 + 0 - F'_{ελ} (O\Lambda) = 0$$

$$\text{ή } T_{στ} R = F'_{ελ} R \eta \mu \varphi \quad \text{ή } T_{στ} = F'_{ελ} \eta \mu \varphi$$

$$\text{ή } T_{στ} = F_{ελ} \eta \mu \varphi \quad \text{ή } T_{στ} = [(m_1 + m_2)g - kx] \eta \mu \varphi$$

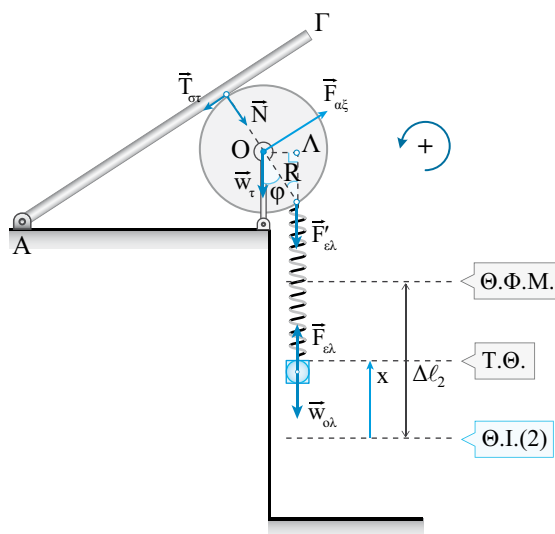
$$\text{ή } T_{στ} = 24 - 60x \text{ (S.I.) (2), με } -0,2 \text{ m} \leq x \leq +0,2 \text{ m.}$$

Από τη σχέση (2) για $x = -A = -0,2 \text{ m}$, προκύπτει: $T_{στ(max)} = 36 \text{ N}$.

Από τη σχέση (2) για $x = +A = +0,2 \text{ m}$, προκύπτει: $T_{στ(min)} = 12 \text{ N}$.

ε. Για να μην περιστραφεί η τροχαλία κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος, πρέπει να ισχύει: $T_{στ} \leq T_{op}$ ή $T_{στ} \leq \mu_s N$. Από τη σχέση (2) για $x = -A$ προκύπτει:

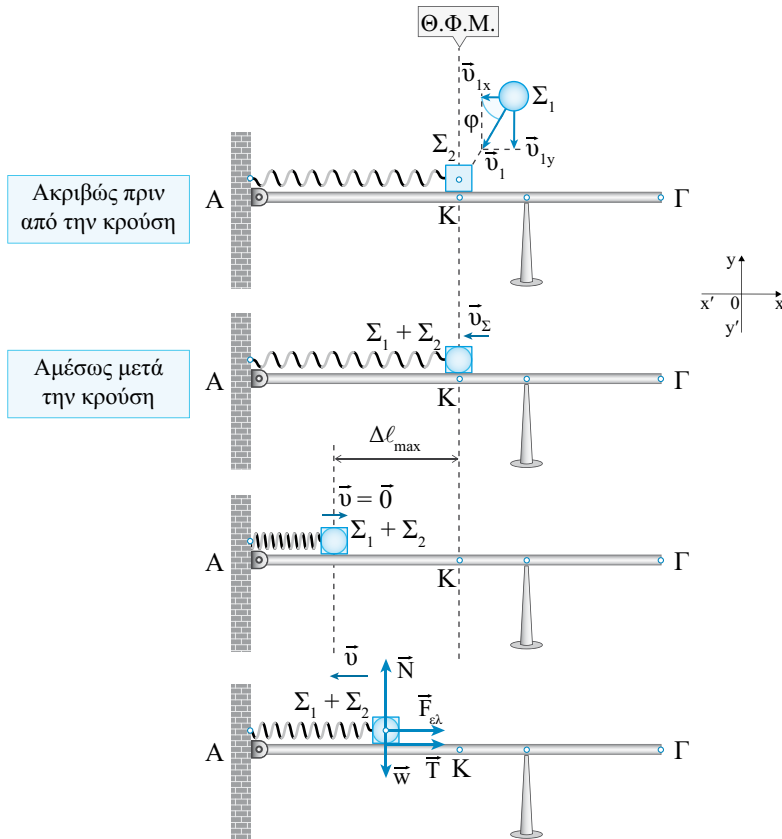
$$T_{στ(max)} = 24 + 60A \text{ (S.I.) (3). Αν ισχύει: } T_{στ(max)} \leq \mu_s N \text{ (4), τότε η τροχαλία δεν θα περιστραφεί}$$



κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Από τη σχέση (4), λόγω της σχέσης (3), προκύπτει: $24 + 60A \leq 42$ (S.I.) ή $A \leq 0,3 \text{ m}$ ή $A_{\max} = 0,3 \text{ m}$.

Θέμα 41ο

α. Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}_1$ σε δυο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες $\vec{v}_{1x}$ και $\vec{v}_{1y}$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Έστω v_Σ το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα σωμάτων Σ_1 και Σ_2 στον άξονα $x'x$ κατά την κρούση, έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ,x(πριν)} = \vec{p}_{ολ,x(μετά)} \quad \text{ή} \quad m_1 v_{1x} = (m_1 + m_2) v_\Sigma \quad \text{ή} \quad m_1 v_1 \sin\varphi = (m_1 + m_2) v_\Sigma \quad \text{ή} \quad v_\Sigma = 2 \text{ m/s}.$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\pi = \frac{K_{1(πριν)} - K_{ολ(μετά)}}{K_{1(πριν)}} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_\Sigma^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 80\%.$$

β. Η συσπείρωση του ελατηρίου γίνεται μέγιστη στη θέση όπου το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του συσσωματώματος από τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την κρούση, έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T + W_{F_{\text{ελ}}} + W_w + W_N$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\Sigma}^2 = -T\Delta\ell_{\text{max}} + U_{\text{ελ(αρχ)}} - U_{\text{ελ(τελ)}} + 0 + 0$$

$$\text{ή } -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\Sigma}^2 = -\mu N\Delta\ell_{\text{max}} + 0 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell_{\text{max}})^2$$

$$\text{ή } \frac{1}{2}k(\Delta\ell_{\text{max}})^2 + \mu(m_1 + m_2)g\Delta\ell_{\text{max}} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\Sigma}^2 = 0$$

$$\text{ή } 50(\Delta\ell_{\text{max}})^2 + 5\Delta\ell_{\text{max}} - 10 = 0 \text{ (S.I.) (1). Οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι:}$$

$$\Delta\ell_{\text{max}} = 0,4 \text{ m και } \Delta\ell_{\text{max}} = -0,5 \text{ m (άτοπο). Επομένως, είναι: } \Delta\ell_{\text{max}} = 0,4 \text{ m.}$$

γ. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το ελατήριο είναι συσπειρωμένο για πρώτη φορά κατά $\Delta\ell = \frac{\Delta\ell_{\text{max}}}{2} = 0,2 \text{ m}$, είναι: το βάρος της $\vec{w}_1$, η δύναμη $\vec{F}$ από το υποστήριγμα, οι δυνάμεις $\vec{T}'$ ($\vec{T}' = -\vec{T}$) και $\vec{N}'$ ($\vec{N}' = -\vec{N}$) από το συσσωμάτωμα και η δύναμη $\vec{F}_A$ από την άρθρωση. Επειδή το συσσωμάτωμα δεν κινείται στον άξονα $y'y$, ισχύει: $\Sigma \vec{F}_y = \vec{0}$ ή $N - w = 0$ ή $N = (m_1 + m_2)g$ ή $N = 50 \text{ N}$. Είναι: $N' = N$ ή $N' = 50 \text{ N}$.

Το μέτρο της τριβής ολίσθησης που ασκείται στο συσσωμάτωμα υπολογίζεται από τη σχέση: $T = \mu N$ ή $T = 5 \text{ N}$.

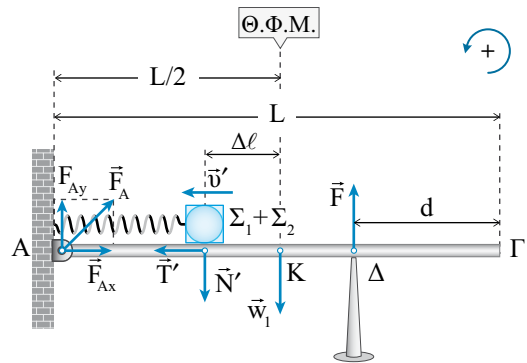
$$\text{Είναι: } T' = T \text{ ή } T' = 5 \text{ N.}$$

Επειδή η δοκός ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \text{ ή } \tau_{F_A} + \tau_{N'} + \tau_{T'} + \tau_{w_1} + \tau_F = 0$$

$$\text{ή } 0 - N' \left(\frac{L}{2} - \Delta\ell \right) + 0 - w_1 \frac{L}{2} + F(L - d) = 0$$

$$\text{ή } F = 40 \text{ N.}$$



δ. Επειδή η δοκός ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή αλγεβρικά: $\Sigma F_x = 0$ (2) και $\Sigma F_y = 0$ (3).

Από τη σχέση (2), έχουμε: $F_{Ax} - T' = 0$ ή $F_{Ax} = 5 \text{ N}$. Από τη σχέση (3), έχουμε:

$$F_{Ay} + F - N' - w_1 = 0 \text{ ή } F_{Ay} = N' + Mg - F \text{ ή } F_{Ay} = 20 \text{ N.}$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_A$ που ασκείται στη δοκό από την άρθρωση τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2}$ ή $F_A = \sqrt{425} \text{ N}$. Έστω θ η οξεία γωνία που σχηματίζει

η δύναμη $\vec{F}_A$ με την οριζόντια διεύθυνση. Είναι: $\epsilon\phi\theta = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}}$ ή $\epsilon\phi\theta = 4$.

Θέμα 42ο

α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_1 είναι: το βάρος του $\vec{w}_1$ και η δύναμη από το νήμα $\vec{T}$. Οι δυνάμεις που ασκούνται στην τροχαλία είναι: το βάρος της $\vec{w}_\tau$, η δύναμη από το νήμα $\vec{T}'$, η δύναμη $\vec{F}_{\alpha\zeta}$ από τον άξονα περιστροφής της και η δύναμη $\vec{F}_p$ από τη ράβδο. Η δύναμη $\vec{F}_p$ αναλύεται στη δύναμη $\vec{N}$, που έχει την διεύθυνση του άξονα $y'y'$, και στη στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau}$, που έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'x$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Αναλύουμε τη δύναμη $\vec{F}_{\alpha\zeta}$ που ασκείται στην τροχαλία από τον άξονά της σε δύο συνιστώσες: στην $\vec{F}_{\alpha\zeta(x)}$, που έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'x$, και στην $\vec{F}_{\alpha\zeta(y)}$, που έχει τη διεύθυνση του άξονα $y'y'$. Επειδή το σώμα Σ_1 ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή αλγεβρικά: $\Sigma F_y = 0$ ή $T - w_1 = 0$ ή $T = 10 \text{ N}$. Επειδή το νήμα είναι αβαρές, ισχύει: $T' = T$ ή $T' = 10 \text{ N}$.

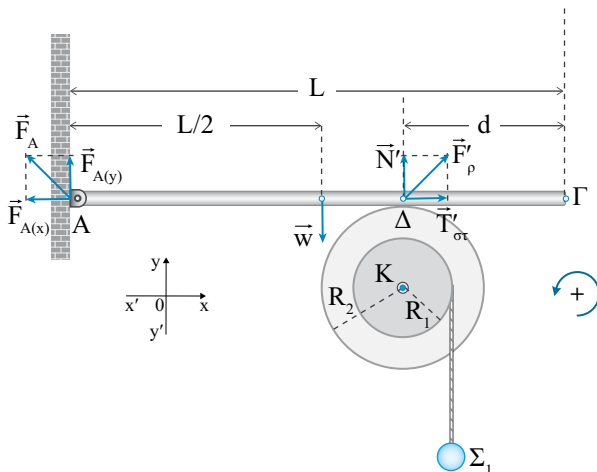
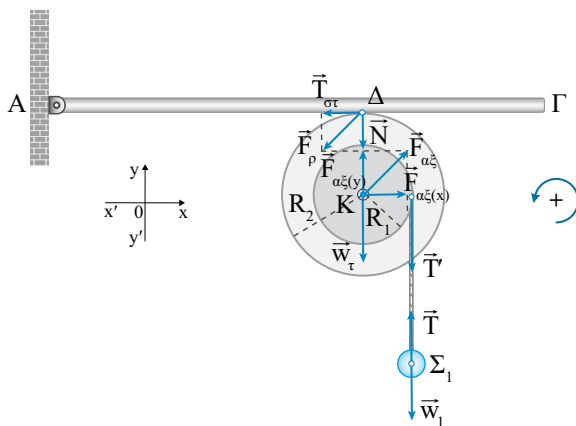
Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(K)} = 0$ ή $\tau_{F_{\alpha\zeta}} + \tau_{w_\tau} + \tau_{T_{\sigma\tau}} + \tau_N + \tau_{T'} = 0$

$$\text{ή } 0 + 0 + T_{\sigma\tau} R_2 + 0 - T' R_1 = 0 \quad \text{ή } T_{\sigma\tau} = \frac{T' R_1}{R_2} \quad \text{ή } T_{\sigma\tau} = 5 \text{ N}.$$

β. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο ΑΓ είναι: το βάρος της $\vec{w}$, η αντίδραση της δύναμης $\vec{F}_p$, η $\vec{F}_p'$, η οποία αναλύεται στη κάθετη προς τη ράβδο δύναμη $\vec{N}'$ ($\vec{N}' = -\vec{N}$) και στην παράλληλη προς τη ράβδο δύναμη $\vec{T}'_{\sigma\tau}$ ($\vec{T}'_{\sigma\tau} = -\vec{T}_{\sigma\tau}$), και η δύναμη από την άρθρωση $\vec{F}_A$.

Αναλύουμε τη δύναμη $\vec{F}_A$ στις συνιστώσες $\vec{F}_{Ax}$ και $\vec{F}_{Ay}$ που έχουν τη διεύθυνση του άξονα $x'x$ και του άξονα $y'y'$ αντίστοιχα. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(A)} = 0$

$$\text{ή } \tau_{F_A} + \tau_w + \tau_{N'} + \tau_{T'_{\sigma\tau}} = 0 \quad \text{ή } 0 - w \frac{L}{2} + N'(L-d) + 0 = 0 \quad \text{ή } N'(L-d) = \frac{MgL}{2} \quad \text{ή } N' = 20 \text{ N}.$$



Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη: $\vec{F} = \vec{0}$ ή αλγεβρικά: $\Sigma F_x = 0$ (1) και $\Sigma F_y = 0$ (2).

Από τη σχέση (1) έχουμε: $T'_{\sigma\tau} - F_{Ax} = 0$ ή $F_{Ax} = T'_{\sigma\tau}$ ή $F_{Ax} = T_{\sigma\tau}$ ή $F_{Ax} = 5$ N.

Από τη σχέση (2) προκύπτει: $F_{Ay} + N' - w = 0$ ή $F_{Ay} = Mg - N'$ ή $F_{Ay} = 5$ N.

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} \quad \text{ή} \quad F_A = 5\sqrt{2} \text{ N.}$$

γ. Είναι: $N = N'$ ή $N = 20$ N. Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει: $\vec{F} = \vec{0}$ ή αλγεβρικά:

$\Sigma F_x = 0$ (3) και $\Sigma F_y = 0$ (4). Από τη σχέση (3), έχουμε: $F_{\alpha\zeta(x)} - T_{\sigma\tau} = 0$ ή $F_{\alpha\zeta(x)} = T_{\sigma\tau}$ ή $F_{\alpha\zeta(x)} = 5$ N.

Από τη σχέση (4), έχουμε: $F_{\alpha\zeta(y)} - T' - w_\tau - N = 0$ ή $F_{\alpha\zeta(y)} = T' + w_\tau + N$

ή $F_{\alpha\zeta(y)} = T' + (M_1 + M_2)g + N$ ή $F_{\alpha\zeta(y)} = 60$ N. Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στην τροχα-

λία από τον άξονά της υπολογίζεται από τη σχέση: $F_{\alpha\zeta} = \sqrt{F_{\alpha\zeta(x)}^2 + F_{\alpha\zeta(y)}^2}$ ή $F_{\alpha\zeta} = 60,2$ N.

δ. Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = m_1 gh \quad \text{ή} \quad v_1 = 4 \text{ m/s.}$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο.

για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}}$

ή $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$ ή $v = 2$ m/s. Έστω $\Delta\ell_1$ η συσπείρωση του ελατηρίου στην αρχική θέση

ισορροπίας του σώματος Σ_2 . Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\vec{F} = \vec{0}$ ή $w_2 - F_{\epsilon\lambda} = 0$

ή $m_2 g = k \Delta\ell_1$ ή $\Delta\ell_1 = 0,1$ m. Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου στην θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_{\text{ολ}} - F'_{\epsilon\lambda} = 0 \quad \text{ή} \quad (m_1 + m_2)g = k \Delta\ell_2 \quad \text{ή} \quad \Delta\ell_2 = 0,2 \text{ m.}$$

Το μέτρο της απομάκρυνσης x του συσσωματώματος, από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αμέσως μετά την κρούση είναι: $|x| = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1$ ή $|x| = 0,1$ m.

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} D x^2 \quad \text{ή} \quad A = 0,3 \text{ m.}$$

ε. Έστω $\Delta\ell_3$ η παραμόρφωση του ελατηρίου τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το μέτρο της δύναμης που δέχεται το συσσωμάτωμα από το ελατήριο είναι $F''_{\epsilon\lambda} = 10$ N για δεύτερη φορά μετά την κρούση. Είναι: $F''_{\epsilon\lambda} = k \Delta\ell_3$ ή $\Delta\ell_3 = 0,1$ m.

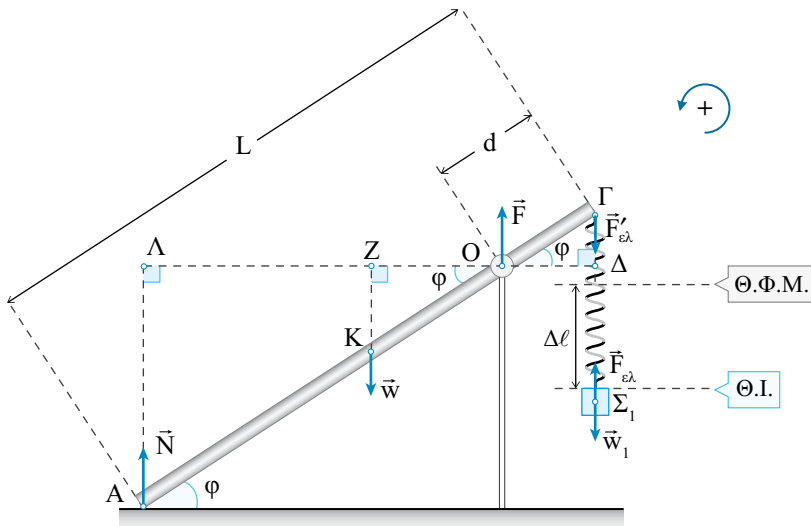
Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_1 το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell_3$. Σε αυτήν την περίπτωση, επειδή είναι $\Delta\ell_3 = \Delta\ell_1$, η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι: $x = +0,1$ m. Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_1 το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell_3$. Σε αυτή την περίπτωση η απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι: $x' = +(\Delta\ell_2 + \Delta\ell_3)$ ή $x' = +0,3$ m.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$, αμέσως μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $x = +0,1 \text{ m}$ κινούμενο με αρνητική ταχύτητα. Επομένως, το μέτρο της δύναμης που δέχεται το συσσωμάτωμα από το ελατήριο γίνεται ίσο με 10 N για δεύτερη φορά μετά την κρούση τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση με απομάκρυνση $x' = +0,3 \text{ m}$. Επειδή είναι $x' = +A$, η ταχύτητα του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι $v' = 0$. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση: $\frac{dK}{dt} = \Sigma Fv$ ή $\frac{dK}{dt} = -Dx'v'$ ή $\frac{dK}{dt} = 0$.

Θέμα 43ο

α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_1 είναι: το βάρος του $\vec{w}_1$ και η δύναμη $\vec{F}_{\epsilon\lambda}$ από το ελατήριο. Επειδή το σώμα Σ_1 ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $F_{\epsilon\lambda} - w_1 = 0$ ή $F_{\epsilon\lambda} = 40 \text{ N}$.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι: το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της K , η δύναμη $\vec{N}$ από το λείο οριζόντιο δάπεδο, η δύναμη $\vec{F}'_{\epsilon\lambda}$ ($\vec{F}'_{\epsilon\lambda} = -\vec{F}_{\epsilon\lambda}$) από το ελατήριο και η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση.



Είναι: $F'_{\epsilon\lambda} = F_{\epsilon\lambda}$ ή $F'_{\epsilon\lambda} = 40 \text{ N}$. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(O)} = 0$

ή $\tau_N + \tau_w + \tau_F + \tau_{F'_{\epsilon\lambda}} = 0$ ή $-N(O\Lambda) + w(OZ) + 0 - F'_{\epsilon\lambda}(O\Delta) = 0$

$$\text{ή } N(L-d)\sin\varphi = Mg\left(\frac{L}{2}-d\right)\sin\varphi - F'_{\epsilon\lambda}d \sin\varphi = 0 \quad \text{ή } N = \frac{Mg\left(\frac{L}{2}-d\right) - F'_{\epsilon\lambda}d}{L-d} \quad \text{ή } N = 10 \text{ N.}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη: $F + N - w - F'_{\epsilon\lambda} = 0$ ή $F = Mg + F'_{\epsilon\lambda} - N$ ή $F = 75 \text{ N}$.

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$D = m_1 \omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$ ή $\omega = 5 \text{ rad/s}$. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 . Είναι: $v_0 = v_{\max}$ ή $v_0 = \omega A$ ή $A = 0,4 \text{ m}$. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ_1 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του του κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι ίση με μηδέν ($\varphi_0 = 0$). Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος Σ_1 δίνεται από τη σχέση: $a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0)$ ή $a = -10 \eta \mu(5t) \text{ (S.I.)}$.

γ. Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει: $E = K + U$ ή $E = 3U + U$ ή $E = 4U$ ή $\frac{1}{2} D A^2 = 4 \frac{1}{2} D x_1^2$ ή $x_1 = +\frac{A}{2}$ ή $x_1 = +0,2 \text{ m}$. Έστω $\Delta \ell$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη Θ.Ι. του σώματος Σ_1 .

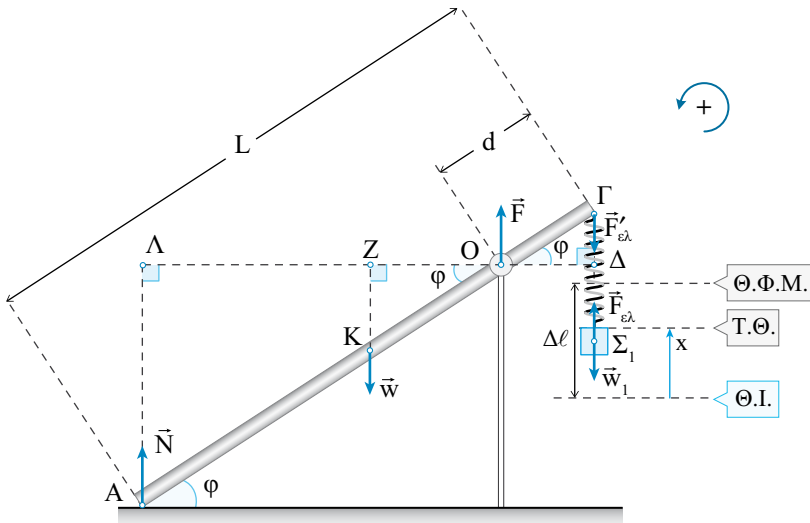
Είναι: $F_{\varepsilon \lambda} = k \Delta \ell$ ή $\Delta \ell = 0,4 \text{ m}$. Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα Σ_1 από το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $F_{\varepsilon \lambda(1)} = k(\Delta \ell - x_1)$ ή $F_{\varepsilon \lambda(1)} = 20 \text{ N}$.

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από το ελατήριο τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $F'_{\varepsilon \lambda(1)} = 20 \text{ N}$. Έστω N' το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από το δάπεδο τη χρονική στιγμή t_1 . Επειδή τη χρονική t_1 η ράβδος εξακολουθεί να ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_{N'} + \tau_w + \tau_{F'} + \tau_{F'_{\varepsilon \lambda(1)}} = 0 \quad \text{ή} \quad -N'(OA) + w(OZ) + 0 - F'_{\varepsilon \lambda(1)}(OD) = 0$$

$$\text{ή} \quad N'(L - d) \sin \varphi = Mg \left(\frac{L}{2} - d \right) \sin \varphi - F'_{\varepsilon \lambda(1)} d \sin \varphi = 0 \quad \text{ή} \quad N' = 14 \text{ N}.$$

δ. Θεωρούμε μια τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος Σ_1 με απομάκρυνση x ($x > 0$) από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.



Η αλγεβρική τιμή της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ_1 από το ελατήριο στη θέση αυτήν υπολογίζεται από τη σχέση: $\Sigma F = -Dx$ ή $F_{\varepsilon \lambda} - w_1 = -kx$ ή $F_{\varepsilon \lambda} = m_1 g - kx$ ή $F_{\varepsilon \lambda} = 40 - 100x \text{ (S.I.)}$.

Η αλγεβρική τιμή της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ_1 από το ελατήριο στην τυχαία θέση με απομάκρυνση $x(x > 0)$ είναι θετική. Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από το ελατήριο, όταν το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην τυχαία θέση με απομάκρυνση x είναι:

$F'_{\epsilon\lambda} = F_{\epsilon\lambda}$ ή $F'_{\epsilon\lambda} = 40 - 100x$ (S.I.) (1). Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \quad \text{ή} \quad \tau_N + \tau_w + \tau_F + \tau_{F'_{\epsilon\lambda}} = 0 \quad \text{ή} \quad -N(L-d)\sin\varphi + Mg\left(\frac{L}{2} - d\right)\sin\varphi + 0 - F'_{\epsilon\lambda}d\sin\varphi = 0$$

$$\text{ή} \quad N = \frac{Mg\left(\frac{L}{2} - d\right) - F'_{\epsilon\lambda}d}{L - d} \quad \text{ή λόγω της σχέσης (1): } N = 10 + 20x \text{ (S.I.) (2).}$$

Για να μην ανατρέπεται η ράβδος κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 πρέπει να ισχύει: $N \geq 0$ ή λόγω της σχέσης (2): $10 + 20x \geq 0$ (S.I.) ή $x \geq -0,5 \text{ m}$.

Επομένως, το μέγιστο πλάτος με το οποίο μπορεί να ταλαντώνεται το σώμα Σ_1 χωρίς η ράβδος να ανατρέπεται είναι: $A_{\max} = 0,5 \text{ m}$.

ε. Έστω v'_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Επειδή τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν ίσες μάζες και η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, ανταλλάσσουν ταχύτητες κατά την κρούση. Είναι: $v'_1 = v_2$. Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση. Είναι: $v'_1 = v_{\max}$ ή $v'_1 = \omega A'$ ή $A' = \frac{v'_1}{\omega}$ ή $A' = \frac{v_2}{\omega}$.

Για να μην ανατρέπεται η ράβδος κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κρούση πρέπει να ισχύει: $A' \leq A_{\max}$ ή $\frac{v_2}{\omega} \leq A_{\max}$ ή $v_2 \leq \omega A_{\max}$ ή $v_2 \leq 2,5 \text{ m/s}$

$$\text{ή} \quad v_{2(\min)} = 2,5 \text{ m/s}.$$

Θέμα 44ο

α. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_1\omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{ή} \quad \omega_1 = 10 \text{ rad/s. Έστω } A_1 \text{ το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα}$$

Σ_1 . Είναι: $v_0 = \omega A_1$ ή $A_1 = 0,4 \text{ m}$. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ_1 βρίσκεται στη Θ.Ι. του κινούμενο με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι ίση με μηδέν ($\varphi_0 = 0$).

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_1 από τη Θ.Ι. δίνεται από τη σχέση:

$$x = A_1\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ή} \quad x = 0,4\eta\mu(10t) \text{ (S.I.) (1).}$$

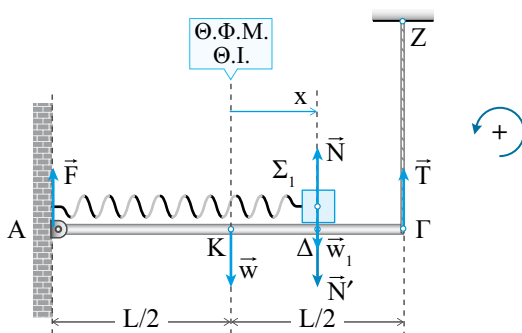
β. Επειδή το σώμα Σ_1 δεν κινείται στον άξονα $y'y$, ισχύει: $\Sigma \vec{F}_y = \vec{0}$ ή $N - w_1 = 0$ ή $N = m_1g$. Θεωρούμε την τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος Σ_1 με απομάκρυνση $x(x > 0)$, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σανίδα είναι:
το βάρος της $\vec{w}$, η δύναμη $\vec{N}'$ από το σώμα Σ_1 ($\vec{N}' = -\vec{N}$), η δύναμη $\vec{T}$ από το νήμα και η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση. Επειδή η σανίδα ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(A)} = 0$

$$\text{ή } \tau_F + \tau_w + \tau_{N'} + \tau_T = 0$$

$$\text{ή } 0 - w \frac{L}{2} - N' \left(\frac{L}{2} + x \right) + TL = 0$$

$$\text{ή } T = \frac{Mg \frac{L}{2} + m_1 g \left(\frac{L}{2} + x \right)}{L} \quad \text{ή } T = 25 + 5x \text{ (S.I.) (2), με } -0,4 \text{ m} \leq x \leq 0,4 \text{ m.}$$



γ. Έστω x_1 η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη σχέση (1) για

$t = (7\pi/60) \text{ s}$ προκύπτει: $x_1 = 0,4 \text{ m} \left(\frac{7\pi}{6} \right) \text{ m}$ ή $x_1 = -0,2 \text{ m}$. Από τη σχέση (2) για $x = x_1 = -0,2 \text{ m}$

προκύπτει: $T = 24 \text{ N}$. Επειδή η σανίδα ισορροπεί, τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $\Sigma F_y = 0$

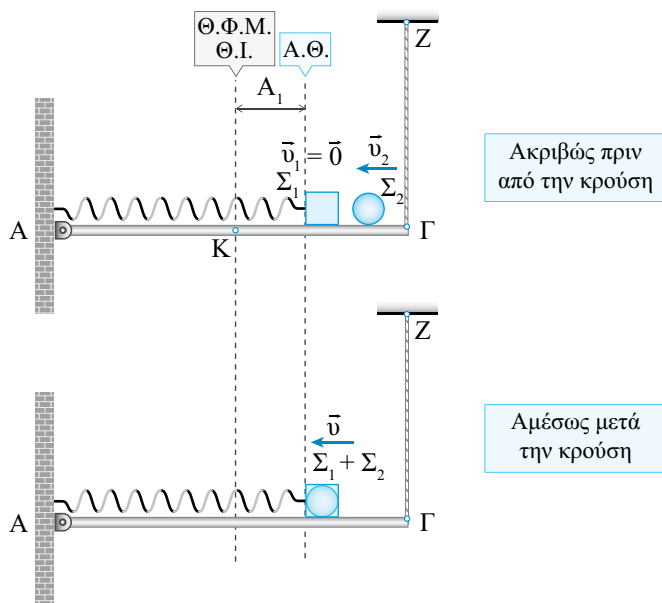
$$\text{ή } F + T - w - N' = 0 \quad \text{ή } F = Mg + m_1 g - T \quad \text{ή } F = 26 \text{ N.}$$

δ. Έστω x_2 η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας τη χρονική στιγμή t_2 .

Από τη σχέση (2) για $T = 27 \text{ N}$ προκύπτει: $27 = 25 + 5x_2 \text{ (S.I.)}$ ή $x_2 = +0,4 \text{ m} = +A_1$.

Επομένως, τη χρονική στιγμή t_2 το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του, οπότε η ταχύτητα του είναι: $v_1 = 0$.

ε. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.



Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση, έχουμε:

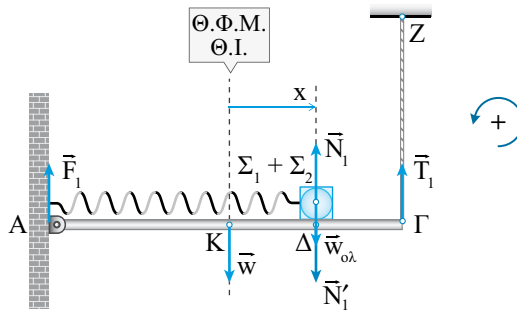
$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \quad \text{ή} \quad m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \quad \text{ή} \quad v = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (3).$$

Έστω A_2 το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D A_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} D A_1^2 \quad \text{ή} \quad A_2 = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k} v^2 + A_1^2}$$

$$\text{ή λόγω της σχέσης (3): } A_2 = \sqrt{\frac{m_2^2}{k(m_1 + m_2)} v_2^2 + A_1^2} \quad (4).$$

Θεωρούμε την τυχαία θέση με απομάκρυνση $x(x > 0)$ από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης του συσσωματώματος (η οποία είναι η ίδια με τη Θ.Ι. του σώματος Σ_1) που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Επειδή η σανίδα ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \tau_{(A)} = 0$ ή $\tau_{\bar{F}_1} + \tau_{\bar{W}} + \tau_{\bar{N}'_1} + \tau_{\bar{T}_1} = 0$

$$\text{ή } 0 - Mg \frac{L}{2} - N'_1 \left(\frac{L}{2} + x \right) + T_1 L = 0 \quad \text{ή} \quad T_1 L = Mg \frac{L}{2} + (m_1 + m_2) g \left(\frac{L}{2} + x \right) \quad \text{ή} \quad T_1 = 40 + 20x \text{ (S.I.)} \quad (5).$$

Για να μην κόβεται το νήμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος, πρέπει να ισχύει: $T_1 \leq T_{\theta\phi}$ ή λόγω της σχέσης (5): $40 + 20x \leq 50 \text{ (S.I.)}$ ή $x \leq 0,5 \text{ m}$.

Επομένως το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης που μπορεί να εκτελέσει το συσσωμάτωμα χωρίς να κόβεται το νήμα είναι: $A_{\max} = 0,5 \text{ m}$. Επομένως, πρέπει να ισχύει:

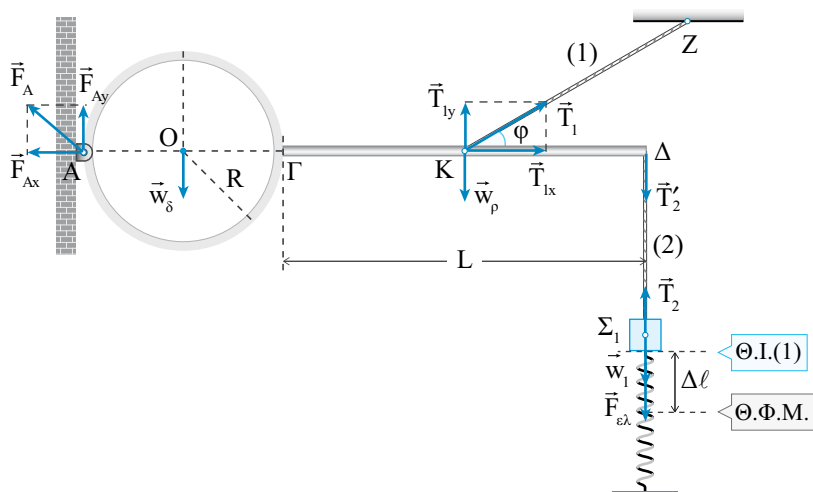
$$A_2 \leq A_{\max} \quad \text{ή λόγω της σχέσης (4): } \sqrt{\frac{m_2^2}{k(m_1 + m_2)} v_2^2 + A_1^2} \leq A_{\max} \quad \text{ή} \quad \frac{m_2^2}{k(m_1 + m_2)} v_2^2 + A_1^2 \leq A_{\max}^2$$

$$\text{ή} \quad v_2^2 \leq \frac{k(A_{\max}^2 - A_1^2)(m_1 + m_2)}{m_2^2} \quad \text{ή} \quad v_2 \leq \sqrt{\frac{k(A_{\max}^2 - A_1^2)(m_1 + m_2)}{m_2^2}} \quad \text{ή} \quad v_2 \leq 2 \text{ m/s}$$

$$\text{ή} \quad v_{2(\max)} = 2 \text{ m/s}.$$

Θέμα 45ο

α. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα δακτύλιος – ράβδος ΓΔ καθώς και οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ₁.



Στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ₁ [Θ.Ι.(1)] ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \quad \text{ή} \quad T_2 - w_1 - F_{ελ} = 0 \quad \text{ή} \quad T_2 = m_1 g + k \Delta \ell \quad \text{ή} \quad T_2 = 20 \text{ N. Είναι: } T'_2 = T_2 \quad \text{ή} \quad T'_2 = 20 \text{ N.}$$

Επειδή το σύστημα δακτύλιος – ράβδος ισορροπεί ισχύει: $\Sigma \tau_{(A)} = 0$

$$\text{ή} \quad \tau_{F_A} + \tau_{w_\delta} + \tau_{w_\rho} + \tau_{T_1} + \tau_{T'_2} = 0 \quad \text{ή} \quad 0 - w_\delta R - w_\rho \left(2R + \frac{L}{2} \right) + T_{1y} \left(2R + \frac{L}{2} \right) - T'_2 (2R + L) = 0$$

$$\text{ή} \quad T_1 \eta \mu \phi \left(2R + \frac{L}{2} \right) = M_\delta g R + M_\rho g \left(2R + \frac{L}{2} \right) + T'_2 (2R + L) \quad \text{ή} \quad T_1 = 120 \text{ N.}$$

β. Επειδή το σύστημα δακτύλιος – ράβδος ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή αλγεβρικά:

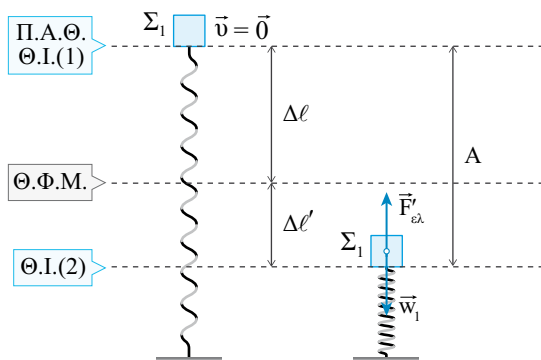
$$\Sigma F_x = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2). \quad \text{Από τη σχέση (1) έχουμε: } T_{1x} - F_{Ax} = 0 \quad \text{ή} \quad F_{Ax} = T_1 \sin \phi$$

$$\text{ή} \quad F_{Ax} = 60\sqrt{3} \text{ N. Από τη σχέση (2) έχουμε: } F_{Ay} + T_{1y} - w_\delta - w_\rho - T'_2 = 0$$

$$\text{ή} \quad F_{Ay} = M_\delta g + M_\rho g + T'_2 - T_1 \eta \mu \phi \quad \text{ή} \quad F_{Ay} = 35 \text{ N.}$$

γ. Μετά την κοπή του νήματος το σώμα Σ₁ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη Θ.Ι.(2). Έστω $\Delta \ell'$ η συσπίρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(2).

$$\text{Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: } \Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad w_1 - F'_{ελ} = 0 \quad \text{ή} \quad m_1 g = k \Delta \ell' \quad \text{ή} \quad \Delta \ell' = 0,1 \text{ m.}$$



Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 μετά την κοπή του νήματος (2).

Όπως προκύπτει από το σχήμα είναι: $A = \Delta\ell + \Delta\ell'$ ή $A = 0,2 \text{ m}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m_1\omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{ή} \quad \omega = 10 \text{ rad/s}.$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη Θ.Ι.(2) είναι $x = +A$,

η αρχική φάση της ταλάντωσης που εκτελεί μετά την κοπή του νήματος είναι: $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος Σ_1 δίνεται από τη σχέση:

$$v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ή} \quad v = 2 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.}) \quad (1).$$

δ. Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία μηδενίζεται η δύναμη που δέχεται το σώμα Σ_1 από το ελατήριο για πρώτη φορά μετά την κοπή του νήματος (2), το σώμα Σ_1 διέρχεται από τη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος κινούμενο με αρνητική ταχύτητα. Η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη Θ.Ι.(2) είναι: $x = +\Delta\ell'$ ή $x = +0,1 \text{ m}$.

Έστω v η ταχύτητα του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της

ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 έχουμε: $E = K + U$ ή $\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}Dx^2$

ή $v = -\sqrt{3} \text{ m/s}$. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή

t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt}$ ή $\frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F dx}{dt}$ ή $\frac{dK}{dt} = \Sigma F v$ ή $\frac{dK}{dt} = -Dxv$

$$\text{ή} \quad \frac{dK}{dt} = +10\sqrt{3} \text{ J/s}.$$

ε. Η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t_2 , ακριβώς πριν από την κρούση, υπολογίζεται από τη σχέση: $x_1 = A \sin(\omega t_2 + \varphi_0)$ ή $x_1 = 0,2 \sin(2\pi) \text{ m}$

ή $x_1 = 0$. Επομένως, η κρούση πραγματοποιείται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 [Θ.Ι.(2)]. Έστω v_1 η ταχύτητα του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_2 ακριβώς πριν από την κρούση. Από τη σχέση (1) για $t = t_2 = 0,15\pi \text{ s}$ προκύπτει: $v_1 = 2 \sin(2\pi) \text{ m/s}$ ή $v_1 = +2 \text{ m/s}$.

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Από την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 κατά την κρούση, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα πάνω έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$ ή $m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$ ή $v = -2 \text{ m/s}$.

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα που δημιουργείται εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας (3) [Θ.Ι.(3)]. Έστω $\Delta \ell''$ η συσπείρωση του ελατηρίου στη Θ.Ι.(3). Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $w_{ολ} - F_{ελ}'' = 0$ ή $(m_1 + m_2)g = k\Delta \ell''$ ή $\Delta \ell'' = 0,4 \text{ m}$. Το μέτρο της απομάκρυνσης x_2 του συσσωματώματος από τη Θ.Ι.(3) αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση: $|x_2| = \Delta \ell'' - \Delta \ell'$ ή $|x_2| = 0,3 \text{ m}$.

Έστω A' το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε:

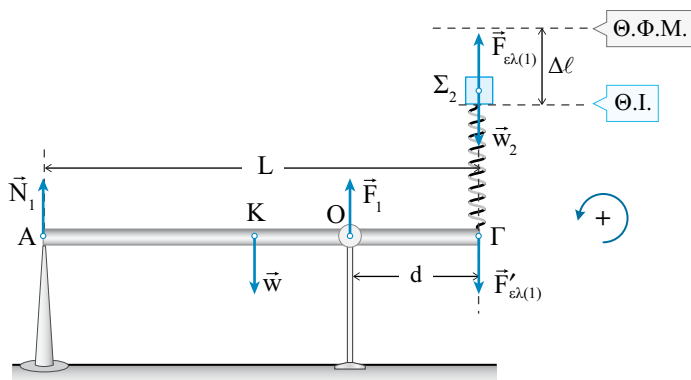
$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2} D A'^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} D x_2^2 \text{ ή } A' = 0,5 \text{ m}.$$

Η μέγιστη δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι: $U_{ελ(max)} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell'' + A)^2$ ή $U_{ελ(max)} = 40,5 \text{ J}$.

Εφόσον είναι $A' > \Delta \ell''$, η ελάχιστη δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι: $U_{ελ(min)} = 0$.

Θέμα 46ο

α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_2 πριν από την κρούση είναι: το βάρος του $\vec{w}_2$ και η δύναμη $\vec{F}_{ελ(1)}$ από το ελατήριο. Επειδή το σώμα Σ_2 ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ ή $F_{ελ(1)} - w_2 = 0$ ή $F_{ελ(1)} = m_2 g$ ή $F_{ελ(1)} = 40 \text{ N}$.



Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο πριν από την κρούση είναι η δύναμη $\vec{N}_1$ από το υποστήριγμα, το βάρος της $\vec{w}$ στο μέσον της K, η δύναμη $\vec{F}'_{ελ(1)}$ ($\vec{F}'_{ελ(1)} = -\vec{F}_{ελ(1)}$) από το ελατήριο και η δύναμη $\vec{F}_1$ από τον άξονα περιστροφής της. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \text{ ή } \tau_{N_1} + \tau_w + \tau_{F_1} + \tau_{F'_{ελ(1)}} = 0 \text{ ή } -N_1(L-d) + w\left(\frac{L}{2} - d\right) + 0 - F'_{ελ(1)}d = 0$$

ή $N_1(L-d) = Mg\left(\frac{L}{2} - d\right) - F_{ελ(1)}d$ ή $N_1 = 60 \text{ N}$. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ακόμη:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \quad \text{ή} \quad N_1 + F_1 - w - F'_{ελ(1)} = 0 \quad \text{ή} \quad F_1 = Mg + F'_{ελ(1)} - N_1 \quad \text{ή} \quad F_1 = 300 \text{ N}.$$

β. Έστω $\bar{v}_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν από την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 πριν από την κρούση έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}m_1v_1^2 - 0 = m_1gh_1 \quad \text{ή} \quad |v_1| = \sqrt{2gh_1} \quad \text{ή} \quad |v_1| = 5 \text{ m/s}.$$

Έστω $\bar{v}'_1$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ_1 μετά την κρούση έχουμε: $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_1}$

$$\text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2}m_1v_1'^2 = -m_1gh_2 \quad \text{ή} \quad |v'_1| = \sqrt{2gh_2} \quad \text{ή} \quad |v'_1| = 3 \text{ m/s}.$$

Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\bar{v}'_1$ δίνεται από τη σχέση: $v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1$ ή $-3 = \frac{m_1 - 4}{m_1 + 4}5$ (S.I.) ή $m_1 = 1 \text{ kg}$.

Έστω v'_2 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

Είναι: $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1$ ή $v'_2 = +2 \text{ m/s}$. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

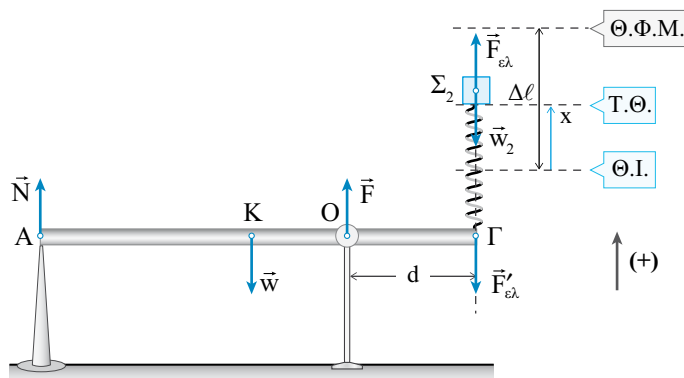
$$\pi = \frac{\Delta K_2}{K_{1(\text{πριν})}} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = \frac{\frac{1}{2}m_2v_2'^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή} \quad \pi = 64\%.$$

γ. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση υπολογίζεται

από τη σχέση: $D = m_2\omega^2$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης που

εκτελεί το σώμα Σ_2 μετά την κρούση. Είναι: $v'_2 = v_{\text{max}}$ ή $v'_2 = \omega A$ ή $A = 0,2 \text{ m}$.

Θεωρούμε την τυχαία θέση της τροχιάς του σώματος Σ_2 που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα με απομάκρυνση $x(x > 0)$ από τη θέση ισορροπίας.



Επειδή το σώμα Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ισχύει: $\Sigma F = -Dx$ ή $F_{ελ} - w_2 = -kx$
ή $F_{ελ} = m_2 g - kx$ ή $F_{ελ} = 40 - 400x$ (S.I.) (1), με $-0,2 \text{ m} \leq x \leq +0,2 \text{ m}$.

δ. Η αλγεβρική τιμή της δύναμης που ασκείται στο σώμα Σ_2 από το ελατήριο στην τυχαία θέση με απομάκρυνση x ($x > 0$) είναι θετική. Επομένως, το μέτρο της δύναμης $\vec{F}'_{ελ}$ που ασκείται στη ράβδο από το ελατήριο, όταν το σώμα Σ_2 βρίσκεται στην τυχαία θέση με απομάκρυνση x , είναι: $F'_{ελ} = F_{ελ}$ ή $F'_{ελ} = 40 - 400x$ (S.I.) (2), με $-0,2 \text{ m} \leq x \leq +0,2 \text{ m}$. Επειδή η ράβδος ισορροπεί,

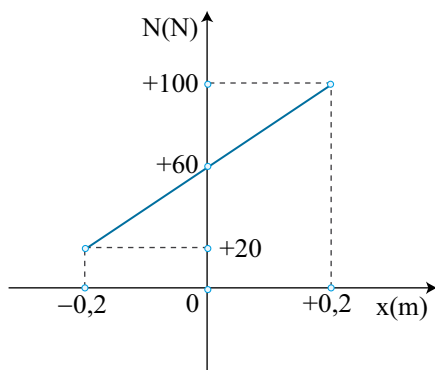
ισχύει: $\Sigma \tau_{(O)} = 0$ ή $\tau_N + \tau_w + \tau_F + \tau_{F'_{ελ}} = 0$ ή $-N(L-d) + w\left(\frac{L}{2} - d\right) + 0 - F'_{ελ}d = 0$

$$\text{ή } N = \frac{Mg\left(\frac{L}{2} - d\right) - F'_{ελ}d}{L - d} \quad \text{ή λόγω της σχέσης (2): } N = 60 + 200x \text{ (S.I.) (3),}$$

με $-0,2 \text{ m} \leq x \leq +0,2 \text{ m}$. Από τη σχέση (3) για $x = -0,2 \text{ m} = -A$ προκύπτει: $N_{\min} = 20 \text{ N}$.

Από τη σχέση (3) για $x = +0,2 \text{ m} = +A$ προκύπτει: $N_{\max} = 100 \text{ N}$.

Στο διάγραμμα του ακόλουθου σχήματος απεικονίζεται η γραφική παράσταση της σχέσης (3).



ε. Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει: $\Sigma \vec{F}_y = \vec{0}$ ή $N + F - w - F'_{ελ} = 0$ ή $F = Mg + F'_{ελ} - N$
ή λόγω των σχέσεων (2) και (3): $F = 300 - 600x$ (S.I.) (4) με $-0,2 \text{ m} \leq x \leq 0,2 \text{ m}$.

Τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από τον άξονα περιστροφής της είναι τριπλάσιο του μέτρου της δύναμης που ασκείται σε αυτήν από το υποστήριγμα, ισχύει: $F = 3N$ ή, λόγω των σχέσεων (3) και (4): $300 - 600x = 3(60 + 200x)$ (S.I.)

ή $x = +0,1 \text{ m}$.

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 τις χρονικές στιγμές στις οποίες η απομάκρυνσή του είναι $x = +0,1 \text{ m}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_2

μετά την κρούση έχουμε: $E = K + U$ ή $\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}Dx^2$ ή $v = \sqrt{3} \text{ m/s}$.

Θέμα 47ο

α. Η δοθείσα εξίσωση του κύματος γράφεται: $y = 0,5\eta\mu 2\pi(10t - 5x)$ (S.I.) (1).

Από τη σύγκριση της σχέσης (1) με τη σχέση $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ προκύπτει:

$$A = 0,5 \text{ m}, \quad \frac{1}{T} = 10 \text{ s}^{-1} \quad \text{ή} \quad T = 0,1 \text{ s} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\lambda} = 5 \text{ m}^{-1} \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,2 \text{ m}.$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = 2 \text{ m/s}$.

β. Η ταχύτητα του ταλαντούμενου υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση: $v_K = \omega A \sin 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$ ή $v_K = \frac{2\pi}{T} A \sin 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$ ή $v_K = 10 \pi \sin(3\pi) \text{ m/s}$ ή $v_K = -10\pi \text{ m/s}$.

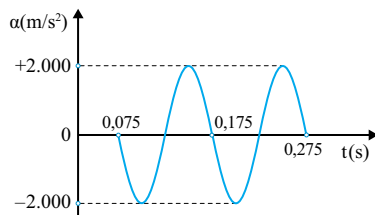
γ. Το υλικό σημείο Λ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_Λ . Είναι: $t_\Lambda = \frac{x_\Lambda}{v_\delta}$ ή $t_\Lambda = 0,075 \text{ s}$.

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του υλικού σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha_\Lambda = -\omega^2 A \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad \alpha_\Lambda = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right)$$

ή $\alpha_\Lambda = -2.000\eta\mu 2\pi(10t - 0,75)$ (S.I.), για $t \geq 0,075 \text{ s}$.

Στο διπλανό διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του υλικού σημείου Λ σε συνάρτηση με τον χρόνο, από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 0,275 \text{ s}$.



δ. Η εξίσωση του στιγμιότυπου του κύματος στον θετικό ημιάξονα Οx τη χρονική στιγμή $t_2 = 0,15 \text{ s}$ προκύπτει από τη σχέση (1), θέτοντας σε αυτήν όπου t το t_2 . Είναι:

$$y = 0,5\eta\mu 2\pi(1,5 - 5x) \text{ (S.I.) (2)}.$$

Για να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο του κύματος στον θετικό ημιάξονα Οx τη χρονική στιγμή t_2 , ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1ο βήμα: Υπολογίζουμε την απόσταση x_1 από την αρχή Ο($x = 0$) του άξονα στην οποία έχει διαδοθεί το κύμα στον θετικό ημιάξονα Οx τη χρονική στιγμή t_2 . Είναι: $x_1 = v_\delta t_2$ ή $x_1 = 0,3 \text{ m}$.

2ο βήμα: Υπολογίζουμε την απομάκρυνση y_0 του υλικού σημείου Ο($x = 0$) τη χρονική στιγμή t_2 , θέτοντας στη σχέση (2) όπου $x = 0$. Είναι: $y_0 = 0,5\eta\mu(3\pi) \text{ m}$ ή $y_0 = 0$.

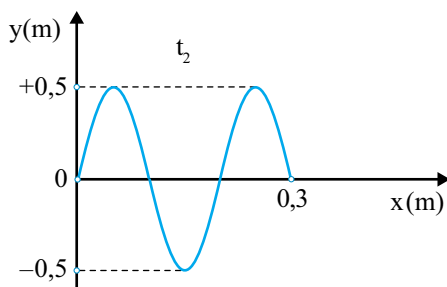
3ο βήμα: Υπολογίζουμε την απομάκρυνση y του υλικού σημείου που βρίσκεται στη θέση $x = +\frac{\lambda}{4} = +0,05 \text{ m}$ τη χρονική στιγμή t_2 , θέτοντας στη σχέση (2) όπου $x = +0,05 \text{ m}$.

Είναι: $y = 0,5\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$ ή $y = +0,5 \text{ m}$.

4ο βήμα: Χωρίζουμε την απόσταση x_1 σε N τμήματα μήκους $\frac{\lambda}{4}$ το καθένα.

Είναι: $N = \frac{x_1}{\frac{\lambda}{4}}$ ή $N = \frac{4x_1}{\lambda}$ ή $N = 6$.

Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του κύματος στον θετικό ημιάξονα Ox τη χρονική στιγμή t_2 ξεκινώντας από την αρχή $O(x = 0)$ του άξονα και κινούμενοι προς το «μέτωπο» του κύματος (προς τα εμπρός):



ε. Οι φάσεις των ταλαντώσεων των υλικών σημείων K και Λ μια τυχαία χρονική στιγμή t στην οποία ταλαντώνονται και τα δύο σημεία δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις: $\varphi_K = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$ ή $\varphi_K = 2\pi(10t + 0,5)$ (S.I.) (3) και $\varphi_\Lambda = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right)$ ή $\varphi_\Lambda = 2\pi(10t - 0,75)$ (S.I.) (4).

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει: $\varphi_K > \varphi_\Lambda$. Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων K και Λ είναι: $\Delta\varphi = \varphi_K - \varphi_\Lambda$ (5) ή $\Delta\varphi = 2,5\pi \text{ rad}$.

Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_3 δίνεται από τη σχέση:

$$y_\Lambda = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_3}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) \text{ ή } y_\Lambda = A\eta\mu\varphi_\Lambda \text{ ή } -0,5 = 0,5\eta\mu\varphi_\Lambda \text{ ή } \eta\mu\varphi_\Lambda = -1 \text{ ή } \eta\mu\varphi_\Lambda = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\text{ή } \varphi_\Lambda = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \text{ (S.I.), με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Από τη σχέση (5) έχουμε: $\varphi_K = \varphi_\Lambda + \Delta\varphi$ ή $\varphi_K = 2\kappa\pi + 4\pi$ (S.I.), με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

Η ταχύτητα του υλικού σημείου K τη χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_K = \omega A \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t_3}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) \text{ ή } v_K = \frac{2\pi}{T} A \sigma\upsilon\nu\varphi_K \text{ ή } v_K = \frac{2\pi}{T} A \sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + 4\pi) \text{ ή } v_K = +10\pi \text{ m/s.}$$

Θέμα 48ο

α. Έστω A το πλάτος και T η περίοδος του κύματος. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει:

$A = 0,2 \text{ m}$ και $2T = (0,9 - 0,5) \text{ s}$ ή $T = 0,2 \text{ s}$. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ακόμη ότι το υλικό σημείο K αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή: $t_K = 0,5 \text{ s}$.

Επομένως, η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι: $v_\delta = \frac{x_K}{t_K}$ ή $v_\delta = 2 \text{ m/s}$.

Το μήκος κύματος λ του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$ ή $\lambda = 0,4 \text{ m}$.

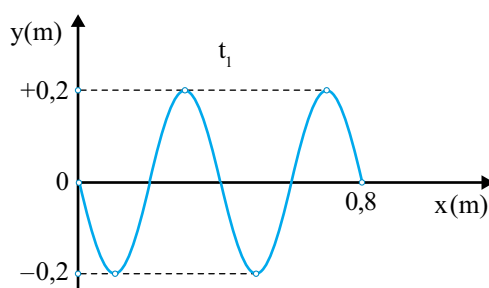
Η εξίσωση που περιγράφει το κύμα δίνεται από τη σχέση: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

ή $y = 0,2\eta\mu 2\pi(5t - 2,5x)$ (S.I.).

β. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου τα οποία τη χρονική στιγμή t_1 είναι ακίνητα, πρέπει να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 . Η απόσταση x_1 από την αρχή $O(x = 0)$ του ημιάξονα Ox στην οποία έχει διαδοθεί το κύμα τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $x_1 = v_\delta t_1$ ή $x_1 = 0,8$ m.

Χωρίζουμε την απόσταση x_1 σε N τμήματα μήκους $\frac{\lambda}{4}$ το καθένα. Είναι: $N = \frac{x_1}{\frac{\lambda}{4}}$ ή $N = \frac{4x_1}{\lambda}$ ή $N = 8$.

Στο διπλανό διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 . Τα υλικά σημεία, τα οποία τη χρονική στιγμή t_1 είναι ακίνητα είναι αυτά που βρίσκονται σε κάποια από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους αυτή τη χρονική στιγμή. Όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 , το ζητούμενο πλήθος των υλικών σημείων είναι ίσο με **τέσσερα (4)**.



γ. Το υλικό σημείο Λ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_Λ . Είναι: $t_\Lambda = \frac{x_\Lambda}{v_\delta}$ ή $t_\Lambda = 1$ s.

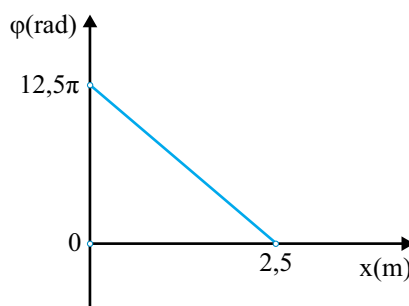
Η χρονική στιγμή t_2 στην οποία η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου Λ μηδενίζεται στιγμιαία για τρίτη φορά μετά τη έναρξη της ταλάντωσής του είναι: $t_2 = t_\Lambda + \frac{5T}{4}$ ή $t_2 = 1,25$ s.

Η εξίσωση της φάσης φ του αρμονικού κύματος τη χρονική στιγμή t_2 σε συνάρτηση με τη θέση x των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου στον ημιάξονα

Ox δίνεται από τη σχέση: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

ή $\varphi = 2\pi(6,25 - 2,5x)$ (S.I.) (1).

Στο διπλανό διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της σχέσης (1).



δ. Έστω y_Λ η απομάκρυνση του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_3 . Για το υλικό σημείο Λ τη χρονική στιγμή t_3 ισχύει: $K = 3U$ (2). Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο Λ έχουμε: $E = K + U$ ή, λόγω της σχέσης (2):

$$E = 4U \text{ ή } \frac{1}{2}DA^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}Dy_\Lambda^2 \text{ ή } y_\Lambda = +\frac{A}{2} \text{ ή } y_\Lambda = +0,1 \text{ m.}$$

Έστω v_Λ η ταχύτητα του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_3 . Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\frac{1}{2}mv_\Lambda^2 = 3\frac{1}{2}Dy_\Lambda^2 \quad \text{ή} \quad mv_\Lambda^2 = 3m\omega^2 y_\Lambda^2 \quad \text{ή} \quad v_\Lambda = +\sqrt{3}\omega y_\Lambda \quad \text{ή} \quad v_\Lambda = +\sqrt{3}\frac{2\pi}{T}y_\Lambda$$

ή $v_\Lambda = +\sqrt{3\pi} \text{ m/s}$. Οι φάσεις των ταλαντώσεων των υλικών σημείων K και Λ τη χρονική στιγμή t_3 δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις: $\varphi_K = 2\pi\left(\frac{t_3}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$ (3), $\varphi_\Lambda = 2\pi\left(\frac{t_3}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right)$ (4).

Επειδή είναι $x_\Lambda > x_K$, από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι $\varphi_K > \varphi_\Lambda$. Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων K και Λ είναι: $\Delta\varphi = \varphi_K - \varphi_\Lambda$ ή, λόγω των σχέσεων (3) και

$$(4): \Delta\varphi = 2\pi\frac{x_\Lambda - x_K}{\lambda} \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = 5\pi \text{ rad}.$$

Επειδή είναι $\Delta\varphi = 5\pi \text{ rad}$, τα υλικά σημεία K και Λ βρίσκονται σε αντίθεση φάσης, οπότε η ταχύτητα του υλικού σημείου K τη χρονική στιγμή t_3 είναι: $v_K = -\sqrt{3\pi} \text{ m/s}$.

Θέμα 49ο

α. Έστω A το πλάτος και λ το μήκος κύματος του κύματος. Από το δοθέν στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει: $A = 0,3 \text{ m}$ και $\frac{9\lambda}{4} = 0,9 \text{ m}$ ή $\lambda = 0,4 \text{ m}$.

Από το δοθέν στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει ακόμη ότι τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,9 \text{ s}$ το κύμα θέτει σε ταλάντωση το υλικό σημείο του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = +0,9 \text{ m}$. Επομένως, από τον ορισμό της ταχύτητας διάδοσης του κύματος προκύπτει:

$$v_\delta = \frac{x}{t_1} \quad \text{ή} \quad v_\delta = 1 \text{ m/s}. \text{ Η περίοδος } T \text{ του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:}$$

$$v_\delta = \lambda f \quad \text{ή} \quad v_\delta = \frac{\lambda}{T} \quad \text{ή} \quad T = \frac{\lambda}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad T = 0,4 \text{ s}.$$

Η εξίσωση του στιγμιότυπου του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad y = 0,3\eta\mu 2\pi(2,25 - 2,5x) \text{ (S.I.)}.$$

β. Όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο, το υλικό

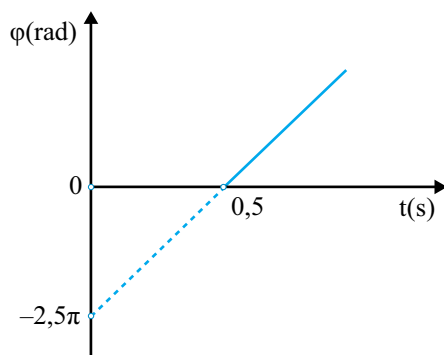
σημείο M βρίσκεται στη θέση: $x_M = +\frac{5\lambda}{4}$

ή $x_M = +0,5 \text{ m}$. Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου M δίνεται

$$\text{από τη σχέση: } \varphi_M = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right)$$

$$\text{ή } \varphi_M = 2\pi(2,5t - 1,25) \text{ (S.I.) (1).}$$

Στο διπλανό διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της σχέσης (1).



γ. Η χρονική στιγμή t_M στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το υλικό σημείο Μ υπολογίζεται από τη σχέση: $t_M = \frac{x_M}{v_\delta}$ ή $t_M = 0,5 \text{ s}$. Έστω Ν το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί το σημείο Μ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 .

Είναι: $N = f\Delta t$ ή $N = \frac{1}{T}(t_2 - t_M)$ ή $N = 2$ ταλαντώσεις.

Το διάστημα που διανύει το υλικό σημείο Μ σε κάθε πλήρη ταλάντωση που εκτελεί είναι ίσο με $4A$. Επομένως, το διάστημα που διανύει το υλικό σημείο Μ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $s = N \cdot 4A$ ή $s = 8A$ ή $s = 2,4 \text{ m}$.

δ. Η χρονική στιγμή t_3 στην οποία η επιτάχυνση του υλικού σημείου Μ γίνεται μέγιστη για δεύτερη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσής του είναι: $t_3 = t_M + \frac{3T}{4}$ ή $t_3 = 0,8 \text{ s}$.

Έστω x_Λ η θέση του σημείου Λ στον θετικό ημιάξονα Οχ. Η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_3 δίνεται από τη σχέση: $\varphi_\Lambda = 2\pi\left(\frac{t_3}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right)$ ή $x_\Lambda = +0,2 \text{ m}$.

Έστω t_Λ η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το υλικό σημείο Λ.

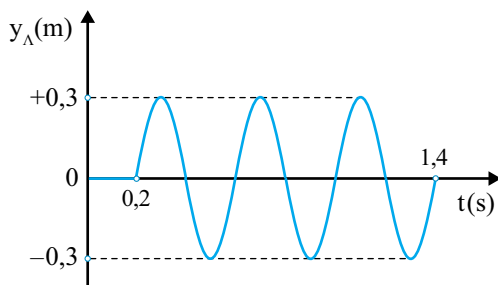
Είναι: $t_\Lambda = \frac{x_\Lambda}{v_\delta}$ ή $t_\Lambda = 0,2 \text{ s}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Λ από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση:

$$y_\Lambda = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{ή } y_\Lambda = 0,3 \eta \mu 2\pi (2,5t - 0,5) \text{ (S.I.) (2),}$$

για $t \geq 0,2 \text{ s}$.



Στο διπλανό διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της σχέσης (2) από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 1,4 \text{ s}$.

Θέμα 506

α. Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_K = 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_K}{\lambda} \right) \text{ ή } \varphi_K = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{\lambda} \right) \text{ (S.I.) (1). Σύμφωνα με το δοθέν διάγραμμα, τη χρονική}$$

στιγμή $t = 0$ είναι $\varphi_K = -2\pi \text{ rad}$. Από τη σχέση (1) για $t = 0$ και $\varphi_K = -2\pi \text{ rad}$, έχουμε:

$$-2\pi = 2\pi \left(\frac{0}{T} - \frac{1}{\lambda} \right) \text{ (S.I.) ή } \frac{1}{\lambda} = 1 \text{ m}^{-1} \text{ ή } \lambda = 1 \text{ m.}$$

Σύμφωνα με το δοθέν διάγραμμα, τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ είναι $\varphi_K = 0$. Από τη σχέση (1) για $t = 2 \text{ s}$ και $\varphi_K = 0$, έχουμε: $0 = 2\pi\left(\frac{2}{T} - \frac{1}{\lambda}\right)$ (S.I.) ή $\frac{2}{T} = 1 \text{ s}^{-1}$ ή $T = 2 \text{ s}$.

Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου K .

$$\text{Είναι: } E = \frac{1}{2}DA^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A^2 \quad \text{ή} \quad A = 0,5 \text{ m.}$$

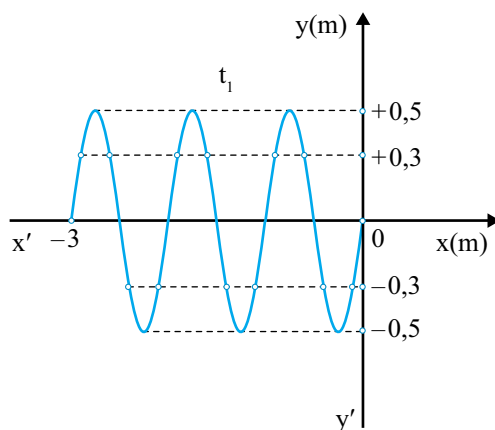
Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$ ή $y = 0,5\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + x\right)$ (S.I.).

β. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$ ή $v_\delta = 0,5 \text{ m/s}$.

Η θέση x_1 του υλικού σημείου του αρνητικού ημιιάξονα Ox' το οποίο αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $x_1 = -v_\delta t_1$ ή $x_1 = -3 \text{ m}$. Χωρίζουμε την απόσταση $|x_1|$ σε N τμήματα μήκους $\lambda/4$ το καθένα.

$$\text{Είναι: } N = \frac{|x_1|}{\frac{\lambda}{4}} \quad \text{ή} \quad N = \frac{4|x_1|}{\lambda} \quad \text{ή} \quad N = 12.$$

Στο διάγραμμα του διπλανού σχήματος απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος στον αρνητικό ημιιάξονα Ox' τη χρονική στιγμή t_1 .



γ. Είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = \pi \text{ rad/s}$.

Έστω y η απομάκρυνση ενός υλικού σημείου του αρνητικού ημιιάξονα το οποίο τη χρονική στιγμή t_1 έχει ταχύτητα μέτρου $v = 0,4\pi \text{ m/s}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του υλικού σημείου έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dy^2 \quad \text{ή} \quad m\omega^2 A^2 = mv^2 + m\omega^2 y^2 \quad \text{ή} \quad y = \pm\sqrt{A^2 - \left(\frac{v}{\omega}\right)^2} \quad \text{ή} \quad y = \pm 0,3 \text{ m.}$$

Όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 , το πλήθος των υλικών σημείων του αρνητικού ημιιάξονα Ox' τα οποία τη χρονική στιγμή t_1 έχουν ταχύτητα μέτρου $v = 0,4\pi \text{ m/s}$ είναι ίσο με δώδεκα ($N = 12$).

δ. Η χρονική διαφορά έναρξης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων K και Λ είναι $\Delta t = 4 \text{ s}$. Είναι: $v_\delta = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ή $x_\Lambda - x_K = v_\delta \Delta t$ ή $x_\Lambda = x_K + v_\delta \Delta t$ ή $x_\Lambda = +1 \text{ m}$.

Η ταχύτητα του ταλαντούμενου του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\Lambda = \omega A \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t_2}{T} + \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right)$ ή $v_\Lambda = 0,5\pi \sigma\upsilon\nu(2,5\pi) \text{ m/s}$ ή $v_\Lambda = 0$.

Θέμα 51ο

α. Έστω f η συχνότητα ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο. Το υλικό σημείο Ο ($x = 0$) στο χρονικό διάστημα Δt , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 , στην οποία διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, έχει εκτελέσει $N_1 = 15$ πλήρεις ταλαντώσεις.

Είναι: $N_1 = f\Delta t$ ή $f = \frac{N_1}{t_1}$ ή $f = 5 \text{ Hz}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο είναι: $\omega = 2\pi f$ ή $\omega = 10\pi \text{ rad/s}$. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο. Είναι: $v_0 = v_{\max}$ ή $v_0 = \omega A$ ή $A = 0,2 \text{ m}$. Έστω λ το μήκος κύματος του κύματος.

Είναι: $v_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = 1 \text{ m}$. Η περίοδος του κύματος είναι: $T = \frac{1}{f}$ ή $T = 0,2 \text{ s}$.

Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ ή $y = 0,2\eta\mu 2\pi(5t - x)$ (S.I.).

β. Έστω t_K η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το υλικό σημείο Κ. Το υλικό σημείο Κ στο χρονικό διάστημα $\Delta t'$, από τη χρονική στιγμή t_K έως τη χρονική στιγμή t_1 , έχει εκτελέσει $N_2 = 10$ πλήρεις ταλαντώσεις. Είναι: $N_2 = f\Delta t'$ ή $N_1 = f(t_1 - t_K)$ ή $t_K = 1 \text{ s}$.

Έστω x_K η θέση του υλικού σημείου Κ στον θετικό ημιάξονα Οχ. Είναι: $v_\delta = \frac{x_K}{t_K}$ ή $x_K = +5 \text{ m}$.

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$v_K = \omega A \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) \text{ ή } v_K = 2\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(5t - 5) \text{ (S.I.)}, \text{ για } t \geq 1 \text{ s}.$$

γ. Έστω t_Λ η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το υλικό σημείο Λ. Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 το υλικό σημείο Λ είναι το πιο απομακρυσμένο σημείο από την αρχή Ο το οποίο βρίσκεται στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του ισχύει: $t_1 = t_\Lambda + \frac{T}{4}$ ή $t_\Lambda = 2,95 \text{ s}$.

Έστω x_Λ η θέση του σημείου Λ στον θετικό ημιάξονα Οχ. Είναι: $t_\Lambda = \frac{x_\Lambda}{v_\delta}$ ή $x_\Lambda = +14,75 \text{ m}$.

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$a_\Lambda = -\omega^2 A \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) \text{ ή } a_\Lambda = -200\eta\mu 2\pi(5t - 14,75) \text{ (S.I.)}, \text{ για } t \geq 2,95 \text{ s}.$$

δ. Οι φάσεις των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ μια τυχαία χρονική στιγμή t στην οποία ταλαντώνονται και τα δύο σημεία δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις:

$$\varphi_K = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) \quad (1), \quad \varphi_\Lambda = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) \quad (2).$$

Επειδή είναι $x_\Lambda > x_K$, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\varphi_K > \varphi_\Lambda$.

Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι: $\Delta\varphi = \varphi_K - \varphi_\Lambda$ ή, λόγω των σχέσεων (1) και (2): $\Delta\varphi = 2\pi \frac{x_\Lambda - x_K}{\lambda}$ ή $\Delta\varphi = 19,5\pi \text{ rad}$.

ε. Έστω x η θέση ενός τυχαίου υλικού σημείου του ελαστικού μέσου το οποίο έχει κάθε χρονική στιγμή την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα με το υλικό σημείο O . Τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου που έχουν κάθε χρονική στιγμή την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα με το υλικό σημείο O απέχουν από αυτό αποστάσεις που είναι ακέραια πολλαπλάσια του μήκους κύματος του κύματος. Δηλαδή, για το τυχαίο υλικό σημείο ισχύει: $\Delta x = \kappa \lambda$ ή $x - 0 = \kappa \lambda$ ή $x = \kappa$ (S.I.), με $\kappa = 1, 2, 3, \dots$

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου τα οποία βρίσκονται ανάμεσα στο υλικό σημείο K και το υλικό σημείο Λ και έχουν κάθε χρονική στιγμή μετά την έναρξη της ταλάντωσής τους την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα με το υλικό σημείο O , λύνουμε την ανίσωση: $x_K < x < x_\Lambda$ ή $5 < \kappa < 14,75$ ή $\kappa = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$. Επομένως, το ζητούμενο πλήθος των υλικών σημείων είναι ίσο με **εννέα (N = 9 σημεία)**.

Θέμα 52ο

α. Έστω A το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου O . Η απόσταση μεταξύ των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του υλικού σημείου O είναι ίση με $2A$. Είναι: $2A = 0,8 \text{ m}$ ή $A = 0,4 \text{ m}$. Έστω f η συχνότητα ταλάντωσης του υλικού σημείου M . Το υλικό σημείο M διέρχεται 2 φορές από τη θέση ισορροπίας του στο χρονικό διάστημα που εκτελεί μία πλήρη ταλάντωση.

Εφόσον διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του 10 φορές το δευτερόλεπτο, το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί σε χρόνο $\Delta t = 1 \text{ s}$ είναι $N = 5$ ταλαντώσεις. Επομένως, είναι: $f = \frac{N}{\Delta t}$ ή $f = 5 \text{ Hz}$. Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας των ταλαντούμενων υλικών σημείων του ελαστικού μέσου είναι: $v_{\max} = \omega A$ ή $v_{\max} = 2\pi f A$ ή $v_{\max} = 4\pi \text{ m/s}$.

β. Η περίοδος του κύματος είναι: $T = \frac{1}{f}$ ή $T = 0,2 \text{ s}$. Έστω t_M η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το υλικό σημείο M . Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 το υλικό σημείο M ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσής του, ισχύει:

$$t_1 = t_M + \frac{T}{4} \text{ ή } t_M = 0,15 \text{ s.}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \frac{x_M}{t_M}$ ή $v_\delta = 1 \text{ m/s}$.

Έστω λ το μήκος κύματος του κύματος. Είναι: $v_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = 0,2 \text{ m}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου M δίνεται από τη σχέση:

$$y_M = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) \text{ ή } y_M = 0,4 \eta \mu 2\pi (5t - 0,75) \text{ (S.I.), για } t \geq 0,15 \text{ s.}$$

γ. Έστω x η θέση ενός τυχαίου υλικού σημείου Z του ελαστικού μέσου, το οποίο έχει κάθε χρονική στιγμή μετά την έναρξη της ταλάντωσής του αντίθετη απομάκρυνση και αντίθετη ταχύτητα από το υλικό σημείο O . Η οριζόντια απόσταση Δx του υλικού σημείου Z από το υλικό σημείο O είναι περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος του κύματος. Δηλαδή, είναι:

$$\Delta x = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad x - 0 = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad x = \kappa \lambda + \frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad x = 0,2\kappa + 0,1 \text{ (S.I.)}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο πλήθος των υλικών σημείων λύνουμε την ανίσωση:

$$x_M < x < x_N \quad \text{ή} \quad 0,15 < 0,2\kappa + 0,1 < 0,9 \quad \text{ή} \quad 0,25 < \kappa < 4 \quad \text{ή} \quad \kappa = 1, 2, 3.$$

Επομένως, το ζητούμενο πλήθος των υλικών σημείων είναι ίσο με **τρία** ($N = 3$ σημεία).

δ. Έστω y_M η απομάκρυνση του υλικού σημείου M τις χρονικές στιγμές στις οποίες η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσής του είναι ίση με το 25% της μέγιστης τιμής της.

$$\text{Είναι: } U = \frac{25}{100} U_{\max} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D y_M^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} D A^2 \quad \text{ή} \quad |y_M| = \frac{A}{2} \quad \text{ή} \quad |y_M| = 0,2 \text{ m.}$$

Έστω v_M η ταχύτητα του υλικού σημείου M τις παραπάνω χρονικές στιγμές. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο M έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m v_M^2 + \frac{1}{2} m y_M^2 \quad \text{ή} \quad m \omega^2 A^2 = m v_M^2 + m \omega^2 y_M^2 \quad \text{ή} \quad |v_M| = \omega \sqrt{A^2 - y_M^2}$$

ή $|v_M| = 2\pi\sqrt{3} \text{ m/s}$. Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου M είναι: $\left| \frac{dK}{dt} \right| = |\Sigma F v| \quad \text{ή} \quad \left| \frac{dK}{dt} \right| = |-D y_M v_M| \quad \text{ή} \quad \left| \frac{dK}{dt} \right| = m \omega^2 |y_M| |v_M| \quad \text{ή} \quad \left| \frac{dK}{dt} \right| = 0,04\pi\sqrt{3} \text{ J/s.}$

Θέμα 53ο

α. Όπως προκύπτει από το δοθέν διάγραμμα οι φάσεις των ταλαντώσεων των υλικών σημείων K και Λ τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι αντίστοιχα: $\varphi_{K(0)} = 6\pi \text{ rad}$ και $\varphi_{\Lambda(0)} = -4\pi \text{ rad}$.

Επειδή είναι $\varphi_{K(0)} > \varphi_{\Lambda(0)}$, το υλικό σημείο K αρχίζει να ταλαντώνεται νωρίτερα από το υλικό σημείο Λ, οπότε το κύμα διαδίδεται από το υλικό σημείο K προς το υλικό σημείο Λ.

β. Επειδή το κύμα διαδίδεται από το υλικό σημείο K ($x_K > 0$) προς το υλικό σημείο Λ ($x_\Lambda < 0$), διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'Ox$. Η απόσταση μεταξύ των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του υλικού σημείου O είναι ίση με $2A$, όπου A το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου O. Είναι: $2A = 0,04 \text{ m}$ ή $A = 0,02 \text{ m}$.

Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων K και Λ είναι: $\Delta\varphi = \varphi_{K(0)} - \varphi_{\Lambda(0)}$

ή $\Delta\varphi = 10\pi \text{ rad}$. Οι χρονικές εξισώσεις της φάσης της ταλάντωσης των υλικών σημείων K και

Λ δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις: $\varphi_K = 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_K}{\lambda} \right)$ (1), $\varphi_\Lambda = 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_\Lambda}{\lambda} \right)$ (2).

Με αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε: $\varphi_K - \varphi_\Lambda = \frac{x_K - x_\Lambda}{\lambda}$ ή $\lambda = \frac{2\pi(x_K - x_\Lambda)}{\Delta\varphi}$

ή $\lambda = 0,5 \text{ m}$. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ακόμη ότι το υλικό σημείο Λ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή: $t_\Lambda = 0,8 \text{ s}$.

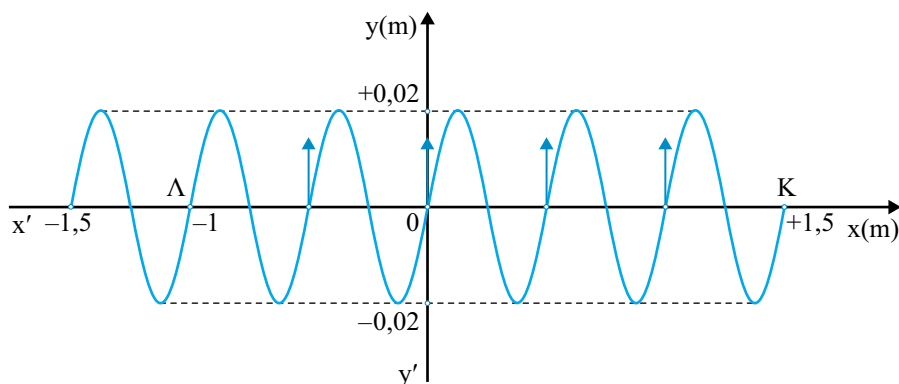
Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \frac{\lambda}{t_\Lambda}$ ή $v_\delta = 1,25 \text{ m/s}$.

Έστω T η περίοδος του κύματος. Είναι: $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$ ή $T = 0,4 \text{ s}$.

Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$
ή $y = 0,02\eta\mu 2\pi(2,5t + 2x)$ (S.I.).

γ. Έστω x_1 η θέση του υλικού σημείου στον αρνητικό ημιάξονα Ox' το οποίο τίθεται σε ταλάντωση τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,2$ s. Είναι: $x_1 = -v_\delta t_1$ ή $x_1 = -1,5$ m. Χωρίζουμε την απόσταση $|x_1|$ σε N τμήματα μήκους $\lambda/4$ το καθένα. Είναι: $N = \frac{|x_1|}{\frac{\lambda}{4}}$ ή $N = \frac{4x_1}{\lambda}$ ή $N = 12$.

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,2$ s.



Όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο, το πλήθος των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου τα οποία βρίσκονται ανάμεσα στα υλικά σημεία Κ και Λ και τη χρονική στιγμή t_1 διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους κινούμενα με θετική ταχύτητα είναι ίσο με τέσσερα ($N = 4$ σημεία).

δ. Ο ζητούμενος λόγος είναι: $\frac{N_K}{N_\Lambda} = \frac{f\Delta t_K}{f\Delta t_\Lambda}$ ή $\frac{N_K}{N_\Lambda} = \frac{t_1 - 0}{t_1 - t_\Lambda}$ ή $\frac{N_K}{N_\Lambda} = 3$.

ε. Είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 5\pi$ rad/s.

Έστω y_Λ η απομάκρυνση του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_2 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο Λ έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_\Lambda^2 + \frac{1}{2}Dy_\Lambda^2 \quad \text{ή} \quad m\omega^2 A^2 = mv_\Lambda^2 + m\omega^2 y_\Lambda^2 \quad \text{ή} \quad y_\Lambda = \pm \sqrt{A^2 - \left(\frac{v_\Lambda}{\omega}\right)^2}$$

$$\text{ή } y_\Lambda = \pm 0,01\sqrt{3} \text{ m.}$$

Επειδή τη χρονική στιγμή t_2 το υλικό σημείο Λ επιταχύνεται έχοντας θετική ταχύτητα, η απομάκρυνσή του είναι: $y_\Lambda = -0,01\sqrt{3}$ m. Επειδή η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι $\Delta\phi = 10\pi$ rad, τα σημεία Κ και Λ βρίσκονται σε συμφωνία φάσης, οπότε η απομάκρυνση του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $y_K = -0,01\sqrt{3}$ m. Η επιτάχυνση του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $a_K = -\omega^2 y_K$ ή $a_K = +2,5\sqrt{3} \text{ m/s}^2$.

Θέμα 54ο

α. Από το δοθέν στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 προκύπτει ότι το πλάτος A του κύματος είναι: $A = 0,2 \text{ m}$. Έστω λ το μήκος κύματος του κύματος. Από το δοθέν στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 προκύπτει ότι: $2\lambda = 1,2 \text{ m}$ ή $\lambda = 0,6 \text{ m}$.

Όπως προκύπτει από τα στιγμιότυπα του κύματος τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 , το κύμα στο χρονικό διάστημα: $\Delta t = t_2 - t_1 = 0,1 \text{ s}$ έχει διανύσει απόσταση: $\Delta x = \frac{\lambda}{2} = 0,3 \text{ m}$.

Επομένως, η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι: $v_\delta = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ή $v_\delta = 3 \text{ m/s}$.

β. Όπως προκύπτει από το δοθέν στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 , η θέση του υλικού σημείου K στον θετικό ημιάξονα Ox είναι: $x_K = +1,5\lambda$ ή $x_K = +0,9 \text{ m}$. Τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα θέτει σε ταλάντωση το υλικό σημείο K , οπότε ισχύει: $v_\delta = \frac{x_K}{t_1}$ ή $t_1 = 0,3 \text{ s}$.

Η περίοδος T του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$ ή $T = 0,2 \text{ s}$.

Η εξίσωση του στιγμιότυπου του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad \text{ή} \quad y = 0,2 \eta \mu 2\pi \left(1,5 - \frac{5x}{3} \right) \quad (\text{S.I.}).$$

γ. Τη χρονική στιγμή t_2 το κύμα θέτει σε ταλάντωση το υλικό σημείο που βρίσκεται στη θέση $x = +1,2 \text{ m}$. Είναι: $t_2 = \frac{x}{v_\delta}$ ή $t_2 = 0,4 \text{ s}$.

Η ταχύτητα του ταλαντούμενου υλικού σημείου K τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $v_K = \frac{2\pi}{T} A \sigma \nu 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right)$ ή $v_K = 2\pi \sigma \nu \pi \text{ m/s}$ ή $v_K = -2\pi \text{ m/s}$.

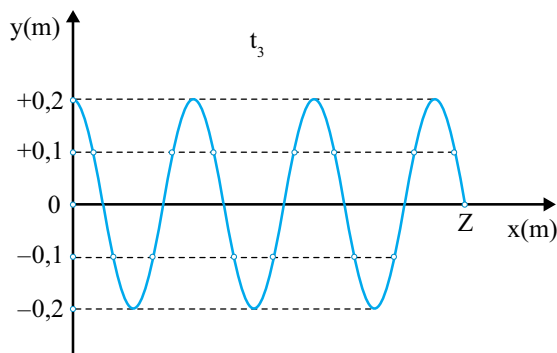
δ. Έστω y η απομάκρυνση των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου των οποίων η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης ισούται με το $1/3$ της κινητικής τους ενέργειας $\left(U = \frac{1}{3} K \right)$ τη χρονική στιγμή t_3 . Είναι: $U = \frac{1}{3} K$ ή $K = 3U$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης ενός από τα παραπάνω υλικά σημεία έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad E = 4U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D A^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} D y^2 \quad \text{ή} \quad y = \pm \frac{A}{2} \quad \text{ή} \quad y = \pm 0,1 \text{ m}.$$

Τη χρονική στιγμή t_3 το υλικό σημείο O βρίσκεται στην ακραία θετική του θέση, ενώ την ίδια χρονική στιγμή υπάρχουν 13 υλικά σημεία στο ελαστικό μέσο των οποίων η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση με το $1/3$ της κινητικής τους ενέργειας. Δηλαδή, τη χρονική στιγμή t_3 υπάρχουν 13 υλικά σημεία στο ελαστικό μέσο των οποίων οι απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας είναι $y = \pm 0,1 \text{ m}$.

Στο επόμενο διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος στο ελαστικό μέσο τη χρονική στιγμή t_3 .



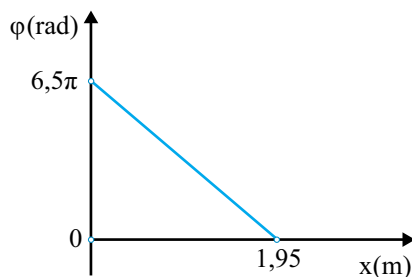
Όπως προκύπτει από το παραπάνω στιγμιότυπο του κύματος, η θέση του υλικού σημείου Z που τίθεται σε ταλάντωση τη χρονική στιγμή t_3 είναι: $x_Z = 13\frac{\lambda}{4}$ ή $x_Z = +1,95$ m.

Η χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται από τη σχέση: $t_3 = \frac{x_Z}{v_\delta}$ ή $t_3 = 0,65$ s.

Η φάση φ του αρμονικού κύματος τη χρονική στιγμή t_3 σε συνάρτηση με τη θέση x των υλικών σημείων στον θετικό ημιάξονα Ox δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t_3}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad \varphi = 2\pi\left(3,25 - \frac{5x}{3}\right) \quad (\text{S.I.}) \quad (1).$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης (1) απεικονίζεται στο διπλανό διάγραμμα.



ε. Η απόσταση Δx μεταξύ των θέσεων ισορροπίας του υλικού σημείου Λ και του υλικού σημείου Ο δίνεται από τη σχέση: $\Delta x = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{2}$ ή $x_\Lambda - 0 = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{2}$ ή $x_\Lambda = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{2}$ (2), με $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

Επειδή το υλικό σημείο Λ είναι το τέταρτο κατά σειρά σημείο του θετικού ημιάξονα το οποίο έχει κάθε χρονική στιγμή μετά την έναρξη της ταλάντωσής του αντίθετη απομάκρυνση και αντίθετη ταχύτητα από το υλικό σημείο Ο, είναι: $\kappa = 3$. Επομένως, από τη σχέση (2) για $\kappa = 3$ προκύπτει: $x_\Lambda = +2,1$ m. Το υλικό σημείο Λ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$t_\Lambda = \frac{x_\Lambda}{v_\delta}$ ή $t_\Lambda = 0,7$ s. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Λ δίνεται

από τη σχέση: $y_\Lambda = A\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right)$ ή $y_\Lambda = 0,2\mu 2\pi(5t - 3,5)$ (S.I.), για $t \geq 0,7$ s.

Θέμα 55ο

α. Η φάση του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 σε συνάρτηση με τη θέση x των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου στον θετικό ημιάξονα Ox δίνεται από τη σχέση: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ (1).

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή t_1 η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου που βρίσκεται στη θέση $x = +4$ m είναι ίση με μηδέν. Από τη σχέση (1) για $\varphi = 0$ και $x = +4$ m προκύπτει: $0 = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{4}{\lambda}\right)$ ή $\frac{t_1}{T} = \frac{4}{\lambda}$ ή $t_1 = \frac{4T}{\lambda}$ (2).

Η φάση του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 σε συνάρτηση με τη θέση x των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου στον θετικό ημιάξονα Ox δίνεται από τη σχέση: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ (3).

Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή t_2 η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου που βρίσκεται στη θέση $x = +8$ m είναι ίση με μηδέν. Από τη σχέση (3) για $\varphi = 0$ και $x = +8$ m προκύπτει: $0 = 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{8}{\lambda}\right)$ ή $\frac{t_2}{T} = \frac{8}{\lambda}$ ή $t_2 = \frac{8T}{\lambda}$ (4).

Είναι: $t_2 - t_1 = 2T$ ή, λόγω των σχέσεων (2) και (4): $\frac{4T}{\lambda} = 2T$ ή $\lambda = 2$ m.

Η περίοδος του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$ ή $T = \frac{\lambda}{v_\delta}$ ή $T = 0,5$ s.

Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου O προκύπτει ότι το πλάτος του κύματος είναι $A = 0,5$ m. Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \text{ ή } y = 0,5\eta\mu 2\pi\left(2t - \frac{x}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

β. Από τις σχέσεις (2) και (4) για $\lambda = 2$ m και $T = 0,5$ s προκύπτουν αντίστοιχα: $t_1 = 1$ s και $t_2 = 2$ s. Η μεταβολή της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου O στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ είναι: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}(t_2 - t_1)$ ή $\Delta\varphi = 4\pi$ rad.

γ. Είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 4\pi$ rad/s. Η επιτάχυνση του υλικού σημείου K τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $a_K = -\omega^2 A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$ ή $a_K = -80\eta\mu(4\pi) \text{ m/s}^2$ ή $a_K = 0$.

δ. Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου K δίνεται από τη σχέση: $\varphi_K = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$ ή $\varphi_K = 2\pi(2t - 2)$ (S.I.) (5).

Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ δίνεται από τη σχέση: $\varphi_\Lambda = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right)$ ή $\varphi_\Lambda = 2\pi(2t - 4)$ (S.I.) (6).

Από τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει ότι κάθε χρονική στιγμή μετά την έναρξη των ταλαντώσεων των υλικών σημείων K και Λ ισχύει: $\varphi_K > \varphi_\Lambda$. Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων K και Λ είναι: $\Delta\varphi = \varphi_K - \varphi_\Lambda$ ή, λόγω των σχέσεων (5) και (6): $\Delta\varphi = 4\pi$ rad.

Επομένως, τα υλικά σημεία K και Λ είναι σε συμφωνία φάσης. Δηλαδή, τα υλικά σημεία K και Λ έχουν κάθε χρονική στιγμή μετά την έναρξη των ταλαντώσεών τους την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα. Συνεπώς, η απόσταση d μεταξύ των δύο υλικών σημείων κάθε χρονική

στιγμή μετά την έναρξη των ταλαντώσεών τους είναι ίση με την απόσταση μεταξύ των θέσεων ισορροπίας τους. Δηλαδή, είναι: $d = \Delta x$ ή $d = 4 \text{ m}$.

ε. Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου Μ δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_M = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) \quad \text{ή} \quad \varphi_M = 2\pi(2t - 4,5) \quad (\text{S.I.}) \quad (7).$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) προκύπτει ότι $\varphi_\Lambda > \varphi_M$. Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Λ και Μ είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_\Lambda - \varphi_M \quad \text{ή, λόγω των σχέσεων (6) και (7):} \quad \Delta\varphi = \pi \text{ rad.}$$

Επειδή η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Λ και Μ είναι ίση με $\pi \text{ rad}$, τα σημεία αυτά έχουν κάθε χρονική στιγμή μετά την έναρξη των ταλαντώσεών τους αντίθετη απομάκρυνση και αντίθετη ταχύτητα. Επομένως, τις χρονικές στιγμές στις οποίες το υλικό σημείο Λ βρίσκεται στην ακραία θετική του θέση ($y = +A$) το υλικό σημείο Μ βρίσκεται στην ακραία αρνητική του θέση, και αντίστροφα. Επομένως, η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των υλικών σημείων Λ και Μ είναι: $\Delta y_{\max} = 2A$ ή $\Delta y_{\max} = 1 \text{ m}$.

Η μέγιστη απόσταση $d_{\max}$ μεταξύ των υλικών σημείων Λ και Μ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης τους είναι: $d_{\max} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_{\max})^2}$ ή $d_{\max} = \sqrt{(x_M - x_\Lambda)^2 + (\Delta y_{\max})^2}$ ή $d = \sqrt{2} \text{ m}$.

Θέμα 56ο

α. Η μεταβολή της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $\Delta\varphi_K = \omega\Delta t$ ή $\Delta\varphi_K = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{8}$ ή $\Delta\varphi_K = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$.

β. Έστω $\varphi_{K(t_2)}$ η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_2 .

Είναι: $\Delta\varphi_K = \varphi_{K(t_2)} - \varphi_{K(t_1)}$ ή $\varphi_{K(t_2)} = \Delta\varphi_K + \varphi_{K(t_1)}$ ή $\varphi_{K(t_2)} = \pi \text{ rad}$. Αφού τη χρονική στιγμή t_2 είναι $\varphi_{\Lambda(t_2)} > \varphi_{K(t_2)}$, το κύμα διαδίδεται από το υλικό σημείο Λ προς το υλικό σημείο Κ.

γ. Έστω λ το μήκος κύματος του κύματος. Η οριζόντια απόσταση μεταξύ μιας κορυφής από τη μεθεπόμενη κοιλάδα στο στιγμιότυπο του κύματος είναι ίση με $3\lambda/2$. Επομένως, είναι:

$$\frac{3\lambda}{2} = 0,6 \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,4 \text{ m.}$$

Η περίοδος του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$ ή $T = 0,2 \text{ s}$. Από τη δοθείσα εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Ο προκύπτει ότι το πλάτος του κύματος είναι $A = 0,2\sqrt{2} \text{ m}$. Επειδή το κύμα διαδίδεται από το υλικό σημείο Λ ($x_\Lambda > 0$) προς το υλικό σημείο Κ ($x_K < 0$), διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x' Ο x .

Επομένως, η εξίσωση του κύματος είναι: $y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$ ή $y = 0,2\sqrt{2}\eta\mu 2\pi(5t + 2,5x)$ (S.I.).

δ. Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$y_K = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t_2}{T} + \frac{x_K}{\lambda} \right) \quad \text{ή} \quad y_K = A\eta\mu\varphi_{K(t_2)} \quad \text{ή} \quad y_K = A\eta\mu\pi \quad \text{ή} \quad y_K = 0.$$

Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$y_{\Lambda} = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_2}{T} + \frac{x_{\Lambda}}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad y_{\Lambda} = A\eta\mu\varphi_{\Lambda(t_2)} \quad \text{ή} \quad y_{\Lambda} = A\eta\mu\left(\frac{7\pi}{4}\right) \quad \text{ή} \quad y_{\Lambda} = -\frac{\sqrt{2}}{2}A$$

ή $y_{\Lambda} = -0,2 \text{ m}$. Η κατακόρυφη απόσταση των υλικών σημείων Κ και Λ τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $|\Delta y| = |y_{\Lambda} - y_{\text{K}}|$ ή $|\Delta y| = 0,2 \text{ m}$. Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι: $\Delta\varphi = \varphi_{\Lambda(t_2)} - \varphi_{\text{K}(t_2)}$ ή $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$.

Οι φάσεις των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ τη χρονική στιγμή t_2 δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις: $\varphi_{\text{K}(t_2)} = 2\pi\left(\frac{t_2}{T} + \frac{x_{\text{K}}}{\lambda}\right)$ (1), $\varphi_{\Lambda(t_2)} = 2\pi\left(\frac{t_2}{T} + \frac{x_{\Lambda}}{\lambda}\right)$ (2).

Με αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (2) και (1) προκύπτει: $\varphi_{\Lambda(t_2)} - \varphi_{\text{K}(t_2)} = 2\pi\frac{x_{\Lambda} - x_{\text{K}}}{\lambda}$ ή $x_{\Lambda} - x_{\text{K}} = \frac{\lambda\Delta\varphi}{2\pi}$ ή $x_{\Lambda} - x_{\text{K}} = 0,15 \text{ m}$. Η απόσταση d μεταξύ των υλικών σημείων Κ και Λ τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ή $d = \sqrt{(x_{\Lambda} - x_{\text{K}})^2 + (\Delta y)^2}$ ή $d = 0,25 \text{ m}$.

ε. Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_3 δίνεται από τη σχέση:

$$y_{\text{K}} = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_3}{T} + \frac{x_{\text{K}}}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad +0,2\sqrt{2} = 0,2\sqrt{2}\eta\mu\varphi_{\text{K}(t_3)} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_{\text{K}(t_3)} = 1 \quad \text{ή} \quad \varphi_{\text{K}(t_3)} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (S.I.)},$$

$$\text{με } \kappa = 0, 1, 2, \dots \text{ Είναι: } \Delta\varphi = \varphi_{\Lambda(t_3)} - \varphi_{\text{K}(t_3)} \quad \text{ή} \quad \varphi_{\Lambda(t_3)} = \Delta\varphi + \varphi_{\text{K}(t_3)} \quad \text{ή} \quad \varphi_{\Lambda(t_3)} = \frac{3\pi}{4} + 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ή} \quad \varphi_{\Lambda(t_3)} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \text{ (S.I.)}, \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Η επιτάχυνση του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a_{\Lambda} = -\omega^2 A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_3}{T} + \frac{x_{\Lambda}}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad a_{\Lambda} = -\omega^2 A\eta\mu\varphi_{\Lambda(t_3)} \quad \text{ή} \quad a_{\Lambda} = -200\sqrt{2}\eta\mu\left(\frac{5\pi}{4}\right) \text{ m/s}^2$$

$$\text{ή} \quad a_{\Lambda} = +200 \text{ m/s}^2.$$

Θέμα 57ο

α. Έστω λ_1 το μήκος κύματος του κύματος που διαδίδεται στο ελαστικό μέσο (1). Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει: $2,5\lambda_1 = 0,5 \text{ m}$ ή $\lambda_1 = 0,2 \text{ m}$. Έστω λ_2 το μήκος κύματος του κύματος που διαδίδεται στο ελαστικό μέσο (2). Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει: $2,5\lambda_2 = 1 \text{ m}$ ή $\lambda_2 = 0,4 \text{ m}$. Τα δύο κύματα έχουν την ίδια συχνότητα f που είναι ίση με τη συχνότητα ταλάντωσης της πηγής. Είναι: $v_2 = \lambda_2 f$ ή $f = 5 \text{ Hz}$. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος που διαδίδεται στο ελαστικό μέσο (1) είναι: $v_1 = \lambda_1 f$ ή $v_1 = 1 \text{ m/s}$.

β. Η περίοδος T των δύο κυμάτων είναι: $T = \frac{1}{f}$ ή $T = 0,2 \text{ s}$. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι το πλάτος των δύο κυμάτων είναι: $A = 0,02 \text{ m}$. Η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται στο ελαστικό μέσο (1) δίνεται από τη σχέση:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_1}\right) \quad \text{ή} \quad y_1 = 0,02\eta\mu 2\pi(5t - 5x) \text{ (S.I.)}.$$

Η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται στο ελαστικό μέσο (2) δίνεται από τη σχέση:

$$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda_2}\right) \quad \text{ή} \quad y_2 = 0,02\eta\mu 2\pi(5t + 2,5x) \text{ (S.I.)}.$$

γ. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα που διαδίδεται στο ελαστικό μέσο (1) θέτει σε ταλάντωση το υλικό σημείο του θετικού ημιάξονα Ox το οποίο βρίσκεται στη θέση $x = +0,5 \text{ m}$. Είναι: $v_1 = \frac{x}{t_1}$ ή $t_1 = 0,5 \text{ s}$.

Έστω x_1 η θέση του υλικού σημείου του θετικού ημιάξονα Ox το οποίο τίθεται σε ταλάντωση τη χρονική στιγμή t_2 εξαιτίας του κύματος που διαδίδεται στο ελαστικό μέσο (1).

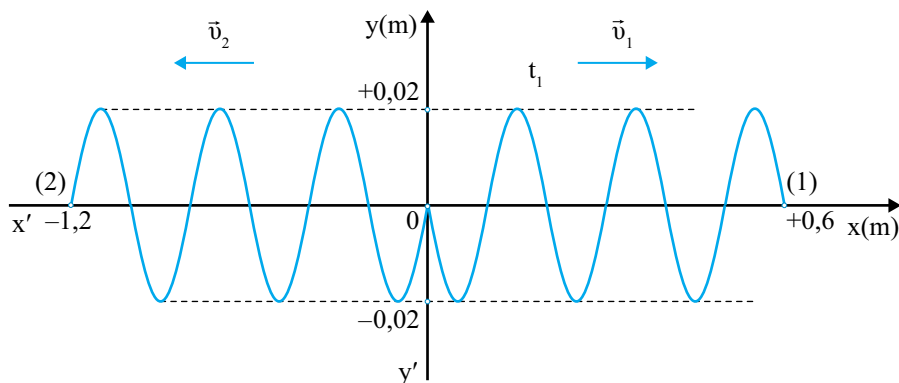
Είναι: $x_1 = v_1 t_2$ ή $x_1 = +0,6 \text{ m}$. Χωρίζουμε την απόσταση x_1 σε N_1 τμήματα μήκους $\lambda_1/4$

το καθένα. Είναι: $N_1 = \frac{x_1}{\frac{\lambda_1}{4}}$ ή $N_1 = \frac{4x_1}{\lambda_1}$ ή $N_1 = 12$.

Έστω x_2 η θέση του υλικού σημείου του αρνητικού ημιάξονα Ox' το οποίο τίθεται σε ταλάντωση τη χρονική στιγμή t_2 εξαιτίας του κύματος που διαδίδεται στο ελαστικό μέσο (2).

Είναι: $|x_2| = v_2 t_2$ ή $|x_2| = 1,2 \text{ m}$ ή $x_2 = -1,2 \text{ m}$. Χωρίζουμε την απόσταση $|x_2|$ σε N_2 τμήματα μήκους $\lambda_2/4$ το καθένα. Είναι: $N_2 = \frac{|x_2|}{\frac{\lambda_2}{4}}$ ή $N_2 = \frac{4|x_2|}{\lambda_2}$ ή $N_2 = 12$.

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο των δύο κυμάτων τη χρονική στιγμή t_2 .



δ. Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_\Lambda = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda_1}\right) \quad \text{ή} \quad \varphi_\Lambda = 2\pi(5t - 2,5) \text{ (S.I.) (1)}.$$

Η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_K = 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_K}{\lambda_2} \right) \quad \text{ή} \quad \varphi_K = 2\pi(5t - 1,25) \quad (\text{S.I.}) \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι κάθε χρονική στιγμή t μετά την έναρξη των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι $\varphi_K > \varphi_\Lambda$. Επομένως, η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι: $\Delta\varphi = \varphi_K - \varphi_\Lambda$ (3) ή, λόγω των σχέσεων (1) και (2):

$$\Delta\varphi = 2,5\pi \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = \left(2\pi + \frac{\pi}{2} \right) \text{ rad.} \quad \text{Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή}$$

$$t_3 \text{ δίνεται από τη σχέση: } y_\Lambda = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t_3}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda_1} \right) \quad \text{ή} \quad y_\Lambda = A\eta\mu\varphi_\Lambda \quad \text{ή} \quad -0,02 = 0,02\eta\mu\varphi_\Lambda$$

$$\text{ή } \eta\mu\varphi_\Lambda = -1 \quad \text{ή} \quad \varphi_\Lambda = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \quad (\text{S.I.}), \text{ με } \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_3 είναι: $\varphi_K = \varphi_\Lambda + \Delta\varphi$ ή $\varphi_K = \left(2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} + 2\pi + \frac{\pi}{2} \right) \text{ rad}$ ή $\varphi_K = (2\kappa\pi + 4\pi) \text{ rad}$.

Η ταχύτητα του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_K = \omega A \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t_3}{T} + \frac{x_K}{\lambda} \right) \quad \text{ή} \quad v_K = \omega A \sigma\upsilon\nu\varphi_K \quad \text{ή} \quad v_K = 0,2\pi \sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + 4\pi) \text{ m/s}$$

$$\text{ή } v_K = +0,2\pi \text{ m/s.}$$

Θέμα 58ο

α. Έστω t'_1 η χρονική στιγμή στην οποία φτάνει στο σημείο Σ το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π₁. Είναι: $t'_1 = \frac{r_1}{v_\delta}$ (1) ή $t'_1 = 1,3 \text{ s}$. Έστω t'_2 η χρονική στιγμή στην οποία φτάνει στο σημείο Σ το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π₂. Είναι: $t'_2 = \frac{r_2}{v_\delta}$ (2).

Επειδή είναι $r_1 > r_2$, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $t'_1 > t'_2$. Η χρονική διαφορά με την οποία φτάνουν τα δύο κύματα στο σημείο Σ είναι: $\Delta t = t'_1 - t'_2$ ή $t'_2 = t'_1 - \Delta t$ ή $t'_2 = 1,1 \text{ s}$.

Από τη σχέση (2) έχουμε: $r_2 = v_\delta t'_2$ ή $r_2 = 2,2 \text{ m}$.

β. Από τη δοθείσα εξίσωση της ταλάντωσης των δύο πηγών προκύπτει: $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$.

Έστω f η συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών. Είναι: $\omega = 2\pi f$ ή $f = 10 \text{ Hz}$.

Έστω λ το μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Είναι: $v_\delta = \lambda f$ ή $\lambda = 0,2 \text{ m}$.

Για να συμβαίνει στο σημείο Σ ενισχυτική συμβολή, πρέπει να ισχύει: $r_1 - r_2 = N\lambda$ (1), με $N = 0, 1, 2, \dots$. Από τη σχέση (1) για $r_1 = 2,6 \text{ m}$, $r_2 = 2,2 \text{ m}$ και $\lambda = 0,2 \text{ m}$ προκύπτει: $N = 2$.

Επομένως, στο σημείο Σ συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.

Από τη δοθείσα εξίσωση της ταλάντωσης των δύο πηγών προκύπτει ότι το πλάτος των δύο κυμάτων είναι $A = 0,02 \text{ m}$.

Επειδή είναι $t'_2 < t_1 < t'_1$, τη χρονική στιγμή t_1 το σημείο Σ ταλαντώνεται μόνο εξαιτίας του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π_2 . Επομένως, το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Σ τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $A_\Sigma = A$ ή $A_\Sigma = 0,02 \text{ m}$. Επειδή είναι $t_2 > t'_1$, τη χρονική στιγμή t_2 τα κύματα έχουν συμβάλει ενισχυτικά στο σημείο Σ. Επομένως, το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Σ τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $A'_\Sigma = 2A$ ή $A'_\Sigma = 0,04 \text{ m}$.

γ. Επειδή το σημείο Δ ανήκει στην ίδια υπερβολή ενισχυτικής συμβολής με το σημείο Σ, ισχύει: $r'_1 - r'_2 = N\lambda$ ή $r'_1 - r'_2 = 2\lambda$ (2). Επειδή το σημείο Δ είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ, ισχύει: $r'_1 + r'_2 = d$ (3). Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (2) και (3) προκύπτει: $2r'_1 = 2\lambda + d$ ή $r'_1 = \lambda + \frac{d}{2}$ ή $r'_1 = 1,3 \text{ m}$. Από τη σχέση (3) για $r'_1 = 1,3 \text{ m}$ προκύπτει: $r'_2 = 0,9 \text{ m}$.

δ. Έστω ένα τυχαίο σημείο αποσβεστικής συμβολής που βρίσκεται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και απέχει από τις πηγές Π_1 και Π_2 αποστάσεις x_1 και x_2 αντίστοιχα.

Είναι: $x_1 - x_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$ (4) και $x_1 + x_2 = d$ (5). Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (4) και (5) προκύπτει: $2x_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} + d$ ή $x_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2}$.

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των σημείων αποσβεστικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ, ανάμεσα στις δύο πηγές, λύνουμε την ανίσωση: $0 < x_1 < d$

$$\text{ή } 0 < (2N+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} < d \quad \text{ή} \quad -\frac{2d}{\lambda} < 2N+1 < \frac{2d}{\lambda} \quad \text{ή} \quad \frac{-\frac{2d}{\lambda}-1}{2} < N < \frac{\frac{2d}{\lambda}-1}{2} \quad \text{ή} \quad -11,5 < N < 10,5$$

ή $N = -11, -10, \dots, +9, +10$. Επομένως, το ζητούμενο πλήθος των σημείων αποσβεστικής συμβολής είναι ίσο με είκοσι δύο ($N = 22$ σημεία).

Θέμα 59ο

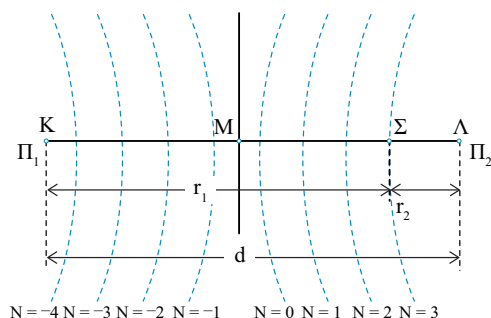
α. Επειδή το σημείο Σ είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής, ισχύει:

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad (1).$$

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι υπερβολές αποσβεστικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ. Όπως προκύπτει από το σχήμα, από το σημείο Σ διέρχεται η υπερβολή αποσβεστικής συμβολής με $N = 3$.

Από τη σχέση (1) για $N = 3$ προκύπτει:

$$r_1 - r_2 = 7\frac{\lambda}{2} \quad (2). \text{ Επειδή το σημείο Σ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ ισχύει: } r_1 + r_2 = d \quad (3).$$



Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (2) και (3) έχουμε: $2r_1 = 7\frac{\lambda}{2} + d$ ή $r_1 = \frac{7\lambda}{4} + \frac{d}{2}$
 ή $r_1 = 2,85 \text{ m}$. Από τη σχέση (3) για $r_1 = 2,85 \text{ m}$ προκύπτει: $r_2 = 0,05 \text{ m}$.

β. Από τη δοθείσα εξίσωση της ταλάντωσης των δύο πηγών προκύπτει: $\omega = 5\pi \text{ rad/s}$.

Έστω f η συχνότητα ταλάντωσης των δυο πηγών. Είναι: $\omega = 2\pi f$ ή $f = 2,5 \text{ Hz}$.

Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = 2 \text{ m/s}$.

Έστω t_1 η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο Σ (όταν φτάνει σε αυτό το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π_2). Είναι: $t_1 = \frac{r_2}{v_\delta}$ ή $t_1 = 0,025 \text{ s}$.

Έστω t_2 η χρονική στιγμή στην οποία τα δύο κύματα συμβάλλουν αποσβεστικά στο σημείο Σ.

Είναι: $t_2 = \frac{r_1}{v_\delta}$ ή $t_2 = 1,425 \text{ s}$. Επειδή το σημείο Σ είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής, ταλαντώνεται από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 . Επειδή είναι $t > t_2$, το πλήθος N των ταλαντώσεων που εκτελεί το σημείο Σ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t είναι: $N = f(t_2 - t_1)$ ή $N = 3,5 \text{ ταλαντώσεις}$.

γ. Έστω ένα τυχαίο σημείο ενισχυτικής συμβολής που βρίσκεται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και απέχει από τις πηγές Π_1 και Π_2 αποστάσεις r'_1 και r'_2 αντίστοιχα. Είναι: $r'_1 - r'_2 = N\lambda$ (4) και $r'_1 + r'_2 = d$ (5).

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (4) και (5) έχουμε: $2r'_1 = N\lambda + d$ ή $r'_1 = \frac{N\lambda + d}{2}$ (6).

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των σημείων ενισχυτικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο

ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ, λύνουμε την ανίσωση: $0 \leq r'_1 \leq d$ ή $0 \leq \frac{N\lambda + d}{2} \leq d$ ή $-\frac{d}{\lambda} \leq N \leq \frac{d}{\lambda}$

ή $-3,625 \leq N \leq 3,625$ ή $N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Η απόσταση από την πηγή Π_1 του πλησιέστερου προς την πηγή Π_2 σημείου του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ στο οποίο συμβαίνει ενισχυτική συμβολή προκύπτει από τη σχέση (6) για $N = 3$. Δηλαδή, είναι: $r'_1 = 2,65 \text{ m}$.

δ. Έστω f' η νέα συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών. Για να συμβαίνει στο σημείο Σ ενισχυτική συμβολή, πρέπει να ισχύει: $|r_1 - r_2| = N\lambda'$ ή $|r_1 - r_2| = N \frac{v_\delta}{f'}$ ή $f' = \frac{Nv_\delta}{|r_1 - r_2|}$ ή $f' = \frac{5}{7} N$

(7), με $N = 1, 2, 3, \dots$ Από τη σχέση (7) για $N = 1$ προκύπτει: $f'_{\min} = \frac{5}{7} \text{ Hz}$.

Θέμα 606

α. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της ταλάντωσης των δύο πηγών προκύπτει ότι το πλάτος των δύο κυμάτων είναι: $A = 0,02 \text{ m}$. Από τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο Σ έως ακριβώς πριν από τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία τα δύο κύματα συμβάλλουν στο σημείο Σ (οπότε μεταβάλλεται η ενέργεια της ταλάντωσής του) το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Σ είναι: $A_\Sigma = A$ ή $A_\Sigma = 0,02 \text{ m}$.

Έστω A'_Σ το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Σ από τη χρονική στιγμή t_2 και μετά.

Είναι: $E_2 = 4E_1$ ή $\frac{1}{2}DA_\Sigma'^2 = 4\frac{1}{2}DA_\Sigma^2$ ή $A'_\Sigma = 2A_\Sigma$ ή $A'_\Sigma = 0,04 \text{ m}$.

Επειδή είναι $A'_\Sigma = 2A_\Sigma$, τα δύο κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά στο σημείο Σ. Η απόσταση r_2 του σημείου Σ από την πηγή Π_2 υπολογίζεται από τη σχέση: $t_2 = \frac{r_2}{v_\delta}$ ή $r_2 = v_\delta t_2$ ή $r_2 = 1,6 \text{ m}$.

Η χρονική διαφορά με την οποία φτάνουν τα δύο κύματα στο σημείο Σ δίνεται από τη σχέση: $\Delta t = t_2 - t_1$ ή $t_1 = t_2 - \Delta t$ ή $\frac{r_1}{v_\delta} = t_2 - \Delta t$ ή $r_1 = 0,4 \text{ m}$.

β. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της ταλάντωσης των δύο πηγών προκύπτει: $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$.

Η συχνότητα f της ταλάντωσης των δύο πηγών υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega = 2\pi f$

ή $f = 10 \text{ Hz}$. Το μήκος κύματος λ των δύο κυμάτων υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \lambda f$

ή $\lambda = 0,4 \text{ m}$. Επειδή τα δύο κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά στο σημείο Σ ισχύει:

$r_1 - r_2 = N\lambda$ ή $N = -3$. Έστω ένα τυχαίο σημείο ενισχυτικής συμβολής του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ το οποίο απέχει αποστάσεις r'_1 και r'_2 από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα.

Για το τυχαίο σημείο ισχύει: $r'_1 - r'_2 = N\lambda$ (1) και $r'_1 + r'_2 = d$ (2).

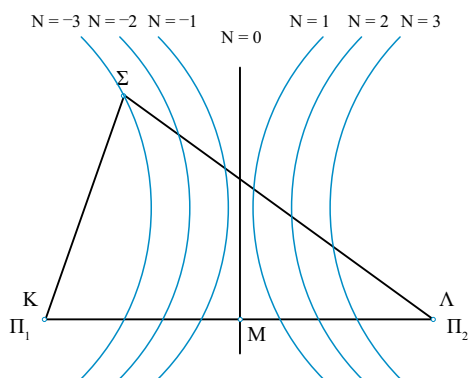
Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε: $2r'_1 = N\lambda + d$ ή $r'_1 = \frac{N\lambda + d}{2}$.

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των σημείων ενισχυτικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο

ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ, λύνουμε την ανίσωση: $0 \leq r'_1 \leq d$ ή $0 \leq \frac{N\lambda + d}{2} \leq d$ ή $-\frac{d}{\lambda} \leq N \leq \frac{d}{\lambda}$ ή $-3,75 \leq N \leq 3,75$ ή $N = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$.

Στο διπλανό διάγραμμα έχουν σχεδιαστεί οι υπερβολές ενισχυτικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ.

Όπως προκύπτει από το σχήμα, οι υπερβολές ενισχυτικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΣΛ είναι οι ίδιες με τις υπερβολές ενισχυτικής συμβολής που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ. Επομένως, το πλήθος των σημείων ενισχυτικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΣΛ είναι ίσο με επτά ($N = 7$ σημεία).



γ. Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Σ τις χρονικές στιγμές στις οποίες η απομάκρυνσή του είναι $y = +0,02\sqrt{3} \text{ m}$.

Επειδή είναι $A_\Sigma < y_\Sigma$, τη χρονική στιγμή t_3 τα κύματα έχουν συμβάλει στο σημείο Σ, οπότε το πλάτος της ταλάντωσής του είναι $A'_\Sigma = 0,04 \text{ m}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Σ μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}DA_{\Sigma}^{\prime 2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dy^2 \quad \text{ή } m\omega^2 A_{\Sigma}^{\prime 2} = mv^2 + m\omega^2 y^2 \quad \text{ή } v = \omega\sqrt{A_{\Sigma}^{\prime 2} - y^2} \quad \text{ή } v = 0,4\pi \text{ m/s.}$$

δ. Έστω f' η νέα συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών. Για να συμβαίνει αποσβεστική συμβολή στο σημείο Σ, πρέπει να ισχύει: $|r_1 - r_2| = (2N+1)\frac{\lambda'}{2}$ ή $|r_1 - r_2| = (2N+1)\frac{v_{\delta}}{2f'}$

$$\text{ή } f' = \frac{(2N+1)v_{\delta}}{2|r_1 - r_2|} \quad \text{ή } f' = \frac{5}{3}(2N+1) \quad (3), \text{ με } N = 0, 1, 2, \dots$$

Η ζητούμενη ελάχιστη συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών προκύπτει από τη σχέση (3) για $N = 0$. Δηλαδή, είναι: $f'_{\min} = \frac{5}{3} \text{ Hz}$.

Θέμα 61ο

α. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι το σημείο Σ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,4 \text{ s}$ (εξαιτίας του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π_1), ενώ από τη χρονική στιγμή $t_2 = 1,1 \text{ s}$ στην οποία συμβάλλουν τα δύο κύματα και μετά παύει να ταλαντώνεται.

Επομένως, τα δύο κύματα συμβάλλουν αποσβεστικά στο σημείο Σ.

β. Έστω T η περίοδος της ταλάντωσης του σημείου Σ. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει: $3,5T = (1,1 - 0,4) \text{ s}$ ή $T = 0,2 \text{ s}$.

Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων υπολογίζεται από τη σχέση: $v_{\delta} = \frac{r_1}{t_1}$ ή $v_{\delta} = 4 \text{ m/s}$.

Η συμβολή των δύο κυμάτων αρχίζει τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία φτάνει στο σημείο Σ το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π_2 . Είναι: $v_{\delta} = \frac{r_2}{t_2}$ ή $r_2 = 4,4 \text{ m}$.

γ. Το μήκος κύματος λ των δύο κυμάτων

υπολογίζεται από τη σχέση: $v_{\delta} = \frac{\lambda}{T}$

ή $\lambda = 0,8 \text{ m}$.

Επειδή το σημείο Σ είναι σημείο αποσβεστικής συμβολής, ισχύει: $r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$

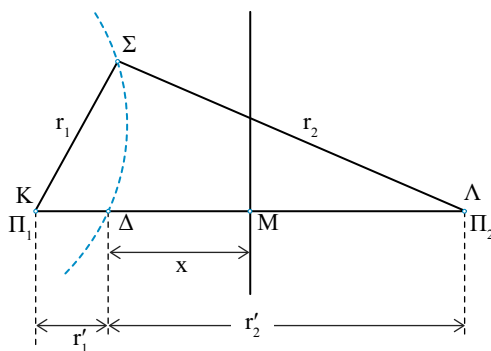
ή $N = -4$.

Έστω r'_1 και r'_2 οι αποστάσεις του σημείου Δ από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα και x η απόστασή του από το μέσον Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Επειδή το σημείο Δ ανήκει στην ίδια υπερβολή αποσβεστικής συμβολής με το σημείο Σ ($N = -4$), ισχύει:

$$r'_1 - r'_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{ή } r'_1 - r'_2 = -3,5\lambda \quad \text{ή } \left[\frac{(ΚΛ)}{2} - x \right] - \left[\frac{(ΚΛ)}{2} + x \right] = -3,5\lambda \quad \text{ή } x = 1,75\lambda$$

ή $x = 1,4 \text{ m}$.



δ. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Σ είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

ή $\omega = 10\pi \text{ rad/s}$. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Σ από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 είναι $A = 0,04 \text{ m}$.

Έστω y η απομάκρυνση του σημείου Σ τις χρονικές στιγμές στις οποίες το μέτρο της ταχύτητάς του είναι: $v = 0,2\sqrt{3}\pi \text{ m/s}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του σημείου Σ

έχουμε: $E = K + U$ ή $\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dy^2$ ή $m\omega^2 A^2 = mv^2 + m\omega^2 y^2$ ή $|y| = \sqrt{A^2 - \left(\frac{v}{\omega}\right)^2}$

ή $|y| = 0,02 \text{ m}$. Το μέτρο της επιτάχυνσης a του σημείου Σ τις παραπάνω χρονικές στιγμές είναι: $|a| = \omega^2 |y|$ ή $|a| = 20 \text{ m/s}^2$.

Θέμα 62ο

α. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι η συμβολή των δυο κυμάτων αρχίζει τη χρονική στιγμή $t_2 = 1,2 \text{ s}$. Τη χρονική στιγμή t_2 φτάνει στο σημείο Σ το κύμα που προέρχεται από την πηγή Π_1 . Επομένως, η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων υπολογίζεται από τη σχέση:

$v_8 = \frac{r_1}{t_2}$ ή $v_8 = 2 \text{ m/s}$. Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ακόμη ότι το σημείο Σ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,8 \text{ s}$, εξαιτίας του κύματος που προέρχεται από την πηγή

Π_2 . Είναι: $v_8 = \frac{r_2}{t_1}$ ή $r_2 = 1,6 \text{ m}$.

β. Το μήκος κύματος λ των δύο κυμάτων υπολογίζεται από τη σχέση: $v_8 = \lambda f$ ή $\lambda = 0,4 \text{ m}$.

Έστω ένα τυχαίο σημείο ενισχυτικής συμβολής που βρίσκεται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και απέχει από τις πηγές Π_1 και Π_2 αποστάσεις r'_1 και r'_2 αντίστοιχα.

Είναι: $r'_1 - r'_2 = N\lambda$ (1) και $r'_1 + r'_2 = d$ (2). Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2)

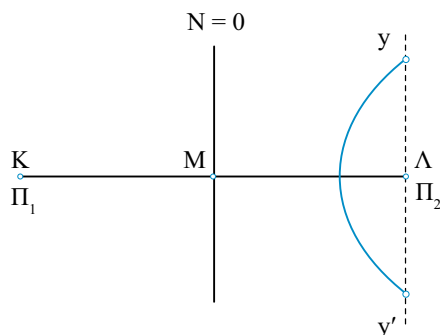
έχουμε: $2r'_1 = N\lambda + d$ ή $r'_1 = \frac{N\lambda + d}{2}$.

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των σημείων ενισχυτικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ, ανάμεσα στο μέσον του Μ και στο σημείο Λ, λύνουμε την ανίσωση:

$$\frac{d}{2} < r'_1 < d \quad \text{ή} \quad \frac{d}{2} < \frac{N\lambda + d}{2} < d \quad \text{ή} \quad 0 < N < \frac{d}{\lambda}$$

ή $0 < N < 5,75$ ή $N = 1, 2, 3, 4, 5$.

Καθεμία από τις παραπάνω υπερβολές ενισχυτικής συμβολής τέμνει την ευθεία $y'y$ σε δύο σημεία, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Επομένως, το πλήθος των σημείων ενισχυτικής συμβολής που βρίσκονται επάνω στην ευθεία $y'y$ είναι ίσο με δέκα ($N = 10$ σημεία).

γ. Όπως προκύπτει από το δοθέν διάγραμμα στο χρονικό διάστημα από τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,8$ s έως ακριβώς πριν από τη χρονική στιγμή $t_2 = 1,2$ s το υλικό σημείο Σ ταλαντώνεται με πλάτος $A = 0,01$ m, οπότε η μέγιστη τιμή της ταχύτητας που αποκτά σε αυτό το χρονικό διάστημα είναι: $v_{\max} = \omega A$ ή $v_{\max} = 2\pi fA$ ή $v_{\max} = 0,1\pi$ m/s.

Όπως προκύπτει από το δοθέν διάγραμμα από τη χρονική στιγμή $t_2 = 1,2$ s και μετά το υλικό σημείο Σ ταλαντώνεται με πλάτος $A' = 0,02$ m, οπότε η μέγιστη τιμή της ταχύτητάς του από τη χρονική στιγμή $t_2 = 1,2$ s και μετά είναι: $v'_{\max} = \omega A'$ ή $v'_{\max} = 2\pi fA'$ ή $v'_{\max} = 0,2\pi$ m/s.

Επειδή για το μέτρο της ταχύτητας του υλικού σημείου Σ τη χρονική στιγμή t ισχύει $v_{\max} < v < v'_{\max}$, είναι $t > t_2$. Δηλαδή, τη χρονική στιγμή t στην οποία το μέτρο της ταχύτητας του υλικού σημείου Σ είναι $v = 0,1\sqrt{3}\pi$ m/s τα κύματα έχουν συμβάλει στο σημείο Σ και το πλάτος της ταλάντωσής του είναι $A' = 0,02$ m.

Έστω y η απομάκρυνση του υλικού σημείου Σ τη χρονική στιγμή t . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Σ μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό,

έχουμε: $E = K + U$ ή $\frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dy^2$ ή $m\omega^2 A'^2 = mv^2 + m\omega^2 y^2$ ή $|y| = \sqrt{A'^2 - \left(\frac{v}{\omega}\right)^2}$

ή $|y| = 0,01$ m. Το μέτρο της επιτάχυνσης a του υλικού σημείου Σ τη χρονική στιγμή t υπολογίζεται από τη σχέση: $|a| = \omega^2|y|$ ή $|a| = 10$ m/s².

δ. Επειδή το σημείο Σ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής, ισχύει: $r_1 - r_2 = N\lambda$ ή $N = 2$.

Έστω d_1 και d_2 οι αποστάσεις του σημείου Δ από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Επειδή το σημείο Δ ανήκει στην ίδια υπερβολή ενισχυτικής συμβολής με το σημείο Σ, ισχύει: $d_1 - d_2 = N\lambda$ ή $d_1 - d_2 = 2\lambda$ ή $d_1 - d_2 = 0,8$ m. Έστω t'_1 και t'_2 οι χρονικές στιγμές στις οποίες φτάνουν στο σημείο Δ τα κύματα που προέρχονται από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα.

Η χρονική διαφορά με την οποία φτάνουν τα κύματα στο σημείο Δ είναι:

$$\Delta t = t'_1 - t'_2 \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{d_1}{v_\delta} - \frac{d_2}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{d_1 - d_2}{v_\delta} \quad \text{ή} \quad \Delta t = 0,4 \text{ s.}$$

Θέμα 63ο

α. Συγκρίνοντας τις δοθείσες εξισώσεις των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στο ελαστικό μέσο με τις εξισώσεις που γνωρίζουμε από τη θεωρία, έχουμε:

$$A = 0,2 \text{ m}, \quad \frac{1}{T} = 5 \text{ s}^{-1} \quad \text{ή} \quad T = 0,2 \text{ s} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\lambda} = 2,5 \text{ m}^{-1} \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,4 \text{ m.}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται στο ελαστικό μέσο δίνεται από τη σχέση:

$$y = 2A\sigma\upsilon\upsilon\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{ή} \quad y = 0,4\sigma\upsilon\upsilon(5\pi x)\eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.).}$$

β. Οι θέσεις των δεσμών στον άξονα $x'Ox$ δίνονται από τη σχέση: $x_{\delta} = (2N+1)\frac{\lambda}{4}$,

με $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (1). Η θέση $x_{\delta(4)}$ του τέταρτου δεσμού στον θετικό ημιάξονα Ox προκύπτει από τη σχέση (1) για $N = 3$. Είναι: $x_{\delta(4)} = +\frac{7\lambda}{4}$ ή $x_{\delta(4)} = +0,7 \text{ m}$.

Η θέση $x_{\delta(3)}$ του τρίτου δεσμού στον αρνητικό ημιάξονα Ox' προκύπτει από τη σχέση (1) για $N = -3$. Είναι: $x_{\delta(3)} = -\frac{5\lambda}{4}$ ή $x_{\delta(3)} = -0,5 \text{ m}$.

Η ζητούμενη απόσταση είναι: $\Delta x = x_{\delta(4)} - x_{\delta(3)}$ ή $\Delta x = 1,2 \text{ m}$.

γ. Οι θέσεις των κοιλιών στον άξονα $x'Ox$ δίνονται από τη σχέση $x_{\text{κοιλ.}} = N\frac{\lambda}{2}$,

με $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (2). Η θέση x_2 της δεύτερης κοιλίας στον θετικό ημιάξονα Ox προκύπτει από τη σχέση (2) για $N = 2$. Είναι: $x_2 = +\lambda$ ή $x_2 = +0,4 \text{ m}$.

Η ταχύτητα ταλάντωσης της παραπάνω κοιλίας τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$v = \frac{2\pi}{T} A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t_1\right) \quad \text{ή} \quad v = \frac{2\pi}{T} 2A \sin\left(\frac{2\pi x_2}{\lambda}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T} t_1\right) \quad \text{ή} \quad v = 4\pi \sin(2\pi) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ m/s}$$

$$\text{ή} \quad v = +2\pi \text{ m/s.}$$

δ. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των κοιλιών που σχηματίζονται μεταξύ των σημείων Λ και K , λύνουμε την ανίσωση: $x_{\Lambda} < x_{\text{κοιλ.}} < x_K$ ή, λόγω της σχέσης (2):

$$x_{\Lambda} < N\frac{\lambda}{2} < x_K \quad \text{ή} \quad \frac{2x_{\Lambda}}{\lambda} < N < \frac{2x_K}{\lambda} \quad \text{ή} \quad -2,5 < N < 2 \quad \text{ή} \quad N = -2, -1, 0, +1.$$

Επομένως το **πλήθος των κοιλιών** που σχηματίζονται μεταξύ των υλικών σημείων Λ και K είναι ίσο με **τέσσερα (4)**. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των δεσμών που σχηματίζονται μεταξύ των υλικών σημείων Λ και K , λύνουμε την ανίσωση: $x_{\Lambda} < x_{\delta} < x_K$ ή λόγω της σχέσης (1):

$$x_{\Lambda} < (2N+1)\frac{\lambda}{4} < x_K \quad \text{ή} \quad \frac{4x_{\Lambda}}{\lambda} < 2N+1 < \frac{4x_K}{\lambda} \quad \text{ή} \quad -5 < 2N+1 < 4 \quad \text{ή} \quad -3 < N < 1,5$$

ή $N = -2, -1, 0, +1$. Επομένως, το **πλήθος των δεσμών** που σχηματίζονται μεταξύ των σημείων Λ και K είναι ίσο με **τέσσερα (4)**.

Θέμα 64ο

α. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με την εξίσωση του στάσιμου κύματος που γνωρίζουμε από τη θεωρία έχουμε: $2A = 0,2 \text{ m}$ ή $A = 0,1 \text{ m}$, $\frac{2\pi x}{\lambda} = 10\pi x$ ή $\lambda = 0,2 \text{ m}$

και $\frac{2\pi t}{T} = 20\pi t$ ή $T = 0,1 \text{ s}$. Οι εξισώσεις των δύο εγκάρσιων αρμονικών κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στο ελαστικό μέσο είναι: $y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

$$\text{ή} \quad y_1 = 0,1\eta\mu 2\pi(10t - 5x) \text{ (S.I.)} \quad \text{και} \quad y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad y_2 = 0,1\eta\mu 2\pi(10t + 5x) \text{ (S.I.).}$$

β. Η επιτάχυνση του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha_K = -\omega^2 A'_K \eta \mu(\omega t_1) \quad \text{ή} \quad \alpha_K = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 2A \sigma \eta \mu\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right) \eta \mu\left(\frac{2\pi}{T} t_1\right) \quad \text{ή} \quad \alpha_K = -800 \sigma \eta \mu(\pi) \eta \mu\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ m/s}^2$$

$$\text{ή} \quad \alpha_K = +400 \text{ m/s}^2.$$

γ. Η απομάκρυνση y_O του υλικού σημείου Ο ($x = 0$) τη χρονική στιγμή t_2 προκύπτει από τη δοθείσα εξίσωση του στάσιμου κύματος, θέτοντας σε αυτήν όπου $x = 0$ και όπου t το $t_2 = (1/40)$ s.

$$\text{Είναι: } y_O = 0,2 \sigma \eta \mu \theta \eta \mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ m} \quad \text{ή} \quad y_O = +0,2 \text{ m}.$$

Η απομάκρυνση y_Λ του υλικού σημείου Λ προκύπτει από τη δοθείσα εξίσωση του στάσιμου κύματος, θέτοντας σε αυτήν όπου x το $x_\Lambda = +0,4$ m και όπου t το $t_2 = (1/40)$ s.

$$\text{Είναι: } y_\Lambda = 0,2 \sigma \eta \nu(4\pi) \eta \mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ m} \quad \text{ή} \quad y_\Lambda = +0,2 \text{ m}.$$

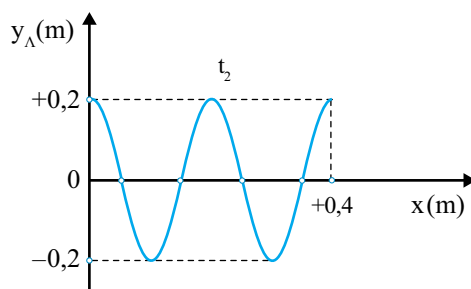
Το πλήθος των δεσμών που σχηματίζονται μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Λ υπολογίζεται λύνοντας την ανίσωση: $0 < x_{\text{δεσμ}} < x_\Lambda$

$$\text{ή} \quad 0 < (2N+1)\frac{\lambda}{4} < x_\Lambda \quad \text{ή} \quad 0 < 2N+1 < \frac{4x_\Lambda}{\lambda}$$

$$\text{ή} \quad 0 < 2N+1 < 8 \quad \text{ή} \quad -\frac{1}{2} < N < 3,5$$

$$\text{ή} \quad N = 0, 1, 2, 3.$$

Επομένως, μεταξύ των σημείων Ο και Λ σχηματίζονται τέσσερις (4) δεσμοί. Το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος μεταξύ των σημείων Ο και Λ τη χρονική στιγμή t_2 απεικονίζεται στο διπλανό διάγραμμα.



δ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Κ προκύπτει από τη δοθείσα εξίσωση του στάσιμου κύματος, θέτοντας σε αυτήν όπου x το $x_K = +0,1$ m. Είναι:

$$y_K = 0,2 \sigma \eta \nu(\pi) \eta \mu(20\pi t) \text{ (S.I.)} \quad \text{ή} \quad y_K = -0,2 \eta \mu(20\pi t) \text{ (S.I.)} \quad \text{ή} \quad y_K = 0,2 \eta \mu(20\pi t + \pi) \text{ (S.I.)} \quad (1).$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Λ προκύπτει από τη δοθείσα εξίσωση του στάσιμου κύματος, θέτοντας σε αυτήν όπου x το $x_\Lambda = +0,4$ m. Είναι:

$$y_\Lambda = 0,2 \sigma \eta \nu(4\pi) \eta \mu(20\pi t) \text{ (S.I.)} \quad \text{ή} \quad y_\Lambda = 0,2 \eta \mu(20\pi t) \text{ (S.I.)} \quad (2).$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι: $\Delta\phi = \phi_K - \phi_\Lambda$ ή $\Delta\phi = 20\pi t + \pi - 20\pi t$ ή $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$.

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ είναι $|A'_\Lambda| = 0,2 \text{ m}$. Τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου που ταλαντώνονται διέρχονται ταυτόχρονα από τις θέσεις ισορροπίας τους. Επειδή η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$, τη χρονική στιγμή t_3 στην οποία το υλικό σημείο Κ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, το υλικό σημείο Λ διέρχεται από τη θέση

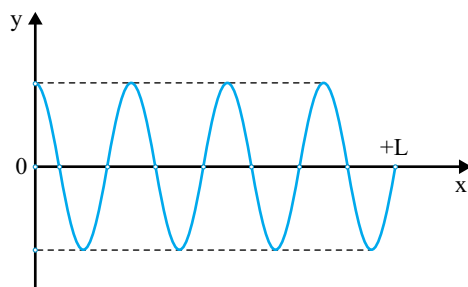
ισορροπίας του με αρνητική ταχύτητα. Επομένως, η ταχύτητα του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_3 είναι: $v_\Lambda = -v_{\max(\Lambda)}$ ή $v_\Lambda = -\frac{2\pi}{T}|A'_\Lambda|$ ή $v_\Lambda = -4\pi \text{ m/s}$.

ε. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ είναι $|A'_\text{Κ}| = 0,2 \text{ m}$. Επειδή η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι $\Delta\varphi = \pi \text{ rad}$, η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση στην οποία φτάνουν τα υλικά σημεία Κ και Λ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής τους είναι: $\Delta y_{\max} = |A'_\text{Κ}| + |A'_\text{Λ}|$ ή $\Delta y_{\max} = 0,4 \text{ m}$.

Επομένως η μέγιστη απόσταση $r_{\max}$ μεταξύ των σημείων Κ και Λ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής τους είναι: $r_{\max} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_{\max})^2}$ ή $r_{\max} = \sqrt{(x_\Lambda - x_\text{Κ})^2 + (\Delta y_{\max})^2}$ ή $r_{\max} = 0,5 \text{ m}$.

Θέμα 65ο

α. Έστω λ το μήκος κύματος των δύο εγκάρσιων αρμονικών κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμου κύμα στη χορδή. Στο διπλανό διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στη χορδή κάποια χρονική στιγμή στην οποία τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους.



Από το παραπάνω στιγμιότυπο προκύπτει: $15\frac{\lambda}{4} = 3 \text{ m}$ ή $\lambda = 0,8 \text{ m}$.

Έστω T η περίοδος ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο. Τα υλικά σημεία της χορδής ευθυγραμμίζονται κάθε $T/2$. Επομένως, είναι: $\frac{T}{2} = 0,1 \text{ s}$ ή $T = 0,2 \text{ s}$.

Η συχνότητα ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο είναι: $f = \frac{1}{T}$ ή $f = 5 \text{ Hz}$.

Επομένως, η ταχύτητα διάδοσης των τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή είναι: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = 4 \text{ m/s}$.

β. Η οριζόντια απόσταση μεταξύ του σημείου Ο και του πλησιέστερου σε αυτό δεσμού είναι: $\Delta x = \frac{\lambda}{4}$ ή $\Delta x = 0,2 \text{ m}$. Η απόσταση του σημείου Ο από τον πλησιέστερο δεσμό γίνεται μέγιστη τις χρονικές στιγμές στις οποίες το σημείο Ο φτάνει σε κάποια από τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του. Επομένως, είναι: $d = \sqrt{A_\text{Ο}'^2 + (\Delta x)^2}$ ή $d^2 = A_\text{Ο}'^2 + (\Delta x)^2$ ή $|A'_\text{Ο}| = \sqrt{d^2 - (\Delta x)^2}$ ή $2A = \sqrt{d^2 - (\Delta x)^2}$ ή $A = 0,1 \text{ m}$.

Οι εξισώσεις των εγκάρσιων αρμονικών κυμάτων (1) και (2) που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή είναι: $y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ ή $y_1 = 0,1\eta\mu 2\pi(5t - 1,25x) \text{ (S.I.)}$

και $y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$ ή $y_2 = 0,1\eta\mu 2\pi(5t + 1,25x)$ (S.I.).

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται στη χορδή είναι:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \text{ ή } y = 0,2\sigma\upsilon\nu(2,5\pi x)\eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.).}$$

γ. Έστω y η απομάκρυνση του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $a = \omega^2|y|$

ή $|y| = 0,1\sqrt{3}$ m. Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ υπολογίζεται από τη σχέση:

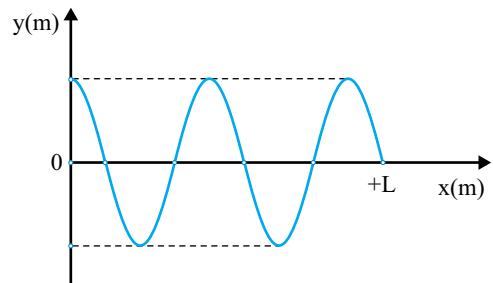
$$|A'|_K = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right)\right| \text{ ή } |A'|_K = 0,2|\sigma\upsilon\nu(5\pi)| \text{ ή } |A'|_K = 0,2 \text{ m.}$$

Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Κ έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή } \frac{1}{2}DA_K'^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dy^2 \text{ ή } m\omega^2A_K'^2 = mv^2 + m\omega^2y^2 \text{ ή } v = \omega\sqrt{A_K'^2 - y^2} \text{ ή } v = \frac{2\pi}{T}\sqrt{A_K'^2 - y^2}$$

$$\text{ή } v = \pi \text{ m/s.}$$

δ. Έστω f' η νέα συχνότητα ταλάντωσης του σημείου Ο και λ' το νέο μήκος κύματος των τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή. Στο διπλανό διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στη χορδή κάποια χρονική στιγμή, μετά τη μεταβολή της συχνότητας ταλάντωσης του σημείου Ο, στην οποία τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους.



Από το παραπάνω στιγμιότυπο προκύπτει ότι: $\frac{9\lambda'}{4} = L$ ή $\lambda' = \frac{4}{3} \text{ m.}$

Επειδή η ταχύτητα διάδοσης των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή παραμένει σταθερή, ισχύει: $v_\delta = \lambda'f'$ ή $f' = 3 \text{ Hz.}$

Έστω $|A''|_K$ το νέο πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Κ. Είναι: $|A''|_K = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda'}\right)\right|$

ή $|A''|_K = 0,2|\sigma\upsilon\nu(3\pi)|$ ή $|A''|_K = 0,2 \text{ m.}$ Η επί τοις εκατό (%) μεταβολή της ενέργειας ταλά-

ντωσης του υλικού σημείου Κ υπολογίζεται από τη σχέση: $\pi = \frac{E_{K(\tau\epsilon\lambda)} - E_{K(\alpha\rho\chi)}}{E_{K(\tau\epsilon\lambda)}} \cdot 100\%$

$$\text{ή } \pi = \frac{\frac{1}{2}D_{\tau\epsilon\lambda}(A_K'')^2 - \frac{1}{2}D_{\alpha\rho\chi}(A_K')^2}{\frac{1}{2}D_{\alpha\rho\chi}(A_K')^2} \cdot 100\% \text{ ή } \pi = \left[\frac{m\omega_{\tau\epsilon\lambda}^2(A_K'')^2}{m\omega_{\alpha\rho\chi}^2(A_K')^2} - 1 \right] \cdot 100\%$$

$$\text{ή } \pi = \left[\frac{(2\pi f')^2}{(2\pi f)^2} - 1 \right] \cdot 100\% \text{ ή } \pi = \left[\left(\frac{f'}{f} \right)^2 - 1 \right] \cdot 100\% \text{ ή } \pi = -64\%.$$

ε. Για να δημιουργείται στάσιμο κύμα στη χορδή, πρέπει να ισχύει: $L = (2N+1)\frac{\lambda}{4}$

$$\text{ή } L = (2N+1)\frac{v_\delta}{4f} \quad \text{ή } f = \frac{(2N+1)v_\delta}{4L} \quad \text{ή } f = \frac{2N+1}{3} \text{ (S.I.) (1), με } N = 0, 1, 2, \dots$$

Η ζητούμενη ελάχιστη συχνότητα προκύπτει από τη σχέση (1) για $N = 0$. Είναι: $f_{\min} = \frac{1}{3} \text{ Hz}$.

Θέμα 66ο

α. Τη χρονική στιγμή t_1 όλα τα ταλαντούμενα υλικά σημεία της χορδής έχουν δυναμική ενέργεια ταλάντωσης τριπλάσια της κινητικής τους ενέργειας. Δηλαδή, είναι: $U = 3K$ ή $K = \frac{U}{3}$.

Έστω ένα υλικό σημείο Z της χορδής στο οποίο σχηματίζεται κοιλία του στάσιμου κύματος. Τη χρονική στιγμή t_1 η απόσταση του υλικού σημείου Z από τη θέση ισορροπίας του είναι $0,1\sqrt{3} \text{ m}$. Δηλαδή, τη χρονική στιγμή t_1 το μέτρο της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Z είναι $|y| = 0,1\sqrt{3} \text{ m}$. Έστω $|A'|_Z$ το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Z . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο Z έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad E = \frac{U}{3} + U \quad \text{ή} \quad E = \frac{4}{3}U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}DA'_Z{}^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}Dy^2 \quad \text{ή} \quad |A'|_Z = \frac{2\sqrt{3}}{3}|y| \quad \text{ή} \quad |A'|_Z = 0,2 \text{ m}.$$

Επομένως, η απόσταση μεταξύ των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του υλικού σημείου Z είναι: $d = 2|A'|_Z$ ή $d = 0,4 \text{ m}$.

β. Επειδή στο υλικό σημείο O σχηματίζεται κοιλία του στάσιμου κύματος, το πλάτος της ταλάντωσης του είναι: $|A'|_O = |A'|_Z$ ή $|A'|_O = 0,2 \text{ m}$. Έστω ω η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του υλικού σημείου O . Είναι: $v_O = \omega|A'|_O$ ή $\omega = 10\pi \text{ rad/s}$. Η περίοδος της ταλάντωσης του υλικού σημείου O υπολογίζεται από τη σχέση: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ή $T = 0,2 \text{ s}$.

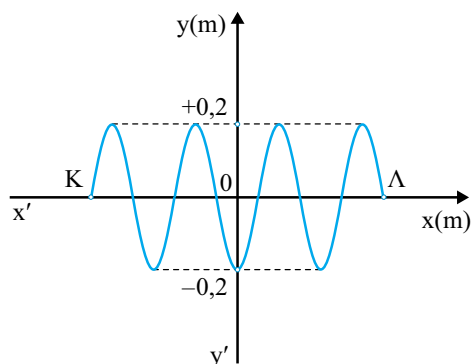
Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων της ελαστικής δυναμικής ενέργειας παραμόρφωσης της χορδής είναι: $\Delta t = \frac{T}{2}$ ή $\Delta t = 0,1 \text{ s}$.

γ. Το μήκος κύματος λ των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$ ή $\lambda = 0,4 \text{ m}$.

Στο διπλανό διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στη χορδή κάποια χρονική στιγμή στην οποία τα υλικά σημεία της χορδής που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους.

Από το διπλανό στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος προκύπτει: $L = 3,5\lambda$ ή $L = 1,4 \text{ m}$.

δ. Η θέση του σημείου Σ στο άξονα $x'Ox$ είναι: $x_\Sigma = +\left(\frac{L}{2} - d\right)$ ή $x_\Sigma = +0,6 \text{ m}$.



$$\text{Είναι } |A'|_{\Sigma} = 2A \left| \sin \left(\frac{2\pi x_{\Sigma}}{\lambda} \right) \right| \quad \text{ή} \quad |A'|_{\Sigma} = 2A \left| \sin \left[2\pi \frac{\left(\frac{L}{2} - d \right)}{\lambda} \right] \right| \quad \text{ή} \quad |A'|_{\Sigma} = 0,2 \text{ m.}$$

Έστω v_{Σ} το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Σ τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσής του έχουμε: $E = K + U$ ή $\frac{1}{2} D A_{\Sigma}^2 = 4 \frac{1}{2} m v_{\Sigma}^2$ ή $v_{\Sigma} = \pi \text{ m/s}$.

ε. Η αρχική συχνότητα διέγερσης της χορδής είναι: $f = \frac{1}{T}$ ή $f = 5 \text{ Hz}$. Έστω f' η νέα συχνότητα διέγερσης της χορδής. Για να δημιουργείται στάσιμο κύμα στη χορδή, πρέπει να ισχύει: $L = N \frac{\lambda'}{2}$ ή $L = N \frac{v_{\delta}}{2f'}$ ή $f' = \frac{N v_{\delta}}{2L}$ ή $f' = \frac{N}{1,4}$ (S.I.), με $N = 1, 2, 3, \dots$ (1).

Η ελάχιστη συχνότητα για την οποία δημιουργείται στάσιμο κύμα στη χορδή προκύπτει από τη σχέση (1) για $N = 1$. Είναι: $f'_{\min} = \frac{5}{7} \text{ Hz}$. Επομένως, η μέγιστη μείωση της συχνότητας των δύο τρέχοντων κυμάτων για την οποία δημιουργείται στάσιμο κύμα στη χορδή είναι:

$$\Delta f = f - f_{\min} \quad \text{ή} \quad \Delta f = \frac{30}{7} \text{ Hz.}$$

Θέμα 67ο

α. Έστω λ το μήκος κύματος, T η περίοδος και A το πλάτος των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή. Από το δοθέν στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος προκύπτει: $\frac{9\lambda}{4} = 0,9 \text{ m}$ ή $\lambda = 0,4 \text{ m}$. Το υλικό σημείο Κ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του δύο φορές σε κάθε πλήρη ταλάντωση που εκτελεί. Επειδή το σημείο Κ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του 10 φορές το δευτερόλεπτο, το πλήθος των πλήρων ταλαντώσεων που εκτελεί σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 1 \text{ s}$ είναι $N = 5$ πλήρεις ταλαντώσεις.

Επομένως, η συχνότητα ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο είναι: $f = \frac{N}{\Delta t}$ ή $f = 5 \text{ Hz}$.

Για την περίοδο ταλάντωσης T του υλικού σημείου Κ ισχύει: $T = \frac{1}{f}$ ή $T = 0,2 \text{ s}$.

Από το δοθέν στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος προκύπτει ότι η απομάκρυνση του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 είναι $y = +0,1\sqrt{3} \text{ m}$. Τη χρονική στιγμή t_1 η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου Κ είναι ίση με το 75% της μέγιστης τιμής της. Δηλαδή, είναι:

$$K = \frac{75}{100} K_{\max} \quad \text{ή} \quad K = \frac{3}{4} E \quad (1). \quad \text{Έστω } |A'|_{\text{Κ}} \text{ το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ.}$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Κ έχουμε: $E = K + U$

$$\text{ή} \quad E = \frac{3}{4} E + U \quad \text{ή} \quad U = \frac{1}{4} E \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} D y^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} D A_{\text{Κ}}'^2 \quad \text{ή} \quad |y| = \frac{|A'|_{\text{Κ}}}{2} \quad \text{ή} \quad |A'|_{\text{Κ}} = 0,2\sqrt{3} \text{ m.}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$|A'|_K = 2A \left| \sin \left(\frac{2\pi x_K}{\lambda} \right) \right| \quad \text{ή} \quad |A'|_K = 2A \left| \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right| \quad \text{ή} \quad |A'|_K = \sqrt{3}A \quad \text{ή} \quad A = 0,2 \text{ m.}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται στη χορδή δίνεται από τη σχέση:

$$y = 2A \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \eta \mu \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \quad \text{ή} \quad y = 0,4 \sin(5\pi x) \eta \mu(10\pi t) \text{ (S.I.)}$$

β. Έστω υ το μέτρο της ταχύτητας του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 . Από τη σχέση

$$(1) \text{ έχουμε: } \frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} D A_K'^2 \quad \text{ή} \quad m v^2 = \frac{3}{4} m \omega^2 A_K'^2 \quad \text{ή} \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2\pi}{T} |A'|_K \quad \text{ή} \quad v = 3\pi \text{ m/s.}$$

γ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$$y_K = A'_K \eta \mu \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \quad \text{ή} \quad y_K = 2A \sin \left(\frac{2\pi x_K}{\lambda} \right) \eta \mu \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \quad \text{ή} \quad y_K = 0,2\sqrt{3} \eta \mu(10\pi t) \text{ (S.I.) (2)}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Λ δίνεται από τη σχέση:

$$y_\Lambda = A'_\Lambda \eta \mu \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \quad \text{ή} \quad y_\Lambda = 2A \sin \left(\frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda} \right) \eta \mu \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \quad \text{ή} \quad y_\Lambda = 0,4 \sin \left(\frac{5\pi}{3} \right) \eta \mu(10\pi t) \text{ (S.I.)}$$

ή $y_\Lambda = 0,2 \eta \mu(10\pi t) \text{ (S.I.) (3)}$. Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ είναι $|A'|_\Lambda = 0,2 \text{ m}$. Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι $\Delta\phi = 0$.

Έστω y_K η απομάκρυνση του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_2 .

$$\text{Είναι: } a_K = -\omega^2 y_K \quad \text{ή} \quad a_K = - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 y_K \quad \text{ή} \quad y_K = -0,2\sqrt{3} \text{ m.}$$

Εφόσον είναι $y_K = -|A'|_K$, τη χρονική στιγμή t_2 το υλικό σημείο βρίσκεται στην ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσής του. Επειδή τα υλικά σημεία της χορδής που ταλαντώνονται φτάνουν ταυτόχρονα στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους και η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ είναι $\Delta\phi = 0$, η απομάκρυνση του υλικού σημείου Λ τη χρονική στιγμή t_2 είναι: $y_\Lambda = -|A'|_\Lambda$ ή $y_\Lambda = -0,2 \text{ m}$.

δ. Η ταχύτητα διάδοσης των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή είναι: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = 2 \text{ m/s}$. Για να δημιουργείται στάσιμο κύμα στη χορδή, πρέπει να

$$\text{ισχύει: } L = (2N+1) \frac{\lambda}{4} \quad \text{ή} \quad L = (2N+1) \frac{v_\delta}{4f} \quad \text{ή} \quad f = \frac{(2N+1)v_\delta}{4L} \quad \text{ή} \quad f = \frac{(2N+1)}{1,8} \text{ (S.I.)}$$

με $N = 0, 1, 2, \dots, (4)$. Από τη σχέση (4) για $f = 5 \text{ Hz}$ προκύπτει: $N = 4$.

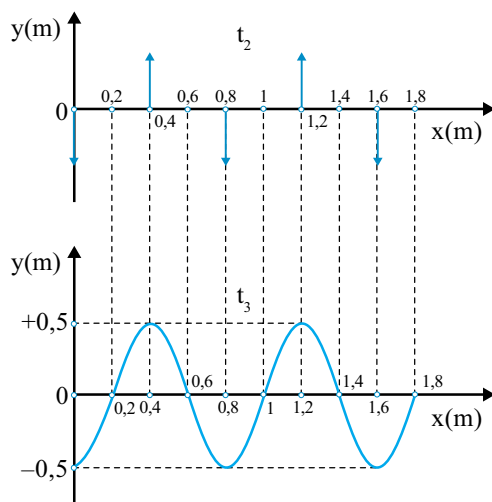
Επομένως, η αμέσως επόμενη συχνότητα f' για την οποία δημιουργείται στάσιμο κύμα στη χορδή προκύπτει από τη σχέση (4), θέτοντας σε αυτήν $N = 5$. Είναι: $f' = \frac{55}{9} \text{ Hz}$.

Επομένως, η ελάχιστη αύξηση της συχνότητας ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο για την οποία δημιουργείται στάσιμο κύμα στη χορδή είναι: $\Delta f = f' - f$ ή $\Delta f = \frac{10}{9} \text{ Hz}$.

Θέμα 68ο

α. Έστω λ το μήκος κύματος των δύο εγκάρσιων αρμονικών κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στη χορδή. Τη χρονική στιγμή t_1 τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους. Από το δοθέν στιγμιότυπο προκύπτει ότι: $2A = 0,5 \text{ m}$ ή $A = 0,25 \text{ m}$ και $\frac{9\lambda}{4} = 1,8 \text{ m}$ ή $\lambda = 0,8 \text{ m}$. Εφόσον τη χρονική στιγμή t_1 τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται ακινητοποιούνται στιγμιαία για τρίτη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσής τους, ισχύει: $t_1 = \frac{5T}{4}$ ή $T = 0,4 \text{ s}$. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται στο ελαστικό μέσο δίνεται από τη σχέση: $y = 2A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ ή $y = 0,5\sin(2,5\pi x)\eta\mu(5\pi t)$ (S.I.).

β. Στα διπλανά διαγράμματα απεικονίζονται τα στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος στο ελαστικό μέσο τις χρονικές στιγμές t_2 και t_3 .

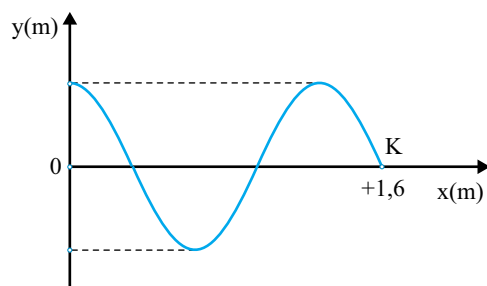


γ. Η επιτάχυνση του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_4 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a_K = -\omega^2 A'_K \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t_4\right) \quad \text{ή} \quad a_K = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 2A\sin\left(\frac{2\pi x_K}{\lambda}\right)\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t_4\right)$$

$$\text{ή} \quad a_K = -125\sin(4\pi)\eta\mu\left(\frac{5\pi}{6}\right) \text{ m/s}^2 \quad \text{ή} \quad a_K = -62,5 \text{ m/s}^2.$$

δ. Έστω λ' το νέο μήκος κύματος των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στο ελαστικό μέσο. Στο διπλανό διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος μεταξύ των υλικών σημείων Ο και Κ κάποια χρονική στιγμή στην οποία τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραίες θέσεις.



Από το στιγμιότυπο προκύπτει ότι: $\frac{5\lambda'}{4} = 1,6 \text{ m}$ ή $\lambda' = 1,28 \text{ m}$.

Το ζητούμενο ποσοστό είναι: $\pi = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \cdot 100\%$ ή $\pi = 60\%$.

Θέμα 69ο

α. Τη χρονική στιγμή t_1 το υλικό σημείο Κ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο με θετική ταχύτητα. Επομένως, τη χρονική στιγμή $t' = t_1 + \frac{T}{4}$, όπου T η περίοδος του κύματος, το υλικό σημείο Κ θα βρίσκεται στη θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του. Δηλαδή, τη χρονική στιγμή t_1 το υλικό σημείο Κ βρίσκεται σε «όρος» του κύματος. Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει το κύμα να διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'Ox$. Επειδή τη χρονική στιγμή t_2 το σημείο Κ ακινητοποιείται στιγμιαία για δεύτερη φορά μετά τη χρονική στιγμή t_1 , ισχύει: $t_2 = t_1 + 3\frac{T}{4}$ ή $t_2 - t_1 = 3\frac{T}{4}$ ή $0,15 \text{ s} = \frac{3T}{4}$ ή $T = 0,2 \text{ s}$. Έστω λ το μήκος κύματος του κύματος. Από το δοθέν στιγμιότυπο προκύπτει ότι:

$$x_N = 2,5\lambda \text{ ή } \lambda = \frac{x_N}{2,5} \text{ ή } \lambda = 2 \text{ m.}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$ ή $v_\delta = 10 \text{ m/s}$.

β. Από το δοθέν στιγμιότυπο προκύπτει ότι το πλάτος του κύματος είναι $A = 0,2 \text{ m}$. Εφόσον το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x'Ox$, τη χρονική στιγμή t_1 αρχίζει να ταλαντώνεται το υλικό σημείο Μ. Συνεπώς, ισχύει: $t_1 = \frac{|x_M|}{v_\delta}$ ή $t_1 = 0,5 \text{ s}$.

Η εξίσωση του στιγμιότυπου του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_1}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \text{ ή } y = 0,2\eta\mu 2\pi(2,5 + 0,5x) \text{ (S.I.).}$$

γ. Έστω v_K το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Κ τις χρονικές στιγμές στις οποίες η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσής του είναι ίση με το 75% της ενέργειας ταλάντωσής του $\left(U = \frac{75}{100}E\right)$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ έχουμε:

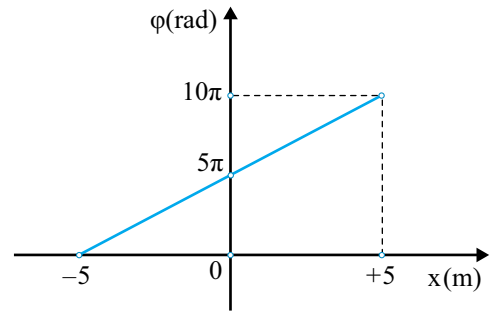
$$E = K + U \text{ ή } E = K + \frac{75}{100}E \text{ ή } \frac{25}{100}E = K \text{ ή } \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_K^2 \text{ ή } \frac{1}{4}m\omega^2A^2 = mv_K^2$$

$$\text{ή } v_K = +\frac{\omega A}{2} \text{ ή } v_K = +\frac{1}{2}\frac{2\pi}{T}A \text{ ή } v_K = +\pi \text{ m/s.}$$

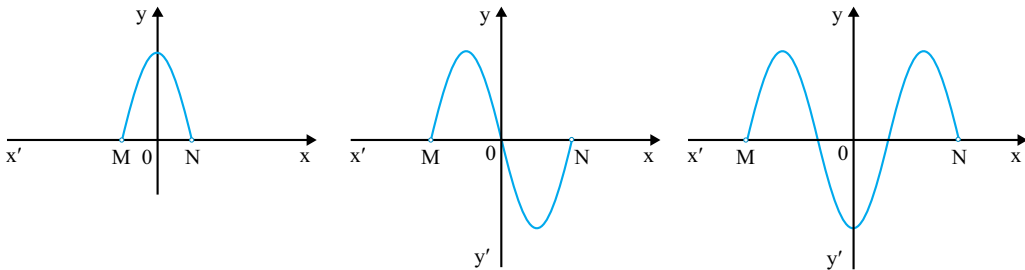
δ. Η φάση φ του αρμονικού κύματος σε συνάρτηση με τη θέση x των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου στον άξονα $x'Ox$ τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \text{ ή } \varphi = 2\pi(2,5 + 0,5x) \text{ (S.I.).}$$

Στο διπλανό διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της φάσης φ του αρμονικού κύματος τη χρονική στιγμή t_1 σε συνάρτηση με τη θέση x των υλικών σημείων του μέσου στον άξονα $x'Ox$.



ε. Έστω λ' το νέο μήκος κύματος των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στο ελαστικό μέσο. Στα ακόλουθα διαγράμματα φαίνονται διάφορα στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος μεταξύ των σημείων M και N που είναι δεσμοί.



Όπως προκύπτει από τα στιγμιότυπα, για να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα μεταξύ των σημείων M και N, με τα σημεία M και N να είναι δεσμοί, πρέπει να ισχύει: $\Delta x_{MN} = N \frac{\lambda'}{2}$

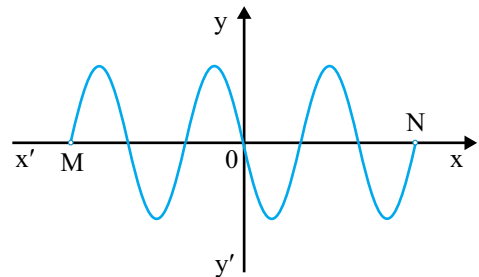
$$\text{ή } |x_M - x_N| = N \frac{\lambda'}{2} \quad (1) \quad \text{ή } |x_M - x_N| = \frac{N v_\delta}{2 f'} \quad \text{ή } f' = \frac{N v_\delta}{2 |x_M - x_N|} \quad \text{ή } f' = \frac{N}{2} \quad (2),$$

με $N = 1, 2, 3, \dots$ (2). Έχουμε: $2,75 \text{ Hz} < f' < 3,25 \text{ Hz}$ ή, λόγω της σχέσης (2):

$$2,75 < \frac{N}{2} < 3,25 \quad \text{ή} \quad 5,5 < N < 6,5 \quad \text{ή} \quad N = 6.$$

Επομένως, από τη σχέση (2) για $N = 6$ προκύπτει: $f' = 3 \text{ Hz}$. Από τη σχέση (1) για $N = 6$ προκύπτει: $|x_M - x_N| = 3\lambda'$.

Στο διάγραμμα του διπλανού σχήματος απεικονίζεται ένα στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στο ελαστικό μέσο μεταξύ των σημείων M και N. Όπως προκύπτει από το παραπάνω στιγμιότυπο, το πλήθος των κοιλιών που σχηματίζονται μεταξύ των σημείων M και N είναι ίσο με έξι (6).



Θέμα 706

α. Έστω λ το μήκος κύματος, T η περίοδος και A το πλάτος του κύματος που διαδίδεται στο ελαστικό μέσο. Από το δοθέν στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει: $A = 0,4 \text{ m}$ και $\frac{9\lambda}{4} = 9 \text{ m}$

ή $\lambda = 4 \text{ m}$. Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε: $v_\delta = \lambda f$ ή $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$ ή $T = 1 \text{ s}$.

Η εξίσωση που περιγράφει το κύμα που διαδίδεται στο ελαστικό μέσο είναι της μορφής:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad y = 0,4\eta\mu 2\pi(t - 0,25x) \text{ (S.I.)}.$$

β. Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει ακόμη ότι τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα θέτει σε ταλάντωση το υλικό σημείο που βρίσκεται στη θέση $x = +9 \text{ m}$.

Επομένως, έχουμε: $v_\delta = \frac{x}{t_1}$ ή $t_1 = \frac{x}{v_\delta}$ ή $t_1 = 2,25 \text{ s}$.

γ. Η θέση του υλικού σημείου K στον ημιάξονα Ox είναι: $x_K = +\frac{\lambda}{4}$ ή $x_K = +1 \text{ m}$.

Η ταχύτητα του ταλαντούμενου υλικού σημείου K τη χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη

$$\text{σχέση: } v_K = \omega A \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad v_K = \frac{2\pi}{T} A \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) \quad \text{ή} \quad v_K = 0,8\pi \sigma\upsilon\nu(4\pi) \text{ m/s}$$

ή $v_K = +0,8\pi \text{ m/s}$.

δ. Η χρονική στιγμή t_K στην οποία ξεκινά να ταλαντώνεται το υλικό σημείο K υπολογίζεται από τη σχέση: $t_K = \frac{x_K}{v_\delta}$ ή $t_K = 0,25 \text{ s}$. Το πλήθος N των ταλαντώσεων που εκτελεί το υλικό σημείο K από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 2,25 \text{ s}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$N = f\Delta t \quad \text{ή} \quad N = f(t_1 - t_K) \quad \text{ή} \quad N = \frac{1}{T}(t_1 - t_K) \quad \text{ή} \quad N = 2 \text{ ταλαντώσεις}.$$

Το υλικό σημείο K διανύει σε κάθε πλήρη ταλάντωση που εκτελεί διάστημα $4A$. Επομένως, το διάστημα που διανύει το υλικό σημείο K από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $s = N \cdot 4A$ ή $s = 8A$ ή $s = 3,2 \text{ m}$.

ε. Από το δοθέν στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος προκύπτουν: $\lambda = 4 \text{ m}$ και $y_0 = +0,4 \text{ m}$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο O ($x = 0$) έχουμε:

$$E = K + U \quad \text{ή} \quad E = 4U \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}DA_o'^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}Dy_o^2 \quad \text{ή} \quad |A_o'| = 2|y_o| \quad \text{ή} \quad |A_o'| = 0,8 \text{ m} \quad \text{ή} \quad 2A = 0,8 \text{ m}$$

ή $A = 0,4 \text{ m}$. Επειδή το στάσιμο κύμα έχει δημιουργηθεί στο ίδιο ελαστικό μέσο, η ταχύτητα διάδοσης των δύο τρέχοντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στο ελαστικό μέσο είναι $v_\delta = 4 \text{ m/s}$. Επομένως, η περίοδός τους είναι: $T = 1 \text{ s}$. Συνεπώς, η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad \text{ή} \quad y = 0,8 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \eta\mu(2\pi t) \text{ (S.I.)}.$$

Θέμα 710

α. Έστω f η συχνότητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης με τη χρονική εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού

κύματος που γνωρίζουμε από τη θεωρία προκύπτει: $\frac{1}{T} = 6 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ ή $f = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

Το μήκος κύματος λ_0 του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό υπολογίζεται από τη σχέση: $c = \lambda_0 f$ ή $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ή $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$. Επομένως, **το ηλεκτρομαγνητικό κύμα ανήκει στην ορατή περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος.**

β. Από τη δοθείσα χρονική εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος προκύπτει: $E_{\max} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$. Έστω $B_{\max}$ η μέγιστη τιμή της έντασης του μαγνητικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Είναι: $\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = c$ ή $B_{\max} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ T}$.

Η χρονική εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος δίνεται από τη σχέση: $B = B_{\max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ ή $B = 2 \cdot 10^{-10} \eta \mu 2\pi (6 \cdot 10^{14} t - 2 \cdot 10^6 x)$ (S.I.).

γ. Έστω E η ζητούμενη ένταση του ηλεκτρικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος τη χρονική στιγμή t_1 . Είναι: $\frac{E}{B} = c$ ή $E = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$.

δ. Έστω v η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο διαφανές υλικό. Είναι: $v = c - \frac{25}{100}c$ ή $v = \frac{3}{4}c$ ή $v = 2,25 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Έστω λ το μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο διαφανές υλικό. Είναι: $v = \lambda f$ ή $\lambda = 3,75 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ή $\lambda = 375 \text{ nm}$.

Το ζητούμενο ποσοστό είναι: $\pi = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \cdot 100\%$ ή $\pi = -25\%$.

Θέμα 72ο

α. Συγκρίνοντας τη δοθείσα εξίσωση με τη χρονική εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που γνωρίζουμε από τη θεωρία προκύπτει:

$$B_{\max} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ T}, \quad \frac{1}{T} = 5 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1} \quad \text{ή} \quad f = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{10^7}{3} \text{ m}^{-1} \quad \text{ή} \quad \lambda = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

Έστω v η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Είναι: $v = \lambda f$ ή $v = 1,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Εφόσον είναι $v \neq c$, **το ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται σε κάποιο διαφανές υλικό.**

β. Έστω $E_{\max}$ η μέγιστη τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος κατά τη διάδοσή του στο διαφανές υλικό. Είναι: $\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = v$ ή $E_{\max} = 0,3 \text{ V/m}$.

Η χρονική εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος κατά τη διάδοσή του στο διαφανές υλικό δίνεται από τη σχέση: $E = E_{\max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ ή $B = 0,3 \eta \mu 2\pi \left(5 \cdot 10^{14} t - \frac{10^7}{3} x \right)$ (S.I.).

γ. Έστω λ_0 το μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό. Είναι: $c = \lambda_0 f$ ή $\lambda_0 = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ή $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$. Επομένως, **το ηλεκτρομαγνητικό κύμα ανήκει στην ορατή περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος.**



ΕΛΛΗΝΟ
ΕΚΔΟΤΙΚΗ

ellinoekdotiki.gr



[ellinoekdotiki](https://www.facebook.com/ellinoekdotiki)



[ellinoekdotikipublishing](https://www.instagram.com/ellinoekdotikipublishing)