ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ – ΘΑΝΑΣΗΣ ΝΙΚΟΛΟΠΟΥΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών
και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής

- **Κατηγοριοποίηση ασκήσεων**
- **Αναλυτικές λύσεις**

Α΄ ΤΟΜΟΣ

Προσφέρεται ΔΩΡΕΑΝ με το κυρίως βιβλίο

ΕΛΛΗΝΟΕΚΔΟΤΙΚΗ

ΕΛΛΗΝΟΕΚΔΟΤΙΚΗ

Κεντρική διάθεση:

Δ.Β. ΕΛΛΗΝΟΕΚΔΟΤΙΚΗ Α.Ε.Ε.Ε. ΑΝΩΝΥΜΗ ΕΚΔΟΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΜΠΟΡΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Ιπποκράτους 82, Αθήνα, 106 80, Τηλ. & Fax: 210 3613676 – 210 3640632

www.ellinoekdotiki.gr, e-mail: info@ellinoekdotiki.gr

Εκπαιδευτικά βιβλία για το Λύκειο

Νίκος Σπλήνης – Θανάσης Νικολόπουλος

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου – Α΄ ΤΟΜΟΣ

Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής

Βιβλίο Λύσεων

ISBN: 978-960-563-338-7

Επιμέλεια έκδοσης:

Νίκος Χατζόπουλος, Γιάννης Χριστοδούλου

Γραφιστική επιμέλεια και σελιδοποίηση:

DTP Ελληνοεκδοτικής, Γιάννης Χριστοδούλου

Σχεδίαση εξωφύλλου:

DTP Ελληνοεκδοτικής, Λαέρτης Βίλα

Πρώτη έκδοση: Ιούνιος 2020

Παρούσα έκδοση: Ιούνιος 2020, Κ.Ε.ΕΛ.: 42/20

Περιεχόμενα

ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Ενότητες

1η – 24η

Κατηγοριοποίηση ασκήσεων

Ενότητα 1η

Συναρτήσεις – Βασικές έννοιες

Εύρεση πεδίου ορισμού	1.17 – 1.24
Εύρεση συνόλου τιμών	1.25 – 1.27
Προβλήματα – Προσδιορισμός τύπου συνάρτησης	1.28 – 1.37

Ενότητα 2η

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Βασικές ασκήσεις	2.22, 2.29 – 2.31
Σχεδιασμός γραφικής παράστασης	2.23 – 2.25, 2.33, 2.36, 2.38
Θέση γραφικών παραστάσεων ως προς τους άξονες και μεταξύ τους	2.26 – 2.28, 2.32, 2.34, 2.35
Συνδυαστικά θέματα και άλλες ασκήσεις	2.37, 2.39 – 2.44

Ενότητα 3η

Ισότητα και πράξεις συναρτήσεων

Ισότητα συναρτήσεων	3.12 – 3.14, 3.18, 3.19
Πράξεις συναρτήσεων	3.15 – 3.17, 3.22 – 3.24
Ασκήσεις με συναρτησιακές σχέσεις	3.20, 3.21

Ενότητα 4η

Σύνθεση συναρτήσεων

Σύνθεση συναρτήσεων	4.13 – 4.16, 4.18
Σύνθεση με συνάρτηση πολλαπλού τύπου	4.17
Υπολογισμός παραμέτρων από σύνθεση συναρτήσεων	4.19 – 4.22
Εύρεση συνάρτησης από σύνθεση • από $f \circ g$ και g βρίσκουμε f	4.23 – 4.25
Εύρεση συνάρτησης από σύνθεση • από $g \circ f$ και g βρίσκουμε f	4.23 (γ), 4.26
Έκφραση συνάρτησης ως σύνθεση	4.27 – 4.29
Συναρτησιακές σχέσεις	4.32 – 4.36
Συνδυαστικά θέματα και θεωρητικές ασκήσεις	4.30, 4.31, 4.37, 4.38

Ενότητα 5η

Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης

Μελέτη της μονοτονίας συνάρτησης	5.25 – 5.29
Εξισώσεις και ανισώσεις με μονοτονία	5.30 – 5.34
Θεωρητικές και συνδυαστικές ασκήσεις στη μονοτονία	5.35 – 5.42
Εύρεση των ακροτάτων συνάρτησης	5.43 – 5.45, 5.47, 5.52
Εξισώσεις και ανισώσεις με ακρότατα	5.46, 5.48, 5.49, 5.53
Συνδυαστικά και θεωρητικά θέματα	5.50, 5.51, 5.54 – 5.61

Ενότητα 6η

Συνάρτηση 1 – 1 – Αντίστροφη συνάρτηση

Πώς εξετάζουμε αν μια συνάρτηση είναι 1 – 1 και πώς βρίσκουμε την αντίστροφή της, αν υπάρχει	6.22, 6.23, 6.25, 6.26, 6.28, 6.45
Αντίστροφη και γραφική παράσταση	6.24
1 – 1 και αντίστροφη συνάρτηση από συνάρτηση πολλαπλού τύπου	6.33, 6.45
Εύρεση τιμής αντίστροφης συνάρτησης	6.27
Εύρεση αντίστροφης συνάρτησης	6.27, 6.30, 6.46 – 6.48, 6.50
Εύρεση αντίστροφης συνάρτησης από συναρτησιακή σχέση	6.35, 6.36, 6.42
Αντίστροφη και γραφική παράσταση	6.24, 6.29, 6.43
Εξισώσεις και ανισώσεις με συνάρτηση 1 – 1 και αντίστροφη συνάρτηση	6.31, 6.32, 6.34, 6.37 – 6.40, 6.44, 6.52, 6.53
Αντίστροφη συνάρτηση και συναρτησιακή σχέση	6.41, 6.49, 6.51

Ενότητα 7η

Ερωτήσεις κατανόησης στις συναρτήσεις

Ενότητα 8η

Πεπερασμένο όριο συνάρτησης

Εύρεση ορίου από δεδομένη γραφική παράσταση	8.5 – 8.10
Πότε έχει νόημα η αναζήτηση ορίου	8.11
Σχεδιασμός γραφικής παράστασης και εύρεση ορίου από αυτήν	8.12 – 8.14
Υπολογισμός παραμέτρων για την ύπαρξη ορίου	8.15 – 8.18

Ενότητα 9η

Ιδιότητες των ορίων

Υπολογισμός ορίου με αντικατάσταση	9.23
Όριο και πράξεις	9.24 – 9.27
Απροσδιοριστία $\left(\frac{0}{0}\right)$ σε ρητές παραστάσεις – παραγοντοποίηση	9.28
Απροσδιοριστία $\left(\frac{0}{0}\right)$ σε άρρητες παραστάσεις – συζυγής παράσταση	9.29
Όριο σύνθετης συνάρτησης – Τριγωνομετρικά όρια	9.30, 9.31
Κριτήριο παρεμβολής – «Μηδενική» επί φραγμένη συνάρτηση	9.33, 9.34
Άλλες ασκήσεις	9.32, 9.35, 9.36

Ενότητα 10η

Συνέχεια συνάρτησης

Συνέχεια συνάρτησης σε σημείο	10.10, 10.11, 10.25
Εύρεση παραμέτρων από τη συνέχεια συνάρτησης	10.12, 10.17
Συνέχεια στο πεδίο ορισμού, συνέχεια σε διάστημα	10.13 – 10.16, 10.24, 10.26, 10.27
Συνέχεια και κριτήριο παρεμβολής	10.21 – 10.23
Θεωρητικές ασκήσεις στη συνέχεια	10.18 – 10.20

Ενότητα 11η

Μη πεπερασμένο όριο

Υπολογισμός μη πεπερασμένου ορίου στο x_0	11.16 – 11.34, 11.37
Συνδυαστικά θέματα και θεωρητικές ασκήσεις	11.35, 11.36, 11.38

Ενότητα 12η

Κατακόρυφη ασύμπτωτη

Εύρεση κατακόρυφης ασύμπτωτης	12.9 – 12.17

Ενότητα 13η

Αλγεβρικός υπολογισμός ορίων

Ιδιότητες ορίων	13.2, 13.7
Απροσδιοριστία $\left(\frac{0}{0}\right)$ – παραγοντοποίηση και συζυγής παράσταση	13.1, 13.3 – 13.6, 13.45, 13.46
Όρια με απόλυτο	13.10, 13.12
Τριγωνομετρικά όρια	13.13, 13.14, 13.24
Εύρεση παραμέτρου	13.15, 13.20, 13.21, 13.28, 13.32
Υπολογισμός ορίου με παράμετρο	13.18, 13.19, 13.31, 13.34
Όριο – συνέχεια – τύπος συνάρτησης	13.8, 13.66 – 13.72, 13.74 – 13.76, 13.79, 13.80, 13.85, 13.87, 13.88
Βοηθητική συνάρτηση	13.19, 13.35 – 13.37, 13.39, 13.41, 13.43, 13.77, 13.78, 13.82, 13.89
Κριτήριο παρεμβολής – Ανισοτικές σχέσεις	13.22, 13.25 – 13.27, 13.44, 13.56, 13.59, 13.60, 13.63 – 13.65, 13.84, 13.90
Αλλαγή μεταβλητής	13.48, 13.49, 13.53, 13.54, 13.91
Γενικές ασκήσεις	13.9, 13.11, 13.16, 13.17, 13.23, 13.30, 13.33, 13.38, 13.40, 13.42, 13.47, 13.50 – 13.52, 13.55, 13.57, 13.58, 13.61, 13.62, 13.73, 13.81, 13.83, 13.86, 13.92

Ενότητα 14η

Όριο συνάρτησης στο άπειρο

Βασικά όρια στο άπειρο	14.20 – 14.22, 14.25, 14.29, 14.31
Όριο εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης	14.42, 14.44
Εκθετικές παραστάσεις	14.43
$(\infty - \infty)$ με ριζικά	14.24, 14.32 – 14.34
Όριο στο άπειρο με παραμέτρους	14.26, 14.27, 14.30, 14.37 – 14.39, 14.51
Όριο στο άπειρο με απόλυτα	14.28
Ανισοτικές σχέσεις – Κριτήριο παρεμβολής	14.45, 14.46, 14.53
Αλλαγή μεταβλητής	14.48, 14.49
Βοηθητική συνάρτηση	14.41, 14.52
Όρια από γραφική παράσταση	14.54
Γενικές ασκήσεις	14.35, 14.36, 14.40, 14.47, 14.50

Ενότητα 15η

Οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη

Οριζόντια ασύμπωτη	15.14, 15.15,
Πλάγια ασύμπωτη	15.27, 15.29 – 15.31, 15.33, 15.36
Ασύμπτωτες και παράμετροι	15.24 – 15.26, 15.28, 15.38
Γενικές ασκήσεις	15.16 – 15.23, 15.32, 15.34, 15.35, 15.37

Ενότητα 16η

Βασικά θεωρήματα συνέχειας

Θεώρημα Bolzano σε ανοικτό διάστημα	16.26, 16.28, 16.34
Θεώρημα Bolzano σε εξισώσεις	16.24, 16.29 – 16.31, 16.33, 16.40
Ύπαρξη x_0 που ικανοποιεί σχέση ή εξίσωση	16.32, 16.45, 16.46, 16.48, 16.49, 16.55, 16.57, 16.59, 16.78
Μοναδική ρίζα	16.44, 16.56, 16.61, 16.63
Εφαρμογή Bolzano σε κλειστό διάστημα	16.50 – 16.52, 16.58, 16.62
Ύπαρξη περισσότερων από μία ριζών	16.35 – 16.37, 16.39, 16.41
Εύρεση τύπου συνάρτησης	16.69 – 16.74
Σταθερό πρόσημο συνάρτησης	16.67, 16.68
Θ.Ε.Τ. – Θ.Μ.Ε.Τ.	16.75 – 16.77, 16.79, 16.80,
Σύνολο τιμών	16.81 – 16.83
Γενικές ασκήσεις	16.38, 16.42, 16.43, 16.53, 16.54, 16.60, 16.64 – 16.66, 16.84 – 16.87

Ενότητα 17η

Ερωτήσεις κατανόησης σε όρια και συνέχεια

Ενότητα 18η

Η έννοια της παραγώγου

Παράγωγος με τον ορισμό	18.13 – 18.18, 18.22, 18.23, 18.33, 18.60
Παράγωγος και παράμετροι	18.21, 18.27, 18.29, 18.32, 18.49, 18.53
Παράγωγος συνάρτησης πολλαπλού τύπου	18.20, 18.28, 18.30, 18.38, 18.62
Παράγωγος και όρια	18.24 – 18.26, 18.31, 18.34, 18.35, 18.41, 18.47, 18.52, 18.58, 18.59
Παράγωγος και συναρτησιακές σχέσεις	18.19, 18.45, 18.46
Γενικές ασκήσεις	18.36, 18.37, 18.39, 18.40, 18.42, 18.46, 18.48, 18.50, 18.51, 18.55 – 18.57, 18.61

Ενότητα 19η

Παραγωγίσιμες συναρτήσεις – Παράγωγος συνάρτησης – Κανόνες παραγώγισης

Παράγωγος αθροίσματος	19.32, 19.33
Παράγωγος γινομένου	19.34, 19.35
Παράγωγος πηλίκου	19.36 – 19.38
Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης	19.39 – 19.46, 19.52 – 19.54
Παράγωγος από γραφική παράσταση	19.48, 19.49
Πράξεις με παραγώγους	19.47, 19.50, 19.51, 19.61 – 19.63, 19.72, 19.79
Παράγωγος από όριο	19.55, 19.56
Παράγωγος συνάρτησης πολλαπλού τύπου	19.57 – 19.60
Δεύτερη παράγωγος	19.64 – 19.67
Εύρεση παραμέτρων από παράγωγο	19.74, 19.76, 19.77
Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης	19.86, 19.87, 19.91 – 19.93
Γενικές ασκήσεις	19.68 – 19.71, 19.73, 19.75, 19.78, 19.80 – 19.85, 19.88 – 19.90

Ενότητα 20ή

Κανόνες de L' Hospital

Απροσδιοριστία $\left(\frac{0}{0}\right)$ ή $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$	20.8, 20.10, 20.13, 20.14, 20.16 – 20.18
Απροσδιοριστία $(\infty - \infty)$	20.21, 20.23, 20.25
Όρια με παραμέτρους	20.15, 20.30, 20.32, 20.41, 20.45, 20.46, 20.49, 20.50, 20.55
Απροσδιοριστία $(0 \cdot \infty)$	20.20, 20.22, 20.26, 20.37
Απροσδιοριστίες 0^0, ∞^0, 1^∞	20.24, 20.27
Ειδικές περιπτώσεις	20.28, 20.29, 20.31, 20.38, 20.39, 20.44, 20.52
Ασύμπτωτες	20.33 – 20.35, 20.47, 20.51, 20.57
Γενικές ασκήσεις	20.9, 20.11, 20.12, 20.19, 20.36, 20.40, 20.42, 20.43, 20.48, 20.53, 20.54, 20.56

Ενότητα 21η

Εφαπτομένη

Εφαπτομένη στο x_0	21.12 – 21.14, 21.18, 21.25, 21.27, 21.58
Εφαπτομένη με γεωμετρικές συνθήκες	21.23, 21.24, 21.26, 21.28, 21.35 – 21.38, 21.40, 21.42, 21.45, 21.52
Ευθεία που εφάπτεται στη γραφική παράσταση	21.22, 21.32, 21.61
Κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο	21.39, 21.48
Κοινή εφαπτομένη σε μη κοινό σημείο	21.34, 21.41, 21.43, 21.47
Εύρεση παραμέτρων	21.29, 21.30, 21.33, 21.44, 21.60
Εφαπτομένη αντίστροφης συνάρτησης	21.55
Γενικές ασκήσεις	21.15 – 21.17, 21.19 – 21.21, 21.31, 21.46, 21.49 – 21.51, 21.53, 21.54, 21.56, 21.57, 21.59, 21.62, 21.63

Ενότητα 22η

Ερωτήσεις κατανόησης στις παραγώγους

Ενότητα 23η

Εφαρμογές παραγώγων Ι (μονοτονία συνάρτησης)

Μονοτονία από f'	23.20 – 23.24, 23.29
Μονοτονία από γραφική παράσταση	23.18, 23.19
Μονοτονία συνάρτησης πολλαπλού τύπου	23.25 – 23.27
Βοηθητική συνάρτηση	23.28, 23.49
Μονοτονία και παράμετροι	23.30 – 23.35
Πρόσημο από μονοτονία	23.38, 23.43
Εξισώσεις και ανισώσεις με μονοτονία	23.36, 23.37, 23.40 – 23.42, 23.44, 23.45, 23.50
Σύνολο τιμών	23.68 – 23.72, 23.74
Παράγωγος και θεωρήματα συνέχειας	23.63 – 23.65
Γενικές ασκήσεις	23.39, 23.46 – 23.48, 23.51 – 23.62, 23.66, 23.67, 23.73

Ενότητα 24η

51 Επαναληπτικά θέματα εξετάσεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ	Ερωτήσεων
	Βασικών εφαρμογών – Ασκήσεων εμπέδωσης
ΛΥΣΕΙΣ – ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ	Ασκήσεων
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ	**Κριτηρίων αξιολόγησης**

1η Ενότητα

Συναρτήσεις – Βασικές έννοιες

Α. Του τύπου Σωστό / Λάθος

1. 1 α. Λάθος β. Σωστό γ. Λάθος δ. Λάθος.

1. 2 α. Σωστό β. Λάθος γ. Λάθος δ. Σωστό.

1. 3 α. Λάθος β. Σωστό γ. Λάθος δ. Σωστό.

1. 4 α. Λάθος β. Λάθος γ. Λάθος δ. Λάθος.

Β. Αντιστοίχισης

1. 5 $1 \to \delta,\ 2 \to \gamma,\ 3 \to \beta,\ 4 \to \alpha,\ 5 \to \alpha.$

1. 6 $1 \to \gamma,\ 2 \to \alpha,\ 3 \to \beta,\ 4 \to \delta,\ 5 \to \alpha.$

1. 7 $1 \to \gamma,\ 2 \to \delta,\ 3 \to \varepsilon,\ 4 \to \beta,\ 5 \to \alpha.$

Γ. Συμπλήρωσης

1. 8 α. $Q(x) \neq 0$ β. $P(x) \geq 0$ γ. $P(x) > 0$
δ. $P(x) > 0$ ε. $P(x) \neq 0.$

Δ. Βασικές εφαρμογές – Ασκήσεις εμπέδωσης

1. 9 α. $\mathbb{R}$ β. $\mathbb{R}$ γ. $\mathbb{R}$
δ. $\mathbb{R}$ ε. $\mathbb{R}.$

1. 10 α. $\mathbb{R}-\{-2\}$ β. $\mathbb{R}-\{2\}$ γ. $\mathbb{R}-\{\pm 2\}$
δ. $\mathbb{R}-\{\pm 4\}$ ε. $\mathbb{R}-\{1, 2\}$ στ. $\mathbb{R}-\{-2\}$
ζ. $\mathbb{R}$ η. $\mathbb{R}-\{2\}$ θ. $\mathbb{R}.$

1. 11 α. $[-1, +\infty)$ β. $(-\infty, 1]$ γ. $(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$

	δ. $[-3, 3]$	**ε.** $(-\infty, -2]\cup[1, +\infty)$	**στ.** $\mathbb{R}$
	ζ. $\mathbb{R}$	**η.** $\mathbb{R}$	**θ.** $\mathbb{R}$.
1. 12	**α.** $(2, +\infty)$	**β.** $(-\infty, 3)$	**γ.** $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$
	δ. $(-2, 2)$	**ε.** $(-\infty, -1)\cup(2, +\infty)$	**στ.** $\mathbb{R}-\{2\}$
	ζ. $\mathbb{R}$	**η.** $\mathbb{R}$	**θ.** $\mathbb{R}$.
1. 13	**α.** $(-3, +\infty)$	**β.** $(-\infty, 3)$	**γ.** $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$
	δ. $(-\infty, 1)\cup(4, +\infty)$	**ε.** $\mathbb{R}-\{4\}$	**στ.** $\mathbb{R}$
	ζ. $\mathbb{R}-\{3\}$	**η.** $\mathbb{R}$	**θ.** $\mathbb{R}$.
1. 14	**α.** $\mathbb{R}$	**β.** $\mathbb{R}$	**γ.** $\mathbb{R}$
	δ. $\mathbb{R}$	**ε.** $\mathbb{R}$	**στ.** $\mathbb{R}$.
1. 15	**α.** $(2, +\infty)$	**β.** $(-\infty, -2)\cup(2, +\infty)$	
	γ. $(1, 2)\cup(2, +\infty)$	**δ.** $\left(-\infty, -\sqrt{10}\right)\cup\left(-\sqrt{10}, -3\right)\cup\left(3, \sqrt{10}\right)\cup\left(\sqrt{10}, +\infty\right)$	
	ε. $[-2, 3)\cup(3, +\infty)$	**στ.** $(-2, -1)\cup(-1, +\infty)$.	
1. 16	**α.** $[3, 5)\cup(5, +\infty)$	**β.** $[1, 2)\cup(2, +\infty)$	**γ.** $(-\infty, -1]\cup[1, 4)\cup(4, +\infty)$
	δ. $\mathbb{R}$	**ε.** $(1, 2]$	**στ.** $(-2, 2)\cup(2, +\infty)$
	ζ. $[-2, -1)\cup(1, 2]$	**η.** $(-5, -3)\cup(-3, 3)\cup(3, +\infty)$.	

Ε. Ασκήσεις για λύση

1. 17 **α.** $x^2+y^2=7 \Leftrightarrow y^2=7-x^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{7-x^2}$. Άρα, σε κάθε $x\in\left[-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right]$ αντιστοιχούν δύο τιμές $y\in\mathbb{R}$. Συνεπώς, η σχέση δεν ορίζει συνάρτηση.

β. $x^2+y=3 \Leftrightarrow y=3-x^2$. Άρα, σε κάθε $x\in\mathbb{R}$ αντιστοιχεί μοναδικό $y\in\mathbb{R}$. Συνεπώς, η σχέση ορίζει συνάρτηση.

γ. Πρέπει $16-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 16 \Leftrightarrow |x|\leq 4 \Leftrightarrow -4\leq x\leq 4$. Άρα, σε κάθε $x\in[-4, 4]$ η σχέση $y=\sqrt{16-x^2}$ αντιστοιχεί μοναδικό $y\in\mathbb{R}$, συνεπώς ορίζει συνάρτηση.

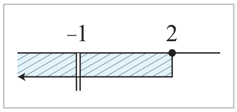
δ. $|y|=5-x \Leftrightarrow y=5-x$ ή $y=-5+x$. Άρα, σε κάθε $x\in(-\infty, 5]$ αντιστοιχούν δύο τιμές του $y\in\mathbb{R}$. Συνεπώς, η σχέση δεν ορίζει συνάρτηση.

ε. $y=\dfrac{|x|}{x}$: σε κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ η σχέση αντιστοιχεί μοναδικό $y\in\mathbb{R}$, συνεπώς ορίζει συνάρτηση.

1. 18 **α.** Πρέπει $x^2-4\neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$ και $x\neq -2$.

Άρα $D_f=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

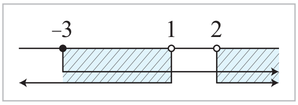
β. Πρέπει $\begin{cases}2-x\geq 0\\ x+1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 2\\ x\neq -1\end{cases}$.



Άρα $D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,2]$.

γ. Πρέπει:

$$\begin{cases}x+3\geq 0\\ x^2-3x+2\geq 0\\ \sqrt[5]{x^2-3x+2}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -3\\ x^2-3x+2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -3\\ x<1 \text{ ή } x>2\end{cases}.$$



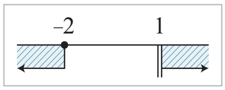
Το x^2-3x+2 έχει $\Delta=1>0$ και ρίζες 1 και 2, άρα:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	−	0	+	

Άρα $D_f=[-3,1)\cup(2,+\infty)$.

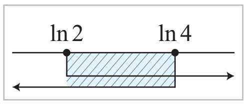
δ. Πρέπει:

$$\begin{cases}x-1\neq 0\\ \dfrac{x+2}{x-1}\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 1\\ (x+2)(x-1)\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 1\\ x\leq -2 \text{ ή } x\geq 1\end{cases}.$$



Άρα $D_f=(-\infty,-2]\cup(1,+\infty)$.

ε. Πρέπει $\begin{cases}e^x-2\geq 0\\ 4-e^x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}e^x\geq 2\\ e^x\leq 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq \ln 2\\ x\leq \ln 4\end{cases}$.



Άρα $D_f=[\ln 2,\ln 4]$.

1. 19 **α.** Πρέπει $1-|x+2|\geq 0 \Leftrightarrow |x+2|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq x+2\leq 1 \Leftrightarrow -3\leq x\leq -1$.

Άρα $D_f=[-3,-1]$.

β. **Α΄ τρόπος**

Πρέπει $|x+1|-x+2\geq 0 \Leftrightarrow |x+1|\geq x-2$, (1).

- Για $x-2\leq 0 \Leftrightarrow x\leq 2$ η (1) ισχύει.

- Για $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$ η (1) γίνεται:

$$x+1 \geq x-2 \quad \text{ή} \quad x+1 \leq -x+2 \Leftrightarrow 1 \geq -2 \text{ που ισχύει ή } 2x \leq 1.$$

Άρα, για $x>2$ η (1) ισχύει.

Συνεπώς, η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $D_f = \mathbb{R}$.

Β΄ τρόπος

Παρατηρούμε ότι $|x+1|-x+2=|x+1|-(x+1)+3$.

Επειδή για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\alpha| \geq \alpha \Leftrightarrow |\alpha|-\alpha \geq 0$, άρα:

$$|x+1|-(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow |x+1|-(x+1)+3 \geq 3 \geq 0.$$

Συνεπώς, ο περιορισμός $|x+1|-x+2 \geq 0 \Leftrightarrow |x+1|-(x+1)+3 \geq 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $D_f = \mathbb{R}$.

γ. Πρέπει:

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ 2-\sqrt[3]{4-x^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4 \leq 0 \\ \sqrt[3]{4-x^2} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ 4-x^2 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x^2 \geq -4 \text{ που ισχύει} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Άρα $D_f = [-2, 2]$.

δ. Πρέπει $x^2-5x+6>0$.

Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει $\Delta = 1 > 0$ και ρίζες 2 και 3, άρα πρόσημο:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	−	0	+	

Άρα $D_f = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

ε. Πρέπει:

$$\begin{cases} 9-x^2 \neq 0 \\ \dfrac{x^2-4}{9-x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq 9 \\ (x^2-4)(9-x^2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-9) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x-3)(x+3) < 0.$$

Έχουμε:

x	$-\infty$		-3		-2		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
Γινόμενο		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα:

Συνεπώς $D_f = (-3,\,-2) \cup (2,\,3)$.

1. 20 **α.** Πρέπει:

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 6x + 9) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)^2 \ge 0.$$

1	-5	3	9	-1
↓	-1	6	-9	
1	-6	9	$\boxed{0}$	

(σχ. Horner)

Είναι:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$(x+1)\cdot(x-3)^2$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Άρα, πρέπει $x \ge -1$, συνεπώς $D_f = [-1,\,+\infty)$.

β. Πρέπει:

$$\begin{cases} e^x + 1 \ne 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x + 1 \ne 0 \\ (e^x - 1)(e^x + 1) > 0 \end{cases} \underset{e^x+1>1>0}{\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}} e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

Άρα $D_f = (0, +\infty)$.

γ. Πρέπει $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και επιπλέον:

$$\left\{1 - \frac{x^3 + 2x - 4}{x - 2} \geq 0 \quad \text{και} \quad \sqrt{1 - \frac{x^3 + 2x - 4}{x - 2}} \neq 0\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{x^3 + 2x - 4}{x - 2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x - 2 - x^3 - 2x + 4}{x - 2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x^3 - x + 2}{x - 2} > 0 \Leftrightarrow$$

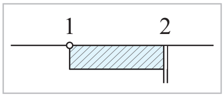
$$\Leftrightarrow \frac{x^3 + x - 2}{x - 2} < 0 \Leftrightarrow \left(x^3 + x - 2\right)(x - 2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)\left(x^2 + x + 2\right)(x - 2) < 0.$$

1	0	1	–2	1
↓	1	1	2	
1	1	2	$\boxed{0}$	

Έχουμε:

x	$-\infty$ 1	2	$+\infty$
x – 1	– 0	+	+
$x^2 + x + 2$	+	+	+
x – 2	–	– 0	+
Γινόμενο	+ 0	– 0	+



Άρα $x \in (1, 2)$, οπότε $D_f = (1, 2)$.

δ. Πρέπει ημ^{2}x + συνx – συν^{2}x ≠ 0. Έχουμε:

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2 x = 0 \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x) + \sigma\upsilon\nu x(1 - \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + 2\sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu x = 0 \ \text{ ή } \ 1 + 2\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 1 \ \text{ ή } \ \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 1 \ \text{ ή } \ \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \ \text{ ή } \ x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Άρα $D_f = \mathbb{R} - \left\{2\kappa\pi, 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \ \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$.

ε. Πρέπει:

$$\begin{cases}|x|-3>0\\ \ln(|x|-3)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|>3\\ |x|-3>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|>3\\ |x|>4\end{cases} \Leftrightarrow x<-4 \text{ ή } x>4.$$

Άρα $D_f=(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$.

1. 21 α. Πρέπει:

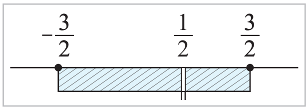
$$x^3-5x^2+6x\neq 0 \Leftrightarrow x(x^2-5x+6)\neq 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x-3)\neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\neq 0 \text{ και } x\neq 2 \text{ και } x\neq 3.$$

Άρα $D_f=\mathbb{R}-\{0,\,2,\,3\}=(-\infty,\,0)\cup(0,\,2)\cup(2,\,3)\cup(3,\,+\infty)$.

β. Πρέπει:

$$\begin{cases}2x-1\neq 0\\ 9-4x^2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \dfrac{1}{2}\\ x^2\leq \dfrac{9}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \dfrac{1}{2}\\ |x|\leq \dfrac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{3}{2}\leq x\leq \dfrac{3}{2}\end{cases}.$$

Άρα $D_f=\left[-\dfrac{3}{2},\,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},\,\dfrac{3}{2}\right]$.



γ. Πρέπει $\begin{cases}e-e^x>0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}e^x<e^1\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<1\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1.$ Άρα $D_f=(0,\,1)$.

δ. Πρέπει:

$$\begin{cases}2x-1\geq 0\\ x^2-x+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq \dfrac{1}{2}\\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{2},$$

διότι το x^2-x+1 έχει $\Delta=-3<0$, συνεπώς $x^2-x+1>0,\ x\in\mathbb{R}$.

Άρα $D_f=\left[\dfrac{1}{2},\,+\infty\right)$.

1. 22 α. Πρέπει $e^{2x}-3e^x+2\neq 0,\ (1)$.

Θέτουμε $\omega=e^x$ και έχουμε:

$$e^{2x}-3e^x+2=0 \Leftrightarrow \omega^2-3\omega+2=0 \Leftrightarrow \omega=1 \text{ ή } \omega=2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^x=1 \text{ ή } e^x=2 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=\ln 2.$$

Συνεπώς, η (1) ισχύει, όταν $x\neq 0$ και $x\neq \ln 2$.

Άρα $D_f=\mathbb{R}-\{0,\,\ln 2\}=(-\infty,\,0)\cup(0,\,\ln 2)\cup(\ln 2,\,+\infty)$.

Το τριώνυμο $\omega^2-3\omega+2$ έχει $\Delta=1>0$ και ρίζες: $\omega_1=1,\ \omega_2=2$.

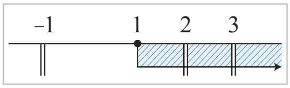
β. Πρέπει:

$$\begin{cases} x-1\ge 0 \\ x^3-4x^2+x+6\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ (x+1)(x^2-5x+6)\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ (x+1)(x-2)(x-3)\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ne -1 \text{ και } x\ne 2 \text{ και } x\ne 3 \end{cases}.$$

1	–4	1	6	–1
↓	–1	5	–6	
1	–5	6	$\boxed{0}$	

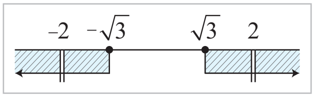


Άρα $D_f=[1,\ 2)\cup(2,\ 3)\cup(3,\ +\infty)$.

γ. Πρέπει:

$$\begin{cases} x^2-3\ge 0 \\ \sqrt{x^2-3}-1\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\ge 3 \\ \sqrt{x^2-3}\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\ge \sqrt{3} \\ x^2-3\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -\sqrt{3} \text{ ή } x\ge\sqrt{3} \\ x^2\ne 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -\sqrt{3} \text{ ή } x\ge\sqrt{3} \\ x\ne \pm 2 \end{cases}.$$



Άρα $D_f=(-\infty,\ -2)\cup\left(-2,\ -\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},\ 2\right)\cup(2,\ +\infty)$.

1. 23 α. Πρέπει $\begin{cases} 2x>0 \\ x-1>0 \\ \ln(2x)-\ln(x-1)-1\ne 0 \end{cases}$. Έχουμε:

- $2x>0 \Leftrightarrow x>0$,
- $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$,
- είναι $\ln(2x)-\ln(x-1)-1=0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)=1 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x-1}=e \Leftrightarrow$

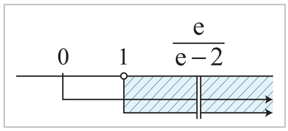
$$\Leftrightarrow 2x=e(x-1) \Leftrightarrow 2x=ex-e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-ex=-e \Leftrightarrow (2-e)x=-e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-e}{2-e}=\frac{e}{e-2}.$$

Συνεπώς $\ln(2x)-\ln(x-1)-1\ne 0$, όταν $x\ne\dfrac{e}{e-2}$.

Άρα $D_f=\left(1,\ \dfrac{e}{e-2}\right)\cup\left(\dfrac{e}{e-2},\ +\infty\right)$.



β. Πρέπει $3^x-4\ne 0 \Leftrightarrow 3^x\ne 4 \Leftrightarrow \ln 3^x\ne \ln 4 \Leftrightarrow x\ln 3 \Leftrightarrow \ln 4 \Leftrightarrow x\ne\dfrac{\ln 4}{\ln 3}$.

Άρα $D_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\ln 4}{\ln 3}\right\} = \left(-\infty, \dfrac{\ln 4}{\ln 3}\right) \cup \left(\dfrac{\ln 4}{\ln 3}, +\infty\right)$.

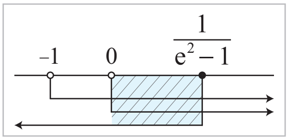
γ. Πρέπει:

- $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$,
- $x > 0$,
- $\ln(x+1) - \ln x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \geq 2 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x} \geq e^2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow (1-e^2)x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (1-e^2)x \geq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{-1}{1-e^2} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{e^2-1}.$$

Άρα $D_f = \left(0, \dfrac{1}{e^2-1}\right]$.



δ. Πρέπει $e^x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \ln 3$. Άρα $D_f = [\ln 3, +\infty)$.

ε. Πρέπει $e^x - e^{-x} - 4 \neq 0$. Έχουμε:

$$e^x - e^{-x} - 4 = 0 \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} e^{2x} - 1 - 4e^x = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0.$$

Θέτουμε $\omega = e^x > 0$, άρα $\omega^2 - 4\omega - 1 = 0$ με $\Delta = 20 > 0$ και ρίζες:

$$\omega_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{20}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5},$$

οπότε $\omega = 2 - \sqrt{5} < 0$: απορρίπτεται ή $\omega = 2 + \sqrt{5}$.

Άρα $e^x = 2 + \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \ln(2+\sqrt{5})$.

Συνεπώς $e^x - e^{-x} - 4 \neq 0$, όταν $x \neq \ln(2+\sqrt{5})$.

Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{\ln(2+\sqrt{5})\} = (-\infty, \ln(2+\sqrt{5})) \cup (\ln(2+\sqrt{5}), +\infty)$.

στ. Πρέπει $e^x - 3 + 2e^{-x} \geq 0 \overset{\cdot e^x > 0}{\Leftrightarrow} e^{2x} - 3e^x + 2 \geq 0$.

Αν $e^x = \omega > 0$, τότε:

$$\omega^2 - 3\omega + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \omega \leq 1 \text{ ή } \omega \geq 2.$$

Συνεπώς:

$$0 < e^x \leq 1 \text{ ή } e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ ή } x \geq \ln 2.$$

Άρα $D_f = (-\infty, 0] \cup [\ln 2, +\infty)$.

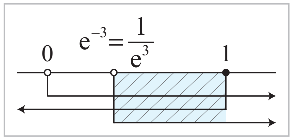
Το $\omega^2 - 3\omega + 2$ έχει $\Delta = 1 > 0$ και ρίζες τις 1 και 2, άρα:

ω	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\omega^2 - 3\omega + 2$		+	0	−	0	+	

1. 24 **α.** Η $f(x)=(x+2)^{x^2+1}=e^{(x^2+1)\cdot\ln(x+2)}$ ορίζεται, όταν $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$.

Άρα $D_f=(-2,+\infty)$.

β. Η $f(x)=(\ln x+3)^{\sqrt{1-x}}=e^{\sqrt{1-x}\cdot\ln(\ln x+3)}$ ορίζεται, όταν:



- $1-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$,
- $x>0$,
- $\ln x+3>0 \Leftrightarrow \ln x>-3 \Leftrightarrow x>e^{-3}$.

Άρα $D_f=\left(\frac{1}{e^3},1\right]$.

1. 25 **α.** Η f έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, (βασική συνάρτηση).

β. $x\in[-2,4) \Leftrightarrow -2\leq x<4 \Leftrightarrow -4\leq 2x<8 \Leftrightarrow -1\leq 2x+3<11 \Leftrightarrow -1\leq f(x)<11$.

Άρα, το σύνολο τιμών της $f([-2,4))=[-1,11)$.

γ. **Α΄ τρόπος**

$f(x)=x^2-4x+3=x^2-4x+4-1=(x-2)^2-1$.

Επίσης $(x-2)^2\geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2-1\geq -1 \Leftrightarrow f(x)\geq -1$ με $f(2)=-1$.

Άρα $f(\mathbb{R})=[-1,+\infty)$.

Β΄ τρόπος

Σύμφωνα με την Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου καθώς και με την επόμενη ενότητα, έχουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο για:

$$x_0=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{-4}{2\cdot 1}=2 \text{ το } -\frac{\Delta}{4\alpha}=-\frac{4}{4\cdot 1}=-1.$$

Άρα $f(\mathbb{R})=[-1,+\infty)$.

δ. $x\geq 1 \Leftrightarrow 2x\geq 2 \Leftrightarrow e^{2x}\geq e^2 \Leftrightarrow e^{2x}-4\geq e^2-4 \Leftrightarrow f(x)\geq e^2-4$ με $f(1)=e^2-4$.

Άρα $f([1,+\infty))=[e^2-4,+\infty)$.

ε. Αρχικά, πρέπει $x>0$ και $\ln x-1\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\geq 1 \Leftrightarrow x\geq e$.

Άρα $D_f=[e,+\infty)$ και τότε:

$\sqrt{\ln x-1}\geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{\ln x-1}\leq 0 \Leftrightarrow 3-\sqrt{\ln x-1}\leq 3 \Leftrightarrow f(x)\leq 3$ με $f(e)=3$.

Άρα $f([e,+\infty))=(-\infty,3]$.

στ. Αρχικά, πρέπει $e^{2x}-1\geq 0 \Leftrightarrow e^{2x}\geq 1 \Leftrightarrow 2x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$. Άρα $D_f=[0,+\infty)$.

Τότε $\sqrt{e^{2x}-1}\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq 0$ με $f(0)=0$. Άρα $f([0,+\infty))=[0,+\infty)$.

1. 26 **α.** • Για $x \in \Delta_1 = (-4, -1) \Leftrightarrow -4 < x < -1 \Leftrightarrow e^{-4} < e^x < e^{-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{-4} - 1 < e^x - 1 < e^{-1} - 1 \Leftrightarrow e^{-4} - 1 < f(x) < e^{-1} - 1.$$

Άρα $f(\Delta_1) = \left(e^{-4} - 1,\ e^{-1} - 1\right)$.

• Για $x \in \Delta_2 = [-1, 2] \Leftrightarrow -1 \le x \le 2 \Leftrightarrow -3 \le 3x \le 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -4 \le 3x - 1 \le 5 \Leftrightarrow -4 \le f(x) \le 5.$$

Άρα $f(\Delta_2) = [-4, 5]$.

Τελικά, σύνολο τιμών είναι το:

$$f(\mathbb{R}) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left(e^{-4} - 1,\ e^{-1} - 1\right) \cup [-4, 5] = [-4, 5].$$

β. $\left.\begin{array}{l} 2 < x < 5 \Rightarrow 4 < x^2 < 25 \\ 2 < x < 5 \Rightarrow -10 < -2x < -4 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} -6 < x^2 - 2x < 21 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -3 < x^2 - 2x + 3 < 24 \Rightarrow -3 < f(x) < 24.$$

Άρα $f((2, 5)) = (-3, 24)$.

γ. $\left.\begin{array}{l} 1 \le x \le 4 \Rightarrow 1 \le x^2 \le 16 \\ 1 \le x \le 4 \Rightarrow -24 \le -6x \le -6 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} -23 \le x^2 - 6x \le 10 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -21 \le x^2 - 6x + 2 \le 12 \Rightarrow -21 \le f(x) \le 12.$$

Άρα $f([1, 4]) = [-21, 12]$.

1. 27 **α.** Για $x_0 < 0$ είναι:

$$y_0 = 2 \Leftrightarrow f(x_0) = 2 \Leftrightarrow x_0^2 - 7 = 2 \Leftrightarrow x_0^2 = 9 \overset{x_0<0}{\Leftrightarrow} x_0 = -3,$$

δηλαδή $f(-3) = 2$, άρα $y_0 = 2 \in f(\mathbb{R})$.

Ή για $x_0 \ge 0$ είναι:

$$y_0 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x_0 + 1} = 2 \Leftrightarrow x_0 + 1 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 3,$$

δηλαδή $f(3) = 2$, άρα $y_0 = 2 \in f(\mathbb{R})$.

β. Για $x > 1$ έχουμε $\left.\begin{array}{r} x - 2 > -1 \Rightarrow e^{x-2} > e^{-1} \\ x + 1 > 2 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x-2} + x + 1 > 2 + e^{-1} \Rightarrow f(x) > 2 + e^{-1}$ και

αφού $y_0 = 1 < 2 + e^{-1}$, δεν υπάρχει $x_0 > 1$ με $f(x_0) = y_0 = 1$.

Επίσης, για $x \le 1$ είναι $x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 + 5 \ge 5 > 1$. Συνεπώς, δεν υπάρχει $x_0 \le 1$ με $f(x_0) = y_0 = 1$.

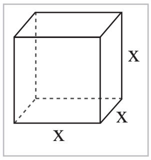
Άρα, το 1 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

1. 28 Είναι x, y > 0 με $x + y = \alpha > 0 \Leftrightarrow y = \alpha - x$, όπου $y > 0 \Leftrightarrow \alpha - x > 0 \Leftrightarrow x < \alpha$.

Το άθροισμα των τετραγώνων είναι:

$$A = x^2 + y^2 \quad \text{ή} \quad A(x) = x^2 + (\alpha - x)^2,\ 0 < x < \alpha.$$

1. 29 **α.** Έστω $x > 0$ η ακμή του κύβου. Τότε η επιφάνειά του είναι:

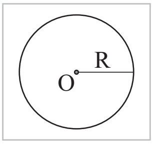


$$E = 6x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{E}{6} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{\frac{E}{6}}.$$

Άρα, ο όγκος του κύβου είναι $V = x^3 = \left(\sqrt{\frac{E}{6}}\right)^3$. Συνεπώς:

$$V(E) = \left(\sqrt{\frac{E}{6}}\right)^3,\ E > 0.$$

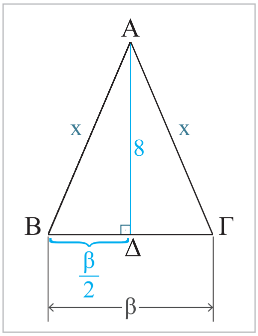
β. Μήκος κύκλου: $L = 2\pi R \Leftrightarrow R = \frac{L}{2\pi}$.



Εμβαδόν κυκλικού δίσκου: $E = \pi R^2$.

Άρα $E = \pi \cdot \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \Rightarrow E = \pi \cdot \frac{L^2}{4\pi^2}$. Συνεπώς $E(L) = \frac{L^2}{4\pi}$, $L > 0$.

1. 30 Το ύψος $A\Delta = 8$ είναι και διάμεσος, άρα $B\Delta = \frac{\beta}{2}$.



Το $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ έχει εμβαδόν $E = (AB\Gamma) = \frac{\beta \cdot 8}{2} = 4\beta$.

Από πυθαγόρειο θεώρημα στο $A\overset{\Delta}{B}\Delta$ έχουμε:

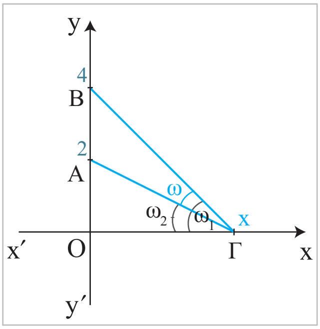
$$x^2 = 8^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = 64 + \frac{\beta^2}{4} \Leftrightarrow \beta^2 = 4(x^2 - 64) \Leftrightarrow$$

$$\overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = 2\sqrt{x^2 - 64}$$

όπου $AB > A\Delta \Rightarrow x > 8$.

Άρα $E = 4 \cdot 2\sqrt{x^2 - 64}$ ή $E(x) = 8 \cdot \sqrt{x^2 - 64},\ x > 8$.

1. 31 Από το σχήμα έχουμε:



$$\omega = \omega_1 - \omega_2$$

άρα:

$$\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi(\omega_1 - \omega_2) \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{\varepsilon\varphi\omega_1 - \varepsilon\varphi\omega_2}{1 + \varepsilon\varphi\omega_1 \cdot \varepsilon\varphi\omega_2}$$

όπου:

$$O\overset{\Delta}{B}\Gamma:\ \varepsilon\varphi\omega_1 = \frac{OB}{O\Gamma} = \frac{4}{x}, \quad O\overset{\Delta}{A}\Gamma:\ \varepsilon\varphi\omega_2 = \frac{OA}{O\Gamma} = \frac{2}{x}.$$

Συνεπώς:

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\frac{4}{x}-\frac{2}{x}}{1+\frac{4}{x}\cdot\frac{2}{x}}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{8}{x^2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=\frac{\frac{2}{x}}{\frac{x^2+8}{x^2}}=\frac{2x^2}{x\left(x^2+8\right)}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=\frac{2x}{x^2+8}$$

όπου $\Gamma\in Ox$, άρα $x>0$.

Επομένως, η εφω εκφράζεται ως προς x από τη συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+8},\ \ x>0.$$

1. 32 Ο βραχίονας έχει μήκος $x=0,44\text{ m}=44\text{ cm}$.

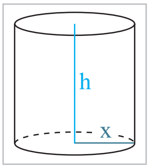
α. Αν ο βραχίονας προέρχεται από άνδρα, τότε αυτός θα είχε ύψος:

$$A(44)=0,03\cdot 44^2+1,25\cdot 44+61=58,08+55+61=174,08\text{ cm} \text{ ή } 1,7408\text{ m}.$$

β. Αν ο βραχίονας προέρχεται από γυναίκα, τότε αυτή θα είχε ύψος:

$$\Gamma(44)=\frac{44^2}{100}+1,35\cdot 44+\frac{1.320}{44-4}+46=19,36+59,4+33+46=$$
$$=157,76\text{ cm} \text{ ή } 1,5776\text{m}.$$

1. 33 Έστω h το ύψος και V ο όγκος του κουτιού.



Κάθε βάση έχει εμβαδόν:

$$E_\beta(x)=\pi x^2,\ \ x>0.$$

Άρα, καθεμία βάση έχει κόστος:

$$B(x)=\pi x^2\cdot 2\text{ €},\ \ x>0.$$

Η παράπλευρη (κυλινδρική) επιφάνεια έχει εμβαδόν $E_\pi(x)=2\pi x\cdot h$.

Από τη σχέση όγκου του κουτιού προκύπτει:

$$V=E_\beta\cdot h=\pi x^2\cdot h\Rightarrow 400=\pi x^2\cdot h\Rightarrow h=\frac{400}{\pi x^2},\ \ x>0.$$

Συνεπώς $E_\pi(x)=2\cancel{\pi x}\cdot\frac{400}{\cancel{\pi x^2}}\Rightarrow E_\pi(x)=\frac{800}{x},\ \ x>0.$

Άρα, το κόστος για την παράπλευρη επιφάνεια είναι:

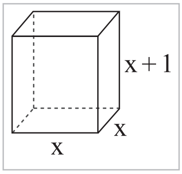
$$\Pi(x)=\frac{800}{x}\cdot 2,5\Rightarrow \Pi(x)=\frac{2.000}{x}\text{ €}.$$

Τελικά:

- Ύψος κουτιού: $h(x)=\dfrac{400}{\pi x^2},\ x>0$.
- Συνολικό κόστος: $K(x)=2B(x)+\Pi(x)=4\pi x^2+\dfrac{2.000}{x},\ x>0$, σε € / cm².

1. 34 Βάση: τετράγωνο πλευράς x.

Ύψος: $\upsilon = x+1,\ x>0$.



α. Κάθε βάση έχει εμβαδόν x^2 και κάθε έδρα της παράπλευρης επιφάνειας έχει εμβαδόν $x\cdot(x+1)$, άρα:

$$f(x)=2x^2+4\cdot x(x+1)\Leftrightarrow f(x)=6x^2+4x,\ x>0.$$

Για τον όγκο έχουμε:

$$g(x)=x\cdot x\cdot(x+1)\Leftrightarrow g(x)=x^3+x^2,\ x>0.$$

β. Έχουμε:

$$f(x)=240\Leftrightarrow 6x^2+4x=240\Leftrightarrow 6x^2+4x-240=0\Leftrightarrow 3x^2+2x-120=0$$

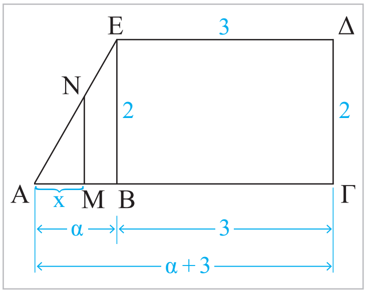
με $\Delta=1444>0$ και ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm 38}{6}$, άρα:

$$x=\frac{-2+38}{6}=6 \quad ή \quad x=\frac{-2-38}{6}=-\frac{20}{3}<0,\ \text{απορρίπτεται.}$$

Συνεπώς $x=6$ cm.

Άρα, η βάση είναι τετράγωνο πλευράς 6 cm και το ύψος είναι $x+1=7$ cm.

1. 35 Είναι: $Γ\Delta = BE = 2,\ BΓ = AΓ - AB = \alpha+3-\alpha = 3$, $\Delta E = BΓ = 3$.

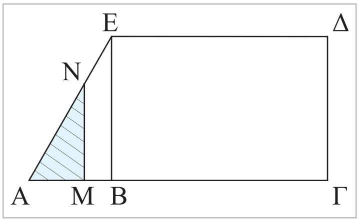


Είναι $\overset{\Delta}{AMN}\approx\overset{\Delta}{ABE}$ (ορθογώνια με κοινή $\hat{A}<90°$), οπότε:

$$\frac{AM}{MN}=\frac{AB}{BE}\Rightarrow\frac{x}{MN}=\frac{\alpha}{2}\Rightarrow MN=\frac{2x}{\alpha}.$$

i. Όταν το M διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα AB, τότε το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι:

$$f(x)=\frac{AM\cdot MN}{2}=\frac{x\cdot\frac{2x}{\alpha}}{2}=\frac{x^2}{\alpha},\ 0\le x\le\alpha.$$

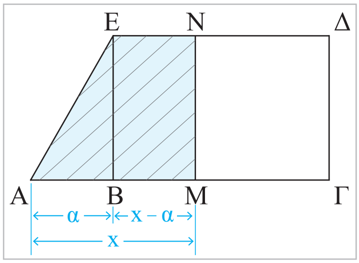


ii. Όταν το M διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα BΓ, τότε το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι:

$$f(x)=(ABE)+(BENM)=\frac{\alpha\cdot 2}{2}+(x-\alpha)\cdot 2\Rightarrow$$

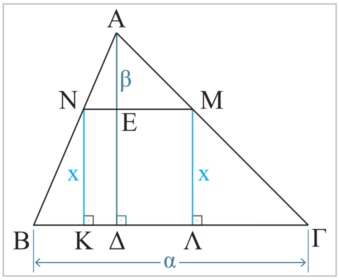
$$\Rightarrow f(x)=\alpha+2x-2\alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=2x-\alpha,\ \ \alpha<x\leq\alpha+3.$$



Άρα $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\alpha}, & 0\leq x\leq\alpha\\ 2x-\alpha, & \alpha<x\leq\alpha+3\end{cases}$.

1. 36 Σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή έχουμε:



- $\dfrac{BK}{KN}=\dfrac{B\Delta}{A\Delta}\Rightarrow\dfrac{BK}{x}=\dfrac{B\Delta}{\beta}\Rightarrow\dfrac{BK}{B\Delta}=\dfrac{x}{\beta}$,
- $\dfrac{\Gamma\Lambda}{\Lambda M}=\dfrac{\Gamma\Delta}{A\Delta}\Rightarrow\dfrac{\Gamma\Lambda}{x}=\dfrac{\Gamma\Delta}{\beta}\Rightarrow\dfrac{\Gamma\Lambda}{\Gamma\Delta}=\dfrac{x}{\beta}$,

όπου $0\leq x\leq\beta$.

Άρα $\dfrac{BK}{B\Delta}=\dfrac{\Gamma\Lambda}{\Gamma\Delta}=\dfrac{BK+\Gamma\Lambda}{B\Delta+\Gamma\Delta}=\dfrac{B\Gamma-K\Lambda}{B\Gamma}=\dfrac{\alpha-K\Lambda}{\alpha}$,

οπότε:

$$\frac{x}{\beta}=\frac{\alpha-K\Lambda}{\alpha}\Leftrightarrow \alpha x=(\alpha-K\Lambda)\cdot\beta\Leftrightarrow \alpha x=\alpha\beta-\beta\cdot K\Lambda\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta\cdot K\Lambda=\alpha\beta-\alpha x\Leftrightarrow K\Lambda=\frac{\alpha\beta-\alpha x}{\beta}.$$

Ή πιο εύκολα:

$$\frac{NM}{B\Gamma}=\frac{AE}{A\Delta}\Rightarrow NM=\frac{AE\cdot B\Gamma}{A\Delta}=\frac{(\beta-x)d}{\beta}=\frac{\alpha\beta-\alpha x}{\beta}.$$

Το εμβαδόν του ΚΛΜΝ είναι:

$$E(x)=K\Lambda\cdot KN=\frac{\alpha\beta-\alpha x}{\beta}\cdot x=\alpha x-\frac{\alpha x^2}{\beta}.$$

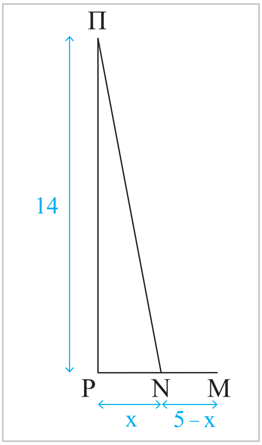
Άρα $E(x)=\alpha x-\dfrac{\alpha x^2}{\beta}$, $0\leq x\leq\beta$.

Η περίμετρος του ΚΛΜΝ είναι:

$$\Pi(x)=2K\Lambda+2KN=2\cdot\frac{\alpha\beta-\alpha x}{\beta}+2\cdot x=2\alpha-\frac{2\alpha}{\beta}x+2x.$$

Άρα $\Pi(x)=\left(2-\dfrac{2\alpha}{\beta}\right)x+2\alpha$, $0\leq x\leq\beta$.

1. 37 Είναι $\overset{\Delta}{\Pi P N}$ ορθογώνιο, άρα:



$$\Pi N^2 = \Pi P^2 + PN^2 = 14^2 + x^2 = x^2 + 196.$$

Επομένως $\Pi N = \sqrt{x^2 + 196},\ 0 \le x \le 5$.

Ο απαιτούμενος χρόνος είναι:

- για το σκάφος:

$$\upsilon_{\sigma\kappa} = \frac{S_{\sigma\kappa}}{t_{\sigma\kappa}} \Leftrightarrow t_{\sigma\kappa} = \frac{S_{\sigma\kappa}}{\upsilon_{\sigma\kappa}} \quad \acute{\eta} \quad t_{\sigma\kappa} = \frac{\sqrt{x^2+196}}{6},$$

- για την πεζοπορία:

$$\upsilon_{\pi} = \frac{S_{\pi}}{t_{\pi}} \Leftrightarrow t_{\pi} = \frac{S_{\pi}}{\upsilon_{\pi}} \quad \acute{\eta} \quad t_{\pi} = \frac{5-x}{2}.$$

Ο συνολικός χρόνος μετακίνησης των εργαζομένων είναι:

$$t_{o\lambda} = t_{\sigma\kappa} + t_{\pi} \quad \acute{\eta} \quad t(x) = \frac{\sqrt{x^2+196}}{6} + \frac{5-x}{2},\ 0 \le x \le 5,\ t: \text{σε ώρες}.$$

2η Ενότητα

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Α. Του τύπου Σωστό / Λάθος

2. 1 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος.

2. 2 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό.

2. 3 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό.

2. 4 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό.

2. 5 **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό.

2. 6 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος.

Β. Αντιστοίχισης

2. 7 $1\to\delta,\ 2\to\varepsilon,\ 3\to\alpha,\ 4\to\beta,\ 5\to\gamma.$

2. 8 $1\to\gamma,\ 2\to\delta,\ 3\to\beta,\ 4\to\varepsilon,\ 5\to\alpha.$

2. 9 $1\to\delta,\ 2\to\varepsilon,\ 3\to\alpha,\ 4\to\gamma,\ 5\to\beta.$

2. 10 $1\to\gamma,\ 2\to\alpha,\ 3\to\varepsilon,\ 4\to\delta,\ 5\to\beta.$

Γ. Πολλαπλής επιλογής

2. 11 $\mathbf{A}\to\beta,\ \mathbf{B}\to\gamma,\ \mathbf{\Gamma}\to\alpha,\ \mathbf{\Delta}\to\gamma,\ \mathbf{E}\to\gamma,\ \mathbf{\Sigma T}\to\delta.$

Δ. Συμπλήρωσης

2. 12 **α.** $f(\alpha)=\beta$ **β.** τετμημένων **γ.** τεταγμένων

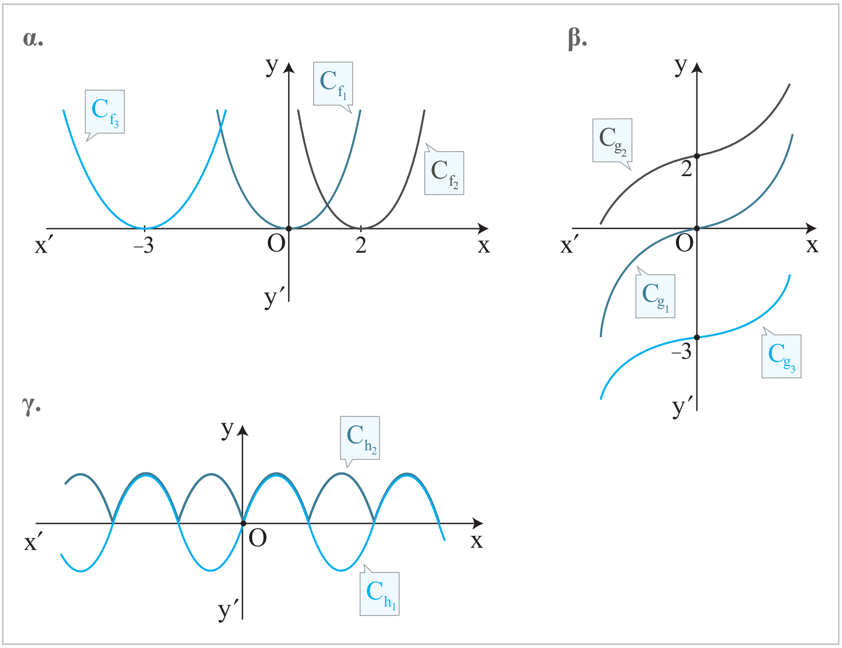
δ. άξονα συμμετρίας, $x=0$ **ε.** κέντρο συμμετρίας, $O(0, 0)$.

2. 13 **α.** $f(x)=0,\ D_f$ **β.** $f(x)>0,\ D_f$ **γ.** $f(x)<0,\ D_f$

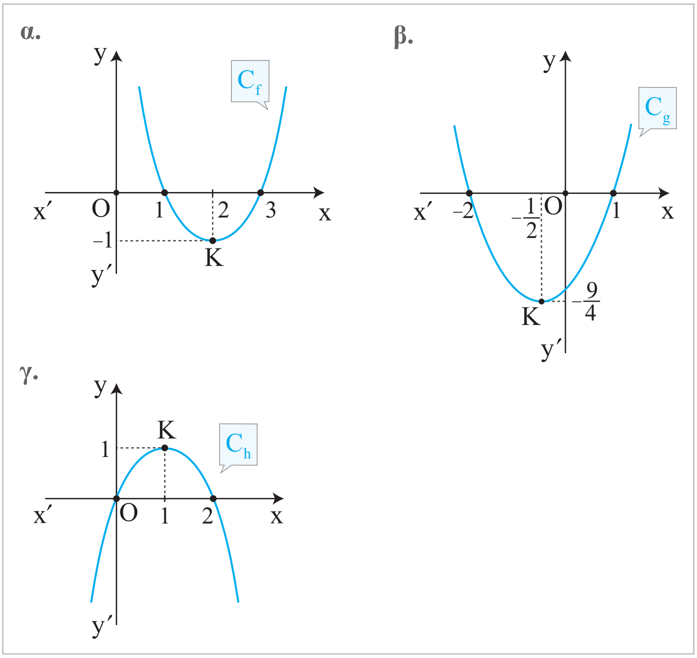
δ. $f(x)=g(x),\ D_f\cap D_g$ **ε.** $f(x)>g(x),\ D_f\cap D_g$ **στ.** $f(x)<g(x),\ D_f\cap D_g$.

Ε. Βασικές εφαρμογές – Ασκήσεις εμπέδωσης

2. 14



2. 15



2. 16 **α.** $D_f = \mathbb{R}, \ D_g = (0, +\infty), \ D_h = \mathbb{R}, \ D_\varphi = \mathbb{R}^*$.

β. $f(D_f) = (0, +\infty), \ g(D_g) = \mathbb{R}, \ h(D_h) = [0, +\infty), \ \varphi(D_\varphi) = \mathbb{R}^*$.

γ.

Ανά άξονα	C_f	C_g	C_h	C_φ
x′x	–	(1, 0)	(0, 0)	–
y′y	(0, 1)	–	(0, 0)	–

δ.

	C_f	C_g	C_h	C_φ
πάνω από τον x′x	$\mathbb{R}$	$(1, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
κάτω από τον x′x	$\varnothing$	$(0, 1)$	$\varnothing$	$(-\infty, 0)$

ε. h: άρτια, φ: περιττή.

2. 17 **α.** Ανήκει **β.** Δεν ανήκει **γ.** Ανήκει
δ. Δεν ανήκει **ε.** Ανήκει **στ.** Δεν ανήκει
ζ. Ανήκει **η.** Δεν ανήκει **θ.** Ανήκει
ι. Δεν ανήκει.

2. 18 **α.** (0, 4), (–2, 0) **β.** (0, 3), (1, 0), (3, 0) **γ.** (0, 4), (2, 0)
δ. (0, 5) **ε.** (0, 0) **στ.** (0, 0).

2. 19 **α.** $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ **β.** $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ **γ.** $\mathbb{R} - \{3\}$
δ. $\mathbb{R}$ **ε.** $(1, +\infty)$ **στ.** $(e, +\infty)$.

2. 20 **α.** Άρτια **β.** Περιττή **γ.** Ούτε άρτια ούτε περιττή
δ. Άρτια **ε.** Περιττή **στ.** Ούτε άρτια ούτε περιττή.

2. 21 Κοινά σημεία:
α. $(1, 1), \ (2, 4)$ **β.** $(2, 5), \ (3, 10)$ **γ.** $(0, 5)$ **δ.** $(e, 1)$.
Διαστήματα:
α. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ **β.** $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ **γ.** $(0, +\infty)$ **δ.** $(e, +\infty)$.

ΣΤ. Ασκήσεις για λύση

2. 22 **α.** Είναι $D_f = [-2, 2) \cup (2, 3]$.

β. Το -2 δεν είναι τιμή της f, διότι δεν υπάρχει σημείο της C_f με τεταγμένη -2, (παρατηρούμε ότι το σημείο $(2, -2)$ δεν είναι σημείο της C_f). Το σημείο $(-1, 2) \in C_f$, δηλαδή $f(-1) = 2$. Άρα, το 2 είναι τιμή της f.

γ. Η ευθεία η $y = -1$ τέμνει τη C_f σε δύο σημεία, άρα η εξίσωση $f(x) = -1$ έχει δύο λύσεις.

δ. $f(D_f) = (-2, 2]$: το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της C_f.

ε. Είναι $x \in \{-2\} \cup [0, 1] \cup \{3\}$: οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω στον άξονα $x'x$.

στ. $f(x) < 0 \Leftrightarrow (1, 2) \cup (2, 3)$ και $0 \leq f(x) < 2 \Leftrightarrow x \in [-2, -1) \cup (-1, 1] \cup \{3\}$.

2. 23 **α.** Έχουμε $2 - e^x \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \ln 2$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

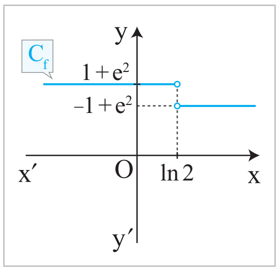
Είναι $e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$. Συνεπώς:

- $|e^x - 2| = e^x - 2$ για $x \geq \ln 2$ και
- $|e^x - 2| = 2 - e^x$ για $x < \ln 2$,

οπότε:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + e^2, & x > \ln 2 \\ 1 + e^2, & x < \ln 2 \end{cases}.$$

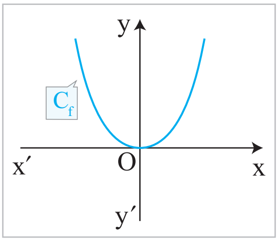
Άρα, η ζητούμενη γραφική παράσταση της f είναι:



Είναι $f(D_f) = \{-1 + e^2, 1 + e^2\}$.

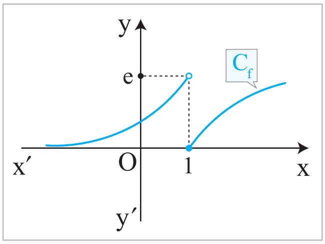
β. Έχουμε $D_f = \mathbb{R}$ και $f(x) = x^2 \cdot |x| = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases}$.

Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



Είναι $f(D_f)=[0,+\infty)$.

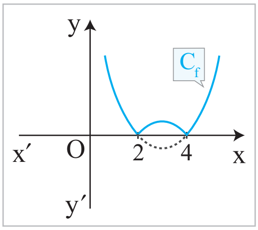
γ. Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



Είναι $f(\mathbb{R})=[0,+\infty)$.

δ. Έχουμε $D_f=\mathbb{R}$ και $x^2-6x+8\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2$ ή $x\geq 4$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



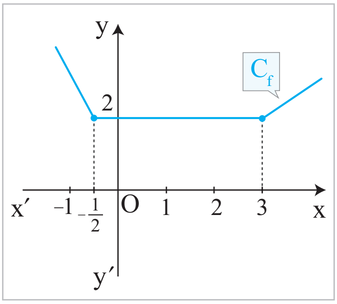
Είναι $f(\mathbb{R})=[0,+\infty)$.

2. 24 α. Έχουμε:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	

$$\text{Συνεπώς } f(x)=\begin{cases}\dfrac{-2x-1+3-x-x}{2}, & x\leq -\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{2x+1+3-x-x}{2}, & -\dfrac{1}{2}<x<3\\[2mm] \dfrac{2x+1-3+x-x}{2}, & x\geq 3\end{cases}=\begin{cases}-2x+1, & x\leq -\dfrac{1}{2}\\[2mm] 2, & -\dfrac{1}{2}<x<3.\\[2mm] x-1, & x\geq 3\end{cases}$$

Η ζητούμενη C_f είναι:

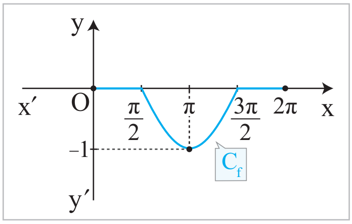


β. Έχουμε $\sqrt{1-\eta\mu^2 x} = \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x} = |\sigma\upsilon\nu x| = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x \quad, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ -\sigma\upsilon\nu x, \ x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$. Συνεπώς:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x}{2}, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x}{2}, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases} \quad \acute{\eta}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ \sigma\upsilon\nu x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}.$$

Άρα, η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:

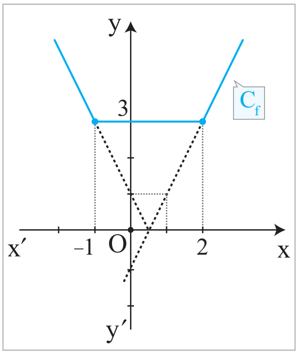


2. 25 α. Έχουμε:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	

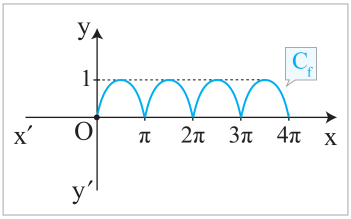
Συνεπώς $f(x)=\begin{cases}-x-1-x+2, & x\leq -1\\ x+1-x+2 & , -1<x<2\\ x+1+x-2 & , x\geq 2\end{cases}=\begin{cases}-2x+1, & x\leq -1\\ 3 & , -1<x<2\\ 2x-1 & , x\geq 2\end{cases}.$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



β. Έχουμε $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x & , x\in[0,\pi]\cup[2\pi,3\pi]\\ -\eta\mu x, & x\in(\pi,2\pi)\cup(3\pi,4\pi]\end{cases}.$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:

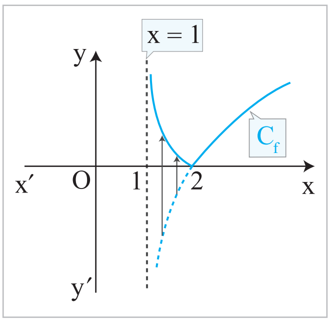


γ. Πρέπει $x-1>0\Leftrightarrow x>1$, άρα $D_f=(1,+\infty)$.

Είναι $\ln(x-1)\geq 0\Leftrightarrow x-1\geq 1\Leftrightarrow x\geq 2$.

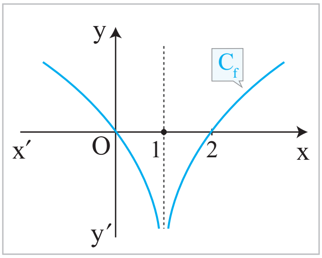
Συνεπώς $f(x)=\begin{cases}\ln(x-1) & , x\geq 2\\ -\ln(x-1), & 1<x<2\end{cases}.$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



δ. Έχουμε $f(x)=\begin{cases}\ln(x-1) & , x>1\\ \ln(-x+1), & x<1\end{cases}$.

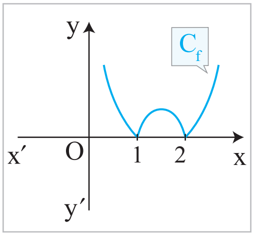
Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



ε. Έχουμε $x^2-3x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$ ή $x\geq 2$. Συνεπώς:

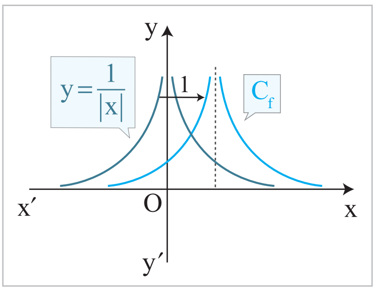
$$f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2 & , x\leq 1 \text{ ή } x\geq 2\\ -x^2+3x-2, & 1<x<2\end{cases}.$$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



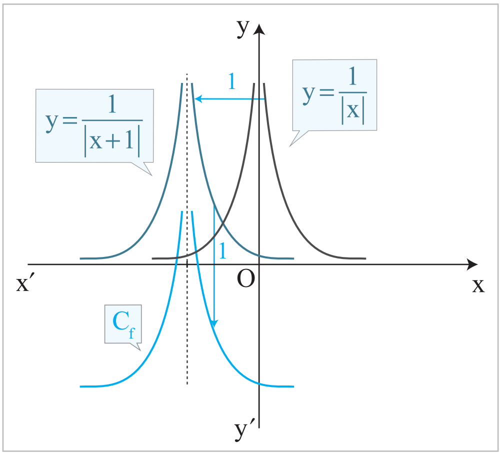
στ. Είναι $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$, άρα $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & , x>1\\ \dfrac{1}{-x+1}, & x<1\end{cases}$.

Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



ζ. Είναι $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, άρα $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} - 1 \ , \ x > -1 \\ \dfrac{1}{-x-1} - 1, \ x < -1 \end{cases}$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



2. 26 α. Είναι $D_f = (0, +\infty)$. Οπότε:

- $0 \notin D_f$, άρα η C_f με τον $y'y$ δεν έχουν κοινά σημεία,
- για $y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$ ή $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = e$.

  Άρα $A(1, 0)$, $B(e, 0)$: κοινά σημεία των C_f, $x'x$.

β. Είναι $D_f = \mathbb{R}^*$. Οπότε:

- $0 \notin D_f$, άρα η C_f με τον $y'y$ δεν έχουν κοινά σημεία,
- για $y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x+\frac{1}{x}} = e^2 \Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

  Άρα $A(1, 0)$: κοινό σημείο των C_f, $x'x$.

γ. Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Οπότε:

- για $x = 0$: $f(0) = \dfrac{2e^0}{e^0 + 2} - 1 = \dfrac{2}{3} - 1 = -\dfrac{1}{3}$, άρα $A\left(0, -\dfrac{1}{3}\right)$: κοινό σημείο των C_f, $y'y$,
- για $y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2e^x}{e^x + 2} = 1 \Leftrightarrow 2e^x = e^x + 2 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$, άρα

  $B(\ln 2, 0)$: κοινό σημείο των C_f, $x'x$.

δ. Είναι $D_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. Οπότε:

- $0\notin D_f$, άρα η C_f, με τον y′y δεν έχουν κοινά σημεία,
- για $y=0\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^2-1}=2\Leftrightarrow x^2-1=8\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=\pm3$.

  Άρα $A(3,0)$, $B(-3,0)$: κοινά σημεία των C_f, x′x.

ε. Είναι $D_f=\mathbb{R}$. Οπότε: $f(0)=2$,

- για $x=0$: $f(0)=2$, άρα A(0, 2): κοινό σημείο των C_f, y′y,
- για $y=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x^3-3x^2+x+2=0\Leftrightarrow(x-2)(x^2-x-1)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=2 \;\text{ ή }\; x=\frac{1\pm\sqrt5}{2},\ \text{άρα } B(2,0),\ \Gamma\left(\frac{1-\sqrt5}{2},0\right),\ \Delta\left(\frac{1+\sqrt5}{2},0\right):$$

  κοινά σημεία των C_f, x′x.

στ. Η f ορίζεται στο $D_f=\mathbb{R}$. Οπότε:

- για $x=0$: $f(0)=\sqrt{e^0}-e^{2\cdot0-3}=1-e^{-3}$, άρα $A(0,1-e^{-3})$: κοινό σημείο των C_f, y′y,
- για $y=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{e^x}=e^{2x-3}\Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}}=e^{2x-3}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=2x-3\Leftrightarrow x=2$, άρα

  B(2, 0): κοινό σημείο των C_f, x′x.

2. 27 Αρχικά $D_f=(-\infty,5)$ και $D_g=(0,+\infty)$.

α.
- Για $x=0$: $f(0)=\log5$. Άρα $A(0,\log5)$: κοινό σημείο των C_f, y′y.
- $0\notin D_g$, άρα η C_g με τον y′y δεν έχουν κοινά σημεία.
- Για $f(x)=0\Leftrightarrow\log(5-x)=0\Leftrightarrow5-x=1\Leftrightarrow x=4$, άρα $B(4,0)$: κοινό σημείο των C_f, x′x.
- Για $g(x)=0\Leftrightarrow\log x=-1\Leftrightarrow x=10^{-1}=\frac{1}{10}$, άρα $\Gamma\left(\frac{1}{10},0\right)$: κοινό σημείο των C_g, x′x.

β. Είναι $x\in D_f\cap D_g=(0,5)$. Πρέπει:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\log(5-x)=1+\log x\Leftrightarrow\log(5-x)-\log x=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log\left(\frac{5-x}{x}\right)=1\Leftrightarrow\frac{5-x}{x}=10\Leftrightarrow x=\frac{5}{11}.$$

Επειδή η $x=\frac{5}{11}\in(0,5)$, άρα είναι δεκτή.

Για $x=\frac{5}{11}$: $f(x)=\log\left(5-\frac{5}{11}\right)=\log\frac{50}{11}$.

Άρα $\Delta\left(\frac{5}{11},\ \log\frac{50}{11}\right)$: κοινό σημείο των C_f, C_g.

2. 28 α. Είναι $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$, $D_g=\mathbb{R}$. Στο $D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$ πρέπει:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\frac{3x-1}{x+2}=2\Leftrightarrow 3x-1=2(x+2)\Leftrightarrow x=5:\ \text{δεκτή.}$$

Άρα, κοινό σημείο των C_f, C_g είναι το Α(5, 2) (διότι g(5) = 2).

β. Είναι $D_f=D_g=\mathbb{R}$. Πρέπει:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3-18=8x^2-21x\Leftrightarrow x^3-8x^2+21x-18=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-3)(x^2-5x+6)=0\Leftrightarrow x=3\ \text{ ή }\ x=2:\ \text{δεκτές.}$$

Συνεπώς $f(3)=9$ και $f(2)=-10$. Άρα Α(3, 9) και Β(2, –10): κοινά σημεία των C_f, C_g.

γ. Είναι $D_f=(e^3,+\infty)$, $D_g=\mathbb{R}$. Στο $D_f\cap D_g=(e^3,+\infty)$ πρέπει:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\ln x(\ln x-3)=-2\Leftrightarrow\ln^2x-3\ln x+2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln x=1\ \text{ ή }\ \ln x=2\Leftrightarrow x=e\ \text{ ή }\ \ln x=2\Leftrightarrow x=e^2:\ \text{δεκτές.}$$

Συνεπώς $f(e)=-2$ και $f(e^2)=-2$. Άρα $A(e,-2)$ και $B(e^2,-2)$: κοινά σημεία των C_f, C_g.

δ. Είναι $D_f=D_g=(1,+\infty)$. Για $x\in(1,+\infty)$ πρέπει:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\ln(x-1)-\ln3=\frac{1}{3}\ln(x-1)\Leftrightarrow\ln(x-1)=\frac{3\ln3}{2}=\ln\sqrt{27}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=\sqrt{27}\Leftrightarrow x=3\sqrt{3}+1>1:\ \text{δεκτή.}$$

Για $x=3\sqrt{3}+1$: $f(3\sqrt{3}+1)=\ln\sqrt{3}$.

Άρα κοινό σημείο των C_f, C_g είναι το $A(3\sqrt{3}+1,\ \ln\sqrt{3})$.

2. 29 α. Είναι:

$A(-2,0)$, $B(-1,1)$, άρα ΑΒ: $y=x+2$ και $\Gamma(-1,0)$, $\Delta(0,1)$, άρα ΓΔ: $y=x+1$.

Συνεπώς $f(x)=\begin{cases}x+2, & -2<x\le-1\\ x+1, & -1<x\le0\end{cases}$.

β. Είναι $A(-2,0)$, $B(-1,2)$, $\Gamma(0,0)$, άρα ΑΒ: $y=2x+4$ και ΒΓ: $y=-2x$.

Συνεπώς $f(x)=\begin{cases} 2x+4, & -2\le x\le -1 \\ -2x, & -1<x\le 0 \end{cases}$.

γ. Είναι $f(x)=\begin{cases} 2, & -1\le x<2 \\ 1, & 2\le x<3 \\ 0, & 3\le x<5 \end{cases}$.

2. 30 α. Είναι:

- $D_f=(-1,+\infty),\ f(D_f)=[-1,+\infty)$,
- $D_g=[-3,2)\cup[3,+\infty),\ g(D_g)=[-1,3)\cup(-\infty,1]=(-\infty,3)$,
- $D_h=[-2,2]\cup(4,+\infty),\ h(D_h)=[-3,1]\cup(2,+\infty)$.

β. Έχουμε:

- $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow -1<x\le -\frac{1}{2}$ ή $x\ge 4$
- $g(x)<0 \Leftrightarrow -3<x<-\frac{5}{2}$ ή $x>\frac{9}{2}$
- $h(x)\le 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\le x\le 2$
- $h(x)>2 \Leftrightarrow x>4$.

2. 31 α. Είναι $D_{f_1}=(-2,2)$, οπότε για κάθε $x\in D_{f_1}$, το $-x\in D_{f_1}$. Επίσης, ισχύει:

$$f_1(-x)=\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)=\ln\left[\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-1}\right]=-\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)=-f_1(x).$$

Συνεπώς, η f_1 είναι περιττή.

β. Είναι $D_{f_2}=\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x\in D_{f_2}$, το $-x\in D_{f_2}$. Επίσης, ισχύει:

$$f_2(-x)=\ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}-x\right)=\ln\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]=$$

$$=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=\ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{-1}\right]=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-f_2(x).$$

Συνεπώς, η f_2 είναι περιττή.

γ. Είναι $D_{f_3}=\mathbb{R}^*$, οπότε για κάθε $x\in D_{f_3}$, το $-x\in D_{f_3}$. Επίσης, ισχύει:

$$f_3(-x)=(-x)^3\cdot\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}=\left(-x^3\right)\cdot\frac{\frac{1}{e^x}+1}{\frac{1}{e^x}-1}=\left(-x^3\right)\cdot\frac{\frac{1+e^x}{e^x}}{\frac{1-e^x}{e^x}}=$$

$$=\left(-x^3\right)\cdot\frac{1+e^x}{1-e^x}=\left(-x^3\right)\cdot\left(-\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)=x^3\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}=f_3(x).$$

Συνεπώς, η f_3 είναι άρτια.

δ. Είναι $D_{f_4}=\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x\in D_{f_4}$, το $-x\in D_{f_4}$. Επίσης, ισχύει:

$$f_4(-x)=|-x-3|+|-x+3|+e^2=|x+3|+|x-3|+e^2=f_4(x).$$

Συνεπώς, η f_4 είναι άρτια.

ε. Είναι $D_{f_5}=\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x\in D_{f_5}$, το $-x\in D_{f_5}$. Επίσης, ισχύει:

$$f_5(-x)=\sqrt{(-x)^2+(-x)+1}+\sqrt{(-x)^2-(-x)+1}=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}=f_5(x).$$

Συνεπώς, η f_5 είναι άρτια.

2. 32 α. Το $A\in C_f$, άρα:

$$f(1)=\ln 2\cdot\ln\frac{2}{e}\Leftrightarrow \ln^2(1+1)-\beta\cdot\ln(1+1)=\ln 2\cdot\ln\frac{2}{e}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln^2 2-\beta\cdot\ln 2=\ln 2\cdot(\ln 2-\ln e)\Leftrightarrow \quad .$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\ln^2 2}-\beta\cdot\ln 2=\cancel{\ln^2 2}-\ln 2\Leftrightarrow \beta=1.$$

β. Η f ορίζεται στο $D_f=(-1,+\infty)$. Η C_f βρίσκεται κάτω από τον x′x, όταν:

$$f(x)<0\overset{\beta=1}{\Leftrightarrow}\ln^2(x+1)-\ln(x+1)<0.$$

Αν $\omega=\ln(x+1)$, τότε $\omega^2-\omega<0\Leftrightarrow 0<\omega<1$.

Άρα $0<x<e-1$.

Τελικά, η C_f βρίσκεται κάτω από τον x′x, όταν $x\in(0,\ e-1)$.

2. 33 α. Ισχύει $A(1,-2)\in C_f$, οπότε:

$$f(1)=-2\Leftrightarrow\frac{\alpha\cdot 1^2+(\alpha+2)\cdot 1-\beta}{1^2-\beta^2}=-2\Leftrightarrow\frac{2\alpha+2-\beta}{1-\beta^2}=-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha+2-\beta=2(\beta^2-1),\quad (1).$$

Επίσης $\left(0,\frac{1}{2}\right)\in C_f$, οπότε:

$$f(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\alpha\cdot 0^2+(\alpha+2)\cdot 0-\beta}{0^2-\beta^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{-\beta}{-\beta^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\beta=2.$$

Από την (1) προκύπτει:

$$2\alpha+2-2=2\cdot(2^2-1)\Leftrightarrow\alpha=3.$$

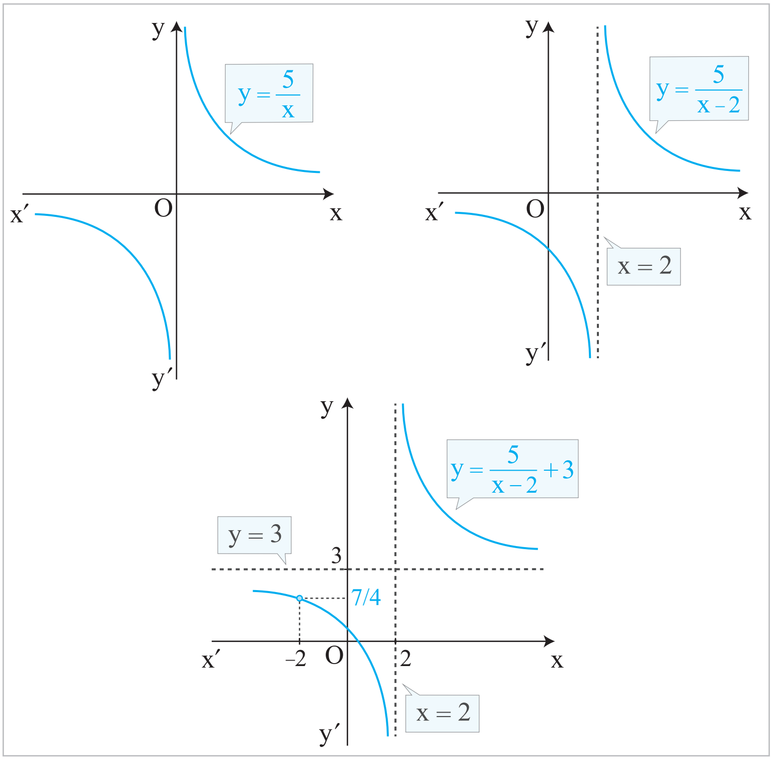
Τελικά $\alpha=3$ και $\beta=2$.

β. Για $\alpha=3$, $\beta=2$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{3x^2+5x-2}{x^2-2^2}=\frac{(3x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{3x-1}{x-2},\ A=\mathbb{R}-\{\pm 2\}.$$

Έχουμε $f(x)=\frac{3x-6+5}{x-2}=\frac{3(x-2)}{x-2}+\frac{5}{x-2}=3+\frac{5}{x-2},\ x\neq\pm 2.$

Οπότε:



γ. Από τη C_f βρίσκουμε $f(A)=\mathbb{R}-\left\{3,\frac{7}{4}\right\}$, διότι για $x=-2$: $y=\frac{3\cdot(-2)-1}{-2-2}=\frac{7}{4}$ το οποίο δεν είναι σημείο της C_f.

2. 34 α. Για $x=0\in D_f=\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^3(0)+e^0\cdot f(0)=0^3-9\cdot 0\Leftrightarrow f^3(0)+f(0)=0\Leftrightarrow f(0)\cdot\left[f^2(0)+1\right]=0\Leftrightarrow f(0)=0.$$

Άρα O(0, 0): κοινό σημείο των C_f, y′y.

Επίσης, για $y=f(x)=0$ η δεδομένη σχέση γίνεται:

$$0^3+e^x\cdot 0=x^3-9x\Leftrightarrow x^3-9x=0\Leftrightarrow x=0\ \text{ ή }\ x=3\ \text{ ή }\ x=-3.$$

Συνεπώς $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(-3,0)$: κοινά σημεία των C_f, x′x.

β. Η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x′x, όταν $f(x) < 0$.

Είναι:

$$f^3(x)+e^x \cdot f(x)=x^3-9x \Leftrightarrow f(x)\cdot\left[f^2(x)+e^x\right]=x^3-9x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^3-9x}{f^2(x)+e^x}$$

όπου $f^2(x)+e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Συνεπώς:

$$f(x)<0 \overset{f^2(x)+e^x>0}{\Leftrightarrow} x^3-9x>0 \Leftrightarrow x(x+3)(x-3)>0 \Leftrightarrow x\in(-3,\,0)\cup(3,\,+\infty).$$

Άρα, η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x′x, όταν $x\in(-3,\,0)\cup(3,\,+\infty)$.

2. 35 Ισχύει:

$$f^3(x)-g^3(x)=\ln^2 x-3\ln x+2,\ \ x>0,\ (1).$$

α. Έχουμε:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f^3(x)-g^3(x)=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \ln^2 x-3\ln x+2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x=1 \ \text{ ή } \ \ln x=2 \Leftrightarrow x=e \ \text{ ή } \ x=e^2 : \text{δεκτές}.$$

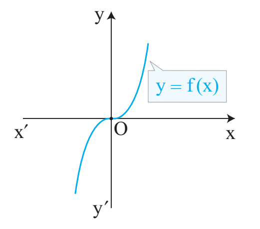
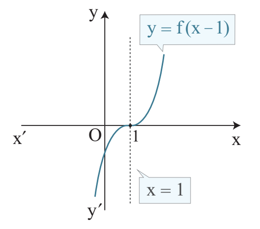
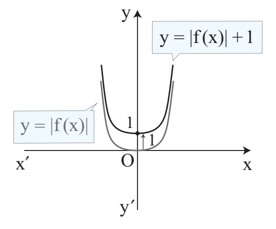
β. Η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g, όταν:

$$f(x)>g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)>0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \ln^2 x-3\ln x+2>0\Leftrightarrow$$

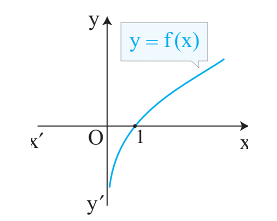
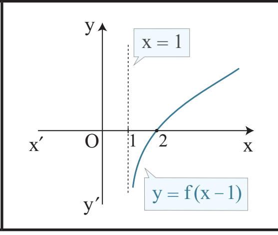
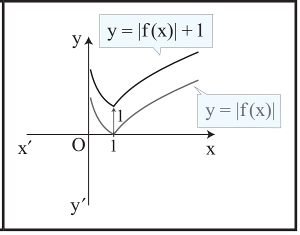
$$\Leftrightarrow \ln x<1 \ \text{ ή } \ \ln x>2 \Leftrightarrow x<e \ \text{ ή } \ x>e^2.$$

Άρα, η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g, όταν $x\in(0,\,e)\cup(e^2,\,+\infty)$.

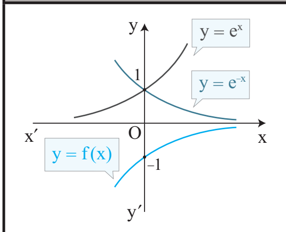
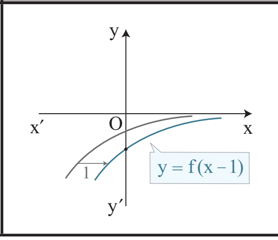
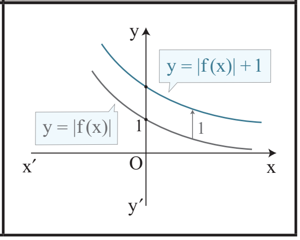
2. 36 α. $f(x)=x^3$.

C_1	C_2	C_3
		

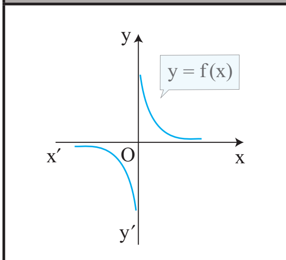
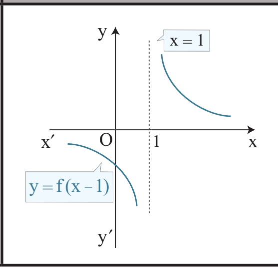
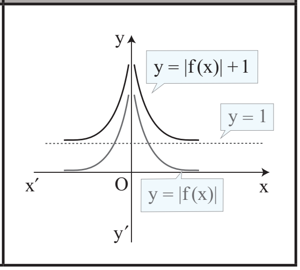
β. $f(x)=\ln x$.

C_1	C_2	C_3
		

γ. $f(x) = -e^{-x}$.

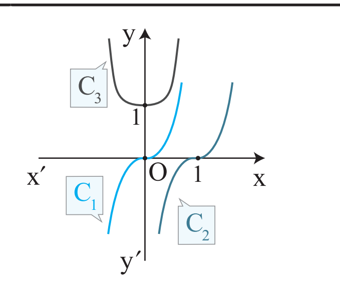
C_1	C_2	C_3
		

δ. $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

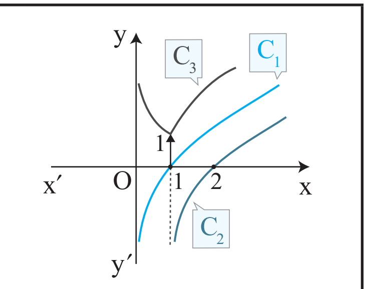
C_1	C_2	C_3
		

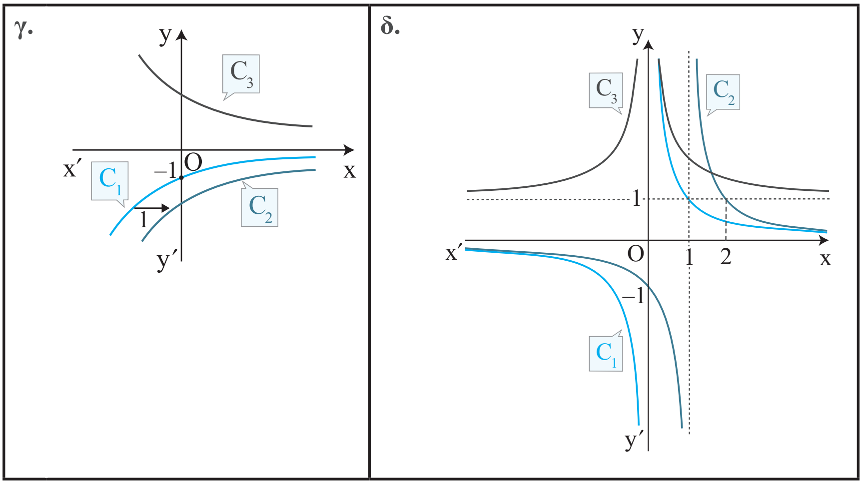
Για κάθε συνάρτηση f μεταφέρουμε τις C_1, C_2, C_3 στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, οπότε έχουμε:

α.



β.





2. 37 • Για $x \geq 2$ είναι $f(x) = \sqrt{x-1}$, άρα:

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow x-1 = 9 \Leftrightarrow x = 10.$$

Δηλαδή $f(10) = 3$, άρα το 3 είναι τιμή της συνάρτησης f.

• Για $x < 2$ έχουμε ανάλογα:

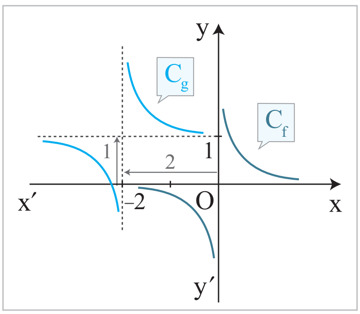
$$f(x) = 3 \Rightarrow x = -3.$$

2. 38 Σύμφωνα με τις μετατοπίσεις προκύπτει συνάρτηση με τύπο:

$$y = \frac{1}{x+2} + 1 \quad ή \quad y = \frac{1+x+2}{x+2} = \frac{x+3}{x+2}.$$

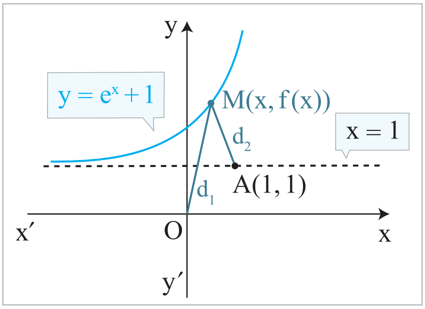
Άρα, έχουμε την $g(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$.

Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



2. 39 Το $M \in C_f$, άρα $M(x, e^x + 1)$.

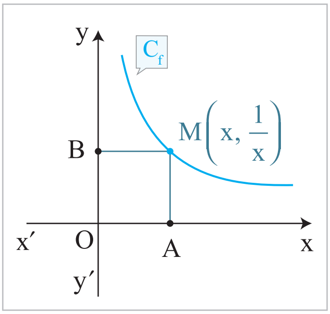
α. Είναι $d_1(x)=\sqrt{x^2+\left(e^x+1\right)^2},\ x\in\mathbb{R}.$



β. Είναι $d_2(x)=\sqrt{(x-1)^2+\left(e^x+1-1\right)^2}\Rightarrow d_2(x)=\sqrt{(x-1)^2+e^{2x}},\ x\in\mathbb{R}.$

2. 40 Είναι $M(x, f(x)),\ x>0,$ ή $M\left(x, \dfrac{1}{x}\right),\ x>0.$

Τα σημεία Α, Β έχουν συντεταγμένες: Α(x, 0) και $B\left(0, \dfrac{1}{x}\right)$, άρα:



$$(OA)=(MB)=|x|\overset{x>0}{=}x \quad \text{και}$$

$$(OB)=(AM)=|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|\overset{x>0}{=}\frac{1}{x}.$$

- Περίμετρος: $\Pi=2\cdot x+2\cdot\dfrac{1}{x}$ ή $\Pi(x)=2x+\dfrac{2}{x},\ x>0.$
- Εμβαδόν: $E=x\cdot\dfrac{1}{x}$ ή $E(x)=1,\ x>0.$

2. 41 Είναι $f(x)=x^2+1$, άρα:

$$f(-\alpha)=(-\alpha)^2+1=\alpha^2+1 \ \text{ και } \ f(2\alpha)=(2\alpha)^2+1=4\alpha^2+1,\ \alpha>0.$$

Συνεπώς $A(-\alpha, \alpha^2+1)$ και $B(2\alpha, 4\alpha^2+1)$, $\alpha>0$.

α. $d=(AB)=\sqrt{\left(2\alpha-(-\alpha)\right)^2+\left(4\alpha^2+1-\left(\alpha^2+1\right)\right)^2}=\sqrt{(3\alpha)^2+\left(3\alpha^2\right)^2}$ ή

$$d(\alpha)=\sqrt{9\alpha^2+9\alpha^4}=\sqrt{9\alpha^2\left(1+\alpha^2\right)}\overset{\alpha>0}{=}3\alpha\sqrt{1+\alpha^2}.$$

Άρα $d(\alpha)=3\alpha\cdot\sqrt{1+\alpha^2},\ \alpha>0.$

β. $E=(AOB)=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\det\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix}-\alpha & \alpha^2+1\\ 2\alpha & 4\alpha^2+1\end{vmatrix}\right|=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left|-\alpha\left(4\alpha^2+1\right)-2\alpha\left(\alpha^2+1\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|-4\alpha^3-\alpha-2\alpha^3-2\alpha\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left|-6\alpha^3-3\alpha\right|=\frac{1}{2}\cdot 3\alpha\left(2\alpha^2+1\right)=\frac{3\alpha\left(2\alpha^2+1\right)}{2}.$$

Άρα $E(\alpha)=\dfrac{3\alpha\left(2\alpha^2+1\right)}{2},\ \ \alpha>0.$

2. 42 Το τυχαίο σημείο Α της C_f έχει συντεταγμένες:

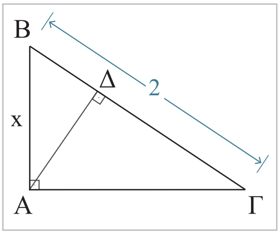
$$\left(x,\ f(x)\right)\ \text{ ή }\ \left(x,\ e^x+x\right),\ x\in\mathbb{R}.$$

Η απόσταση (ΑΝ) είναι:

$$(AN)=\sqrt{\left(x_N-x_A\right)^2+\left(y_N-y_A\right)^2}\quad \text{ή}$$

$$f(x)=\sqrt{(-1-x)^2+\left(1-e^x-x\right)^2}=\sqrt{(x+1)^2+\left(e^x+x-1\right)^2},\ x\in\mathbb{R}.$$

2. 43 Είναι $f(x)=(\Gamma\Delta)$.

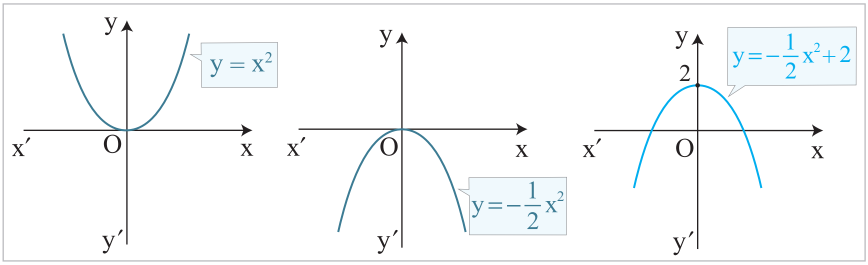


Ισχύει $AB^2=B\Gamma\cdot B\Delta$, άρα $x^2=2\cdot B\Delta\Leftrightarrow B\Delta=\dfrac{x^2}{2}$.

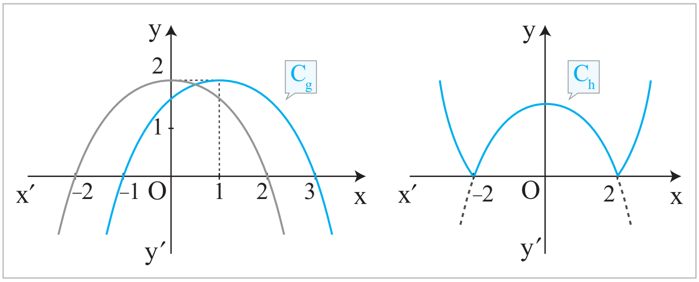
Τότε $\Gamma\Delta=B\Gamma-B\Delta=2-\dfrac{x^2}{2}$ με $0<AB<B\Gamma$ ή $0<x<2$.

Συνεπώς $f(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot x^2+2=2-\dfrac{x^2}{2},\ \ 0<x<2.$

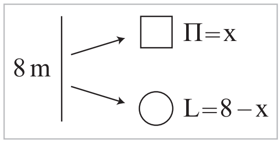
Η C_f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $y=x^2$ ως εξής:



Συνεπώς, οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις της C_g και C_h είναι:



2. 44 **α.** Το τετράγωνο έχει περίμετρο Π = x.



Συνεπώς το τετράγωνο έχει πλευρά μήκους $\frac{x}{4}$ και εμβαδόν $\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$.

Ο κύκλος έχει μήκος L = 8 – x, συνεπώς για την ακτίνα του R ισχύει:

$$2\pi R = 8 - x \Leftrightarrow R = \frac{8-x}{2\pi}.$$

Το εμβαδόν του είναι $E = \pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(8-x)^2}{4\pi}$.

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$E(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 4(8-x)^2}{16\pi} \quad ή$$

$$E(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \ x \in (0, 8).$$

β. Είναι $E(x) = \frac{\pi+4}{16\pi} \cdot x^2 - \frac{4}{\pi} \cdot x + \frac{16}{\pi}, \ x \in (0, 8)$, με $\alpha = \frac{\pi+4}{16\pi} > 0$.

Οπότε το $E(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο για:

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha} = -\frac{-\frac{4}{\pi}}{2 \cdot \frac{\pi+4}{16\pi}} = \frac{4 \cdot 16\pi}{2\pi(\pi+4)} = \frac{32}{\pi+4}.$$

Τότε:

- το τετράγωνο έχει πλευρά $\frac{x}{4} = \frac{8}{\pi+4}$,
- ο κύκλος έχει ακτίνα $R = \frac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{2\pi} = \frac{4}{\pi+4}$, άρα έχει διάμετρο $\delta = 2R = \frac{8}{\pi+4}$.

Δηλαδή, η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου.

1ο

Κριτήριο Αξιολόγησης

Θέμα A

A1. Θεωρία. **A2.** Θεωρία.

A3. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος.

A4. $f_1 \to C_3$, $f_2 \to C_5$, $f_3 \to C_6$, $f_4 \to C_2$, $f_5 \to C_7$, $f_6 \to C_1$, $f_7 \to C_4$.

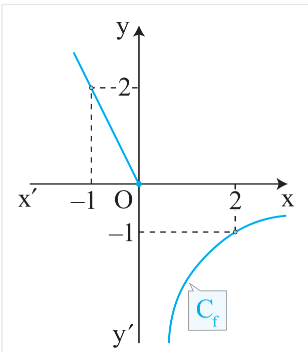
Θέμα B

B1. Το $O(0,\ 0) \in C_f$, άρα $f(0) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot 0 + \beta^2 = 0 \Rightarrow \beta = 0$.

Επίσης, το $A(2,\ -1) \in C_f$, άρα $f(2) = -1 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = -1 \Rightarrow \alpha = -2$.

Άρα $\alpha = -2$ και $\beta = 0$.

B2. Έχουμε $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0 \\ \dfrac{-2}{x}, & x > 0 \end{cases}$. Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



B3. • Για $x \leq 0$ είναι $f((-\infty,\ 0]) = [0,\ +\infty)$, (κλάδος 2ου τεταρτημορίου).

• Για $x > 0$ είναι $f((0,\ +\infty)) = (-\infty,\ 0)$, (κλάδος 4ου τεταρτημορίου).

Συνεπώς $f(A) = f((-\infty,\ 0]) \cup f((0,\ +\infty)) = [0,\ +\infty) \cup (-\infty,\ 0) = (-\infty,\ +\infty) = \mathbb{R}$.

B4. **α.** Είναι $0 \in A_f$ και $f(0) = -2 \cdot 0 = 0$.

Άρα, το $O(0, 0)$ είναι το κοινό σημείο της C_f με τον $y'y$.

Για $x \le 0$ είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ενώ για $x > 0$ είναι $-\dfrac{2}{x} = 0$: αδύνατη.

Άρα, το $O(0, 0)$ είναι το κοινό σημείο της C_f με τον $x'x$.

Συνεπώς, το μόνο κοινό σημείο της C_f με τους άξονες είναι το $O(0, 0)$.

β. Α΄ τρόπος

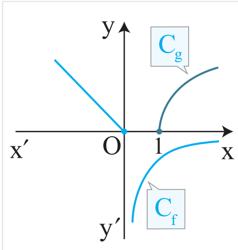
Η g ορίζεται, όταν $x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$, άρα $D_g = [1, +\infty)$.

Για $x \ge 1$ είναι $g(x) = \sqrt{x-1} \ge 0$, ενώ για $x \ge 1$ είναι $f(x) = -\dfrac{2}{x} < 0$.

Άρα, για κάθε $x \ge 1$ είναι $f(x) \ne g(x)$. Συνεπώς, οι C_f, C_g δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

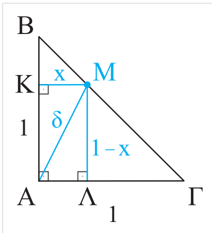
Β΄ τρόπος (Από τις γραφικές παραστάσεις C_f και C_g)

Η γραφική παράσταση C_g προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\sqrt{x}$ κατά μία μονάδα προς τα δεξιά. Άρα, η C_g βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο εκτός του (1, 0), οπότε δεν έχει κοινά σημεία με τη C_f.



Θέμα Γ

Γ1. Είναι $x = KM \perp AB$ και $M\Lambda \perp A\Gamma$.



Τότε $B\overset{\Delta}{K}M$, $M\overset{\Delta}{\Lambda}\Gamma$ ορθογώνια και ισοσκελή, άρα $KM = KB = x$.

Συνεπώς $AK = 1 - x$.

Επίσης $AKM\Lambda$: παραλληλόγραμμο, άρα $AK = M\Lambda = \Lambda\Gamma = 1 - x$.

Επιπλέον $A\overset{\Delta}{M}\Lambda$: ορθογώνιο.

Αν $(AM) = \delta$, τότε από πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$AM^2 = A\Lambda^2 + \Lambda M^2 \Rightarrow \delta^2 = x^2 + (1-x)^2.$$

Άρα:

$$\delta = \sqrt{x^2 + (1-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 2x + 1},\ 0 \le x \le 1,$$

διότι $KM = x \ge 0$ και $AK = 1 - x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 1$.

Γ2.
- Είναι $AKM\Lambda$: παραλληλόγραμμο με $\widehat{A} = 90^\circ$, άρα $AKM\Lambda$: ορθογώνιο.
- Το εμβαδόν του $AKM\Lambda$ είναι:

$$E = AK \cdot A\Lambda \text{ ή } E(x) = (1-x)\cdot x \text{ ή } E(x) = x\cdot(1-x) = -x^2 + x,\ 0 \le x \le 1.$$

Γ3. • Όταν ΑΚΜΛ τετράγωνο, τότε $AK = A\Lambda \Rightarrow 1 - x = x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Τότε $(AM) = \delta\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

• Τότε $A\overset{\Delta}{\Lambda}M$: ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα:

$$A\widehat{M}\Gamma = A\widehat{M}\Lambda + \Lambda\widehat{M}\Gamma = 45^o + 45^o = 90^o.$$

Συνεπώς ΑΜ: ύψος (και διάμεσος και διχοτόμος) του $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$.

Γ4. Όταν $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, τότε $x = \frac{1}{2}$, άρα $AK = A\Lambda = \frac{1}{2}$ και $(AKM\Lambda) = E\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Επίσης:

$$(BKM) + (M\Lambda\Gamma) = (AB\Gamma) - (AKM\Lambda) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Άρα, τα δύο εμβαδά (ΑΚΜΛ) και (ΒΚΜ) + (ΜΛΓ) είναι ίσα.

Θέμα Δ

Δ1. • Είναι $f(x) = \frac{e^{2x} - e^{x+1} + 2e - 2e^x}{\left|e^x\cdot(e^x - e - 2) + 2e\right|} + x = \frac{(e^x - e)(e^x - 2)}{\left|(e^x - e)(e^x - 2)\right|} + x$.

Η f ορίζεται, όταν:

$$\left|(e^x - e)(e^x - 2)\right| \neq 0 \Leftrightarrow (e^x - e)(e^x - 2) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x \neq e \quad \text{και} \quad e^x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq 1 \quad \text{και} \quad x \neq \ln 2.$$

Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{1, \ln 2\}$.

• Είναι:

$$(e^x - e)(e^x - 2) > 0 \overset{e^x = \omega > 0}{\Leftrightarrow} (\omega - e)(\omega - 2) > 0 \Leftrightarrow 0 < \omega < 2 \;\; \text{ή} \;\; \omega > e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < e^x < 2 \;\; \text{ή} \;\; e^x > e \Leftrightarrow x < \ln 2 \;\; \text{ή} \;\; x > 1.$$

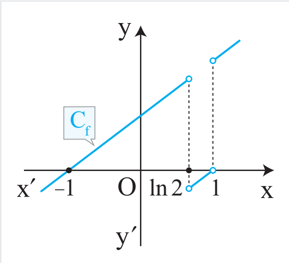
Οπότε:

• για $x < \ln 2$ ή $x > 1$: $f(x) = \frac{(e^x - e)(e^x - 2)}{(e^x - e)(e^x - 2)} + x = 1 + x$,

• για $\ln 2 < x < 1$: $f(x) = \frac{(e^x - e)(e^x - 2)}{-(e^x - e)(e^x - 2)} + x = -1 + x$.

Συνεπώς $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < \ln 2 \;\; \text{ή} \;\; x > 1 \\ x - 1, & \ln 2 < x < 1 \end{cases}$.

Δ2. Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



Δ3. • **Α΄ τρόπος**

Από τη γραφική παράσταση έχουμε ότι:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Β΄ τρόπος

Για $\ln 2<x<1$: $f(x)=x-1<0$.

Για $x<\ln 2$ ή $x>1$: $f(x)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$: δεκτή.

• **Α΄ τρόπος**

Από τη γραφική παράσταση έχουμε ότι:

$f(x)>0 \Leftrightarrow -1<x<\ln 2$ ή $x>1$.

Β΄ τρόπος

Έχουμε $f(x)>0 \Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$, άρα $-1<x<\ln 2$ ή $x>1$.

Δ4. Έχουμε:

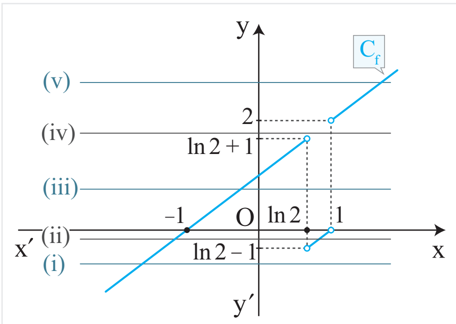
i. μία λύση για $\alpha \le \ln 2-1$,

ii. δύο λύσεις για $\ln 2-1<\alpha<0$,

iii. μία λύση για $0 \le \alpha < \ln 2+1$,

iv. καμία λύση για $\ln 2+1 \le \alpha \le 2$,

v. μία λύση για $\alpha>2$.



3η Ενότητα

Ισότητα συναρτήσεων – Πράξεις με συναρτήσεις

Α. Του τύπου Σωστό / Λάθος

3. 1 **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος **στ.** Σωστό **ζ.** Σωστό.

3. 2 **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό.

3. 3 **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό.

3. 4 **α.** Ψ **β.** Με τη βοήθεια των f, g του ερωτήματος α.

Β. Πολλαπλής επιλογής

3. 5 γ. **3. 6** γ.

Γ. Βασικές εφαρμογές – Ασκήσεις εμπέδωσης

3. 7 **α.** $f = g$ **β.** $f = g,\ [0, +\infty)$ **γ.** $f = g,\ \mathbb{R} - \{1\}$

δ. $f = g$ **ε.** $f = g,\ [0, 4) \cup (4, +\infty)$ **στ.** $f = g,\ [0, 4) \cup (4, +\infty)$

3. 8 **α.** $f = g$ **β.** $f = g,\ (1, +\infty)$ **γ.** $f = g$

δ. $f = g$ **ε.** $f = g$ **στ.** $f = g,\ \mathbb{R} - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. 9 **α.** $(f+g)(x) = 3x + 3,\ x \in \mathbb{R}$ **β.** $(f-g)(x) = -x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

γ. $(f \cdot g)(x) = 2x^2 + 5x + 2,\ x \in \mathbb{R}$ **δ.** $(f^2)(x) = (x+2)^2,\ x \in \mathbb{R}$

ε. $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{x+2},\ x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ **στ.** $\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{2x+1},\ x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

ζ. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+2}{2x+1},\ x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ **η.** $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{2x+1}{x+2},\ x \in \mathbb{R} - \{-2\}$.

3. 10 **α.** $\dfrac{2x+1}{x(x+1)},\ x\in\mathbb{R}-\{0,-1\}$ **β.** $\dfrac{1}{x(x+1)},\ x\in\mathbb{R}-\{0,-1\}$

γ. $\dfrac{1}{x(x+1)},\ x\in\mathbb{R}-\{0,-1\}$ **δ.** $\dfrac{1}{x^2},\ x\in\mathbb{R}^*$

ε. $x,\ x\in\mathbb{R}^*$ **στ.** $x+1,\ x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

ζ. $\dfrac{x+1}{x},\ x\in\mathbb{R}-\{0,-1\}$ **η.** $\dfrac{x}{x+1},\ x\in\mathbb{R}-\{0,-1\}$.

3. 11 **α.** $2x,\ x\in[-1,+\infty)$ **β.** $2\sqrt{x+1},\ x\in[-1,+\infty)$

γ. $x^2-x-1,\ x\in[-1,+\infty)$ **δ.** $x^2+x+1+2x\sqrt{x+1},\ x\in[-1,+\infty)$

ε. $\dfrac{1}{x+\sqrt{x+1}},\ x\in\left[-1,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$

στ. $\dfrac{1}{x-\sqrt{x+1}},\ x\in\left[-1,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$

ζ. $\dfrac{x+\sqrt{x+1}}{x-\sqrt{x+1}},\ x\in\left[-1,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$

η. $\dfrac{x-\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x+1}},\ x\in\left[-1,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

Δ. Ασκήσεις για λύση

3. 12 **α.** Είναι $D_f=D_g=A=[1,+\infty)$ και για κάθε $x\in A$ ισχύει:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}^2-\sqrt{x-1}^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-(x-1)}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-x+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=g(x).$$

Άρα $f=g$.

β. • Για την f πρέπει:

$$\begin{cases}e^x-1\ge 0\\ e^x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x>\ln 2\end{cases}\Leftrightarrow x>\ln 2,$$

άρα $D_f=(\ln 2,+\infty)$.

• Για την g πρέπει:

$$\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{e^x-2} \geq 0 \\ e^x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (e^x-1)(e^x-2) \geq 0 \\ e^x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \text{ ή } x \geq \ln 2 \\ x \neq \ln 2 \end{cases},$$

άρα $D_g = (-\infty, 0] \cup (\ln 2, +\infty)$.

Συνεπώς $D_f \neq D_g$, άρα $f \neq g$.

Για $x \in A = D_f \cap D_g = (\ln 2, +\infty)$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x-2}} = \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x-2}} = g(x).$$

Άρα $f = g$ στο $A = (\ln 2, +\infty)$.

γ. • Για την f: $\begin{cases} x+1>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$, άρα $D_f = (0, +\infty)$.

• Για την g: $x \neq 0$ και $\dfrac{x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow x(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 0$,

άρα $D_g = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

Συνεπώς $D_f \neq D_g$, άρα $f \neq g$.

Για $x \in A = D_f \cap D_g = (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln x = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = g(x).$$

Άρα $f = g$ στο $A = (0, +\infty)$.

δ. • Για την f: $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$, άρα $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$.

• Για την g: $|x| - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$, άρα $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$.

Συνεπώς $D_f = D_g = A = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$ και για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2|x|}{x^2 - 4} = \frac{|x|^2 + 2|x|}{|x|^2 - 4} = \frac{|x| \cdot (|x|+2)}{(|x|-2)(|x|+2)} = \frac{|x|}{|x|-2} = g(x).$$

Άρα $f = g$

ε. • Για την f: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ |x| \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$, άρα $D_f = [2, +\infty)$.

• Για την g: $\begin{cases} |x-2| \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$, άρα $D_g = [0, +\infty)$.

Συνεπώς $D_f \neq D_g$, άρα $f \neq g$.

Για $x \in A = D_f \cap D_g = [2, +\infty)$ είναι:

$$f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x}=g(x).$$

Άρα $f=g$ στο $A=[2,+\infty)$.

3. 13 **α.** Είναι $D_f=\mathbb{R}$, $D_g=(-\infty,3]$, συνεπώς $D_f\neq D_g\Rightarrow f\neq g$.

Για $x\in A=D_f\cap D_g=(-\infty,3]$ έχουμε:

- $f(x)=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|\overset{x\leq 3}{=}3-x,$
- $g(x)=\sqrt{3-x}^{\,2}=3-x.$

Συνεπώς $f(x)=g(x)$.

Άρα $f=g$ στο $A=(-\infty,3]$.

β. Είναι $D_f=D_g=A=[0,+\infty)$ και για κάθε $x\in A$ ισχύει:

$$f(x)=-\frac{4x-x^2}{\sqrt{x}+2}=\frac{x(x-4)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}=\frac{x(x-4)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}^{\,2}-2^2}=$$

$$=\frac{x(x-4)(\sqrt{x}-2)}{x-4}=x(\sqrt{x}-2)=x\sqrt{x}-2x=\sqrt{x^3}-2x=g(x).$$

Άρα $f=g$

3. 14 Για $\alpha=0$ είναι $f(x)=1$ και $g(x)=\dfrac{3}{x}$, άρα $f\neq g$. Συνεπώς $\alpha\neq 0$.

Πρέπει:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \alpha x+1=\frac{\alpha x^2+2\alpha x+3}{x+\alpha}\Leftrightarrow(\alpha x+1)(x+\alpha)=\alpha x^2+2\alpha x+3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha x^2+(\alpha^2+1)x+\alpha=\alpha x^2+2\alpha x+3.$$

Αυτό ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-\alpha\}$, όταν:

$$\begin{cases}\alpha^2+1=2\alpha\\ \alpha=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha=3\end{cases}:\ \text{αδύνατον.}$$

Άρα, δεν υπάρχει $\alpha\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f=g$.

3. 15 • Για την f: $\begin{cases}x>0\\ \ln x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\end{cases}$, άρα $D_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$.

• Για την g: $\begin{cases}x>0\\ 2-\ln x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\neq e^2\end{cases}$, άρα $D_g=(0,e^2)\cup(e^2,+\infty)$.

Στο $A=D_f\cap D_g=(0,1)\cup(1,e^2)\cup(e^2,+\infty)$ έχουμε:

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=2+\dfrac{1}{\ln x}+\dfrac{\ln x}{2-\ln x}$,
- $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=2+\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{\ln x}{2-\ln x}$,
- $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\left(2+\dfrac{1}{\ln x}\right)\cdot\dfrac{\ln x}{2-\ln x}=\dfrac{2\ln^2 x+\ln x}{2\ln x-\ln^2 x}=\dfrac{2\ln x+1}{2-\ln x}$.

Στο $B=D_f\cap D_g-\{x\in D_g : g(x)=0\}=A$ έχουμε:

- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\dfrac{2\ln x+1}{\ln x}}{\dfrac{\ln x}{2-\ln x}}=\dfrac{(2\ln x+1)(2-\ln x)}{\ln^2 x}=\dfrac{-2\ln^2 x+3\ln x+2}{\ln^2 x}$.

3. 16 Είναι $D_f=D_g=(-\infty,\,0)\cup(1,\,+\infty)=A$. Επίσης:

$$g(x)=\frac{x^2-x-2}{\sqrt{x^2-x}}=\frac{\sqrt{x^2-x}^{\,2}}{\sqrt{x^2-x}}-\frac{2}{\sqrt{x^2-x}}=\sqrt{x^2-x}-\frac{2}{\sqrt{x^2-x}}.$$

Για $x\in A=(-\infty,\,0)\cup(1,\,+\infty)$ έχουμε:

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x^2-x}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2-x}}+\sqrt{x^2-x}-\dfrac{2}{\sqrt{x^2-x}}=2\sqrt{x^2-x}$,
- $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x^2-x}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2-x}}-\sqrt{x^2-x}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2-x}}=\dfrac{4}{\sqrt{x^2-x}}$,
- $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\left(\sqrt{x^2-x}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2-x}}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-x}-\dfrac{2}{\sqrt{x^2-x}}\right)=$

$$=\sqrt{x^2-x}^{\,2}-\frac{4}{\sqrt{x^2-x}^{\,2}}=x^2-x-\frac{4}{x^2-x}.$$

Για $x\in A-\{x\in D_g : g(x)=0\}=A-\{-1,\,2\}=(-\infty,\,-1)\cup(-1,\,0)\cup(1,\,2)\cup(2,\,+\infty)$ έχουμε:

- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\sqrt{x^2-x}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2-x}}}{\sqrt{x^2-x}-\dfrac{2}{\sqrt{x^2-x}}}=\dfrac{\dfrac{x^2-x+2}{\sqrt{x^2-x}}}{\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x^2-x}}}=\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}$.

3. 17 **α.** Είναι $D_f=(0,\,+\infty)$, $D_g=[-1,\,+\infty)$.

- Για $x\in A=D_f\cap D_g=(0,\,+\infty)$: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=e^x-\ln x+\sqrt{x+1}$.
- Για $x\in B=D_f\cap D_g-\{x\in D_g : g(x)=0\}=A$: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{e^x-\ln x}{\sqrt{x+1}}$.

β. Είναι $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

- Για $x \in A = D_f \cap D_g = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \eta\mu x + \ln(x^2 - 4).$$

- Για $x \in B = D_f \cap D_g - \{x \in D_g : g(x) = 0\} =$

$$= (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}, -2) \cup (2, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty):$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\eta\mu x}{\ln(x^2-4)}.$$

γ. Είναι $D_f = D_g = \mathbb{R}$.

- Για $A = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$:

  i. $x \le 1$: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x - 1 + x = 2x - 1$,

  ii. $1 < x < 2$: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 1 + x$,

  iii. $x \ge 2$: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 1 + 3x - 4 = x^2 + 3x - 3$.

  Άρα $(f+g)(x) = \begin{cases} 2x-1 & , \ x \le 1 \\ x^2+x+1 & , \ 1 < x < 2 \\ x^2+3x-3, & x \ge 2 \end{cases}$.

- Είναι $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

  Για $x \in B = D_f \cap D_g - \{0\} = \mathbb{R}^*$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x} & , \ x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1] \\ \dfrac{x^2+1}{x} & , \ x \in (1, 2) \\ \dfrac{x^2+1}{3x-4}, & x \in [2, +\infty) \end{cases}.$$

3. 18 Η f ορίζεται στο $D_f = \mathbb{R} - \{\alpha^2\}$ και η g στο $D_g = \mathbb{R} - \{5\alpha - 6\}$.

Για να είναι $f = g$, πρέπει $D_f = D_g$, άρα:

$$\alpha^2 = 5\alpha - 6 \Leftrightarrow \alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2 \ \text{ή} \ \alpha = 3.$$

- Για $\alpha = 2$ είναι:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 2 - 1}{x - 2^2} = \frac{2x^2 + 2x - 3}{x - 4} \quad \text{και}$$

$$g(x) = \frac{2x^2 + (3 \cdot 2 - 4)x - 2^2 + 1}{x - 5 \cdot 2 + 6} = \frac{2x^2 + 2x - 3}{x - 4}.$$

Δηλαδή $f(x)=g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{4\}$, οπότε $f=g$.

- Για $\alpha=3$ είναι:

$$f(x)=\frac{3x^2+2x-3-1}{x-3^2}=\frac{3x^2+2x-4}{x-9} \quad \text{και}$$

$$g(x)=\frac{3x^2+(3\cdot 3-4)x-3^2+1}{x-5\cdot 3+6}=\frac{3x^2+5x-8}{x-9}.$$

Δηλαδή $f(x)\neq g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{9\}$, οπότε $f\neq g$.

Άρα $f=g$, όταν $\alpha=2$.

3. 19 Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^2(x)+g^2(x)+x^2+1=2\big(xf(x)-g(x)\big)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f^2(x)+g^2(x)+x^2+1-2xf(x)+2g(x)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(f^2(x)-2xf(x)+x^2\right)+\left(g^2(x)+2g(x)+1\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(f(x)-x\right)^2+\left(g(x)+1\right)^2=0\Leftrightarrow f(x)-x=g(x)+1=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)=x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x)=-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

3. 20 Έχουμε:

α. $f(\alpha+1)+f(\alpha-1)=(\alpha+1)^2+(\alpha+1)-1+(\alpha-1)^2+(\alpha-1)-1=$

$=\alpha^2+2\alpha+1+\alpha+1-1+\alpha^2-2\alpha+1+\alpha-1-1=$

$=2\alpha^2+2\alpha.$

β. $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2+(x+h)-1-\left(x^2+x-1\right)}{h}=$$

$$=\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2+\cancel{x}+h-\cancel{1}-\cancel{x^2}-\cancel{x}+\cancel{1}}{h}=$$

$$=\frac{2xh+h^2+h}{h}=2x+h+1.$$

γ. $$\frac{f(xh)-f(x)}{h}=\frac{(xh)^2+xh-1-\left(x^2+x-1\right)}{h}=\frac{x^2h^2+xh-1-x^2-x+1}{h}=$$

$$=\frac{x^2h^2-1+xh+1-x^2-x}{h}=$$

$$=\frac{(xh+1)(xh-1)+(xh+1)-x^2-x}{h}=$$

$$=\frac{xh\cdot(xh+1)-x^2-x}{h}=x\cdot(xh+1)-\frac{x^2+x}{h}.$$

δ. $$f(x+y)-yf(x)-xf(y)=(x+h)^2+x+h-1-y\left(x^2+x-1\right)-x\left(y^2+y-1\right)=$$
$$=(x+h)^2+x+h-1-x^2y-xy+y-xy^2-xy+x=$$
$$=(x+h)^2-xy(x+y+2)+2x+y+h-1=$$
$$=(x+h)^2+(x+y+2)(1-xy)+x+h-3.$$

3. 21 **α.** Είναι $f(x+y)=\frac{1}{2}\cdot\left(\alpha^{x+y}+\alpha^{-x-y}\right)$. Επίσης:

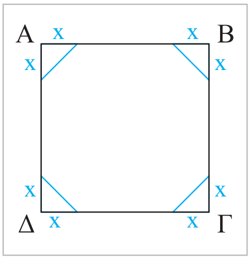
$$f(x)\cdot f(y)+g(x)\cdot g(y)=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\alpha^x+\alpha^{-x}\right)\left(\alpha^y+\alpha^{-y}\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(\alpha^x-\alpha^{-x}\right)\left(\alpha^y-\alpha^{-y}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\alpha^{x+y}+\cancel{\alpha^{x-y}}+\cancel{\alpha^{-x+y}}+\alpha^{-x-y}+\alpha^{x+y}-\cancel{\alpha^{x-y}}-\cancel{\alpha^{-x+y}}+\alpha^{-x-y}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\left(2\alpha^{x+y}+2\alpha^{-x-y}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\alpha^{x+y}+\alpha^{-x-y}\right)=f(x+y).$$

β. Είναι $g(x+y)=\frac{1}{2}\cdot\left(\alpha^{x+y}-\alpha^{-x-y}\right)$. Επίσης:

$$f(x)\cdot g(y)+f(y)\cdot g(x)=\frac{1}{4}\cdot\left(\alpha^x+\alpha^{-x}\right)\left(\alpha^y-\alpha^{-y}\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(\alpha^y+\alpha^{-y}\right)\left(\alpha^x-\alpha^{-x}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\alpha^{x+y}-\cancel{\alpha^{x-y}}+\cancel{\alpha^{-x+y}}-\alpha^{-x-y}+\alpha^{y+x}-\cancel{\alpha^{y-x}}+\cancel{\alpha^{-y+x}}-\alpha^{-y-x}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\left(2\alpha^{x+y}-2\alpha^{-x-y}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\alpha^{x+y}-\alpha^{-x-y}\right)=g(x+y).$$

3. 22 **α.** Το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι:

$$(\text{ΑΒΓΔ})=(8\text{ cm})^2=64\text{ cm}^2.$$



Κάθε ισοσκελές τρίγωνο έχει εμβαδόν:

$$E=\frac{1}{2}\beta\cdot\upsilon=\frac{1}{2}\cdot x\cdot x=\frac{x^2}{2}\text{ cm}^2.$$

Το εμβαδόν που απομένει είναι ίσο με:

$$E=64-4\cdot\frac{x^2}{2}=64-2x^2$$

όπου $0<2x\le 8\Leftrightarrow 0<x\le 4$.

Άρα:

$$f(x)=64-2x^2,\ 0<x\le 4.$$

β. Είναι $f(x)=64-2x^2$, $D_f=(0,4]$ και $g(x)=8(x-3)$, $x\in\mathbb{R}$.

- Για την h: $D_h = D_f \cap D_g - \{x \in D_g : g(x) = 0\} = (0, 4] - \{3\} = (0, 3) \cup (3, 4]$, οπότε:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{64 - 2x^2}{8(x-3)} \Rightarrow h(x) = \frac{32 - x^2}{4(x-3)},\ x \in (0, 3) \cup (3, 4].$$

- Για την k πρέπει $x \in D_f \cap D_g = (0, 4]$ και $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$, άρα $x \in D_h = [3, 4]$, οπότε:

$$k(x) = \sqrt{8(x-3)} + 64 - 2x^2,\ x \in [3, 4].$$

3. 23 Είναι $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{και} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Είναι:

- $g(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$ και
- $h(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -\dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x)$.

Άρα g: άρτια και h: περιττή συνάρτηση.

Είναι $g(x) + h(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = \dfrac{2f(x)}{2} = f(x)$.

Άρα $f = g + h$ όπου g: άρτια, h: περιττή.

3. 24 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$\begin{cases} 2f(x) + g(x) = 3x^2 + 4x - 2 \\ f(x) - 2g(x) = 4x^2 - 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 3x^2 + 4x - 2 - 2f(x) \\ f(x) - 2\cdot\left[3x^2 + 4x - 2 - 2f(x)\right] = 4x^2 - 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 3x^2 + 4x - 2 - 2f(x) \\ 5f(x) - 6x^2 - 8x + 4 = 4x^2 - 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5f(x) = 10x^2 + 5x - 5 \\ g(x) = 3x^2 + 4x - 2 - 2f(x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2x^2 + x - 1 \\ g(x) = 3x^2 + 4x - 2 - 2(2x^2 + x - 1) \end{cases}.$$

Άρα:

$$f(x) = 2x^2 + x - 1,\ x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = -x^2 + 2x,\ x \in \mathbb{R}.$$

4η Ενότητα

Σύνθεση συναρτήσεων

A. Του τύπου Σωστό / Λάθος

4. 1 **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος.

4. 2 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό.

4. 3 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό **στ.** Λάθος.

4. 4 **α.** **Α** **β.** Επειδή $(f\circ g)(x)=(x-1)^2\neq x^2-1=(g\circ f)(x)$.

B. Βασικές εφαρμογές – Ασκήσεις εμπέδωσης

4. 5 Δεν είναι, διότι $D_{f\circ g}=[0,+\infty)\neq\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x)=|x|$.

4. 6 Η $f\circ g$ δεν είναι, διότι $D_{f\circ g}=(0,+\infty)\neq\mathbb{R}$. Η $g\circ f$ είναι.

4. 7
- $(f\circ g)(x)=4x^2+6x+2,\ x\in\mathbb{R}$
- $(g\circ f)(x)=2x^2+2x+1,\ x\in\mathbb{R}$
- $(f\circ f)(x)=x^4+2x^3+2x^2+x,\ x\in\mathbb{R}$
- $(g\circ g)(x)=4x+3,\ x\in\mathbb{R}$.

4. 8
- $(f\circ g)(x)=\dfrac{1}{2x+5},\ x\in\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$
- $(g\circ f)(x)=\dfrac{2}{x}+5,\ x\in\mathbb{R}^*$
- $(f\circ f)(x)=x,\ x\in\mathbb{R}^*$.

4. 9

α.
- $(f\circ g)(x)=\eta\mu 2x,\ x\in\mathbb{R}$
- $(g\circ f)(x)=2\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$

β.
- $(f\circ g)(x)=e^{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$
- $(g\circ f)(x)=e^{2x}+1,\ x\in\mathbb{R}$

γ.
- $(f\circ g)(x)=\ln(3x-2),\ x\in\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$
- $(g\circ f)(x)=3\ln x-2,\ x\in(0,+\infty)$

δ.
- $(f\circ g)(x)=\sqrt{2+x},\ x\in[-2,+\infty)$
- $(g\circ f)(x)=2+\sqrt{x},\ x\in[0,+\infty)$.

4. 10 **α.** Σύνθεση των ημx, 2x **β.** Σύνθεση των x^3, συνx

γ. Σύνθεση των εφx, x^2 **δ.** Σύνθεση των $\ln x$, x^2+1

ε. Σύνθεση των e^x, $3x+4$ **στ.** Σύνθεση των $\sqrt{x}$, x^2+x+1

ζ. Σύνθεση των x^2, ημx, 2x **η.** Σύνθεση των x^3, $\ln x$, x^3.

4. 11 **α.** $f(x)=x^2+3x+2$ **β.** $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ **γ.** $f(x)=e^{x+1}$ **δ.** $f(x)=x^2+\ln x$.

4. 12 $g(x)=c \Rightarrow (f\circ g)(x)=f(c),\ x\in\mathbb{R}$, σταθερή.

$f(x)=c \Rightarrow (f\circ g)(x)=c,\ x\in\mathbb{R}$, σταθερή.

Γ. Ασκήσεις για λύση

4. 13 Είναι $D_f=\mathbb{R},\ D_g=(1,+\infty)$.

- Η $g\circ f$ ορίζεται στο:

$$D_1=\left\{x\in D_f \,/\, f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} \,/\, e^x+4>1\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} \,/\, e^x>-3\right\}=\mathbb{R}\neq\varnothing$$

με τύπο $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\ln(f(x)-1)=\ln\left(e^x+4-1\right)=\ln\left(e^x+3\right)$.

Άρα $(g\circ f)(x)=\ln\left(e^x+3\right),\ D_{g\circ f}=\mathbb{R}$.

- Η $f\circ g$ ορίζεται στο:

$$D_2=\left\{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in(1,+\infty) \,/\, \ln(x-1)\in\mathbb{R}\right\}=(1,+\infty)\neq\varnothing$$

με τύπο $(f\circ g)(x)=f(g(x))=e^{g(x)}+4=e^{\ln(x-1)}+4=x-1+4=x+3$.

Άρα $(f\circ g)(x)=x+3,\ D_{f\circ g}=(1,+\infty)$.

4. 14 Είναι $D_f=(0,+\infty),\ D_g=[1,+\infty)$.

α. Η $f\circ g$ ορίζεται στο:

$$D_{f\circ g}=\left\{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in[1,+\infty) \,/\, \sqrt{x-1}\in D_f\right\}=$$
$$=\left\{x\geq 1 \,/\, \sqrt{x-1}>0\right\}=(1,+\infty)$$

με τύπο $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln g(x)=\ln\left(\sqrt{x-1}\right)$.

β. Η $g\circ f$ ορίζεται στο:

$$D_{g\circ f}=\left\{x\in D_f \,/\, f(x)\in D_g\right\}=\{x>0 \,/\, \ln x\geq 1\}=[e,+\infty)$$

με τύπο $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)-1}=\sqrt{\ln x-1}$.

γ. Η $f\circ f$ ορίζεται στο:

$$D_{f\circ f}=\left\{x\in D_f \,/\, f(x)\in D_f\right\}=\{x>0 \,/\, \ln x>0\}=(1,+\infty)$$

με τύπο $(f\circ f)(x)=f(f(x))=\ln f(x)=\ln(\ln x)$.

4.15 **α.** Είναι $D_f = \mathbb{R},\ D_g = [0, +\infty)$.

Η $g \circ f$ ορίζεται στο:

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \geq 0\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, 4e^{2x} + 12e^x + 9 \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \left(2e^x + 3\right)^2 \geq 0\right\} = \mathbb{R}$$

με τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) \cdot \sqrt{f(x)} = \left(2e^x + 3\right)^2 \cdot \sqrt{\left(2e^x + 3\right)^2} = \left(2e^x + 3\right)^3.$$

β. Είναι $D_f = \mathbb{R},\ D_g = (0, +\infty)$.

Η $g \circ f$ ορίζεται στο:

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, e^{3x-2} > 0\} = \mathbb{R}$$

με τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln\frac{e}{f(x)} = \ln e - \ln f(x) = 1 - (3x - 2) = -3x + 3.$$

γ. Είναι $D_f = D_g = \mathbb{R}$.

Η $g \circ f$ ορίζεται στο:

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_g\} = \mathbb{R}$$

με τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \eta\mu^{2020} 2019\pi + \sigma\upsilon\nu^{2021} 2019\pi =$$
$$= (\eta\mu\pi)^{2020} + (\sigma\upsilon\nu\pi)^{2021} = 0^{2020} + (-1)^{2021} = -1.$$

4.16 Είναι $D_f = (2, +\infty),\ D_g = \mathbb{R}$.

α. Η $f \circ f$ ορίζεται στο:

$$D_{f\circ f} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_f\} = \{x > 2 \,/\, \ln(x - 2) > 2\} =$$
$$= \{x > 2 \,/\, x > e^2 + 2\} = \left(e^2 + 2, +\infty\right) = D_1$$

με τύπο $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \ln(f(x) - 2) = \ln(\ln(x - 2) - 2)$.

β. Είναι $D_{\frac{1}{f}} = D_f - \{x \in D_f \,/\, \ln(x - 2) = 0\} = (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

Η $\frac{1}{f} \circ g$ ορίζεται στο:

$$D_2 = \left\{x \in D_g \,/\, g(x) \in D_{\frac{1}{f}}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 4 \in (2,\,3) \cup (3,\,+\infty)\right\} =$$
$$= \left(-\infty,\,-\sqrt{7}\right) \cup \left(-\sqrt{7},\,-\sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{6},\,\sqrt{7}\right) \cup \left(\sqrt{7},\,+\infty\right)$$

με τύπο $\left(\frac{1}{f} \circ g\right)(x) = \left(\frac{1}{f}\right)\left(g(x)\right) = \frac{1}{\ln\left(g(x)-2\right)} = \frac{1}{\ln\left(x^2-6\right)}$.

γ. Η $g \circ \frac{1}{f}$ ορίζεται στο:

$$D_3 = \left\{x \in D_{\frac{1}{f}} \,/\, \frac{1}{f(x)} \in D_g\right\} = \left\{x \in (2,\,3) \cup (3,\,+\infty) \,/\, \frac{1}{\ln(x-2)} \in \mathbb{R}\right\} =$$
$$= (2,\,3) \cup (3,\,+\infty)$$

με τύπο:

$$\left(g \circ \frac{1}{f}\right)(x) = g\left(\left(\frac{1}{f}\right)(x)\right) = g\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\ln^2(x-2)} - 4.$$

4. 17 Είναι $D_f = (0,\,+\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$.

- Για $f(x) = \ln x - 1$, $x \in (0,\,+\infty)$ και $g(x) = e^{x^2-x}$, $x \in [0,\,+\infty)$ είναι:

$$D_1 = \left\{x \in [0,\,+\infty) \,/\, g(x) \in (0,\,+\infty)\right\} = \left\{x \geq 0 \,/\, e^{x^2-x} > 0\right\} = [0,\,+\infty) \neq \varnothing.$$

Άρα $(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = \ln e^{x^2-x} - 1 = x^2 - x - 1$, $x \geq 0$.

- Για $f(x) = \ln x - 1$, $x \in (0,\,+\infty)$ και $g(x) = x^2$, $x \in (-\infty,\,0)$ είναι:

$$D_2 = \left\{x \in (-\infty,\,0) \,/\, x^2 \in (0,\,+\infty)\right\} = (-\infty,\,0) \neq \varnothing.$$

Άρα $(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = \ln x^2 - 1$, $x < 0$.

Τελικά $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1, & x \geq 0 \\ \ln x^2 - 1\;, & x < 0 \end{cases}$.

4. 18 Είναι $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = [-1,\,1]$, $D_h = \mathbb{R}$.

Η $h \circ g \circ f$ ορίζεται, όταν:

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \\ g\left(f(x)\right) \in D_h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \eta\mu x \in [-1,\,1] \\ \sqrt{1 - \eta\mu^2 x} \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

με τύπο:

$$(h\circ g\circ f)(x)=h\big(g(f(x))\big)=h\left(\sqrt{1-f^2(x)}\right)=h\left(\sqrt{1-\eta\mu^2x}\right)=$$
$$=h\left(\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2x}\right)=2\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2x}^{\,2}-1=2\sigma\upsilon\nu^2x-1=\sigma\upsilon\nu 2x,\ x\in\mathbb{R}.$$

4. 19 Είναι $D_f=D_g=\mathbb{R}$, άρα $D_{f\circ g}=D_{g\circ f}=\mathbb{R}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$.

- Η $f\circ g$ έχει τύπο $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=g(x)+\lambda=\lambda x-1+\lambda$.
- Η $g\circ f$ έχει τύπο $(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=\lambda f(x)-1=\lambda x+\lambda^2-1$.

Τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)\Leftrightarrow \lambda x-1+\lambda=\lambda x+\lambda^2-1,$$

όταν:

$$\begin{cases}\lambda=\lambda\\ -1+\lambda=\lambda^2-1\end{cases}\Leftrightarrow \lambda^2=\lambda\Leftrightarrow\lambda=0\ \text{ ή }\ \lambda=1.$$

4. 20 Είναι:

$$f\big(g(x)\big)=x\Leftrightarrow 2g(x)+3=x\Leftrightarrow 2(\alpha x+\beta)+3=x\Leftrightarrow 2\alpha x+2\beta+3=x$$

που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όταν:

$$\begin{cases}2\alpha=1\\ 2\beta+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{2}\\ \beta=-\dfrac{3}{2}\end{cases}.$$

4. 21 Είναι $D_f=D_g=\mathbb{R}$, άρα $D_{f\circ g}=D_{g\circ f}=\mathbb{R}$.

Συνεπώς, αρκεί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει:

$$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)\Leftrightarrow f\big(g(x)\big)=g\big(f(x)\big)\Leftrightarrow 2g(x)-3=\alpha\cdot f(x)+1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(\alpha x+1)-3=\alpha(2x-3)+1\Leftrightarrow 2\alpha x-1=2\alpha x-3\alpha+1.$$

Άρα πρέπει $\begin{cases}2\alpha=2\alpha\\ -1=-3\alpha+1\end{cases}\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{2}{3}$.

4. 22 **α.** Είναι $D_f=\mathbb{R}-\{\kappa\}$.

Η $f\circ f$ ορίζεται στο:

$$D_{f\circ f}=\{x\in D_f\ /\ f(x)\in D_f\}=\{x\neq\kappa\ /\ f(x)\neq\kappa\}=$$
$$=\left\{x\neq\kappa\ /\ \frac{\kappa x+\lambda}{x-\kappa}\neq\kappa\right\}=\{x\neq\kappa\ /\ \lambda\neq-\kappa^2\}=\mathbb{R}-\{\kappa\}.$$

Τότε:

$$f\left(f(x)\right)=\frac{\kappa f(x)+\lambda}{f(x)-\kappa}=\frac{\kappa\cdot\dfrac{\kappa x+\lambda}{x-\kappa}+\lambda}{\dfrac{\kappa x+\lambda}{x-\kappa}-\kappa}=\frac{\dfrac{\kappa^2x+\kappa\lambda+\lambda x-\lambda\kappa}{x-\kappa}}{\dfrac{\kappa x+\lambda-\kappa x+\kappa^2}{x-\kappa}}=\frac{\left(\kappa^2+\lambda\right)x}{\kappa^2+\lambda}=x.$$

β. Είναι $D_g=[0,+\infty)$.

Η $g\circ g$ ορίζεται στο:

$$D_{g\circ g}=\left\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_g\right\}=\left\{x\geq 0\,/\left(\sqrt{x}-\mu\right)^2\geq 0\right\}=[0,+\infty).$$

Τότε:

$$g\left(g(x)\right)=g(x)-2\mu\sqrt{g(x)}+\mu^2=\left(\sqrt{g(x)}-\mu\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}-\mu\right)^2}-\mu\right)^2=\left(\left|\sqrt{x}-\mu\right|-\mu\right)^2.$$

Για $x\in[0,\mu^2]$: $0\leq x\leq\mu^2$, άρα $\sqrt{x}\leq\mu\Leftrightarrow\sqrt{x}-\mu\leq 0$.

Συνεπώς $\left|\sqrt{x}-\mu\right|=\mu-\sqrt{x}$, οπότε βρίσκουμε:

$$g\left(g(x)\right)=\left(\mu-\sqrt{x}-\mu\right)^2=\left(-\sqrt{x}\right)^2=x.$$

4. 23 **α.** Θέτουμε $u=g(x)$, οπότε $u=x+3\Leftrightarrow x=u-3$.

Τότε η $(f\circ g)(x)=x^2-5x+6\Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=x^2-5x+6$ γίνεται:

$$f(u)=(u-3)^2-5\cdot(u-3)+6=u^2-11u+30.$$

Άρα $f(x)=x^2-11x+30,\ x\in\mathbb{R}$.

β. Θέτουμε $u=g(x)$, οπότε $u=e^{2x}\Leftrightarrow \ln u=2x\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln u$.

Τότε η $(f\circ g)(x)=x\Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=x$ γίνεται:

$$f(u)=\frac{1}{2}\ln u\ \text{ όπου }\ u=e^{2x}>0.$$

Άρα $f(x)=\frac{1}{2}\ln x,\ x>0$.

γ. Από υπόθεση έχουμε $(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=\varepsilon\varphi^2 x$.

Είναι $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$, άρα $g\left(f(x)\right)=\dfrac{f(x)}{1-f(x)}$.

Τότε:

$$\frac{f(x)}{1-f(x)}=\varepsilon\varphi^2x \Leftrightarrow f(x)=\big(1-f(x)\big)\varepsilon\varphi^2x \Leftrightarrow f(x)\cdot\big(1+\varepsilon\varphi^2x\big)=\varepsilon\varphi^2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{\varepsilon\varphi^2x}{1+\varepsilon\varphi^2x} \quad \text{ή} \quad f(x)=\frac{\dfrac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}}{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}}$$

$$\text{ή} \quad f(x)=\eta\mu^2x,\quad x\in\mathbb{R}-\left\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right\}.$$

4.24 **α.** Θέτουμε $u=g(x)$, $u\in\mathbb{R}$, οπότε $u=\ln x \Leftrightarrow x=e^u$.

Τότε η $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=\dfrac{x-1}{x+1}$ γίνεται $f(u)=\dfrac{e^u-1}{e^u+1}$.

Άρα $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

β. Θέτουμε $u=g(x)$, οπότε $u=-x^2 \Leftrightarrow x^2=-u$ με $u\le 0$.

Τότε η $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=\sqrt{2+x^6}=\sqrt{2+\left(x^2\right)^3}$ γίνεται:

$$f(u)=\sqrt{2+(-u)^3}=\sqrt{2-u^3},\ u\le 0.$$

Άρα $f(x)=\sqrt{2-x^3}$, $x\le 0$.

γ. Θέτουμε $u=g(x)$, οπότε $u=e^x-1 \Leftrightarrow x=\ln(u+1)$.

Τότε η $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=\ln(x+1)$ γίνεται:

$$f(u)=\ln\big(\ln(u+1)+1\big),\ u>-1.$$

Άρα $f(x)=\ln\big(\ln(x+1)+1\big)$, $x>-1$.

δ. Θέτουμε $u=g(x)$, οπότε $u=x+1 \Leftrightarrow x=u-1$.

Τότε η $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=x^3-6x+5$ γίνεται:

$$f(u)=(u-1)^3-6(u-1)+5=u^3-3u^2+3u-1-6u+6+5=$$
$$=u^3-3u^2-3u+10.$$

Άρα $f(x)=x^3-3x^2-3x+10$, $x\in\mathbb{R}$.

4.25 **α.** Θέτουμε $u=g(x)$, οπότε $u=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x=u^2-1$, $u\ge 0$.

Τότε η $(f\circ g)(x)=x^3-6x+5 \Leftrightarrow f\big(g(x)\big)=x^3-6x+5$ γίνεται:

$$f(u)=\left(u^2-1\right)^3-6\left(u^2-1\right)+5=u^6-3u^4+3u^2-1-6u^2+6+5=$$
$$=u^6-3u^4-3u^2+10.$$

Άρα $f(x)=x^6-3x^4-3x^2+10,\ x\geq 0$.

β. Θέτουμε $u=g(x)$, οπότε $u=e^{x-1}-1\Leftrightarrow x=1+\ln(u+1),\ u>-1$.

Τότε η $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{x+1}{1-x}$ με $x\neq 1$, άρα $u\neq 0$, γίνεται:

$$f(u)=\frac{1+\ln(u+1)+1}{1-1-\ln(u+1)}=\frac{2+\ln(u+1)}{-\ln(u+1)}.$$

Άρα $f(x)=\dfrac{2+\ln(x+1)}{-\ln(x+1)},\ -1<x\neq 0$.

γ. Θέτουμε $u=g(x)$, οπότε $u=\ln(x-1)\Leftrightarrow x=e^u+1,\ u\in\mathbb{R}$.

Τότε η $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ γίνεται $f(u)=\dfrac{e^{e^u+1}-1}{e^{e^u+1}+1}$.

Άρα $f(x)=\dfrac{e^{e^x+1}-1}{e^{e^x+1}+1},\ x\in\mathbb{R}$.

δ. Θέτουμε $u=g(x)$, οπότε $u=e^{x-1}\Leftrightarrow x=\ln u+1,\ u>0$.

Τότε η $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ γίνεται:

$$f(u)=\frac{e^{\ln u+1}-1}{e^{\ln u+1}+1}=\frac{e\cdot e^{\ln u}-1}{e\cdot e^{\ln u}+1}=\frac{eu-1}{eu+1}.$$

άρα $f(x)=\dfrac{ex-1}{ex+1},\ x>0$.

4. 26 **α.** Είναι $(g\circ f)(x)=ημx+συνx$, (1).

Επίσης $g(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$, άρα $g(f(x))=\dfrac{2f(x)+1}{f(x)+2}$, (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{2f(x)+1}{f(x)+2}=ημx+συνx\Leftrightarrow 2f(x)+1=(ημx+συνx)(f(x)+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-ημx-συνx)\cdot f(x)=2ημx+2συνx-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{2ημx+2συνx-1}{2-ημx-συνx},\ x\in\mathbb{R},$$

διότι $\left.\begin{array}{r}ημx\leq 1\\ συνx\leq 1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}1-ημx\geq 0\\ 1-συνx\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow 2-ημx-συνx\geq 0$ και επιπλέον τα ημx και συνx

δεν είναι ταυτόχρονα 1, συνεπώς $2-ημx-συνx>0$.

β. Είναι $(g\circ f)(x)=g(f(x))=e^x-\ln x+1,\ (1).$

Επίσης $g(x)=2x-1$, άρα $g(f(x))=2f(x)-1,\ (2).$

Από τις (1) και (2) έχουμε $2f(x)-1=e^x-\ln x+1.$

Άρα $f(x)=\dfrac{e^x-\ln x+2}{2},\ x>0.$

γ. Είναι $(g\circ f)(x)=g(f(x))=3x^2-9x+2,\ (1).$

Επίσης $g(x)=3x+2$, άρα $g(f(x))=3f(x)+2,\ (2).$

Από τις (1) και (2) έχουμε $3f(x)+2=3x^2-9x+2.$

Άρα $f(x)=x^2-3x,\ x\in\mathbb{R}.$

δ. Είναι $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\dfrac{1}{x^2+1},\ (1).$

Επίσης $g(x)=e^x$, άρα $g(f(x))=e^{f(x)},\ (2).$

Από τις (1) και (2) έχουμε $e^{f(x)}=\dfrac{1}{x^2+1}$. Άρα:

$$f(x)=\ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\ \text{ ή }\ f(x)=-\ln(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}.$$

4. 27 **α.** Είναι $f(x)=\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2(x^2+4)}=|\sigma\upsilon\nu(x^2+4)|.$

Αν $\varphi_1(x)=|x|$, $\varphi_2(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $\varphi_3(x)=x^2+4$, τότε:

$$f(x)=\varphi_1(\varphi_2(\varphi_3(x))).$$

Άρα $f=\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3.$

β. Είναι $f(x)=3(\ln 5x)^2-2.$

Αν $\varphi_1(x)=3x^2-2$, $\varphi_2(x)=\ln x$, $\varphi_3(x)=5x$, τότε $f=\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3.$

γ. Αν $\varphi_1(x)=2020x$, $\varphi_2(x)=\ln x$, $\varphi_3(x)=e^x-1$, $\varphi_4(x)=3x$ (ή $\varphi_3(x)=x^3-1$, $\varphi_4(x)=e^x$), τότε:

$$f=\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3\circ\varphi_4.$$

δ. Αν $\varphi_1(x)=x^4$, $\varphi_2(x)=e^x+5$, $\varphi_3(x)=3x$ (ή $\varphi_2(x)=x^3+5$, $\varphi_3(x)=e^x$), τότε:

$$f=\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3.$$

4. 28 **α.** Είναι $f=\varphi_1\circ\varphi_2$ όπου: $\varphi_1(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $\varphi_2(x)=x^2+2.$

β. Είναι $f=\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3$ όπου: $\varphi_1(x)=\ln(x-1)$, $\varphi_2(x)=e^x$, $\varphi_3(x)=3x-3.$

γ. Είναι $f=\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3\circ\varphi_4$ όπου: $\varphi_1(x)=e^x$, $\varphi_2(x)=x^2$, $\varphi_3(x)=\eta\mu x$, $\varphi_4(x)=5x$.

δ. Είναι $f=\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3$ όπου: $\varphi_1(x)=4x^3+7$, $\varphi_2(x)=\eta\mu x$, $\varphi_3(x)=5x$.

ε. Είναι $f=\varphi_1\circ\varphi_2$ όπου: $\varphi_1(x)=\dfrac{x-2}{x^2+x+2}$, $\varphi_2(x)=e^x$.

4. 29 **α.** Είναι $f=\varphi_1\circ\varphi_2$ όπου: $\varphi_1(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-x}{x^2}$, $\varphi_2(x)=e^x$.

β. Είναι $f=\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3\circ\varphi_4$ όπου: $\varphi_1(x)=\sqrt{x^2+1}$, $\varphi_2(x)=\ln x$, $\varphi_3(x)=x^2-x+2$, $\varphi_4(x)=e^x$.

γ. Είναι $f=\varphi_1\circ\varphi_2\circ g$ όπου: $\varphi_1(x)=3x^2-x+e$, $\varphi_2(x)=e^x$.

δ. Είναι $f(x)=\left[\left(\left(g(x)\right)^{\eta\mu x}\right)^3-2\cdot\left(\left(g(x)\right)^{\eta\mu x}\right)^2+4\cdot\left(g(x)\right)^{\eta\mu x}-3\right]^2+1.$

Αν $\varphi_1(x)=x^2+1$, $\varphi_2(x)=x^3-2x^2+4x-3$, $\varphi_3(x)=\left(g(x)\right)^{\eta\mu x}$, τότε:

$$f=\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3.$$

4. 30 Είναι $D_f=D_g=\mathbb{R}$, άρα $D_{f\circ g}=\mathbb{R}$.

α. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το $-x\in\mathbb{R}$, οπότε:

$$(f\circ g)(-x)=f\left(g(-x)\right)\overset{g:\text{άρτια}}{=}f\left(g(x)\right)=(f\circ g)(x).$$

Άρα $f\circ g$: άρτια.

β. Είναι $(f\circ g)(-x)=f\left(g(-x)\right)\overset{g:\text{περιττή}}{=}f\left(-g(x)\right)\overset{f:\text{άρτια}}{=}f\left(g(x)\right)=(f\circ g)(x)$.

Άρα $f\circ g$: άρτια.

γ. Είναι $(f\circ g)(-x)=f\left(g(-x)\right)\overset{g:\text{περιττή}}{=}f\left(-g(x)\right)\overset{f:\text{περιττή}}{=}-f\left(g(x)\right)=-(f\circ g)(x)$.

Άρα $f\circ g$: περιττή.

4. 31 **α.** Αν $\varphi_1(x)=\ln x$, $x>0$, τότε η $f(\ln x)=f\left(\varphi_1(x)\right)$ ορίζεται στο:

$$D_1=\left\{x\in(0,+\infty)/\ln x\in[-1,2)\right\}=\left\{x\in(0,+\infty)/e^{-1}\le x<e^2\right\}=\left[\frac{1}{e},e^2\right).$$

Άρα $D_h=D_f\cap D_1=\left[\dfrac{1}{e},2\right)$.

β. Αν $\varphi_1(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$ και $\varphi_2(x)=x-2$, $x\in\mathbb{R}$, τότε:

- η $f\left(e^x\right)=f\left(\varphi_1(x)\right)$ ορίζεται στο $D_1=\left\{x\in\mathbb{R}/e^x\in[-2,4]\right\}=(-\infty,\ln 4]$,

- η $f(x-2)=f(\varphi_2(x))$ ορίζεται στο $D_2=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x-2\in[-2,\,4]\}=[0,\,6]$.

Άρα $D_h=D_1\cap D_2=[0,\,\ln 4]$.

γ. Αν $\varphi_1(x)=x+2$ και $\varphi_2(x)=x^2-4x+3,\ x\in\mathbb{R}$, τότε:

- η $f(x+2)=f(\varphi_1(x))$ ορίζεται στο:

$$D_1=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x+2\in[3,\,+\infty)\}=[1,\,+\infty),$$

- η $f(x^2-4x+3)=f(\varphi_2(x))$ ορίζεται στο:

$$D_2=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x^2-4x+3\in[3,\,+\infty)\}=(-\infty,\,0]\cup[4,\,+\infty).$$

Άρα $D_h=D_1\cap D_2=[4,\,+\infty)$.

4. 32 Ισχύει $2f(x)+3f(-x)=7\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, (1).

α. Η (1) για $x=0$ δίνει:

$$2f(0)+3f(-0)=7\eta\mu 0\cdot\sigma\upsilon\nu 0\Leftrightarrow 5f(0)=7\cdot 0\cdot 1\Leftrightarrow f(0)=0.$$

β. Η (1), όταν θέσουμε όπου x το $-x$, γίνεται:

$$2f(-x)+3f(-(-x))=7\eta\mu(-x)\cdot\sigma\upsilon\nu(-x)\Leftrightarrow 2f(-x)+3f(x)=-7\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x,\quad (2).$$

Προσθέτουμε τις (1), (2) κατά μέλη:

$$5f(x)+5f(-x)=0\Leftrightarrow f(-x)=-f(x).$$

Άρα η συνάρτηση f είναι περιττή.

4. 33 **α.** Η $xf(x)+f(-x)=x^2-x+1$, (1), θέτοντας όπου x το $-x$, δίνει:

$$-xf(-x)+f(x)=x^2+x+1,\ (2).$$

Η $(1)\Leftrightarrow f(-x)=x^2-x+1-xf(x)$, άρα η (2) γίνεται:

$$-x\left[x^2-x+1-xf(x)\right]+f(x)=x^2+x+1\Leftrightarrow (x^2+1)f(x)-x^3+x^2-x=$$

$$=x^2+x+1\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^3+2x+1}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}.$$

β. Η $f(x)+xf(-x)=x-1$, (1), θέτοντας όπου x το $-x$, δίνει:

$$f(-x)-xf(x)=-x-1\Leftrightarrow f(-x)=xf(x)-x-1,\ (2).$$

Συνεπώς:

$$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow} f(x)+x\cdot(xf(x)-x-1)=x-1\Leftrightarrow (x^2+1)f(x)-x^2-x=x-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}.$$

4. 34 **α.** Η $xf(x)+3f\left(-\frac{1}{x}\right)=2x$, με $x\neq 0$, (1), θέτοντας όπου x το $-\frac{1}{x}$, δίνει:

$$-\frac{1}{x}\cdot f\left(-\frac{1}{x}\right)+3\cdot f\left(-\frac{1}{-\frac{1}{x}}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow-\frac{1}{x}\cdot f\left(-\frac{1}{x}\right)+3f(x)=-\frac{2}{x},\ (2).$$

Η $(1)\Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{3}x-\frac{x}{3}\cdot f(x)$, (3).

Η $(2)\overset{(3)}{\Rightarrow}-\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{2}{3}x-\frac{x}{3}f(x)\right)+3f(x)=-\frac{2}{x}$ ή $-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}f(x)+3f(x)=-\frac{2}{x}$.

Συνεπώς $f(x)=\frac{x-3}{5x}$, $x\in\mathbb{R}^*$.

β. Είναι $f\left(x-\frac{2}{x}\right)=x^2+\frac{4}{x^2}=\left(x-\frac{2}{x}\right)^2+4$ με $x\neq 0$.

Θέτουμε $u=x-\frac{2}{x}$, συνεπώς $f(u)=u^2+4$, οπότε $f(x)=x^2+4$, $x\in\mathbb{R}^*$.

4. 35 Είναι $f\left(e^{g(x)}\right)=2x^2+3$, (1) και $f(x)=2x-1$, άρα $f\left(e^{g(x)}\right)=2e^{g(x)}-1$, (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε $2e^{g(x)}-1=2x^2+3\Leftrightarrow e^{g(x)}=x^2+2$.

Άρα $g(x)=\ln\left(x^2+2\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

4. 36 **α.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x)-2f(x)-3=0\Leftrightarrow\left(f(x)-3\right)\left(f(x)+1\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)=3\ \text{ ή }\ f(x)=-1.$$

Όμως η $y=-1$ δεν τέμνει τη C_f, συνεπώς $f(x)\neq-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $f(x)=3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

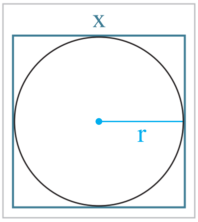
β. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x)-\left(e^x+x\right)f(x)+xe^x=0\Leftrightarrow f^2(x)-e^xf(x)-xf(x)+xe^x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(f(x)-x\right)\cdot\left(f(x)-e^x\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)=x\ \text{ ή }\ f(x)=e^x.$$

Όμως η $y=x$ δεν τέμνει τη C_f, συνεπώς $f(x)\neq x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

4.37 **α.** Είναι $x = 2r \Leftrightarrow r = \frac{x}{2}$. Άρα $r(x) = \frac{x}{2}$, $x > 0$.



β. Είναι $E = \pi r^2$, άρα $E = \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2$.

Επομένως $E(x) = \frac{\pi x^2}{4}$, $x > 0$.

γ. • Η $E \circ r$ ορίζεται στο $D_1 = \left\{x \in (0, +\infty) / \frac{x}{2} \in (0, +\infty)\right\} = (0, +\infty)$

με τύπο $(E \circ r)(x) = E(r(x)) = \frac{\pi \cdot r^2(x)}{4} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{4} = \frac{\pi x^2}{16}$.

• Η $r \circ E$ ορίζεται στο $D_2 = \left\{x \in (0, +\infty) / \frac{\pi x^2}{4} \in (0, +\infty)\right\} = (0, +\infty)$ με τύπο:

$$(r \circ E)(x) = r(E(x)) = \frac{E(x)}{2} = \frac{\pi x^2}{8}.$$

• Η $\frac{1}{r+E}$ ορίζεται για $x \in D_r \cap D_E = (0, +\infty)$ με:

$$(r+E)(x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi x^2}{4} \neq 0 \text{ που ισχύει για } x > 0.$$

Άρα, η $\frac{1}{r+E}$ ορίζεται στο $(0, +\infty)$ με τύπο:

$$\left(\frac{1}{r+E}\right)(x) = \frac{1}{r(x)+E(x)} = \frac{1}{\frac{x}{2} + \frac{\pi x^2}{4}} = \frac{4}{2x + \pi x^2}.$$

4.38 **α.** Ο ρυθμός = ταχύτητα αύξησης της ακτίνας είναι $\upsilon = 3 \Rightarrow \frac{r}{t} = 3 \Rightarrow r = 3t$.

Άρα $r(t) = 3t$, $t \geq 0$.

β. Είναι $V = V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, $r \geq 0$.

Η $V \circ r$ ορίζεται στο $D = \{t \geq 0 / 3t \geq 0\} = [0, +\infty)$ με τύπο:

$$(V \circ r)(t) = V(r(t)) = \frac{4}{3}\pi \cdot (r(t))^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (3t)^3 = 36\pi t^3.$$

2ο

Κριτηριο Αξιολογησης

Θέμα Α

Α1. Θεωρία.

Α2. Θεωρία.

Α3. **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό.

Θέμα Β

Β1. **α.** • Η f ορίζεται, όταν:

$$\begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x>2.$$

Άρα $D_f=(2,+\infty)$.

• Η g ορίζεται, όταν:

$$\begin{cases} 2-x\ne 0 \\ 2-\dfrac{5}{2-x}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 2 \\ \dfrac{-2x-1}{2-x}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 2 \\ \dfrac{2x+1}{x-2}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 2 \\ x\le -\dfrac{1}{2} \text{ ή } x\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\le -\frac{1}{2} \text{ ή } x>2.$$

Άρα $D_g=\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup(2,+\infty)$.

Επομένως $D_f\ne D_g$, συνεπώς $f\ne g$.

β. Αν $x\in A=D_f\cap D_g=(2,+\infty)$, τότε:

$$g(x)=\sqrt{2-\frac{5}{2-x}}=\sqrt{\frac{2\cdot(2-x)-5}{2-x}}=\sqrt{\frac{-1-2x}{2-x}}=\sqrt{\frac{2x+1}{x-2}}=\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x-2}}=f(x).$$

Άρα, το ζητούμενο $A\subseteq\mathbb{R}$ είναι το $A=(2,+\infty)$.

Β2. Έχουμε:

$$2\left(f^2-fg\right)(x)+\left(g(x)-2x\right)\cdot\left(g(x)+2x\right)\le 2x\left(f(x)-x\right)-3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f^2(x)-2f(x)g(x)+g^2(x)-4x^2\le 2xf(x)-2x^2-3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)g(x)+g^2(x)+f^2(x)-2xf(x)+x^2\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[f(x)-g(x)\right]^2+\left[f(x)-x\right]^2\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)-g(x)=f(x)-x=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)=x,\ x\in\mathbb{R}.$$

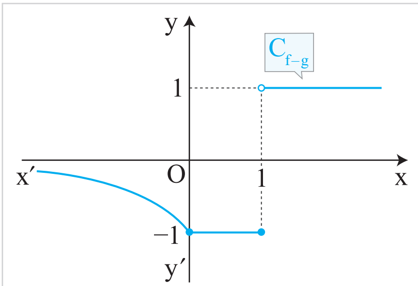
Θέμα Γ

Γ1. α. Έχουμε:

- για $x<0$: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=1-\left(e^x+1\right)=-e^x$,
- για $0\le x\le 1$: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=e^x-\left(e^x+1\right)=-1$,
- για $x>1$: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=e^x-\left(e^x-1\right)=1$.

Άρα $(f-g)(x)=\begin{cases}-e^x, & x<0\\ -1, & 0\le x\le 1.\\ 1, & x>1\end{cases}$

β. Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



Γ2. α. • Η f ορίζεται, όταν:

$$\begin{cases}x-4\ge 0\\ \sqrt{x-4}-2\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 4\\ \sqrt{x-4}\ne 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 4\\ x-4\ne 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 4\\ x\ne 8\end{cases}.$$

Άρα $D_f=[4,\,8)\cup(8,\,+\infty)$.

• Η g ορίζεται, όταν:

$$\begin{cases}x-4\ge 0\\ 8-x\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 4\\ x\ne 8\end{cases}.$$

Άρα $D_g=[4,\,8)\cup(8,\,+\infty)$.

Η $f+g$ έχει τύπο:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{\sqrt{x-4}+2}{\sqrt{x-4}-2}+\frac{4\sqrt{x-4}-x}{8-x}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2}{\left(\sqrt{x-4}-2\right)\left(\sqrt{x-4}+2\right)}+\frac{x-4\sqrt{x-4}}{x-8}=$$

$$=\frac{x-4+4+4\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}^2-2^2}+\frac{x-4\sqrt{x-4}}{x-8}=$$

$$=\frac{x+4\sqrt{x-4}}{x-8}+\frac{x-4\sqrt{x-4}}{x-8}=\frac{2x}{x-8}$$

και πεδίο ορισμού το $D_{f+g}=D_f\cap D_g=[4,8)\cup(8,+\infty)$.

(Υπενθυμίζουμε ότι το πεδίο ορισμού της f + g ΔΕΝ βρίσκεται από τον τύπο της.)

β. Έχουμε:

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{\sqrt{x-4}+2}{\sqrt{x-4}-2}\cdot\frac{4\sqrt{x-4}-x}{8-x}\overset{(\alpha)}{=}\frac{x+4\sqrt{x-4}}{x-8}\cdot\frac{x-4\sqrt{x-4}}{x-8}=$$

$$=\frac{x^2-4^2\cdot\sqrt{x-4}^2}{(x-8)^2}=\frac{x^2-16(x-4)}{(x-8)^2}=\frac{x^2-16x+64}{(x-8)^2}=\frac{(x-8)^2}{(x-8)^2}=1.$$

Θέμα Δ

Δ1. • Είναι $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$. Η $f(f(x))=(f\circ f)(x)$ ορίζεται, όταν $x\in\mathbb{R}-\{2\}$.

Επίσης:

$$f(x)\in\mathbb{R}-\{2\}\Leftrightarrow\frac{2x+3}{x-2}\neq 2\Leftrightarrow 2x+3\neq 2(x-2)\Leftrightarrow 2x+3\neq 2x-4:\ \text{ισχύει.}$$

Άρα $D_{f\circ f}=\mathbb{R}-\{2\}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ ισχύει:

$$f(f(x))=\frac{2f(x)+3}{f(x)-2}=\frac{2\cdot\dfrac{2x+3}{x-2}+3}{\dfrac{2x+3}{x-2}-2}=\frac{\dfrac{2(2x+3)+3(x-2)}{x-2}}{\dfrac{2x+3-2(x-2)}{x-2}}=$$

$$=\frac{4x+6+3x-6}{2x+3-2x+4}=\frac{7x}{7}=x.$$

• Είναι $D_g=[0,4]$. Η $g(g(x))=(g\circ g)(x)$ ορίζεται, όταν $x\in[0,4]$.

Επίσης:

$$g(x)\in[0,4]\Leftrightarrow 0\leq x+4-4\sqrt{x}\leq 4\Leftrightarrow 0\leq\left(\sqrt{x}-2\right)^2\leq 4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|\sqrt{x}-2\right|\leq 2\overset{\sqrt{x}\leq 2}{\Leftrightarrow}2-\sqrt{x}\leq 2\Leftrightarrow\sqrt{x}\geq 0:\ \text{ισχύει.}$$

Άρα $D_{g\circ g}=[0,\,4]$ και για κάθε $x\in[0,\,4]$ ισχύει $g(x)=x+4-4\sqrt{x}=\left(\sqrt{x}-2\right)^2$, οπότε:

$$g(g(x))=\left(\sqrt{g(x)}-2\right)^2=\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}-2\right)^2=\left(\left|\sqrt{x}-2\right|-2\right)^2\underset{\sqrt{x}\le 2}{\overset{0\le x\le 4}{=}}$$

$$=\left(2-\sqrt{x}-2\right)^2=\left(-\sqrt{x}\right)^2=x.$$

Δ2. • Η συνάρτηση $f\circ f\circ g$ με τύπο $(f\circ f\circ g)(x)=(f\circ f)(g(x))$ ορίζεται, όταν:

$$\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_{f\circ f}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in[0,\,4] \\ g(x)\neq 2\end{cases}.$$

Έχουμε:

$$g(x)=2\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)^2=2\Leftrightarrow\left|\sqrt{x}-2\right|=\sqrt{2}\overset{\sqrt{x}\le 2}{\Leftrightarrow}2-\sqrt{x}=\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}=2-\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\left(2-\sqrt{2}\right)^2\in[0,\,4].$$

Συνεπώς, η $(f\circ f\circ g)(x)=(f\circ f)(g(x))$ ορίζεται, όταν $\begin{cases} x\in[0,\,4] \\ x\neq\left(2-\sqrt{2}\right)^2\end{cases}$.

Δηλαδή $D_{f\circ f\circ g}=\left[0,\,\left(2-\sqrt{2}\right)^2\right)\cup\left(\left(2-\sqrt{2}\right)^2,\,4\right]$ και για κάθε $x\in D_{f\circ f\circ g}$ από το Δ1 ερώτημα ισχύει:

$$(f\circ f\circ g)(x)=(f\circ f)(g(x))=g(x).$$

• Η συνάρτηση $g\circ g\circ f$ με τύπο $(g\circ g\circ f)(x)=(g\circ g)(f(x))$ ορίζεται, όταν:

$$\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_{g\circ g}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in\mathbb{R}-\{2\} \\ f(x)\in[0,\,4]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq 2 \\ 0\le f(x)\le 4\end{cases}.$$

Έχουμε:

$$0\le f(x)\le 4\overset{x\neq 2}{\Leftrightarrow}0\le\frac{2x+3}{x-2}\le 4\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x-2}\ge 0 \\ \dfrac{2x+3}{x-2}\le 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2x+3)(x-2)\ge 0 \\ \dfrac{2x+3}{x-2}-4\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2x+3)(x-2)\ge 0 \\ \dfrac{-2x+11}{x-2}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2x+3)(x-2)\ge 0 \\ (2x-11)(x-2)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\le-\dfrac{3}{2}\ \text{ή}\ x>2 \\ x<2\ \text{ή}\ x\ge\dfrac{11}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{11}{2},\,+\infty\right).$$

Δηλαδή $D_{g\circ g\circ f}=\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{11}{2},+\infty\right)$ και για κάθε $x\in D_{g\circ g\circ f}$ από το Δ1 ερώτημα ισχύει:

$$(g\circ g\circ f)(x)=(g\circ g)(f(x))=f(x).$$

Δ3. Είναι:

- $f(h(x))=\dfrac{2e^{2x}+4e^{x}+5}{(e^{x}+1)(e^{x}-1)+2e^{x}}=\dfrac{2e^{2x}+4e^{x}+5}{e^{2x}+2e^{x}-1}$,
- $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}\Rightarrow f(h(x))=\dfrac{2h(x)+3}{h(x)-2}$.

Οπότε:

$$\frac{2h(x)+3}{h(x)-2}=\frac{2e^{2x}+4e^{x}+5}{e^{2x}+2e^{x}-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2h(x)+3)\cdot(e^{2x}+2e^{x}-1)=(h(x)-2)\cdot(2e^{2x}+4e^{x}+5)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(x)\cdot(2e^{2x}+4e^{x}-2)+3e^{2x}+6e^{x}-3=h(x)\cdot(2e^{2x}+4e^{x}+5)-4e^{2x}-8e^{x}-10\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(x)\cdot(2e^{2x}+4e^{x}-2-2e^{2x}-4e^{x}-5)=-3e^{2x}-6e^{x}+3-4e^{2x}-8e^{x}-10\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7h(x)=-7e^{2x}-14e^{x}-7\Leftrightarrow h(x)=e^{2x}+2e^{x}+1=(e^{x}+1)^{2},\ x\in\mathbb{R}.$$

5η

Ενότητα

Μονοτονία συνάρτησης – Ακρότατα συνάρτησης

Α. Του τύπου Σωστό / Λάθος

5. 1 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος.

5. 2 **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος.

5. 3 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος **στ.** Λάθος.

5. 4 **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό **στ.** Σωστό.

5. 5 **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος **στ.** Λάθος **ζ.** Σωστό **η.** Λάθος.

5. 6 **1ος α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\frac{1}{x}$. **2ος α.** Α **β.** Με άτοπο.

3ος α. Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=|x|$.

4ος α. Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Β. Βασικές εφαρμογές – Ασκήσεις εμπέδωσης

5. 7 **α.** $f\uparrow\mathbb{R}$, χωρίς min, max **β.** $f\downarrow\mathbb{R}$, χωρίς min, max

γ. $f\uparrow\mathbb{R}$, χωρίς min, max **δ.** $f\downarrow\mathbb{R}$, χωρίς min, max

ε. $f\downarrow(-\infty, 0],\ f\uparrow[0, +\infty),\ \min f(x)=f(0)=0$

στ. $f\uparrow(-\infty, 0],\ f\downarrow[0, +\infty),\ \max f(x)=f(0)=0$

ζ. $f\uparrow\mathbb{R}$, χωρίς min, max **η.** $f\downarrow\mathbb{R}$, χωρίς min, max

θ. $f\downarrow(-\infty, 0),\ f\downarrow(0, +\infty)$, χωρίς min, max

ι. $f\uparrow(-\infty, 0),\ f\uparrow(0, +\infty)$, χωρίς min, max

ια. $f\uparrow[0, +\infty),\ \min f(x)=f(0)=0$ **ιβ.** $f\uparrow\mathbb{R}$, χωρίς min, max

ιγ. $f\uparrow(0,+\infty)$, χωρίς min, max

ιδ. $f\uparrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f\downarrow\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, $f\uparrow\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$,

$\min f(x)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$, $\max f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

ιε. $f\downarrow[0,\pi]$, $f\uparrow[\pi,2\pi]$, $\min f(x)=f(\pi)=-1$, $\max f(x)=f(0)=f(2\pi)=1$

ιστ. $f\uparrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, χωρίς min, max

ιζ. $f\downarrow(0,\pi)$, χωρίς min, max.

5. 8 **α.** $f\uparrow\mathbb{R}$ **β.** $f\uparrow\mathbb{R}$ **γ.** $f\downarrow\mathbb{R}$.

5. 9 **α.** $f\uparrow[0,+\infty)$ **β.** $f\uparrow[-2,+\infty)$.

5. 10 **α.** $f\uparrow\mathbb{R}$ **β.** $f\uparrow\mathbb{R}$ **γ.** $f\uparrow\mathbb{R}$.

5. 11 **α.** $f\uparrow(0,+\infty)$ **β.** $f\uparrow(3,+\infty)$.

5. 12 **α.** $f\uparrow[0,+\infty)$ **β.** $f\uparrow\mathbb{R}$ **γ.** $f\uparrow(0,+\infty)$ **δ.** $f\uparrow[0,+\infty)$.

5. 13 **α.** $D_f=\mathbb{R}$, $\min f(x)=f(0)=0$ **β.** $D_f=\mathbb{R}$, $\min f(x)=f(1)=0$

γ. $D_f=\mathbb{R}$, $\min f(x)=f(0)=1$ **δ.** $D_f=\mathbb{R}$, $\min f(x)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$

ε. $D_f=\mathbb{R}$, $\max f(x)=f(0)=2$ **στ.** $D_f=\mathbb{R}$, $\max f(x)=f(0)=\frac{3}{4}$.

5. 14 **α.** $D_f=\mathbb{R}$, $\min f(x)=f(0)=0$ **β.** $D_f=\mathbb{R}$, $\min f(x)=f(-5)=0$

γ. $D_f=\mathbb{R}$, $\min f(x)=f(0)=-3$ **δ.** $D_f=\mathbb{R}$, $\min f(x)=f(-3)=-2$

ε. $D_f=\mathbb{R}$, $\max f(x)=f(0)=4$ **στ.** $D_f=\mathbb{R}$, $\max f(x)=f(0)=\frac{6}{5}$.

5. 15 **α.** $D_f=[0,+\infty)$, $\min f(x)=f(0)=0$ **β.** $D_f=[-4,+\infty)$, $\min f(x)=f(-4)=0$

γ. $D_f=[0,+\infty)$, $\min f(x)=f(0)=4$ **δ.** $D_f=[3,+\infty)$, $\min f(x)=f(3)=3$

ε. $D_f=[0,+\infty)$, $\max f(x)=f(0)=1$ **στ.** $D_f=[0,+\infty)$, $\max f(x)=f(0)=\frac{2}{3}$.

5. 16 **α.** $x=3$ **β.** $x=\pm 2$ **γ.** $x=1$ **δ.** $x=1$ ή $x=2$ **ε.** $x=2$.

5. 17 **α.** $x=0$ **β.** $x=1$ **γ.** $x=\frac{\pi}{2}$.

5. 18 **α.** $x = \pm 5$ **β.** $x = 5$ ή $x = -1$ **γ.** $x = 5$ ή $x = 1$
δ. Αδύνατη.

5. 19 **α.** $x > 2$ **β.** $x \le -3$ ή $x \ge 3$ **γ.** $-1 < x < 1$
δ. $x \le -4$ **ε.** $-2 < x < 1$ **στ.** $x \in \mathbb{R}$.

5. 20 **α.** $x < 2$ **β.** $x \ge e^3$ **γ.** $x \in [0, 2\pi]$
δ. $x > 4$ **ε.** $1 \le x < 17$ **στ.** $x < 2$.

5. 21 **α.** $x < -3$ ή $x > 3$ **β.** $-4 \le x \le 4$ **γ.** $x \ge 5$ ή $x \le 1$
δ. $3 < x < 7$ **ε.** Αδύνατη.

5. 22 **α.** $x \ge 4$ **β.** $x < -5$ ή $x > 5$ **γ.** $-4 \le x \le 4$
δ. $x > -6$ **ε.** $x < 2$ ή $x > 3$ **στ.** $-2 \le x \le 4$.

5. 23 **α.** $-1 \le x \le 1$ **β.** $x < -6$ ή $x > 6$ **γ.** $-5 < x < -3$
δ. $x \ge 3$ ή $x \le 1$ **ε.** Ταυτότητα.

5. 24 **α.** $x \ge \ln 3$ **β.** $0 < x < e^2$ **γ.** $0 \le x < 9$
δ. $x > 59$ **ε.** Αδύνατη.

Γ. Ασκήσεις για λύση

5. 25 **α.** $f \uparrow \mathbb{R}$ ως βασική συνάρτηση.

β. $f \downarrow \mathbb{R}$ ως βασική συνάρτηση.

γ. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1^3 < x_2^3 \\ x_1 + 2020 < x_2 + 2020 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x_1^3 + x_1 + 2020 < x_2^3 + x_2 + 2020 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα $f \uparrow \mathbb{R}$.

δ. Έστω $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 < x_2^2 \\ x_1 + 1 < x_2 + 1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} x_1^2 + x_1 + 1 < x_2^2 + x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$

Άρα $f \uparrow (0, +\infty)$.

ε. $f \uparrow \mathbb{R}$ ως βασική συνάρτηση.

στ. $f \uparrow \mathbb{R}$ ως βασική συνάρτηση.

5. 26 **α.** Είναι $A_f = [0, +\infty)$. Έστω:

$$0 \le x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1^3 < x_2^3 \\ \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} x_1^3 + \sqrt{x_1} < x_2^3 + \sqrt{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα $f \uparrow [0, +\infty)$.

β. Είναι $A_f = (0, +\infty)$. Έστω:

$$0 < x_1 < x_2 \ \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1} < e^{x_2} \\ \ln x_1 < \ln x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2e^{x_1} < 2e^{x_2} \\ 5\ln x_1 < 5\ln x_2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2e^{x_1} + 5\ln x_1 < 2e^{x_2} + 5\ln x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα $f \uparrow (0, +\infty)$.

γ. Είναι $A_f = [-3, +\infty)$. Έστω:

$$-3 \le x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1 + 3} < \sqrt{x_2 + 3} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα $f \uparrow [-3, +\infty)$.

δ. Είναι $A_f = \mathbb{R}^*$. Έστω:

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \\ \dfrac{1}{e^{x_1}} > \dfrac{1}{e^{x_2}} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{e^{x_1}} > \frac{1}{x_2} + \frac{1}{e^{x_2}} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα $f \downarrow (0, +\infty)$.

Ομοίως, αν $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Άρα $f \downarrow (-\infty, 0)$.

ε. Έστω:

$$0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} ημx_1 < ημx_2 \\ συνx_1 > συνx_2 \Rightarrow -συνx_1 < -συνx_2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow ημx_1 - συνx_1 < ημx_2 - συνx_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα $f \uparrow \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

στ. Έστω:

$$x_1 < x_2 \le 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 > x_2^2 \ge 0 \\ e^{-x_1} > e^{-x_2} > 0 \end{cases} \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} x_1^2 \cdot e^{-x_1} > x_2^2 \cdot e^{-x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα $f \downarrow (-\infty, 0]$.

5. 27 **α.** Έστω:

$$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 > x_2^2 \\ \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} x_1^2 + \frac{1}{x_1} > x_2^2 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα $f \downarrow A$.

β. Είναι $f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4 + 1 = (x-2)^2 - 3,\ x \in A = [2, +\infty)$.

Έστω:

$$2 \le x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \le x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow (x_1 - 2)^2 - 3 < (x_2 - 2)^2 - 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα $f \uparrow A$.

γ. Έστω:

$$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^4 > x_2^4 \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x_1} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x_2} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} x_1^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} + 2 > x_2^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} + 2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα $f \downarrow A$.

5. 28 **α.** Έστω:

$$-1 < x_1 < x \Rightarrow 0 < x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} \ln(x_1+1) < \ln(x_2+1) \\ \dfrac{1}{x_1+1} > \dfrac{1}{x_2+1} \Rightarrow -\dfrac{1}{x_1+1} < -\dfrac{1}{x_2+1} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \ln(x_1+1) - \frac{1}{x_1+1} + 1 < \ln(x_2+1) - \frac{1}{x_2+1} + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα $f \uparrow A$.

β. Έστω:

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2 > -x_2 + 2 \Rightarrow e^{-x_1+2} > e^{-x_2+2} \\ \dfrac{2}{x_1} > \dfrac{2}{x_2} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow e^{-x_1+2} + \frac{2}{x_1} > e^{-x_2+2} + \frac{2}{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα $f \downarrow (0, +\infty)$.

Ομοίως, αν $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Άρα $f \downarrow (-\infty, 0)$.

γ. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με:

$$x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1}<e^{x_2} \\ x_1^3<x_2^3 \\ x_1+1<x_2+1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x_1}+x_1^3+x_1+1<e^{x_2}+x_2^3+x_2+1 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα $f\uparrow \mathbb{R}$.

δ. Για $x\in A$ είναι $f(x)=\dfrac{x+1-1-1}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}$. Έστω:

$$x_1<x_2<-1 \Rightarrow x_1+1<x_2+1<0 \Rightarrow \frac{2}{x_1+1}>\frac{2}{x_2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\frac{2}{x_1+1}<1-\frac{2}{x_2+1} \Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα $f\uparrow(-\infty, -1)$.

Ομοίως, αν $-1<x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Άρα $f\uparrow(-1, +\infty)$.

5. 29 **α.** Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με:

$$x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1-3<2x_2-3 \Rightarrow 4+e^{2x_1-3}<4+e^{2x_2-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4+e^{2x_1-3}}<\sqrt{4+e^{2x_2-3}} \Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα $f\uparrow \mathbb{R}$.

β. Έστω:

$$0<x_1<x \Rightarrow \begin{cases} x_1^3<x_2^3 \\ -3x_1>-3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^3+x_1<x_2^3+x_2 \\ e^{1-3x_1}>e^{1-3x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(x_1^3+x_1)<\ln(x_2^3+x_2) \\ -e^{1-3x_1}<-e^{1-3x_2} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \ln(x_1^3+x_1)-e^{1-3x_1}<\ln(x_2^3+x_2)-e^{1-3x_2} \Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα $f\uparrow(0, +\infty)$.

γ. Έστω:

$$0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} e^{2x_1}<e^{2x_2} \Rightarrow \dfrac{5}{e^{2x_1}}>\dfrac{5}{e^{2x_2}} \\ \sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{e^{2x_1}}+\sigma\upsilon\nu x_1>\frac{5}{e^{2x_2}}+\sigma\upsilon\nu x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Άρα $f\downarrow\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

δ. Έστω:

$$1 \le x_1 < x_2 \le 3 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x_1 - 1 < x_2 - 1 \\ x_1 - 3 < x_2 - 3 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - 1)^2 < (x_2 - 1)^2 \\ (x_1 - 3)^2 > (x_2 - 3)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(x_1 - 1)^2 > -(x_2 - 1)^2 \\ (x_1 - 3)^2 > (x_2 - 3)^2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (x_1 - 3)^2 - (x_1 - 1)^2 > (x_2 - 3)^2 - (x_2 - 1)^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα $f \downarrow [1, 3]$.

5. 30 **α.** Το $A_f = \mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 < x_2 - 1 \\ e^{x_1} < e^{x_2} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x_1} + x_1 - 1 < e^{x_2} + x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα $f \uparrow \mathbb{R}$.

β. Η ανίσωση για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γίνεται ισοδύναμα:

$$e^{x^3} + x^3 - 1 < e^{-5x+6} + (-5x+6) - 1 \Leftrightarrow f(x^3) < f(-5x+6) \underset{(\alpha)}{\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}} x^3 < -5x + 6$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 5x - 6 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 6) < 0, \quad (1).$$

Όμως $x^2 + x + 6 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διότι $\Delta = -23 < 0$, οπότε:

$$(1) \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

γ. Για κάθε $x > 0 \underset{(\alpha)}{\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}} f(x) > f(0) \Leftrightarrow e^x + x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 - x.$

5. 31 **α.** Το $A_f = \mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} 3x_1^5 < 3x_2^5 \\ 2x_1^3 < 2x_2^3 \\ x_1 - 6 < x_2 - 6 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 3x_1^5 + 2x_1^3 + x_1 - 6 < 3x_2^5 + 2x_2^3 + x_2 - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα $f \uparrow \mathbb{R}$.

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$3(x^2)^5 + 2(x^2)^3 + x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow f(x^2) = f(1) \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

γ. Για $x > 0$ η ανίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$3\ln^5 x + 2\ln^3 x + \ln x - 6 < 0 \Leftrightarrow f(\ln x) < f(1) \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e.$$

5. 32 **α.** Έστω:

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow e^0 < e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow 0 < e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1,$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε:

$$x_1\left(e^{x_1} - 1\right) < x_2\left(e^{x_2} - 1\right) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα $f \uparrow (0, +\infty)$.

Επίσης, για $x > 0$ είναι:

$$2^x > 2^0 \Rightarrow 2^x - 1 > 0 \quad \text{και} \quad 4^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow 4^{x-1} > 4^0 \overset{4^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Συνεπώς, η ανίσωση ορίζεται για x > 1 και είναι:

$$f\left(2^x - 1\right) < f\left(4^{x-1} - 1\right) \overset{f \uparrow}{\Leftrightarrow} 2^x - 1 < 4^{x-1} - 1 \Leftrightarrow 2^x < 2^{2x-2} \overset{2^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x < 2x - 2 \Leftrightarrow 2 < x.$$

β. Έστω:

- $x_1 < x_2 < 1 \Rightarrow -x_1 > -x_2 > -1 \Rightarrow \sqrt{1 - x_1} > \sqrt{1 - x_2} \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{\sqrt{1 - x_1}} < \dfrac{1}{\sqrt{1 - x_2}},$
- $x_1 < x_2 < 1 \Rightarrow 0 < 3^{x_1} < 3^{x_2}.$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{3^{x_1}}{\sqrt{1 - x_1}} < \frac{3^{x_2}}{\sqrt{1 - x_2}} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα $f \uparrow (-\infty, 1)$.

Επιπλέον $2x - 3 < 1 \Leftrightarrow x < 2$ και $x - 5 < 1 \Leftrightarrow x < 6$.

Συνεπώς, η ανίσωση έχει νόημα για x < 2 και είναι:

$$f(2x - 3) \geq f(x - 5) \overset{f \uparrow}{\Leftrightarrow} 2x - 3 \geq x - 5 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

Επομένως, η ανίσωση αληθεύει για $-2 \leq x < 2$.

5. 33 **α.** Το $A_f = (0, +\infty)$. Έστω:

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \ln x_1 < \ln x_2 \\ \sqrt{e^{x_1}} < \sqrt{e^{x_2}} \\ x_1^2 < x_2^2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} \ln x_1 + \sqrt{e^{x_1}} + x_1^2 < \ln x_2 + \sqrt{e^{x_2}} + x_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα $f \uparrow (0, +\infty)$.

β. Για x > 0 η ανίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$\ln x+\sqrt{e^x}+x^2<\ln 1+\sqrt{e}+1^2 \Leftrightarrow f(x)<f(1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} 0<x<1.$$

5. 34 **α.** Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με:

- $x_1<x_2 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} 0<f(x_1)<f(x_2)$ και
- $x_1<x_2 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x_1)>g(x_2)>0 \Leftrightarrow 0<\dfrac{1}{g(x_1)}<\dfrac{1}{g(x_2)}.$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε $\dfrac{f(x_1)}{g(x_1)}<\dfrac{f(x_2)}{g(x_2)}$. Άρα $\dfrac{f}{g}\uparrow \Delta$.

β. Είναι $\ln x \uparrow \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) \subseteq (0, +\infty)$ και $ημx \downarrow \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Επίσης $\ln x>0$ για $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ και $ημx>0$ για $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Ομοίως με το (α) προκύπτει ότι:

$$h(x)=\frac{\ln x}{ημx} \text{ γνησίως αύξουσα στο } \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

γ. Για κάθε $α, β \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι:

$$α<β \underset{(β)}{\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow}} h(α)<h(β) \Leftrightarrow \frac{\ln α}{ημα}<\frac{\ln β}{ημβ} \underset{ημβ>0}{\overset{ημα>0}{\Leftrightarrow}} \ln α^{ημβ}<\ln β^{ημα} \underset{(β)}{\overset{\ln x\uparrow}{\Leftrightarrow}} α^{ημβ}<β^{ημα}.$$

5. 35 **α.** Έστω $f\uparrow \mathbb{R}$, $g\downarrow \mathbb{R}$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με:

$$x_1<x_2 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x_1)>g(x_2) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(g(x_1))>f(g(x_2)).$$

Άρα $f \circ g \downarrow \mathbb{R}$.

Ομοίως, αν f γνησίως φθίνουσα και g γνησίως αύξουσα.

β. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με:

$$x_1<x_2 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)>f(x_2)>0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x_1)}<\frac{1}{f(x_2)}.$$

Άρα $\dfrac{1}{f}\uparrow \mathbb{R}$. Τότε όμοια με το (α) η $\dfrac{1}{f}\circ f \downarrow \mathbb{R}$.

γ. Έστω $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$. Επειδή $0<\dfrac{1}{2}<1$, είναι $f\downarrow \mathbb{R}$.

Τότε από το (β) η $\frac{1}{f}\uparrow\mathbb{R}$ και η $\frac{1}{f}\circ f = h$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

5. 36 **α.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(-x)=-f(x)$.

- Για $x=0$ είναι $f(0)=-f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$.
- Για $x>0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$.
- Ομοίως, για $x<0\Leftrightarrow f(x)<0$.

β. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(-x)=f(x)$, (1).

Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, τότε:

$$-2<2\Leftrightarrow\begin{cases} f(-2)<f(2), \text{ αν } f\uparrow \\ \text{ή} \\ f(-2)>f(2), \text{ αν } f\downarrow \end{cases}$$

που είναι άτοπο από την (1).

Άρα, η f δεν μπορεί να είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

5. 37 **Ευθύ**

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \text{ για κάθε } x_1,\, x_2\in\mathbb{R}, \quad (1).$$

Ισχύει επιπλέον ότι $f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow e^{f(x_1)}<e^{f(x_2)}$, (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2), προκύπτει ότι:

$$f(x_1)+e^{f(x_1)}<f(x_2)+e^{f(x_2)}\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2).$$

Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αντίστροφο

Δίνεται ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_1<x_2\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2) \text{ για κάθε } x_1,\, x_2\in\mathbb{R}, \quad (1).$$

Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

Τότε θα υπάρχουν $x_1,\, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ και:

$$f(x_1)\ge f(x_2)\Rightarrow\begin{cases}f(x_1)\ge f(x_2)\\ e^{f(x_1)}\ge e^{f(x_2)}\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow} f(x_1)+e^{f(x_1)}\ge f(x_2)+e^{f(x_2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x_1)\ge g(x_2)\overset{g\uparrow\mathbb{R}}{\Rightarrow} x_1\ge x_2$$

που είναι άτοπο.

Συνεπώς, η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

(Το αντίστροφο μπορεί να αποδειχθεί και με χρήση βοηθητικής συνάρτησης, όπως παρουσιάζεται στη 2η εφαρμογή της ενότητας.)

5. 38 **α.** Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με:

$$x_1<x_2\Leftrightarrow\begin{cases}f(x_1)>f(x_2)>0\\ g(x_1)<g(x_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{f(x_1)}>\sqrt{f(x_2)}\\ e^{-g(x_1)}>e^{-g(x_2)}\end{cases}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\sqrt{f(x_1)}+e^{-g(x_1)}>\sqrt{f(x_2)}+e^{-g(x_2)}\Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2).$$

Άρα $h\downarrow\mathbb{R}$.

β. Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με:

$$x_1<x_2\Leftrightarrow\begin{cases}f(x_1)>f(x_2)\\ g(x_1)<g(x_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\ln\dfrac{1}{f(x_1)}<2\ln\dfrac{1}{f(x_2)}\\ \sqrt[3]{g(x_1)}<\sqrt[3]{g(x_2)}\end{cases}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$2\ln\frac{1}{f(x_1)}+\sqrt[3]{g(x_1)}<2\ln\frac{1}{f(x_2)}+\sqrt[3]{g(x_2)}\Leftrightarrow k(x_1)<k(x_2).$$

Άρα $k\uparrow\mathbb{R}$.

5. 39 **α.** • Έστω $x_1, x_2\in(-\infty, 0]$ με $x_1<x_2\Rightarrow x_1^2>x_2^2$, (1).

Τότε $\ln(x_1^2+1)>\ln(x_2^2+1)$, (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι:

$$x_1^2+\ln(x_1^2+1)>x_2^2+\ln(x_2^2+1)\Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Άρα $f\downarrow(-\infty, 0]$.

• Αντίστοιχα, αν $0<x_1<x_2\Rightarrow x_1^2<x_2^2$ και $\ln(x_1^2+1)<\ln(x_2^2+1)$.

Τότε $x_1^2+\ln(x_1^2+1)<x_2^2+\ln(x_2^2+1)\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Άρα $f\uparrow[0, +\infty)$.

β. Για $x<0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>0$ και για $x>0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>0$.

Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ και η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της f.

γ. Η f είναι άρτια, διότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(-x)=(-x)^2+\ln\left((-x)^2+1\right)=x^2+\ln\left(x^2+1\right)=f(x).$$

Άρα, κάθε οριζόντια χορδή της C_f, λόγω συμμετρίας της C_f ως προς τον y′y, θα ορίζεται από σημείο της μορφής $N(-x, f(x))$, $M(x, f(x))$.

Οπότε είναι $(NM)=2x$, $x\geq 0$.

5. 40 **α.** **Α΄ τρόπος**

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$g(x)=\ln x+x,\ x>0 \quad \text{και} \quad h(x)=x+1,\ x\in\mathbb{R}.$$

Η $h\uparrow\mathbb{R}$ και η $g\uparrow(0,+\infty)$, διότι για κάθε $x_1, x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow \ln x_1<\ln x_2$, άρα:

$$\ln x_1+x_1<\ln x_2+x_2 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2).$$

Επειδή είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η (1) γίνεται ισοδύναμα:

$$g(f(x))=h(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Συνεπώς $g\circ f\uparrow\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \overset{g\circ f\uparrow}{\Leftrightarrow} g(f(x_1))<g(f(x_2)) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα $f\uparrow\mathbb{R}$.

Β΄ τρόπος

Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε υπάρχουν $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με:

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)>0 \Rightarrow \ln f(x_1)\geq \ln f(x_2).$$

Τότε $\ln f(x_1)+f(x_1)\geq \ln f(x_2)+f(x_2) \overset{(1)}{\Rightarrow} x_1+1>x_2+1$ που είναι άτοπο.

Άρα, για κάθε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ είναι $x_1<x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$, συνεπώς $f\uparrow\mathbb{R}$.

β. Η (1) για $x=0$ γίνεται:

$$\ln f(0)+f(0)=1 \Leftrightarrow g(f(0))=g(1) \overset{g\circ f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(0)=1.$$

γ. Για $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f\left(x^2-3\right)<1 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} f\left(x^2-3\right)<f(0) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2-3<0 \Leftrightarrow |x|<\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}.$$

5. 41 **α.** **i.** Η (1) για $x=0$ γίνεται:

$$f(0)\cdot\left(f^2(0)+1\right)=0 \Leftrightarrow f(0)=0,$$

επειδή $f^2(0)+1\geq 1$ για οποιοδήποτε $f(0)$.

ii. Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1)\geq f^3(x_2).$$

Συνεπώς $f^3(x_1)+f(x_1)\geq f^3(x_2)+f(x_2) \overset{(1)}{\Rightarrow} e^{x_1}+x_1-1\geq e^{x_2}+x_2-1,\ (2).$

Όμως, αν $g(x)=e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$, τότε για $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ είναι:

$$x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1}<e^{x_2} \\ x_1-1<x_2-1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x_1}+x_1-1<e^{x_2}+x_2-1 \Rightarrow g(x_1)<g(x_2).$$

Άρα $g\uparrow\mathbb{R}$.

Τότε η $(2)\Leftrightarrow g(x_1)\geq g(x_2)\Leftrightarrow x_1\geq x_2$ που είναι άτοπο. Άρα $f\uparrow\mathbb{R}$.

β. Για $x>0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$ και για $x<0\Leftrightarrow f(x)<0$.

γ. **i.** Η $f\uparrow\mathbb{R}$. Για $x>0$ η εξίσωση γίνεται:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=f(\ln x+1)\Leftrightarrow \frac{1}{x}=\ln x+1 \Leftrightarrow \ln x-\frac{1}{x}+1=0,\ (3).$$

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}+1,\ x>0$, με $h(1)=0$.

Έστω $x_1, x_2\in(0,+\infty)$ με:

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x_1<\ln x_2 \\ \dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x_1+1<\ln x_2+1 \\ -\dfrac{1}{x_1}<-\dfrac{1}{x_2} \end{cases} \Rightarrow h(x_1)<h(x_2).$$

Άρα $h\uparrow\mathbb{R}$. Τότε η $(3)\Leftrightarrow h(x)=h(1)\Leftrightarrow x=1$.

ii. Για $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f\left(f(x)+x\right)>f(x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)+x>x \Leftrightarrow f(x)>0 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} x>0.$$

5. 42 **α.** **i.** Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$g(x)=\frac{1}{x}-\ln x,\ x>0 \quad \text{και} \quad h(x)=2e^{-x}-x^3-1,\ x\in\mathbb{R},$$

ενώ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

Τότε η $(1) \Leftrightarrow g(f(x)) = h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (2).

Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \\ -\ln x_1 > -\ln x_2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} \frac{1}{x_1} - \ln x_1 > \frac{1}{x_2} - \ln x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2).$$

Άρα $g \downarrow (0, +\infty)$.

Επίσης, αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} 2e^{-x_1} > 2e^{-x_2} \\ -x_1^3 - 1 > -x_2^3 - 1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2e^{-x_1} - x_1^3 - 1 > 2e^{-x_2} - x_2^3 - 1 \Rightarrow h(x_1) > h(x_2).$$

Άρα $h \downarrow \mathbb{R}$.

Τότε από τη (2) η $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(f(x_1)) > g(f(x_2)) \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα $f \uparrow \mathbb{R}$.

ii. Η (1) για $x = 0$ γίνεται:

$$\frac{1}{f(0)} - \ln f(0) = 1 \Leftrightarrow g(f(0)) = g(1) \overset{f\uparrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(0) = 1.$$

β. Για $x > 0$ είναι:

$$f(|\ln x| - 2) > 1 \overset{(\alpha.ii)}{\Leftrightarrow} f(|\ln x| - 2) > f(0) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} |\ln x| - 2 > 0 \Leftrightarrow |\ln x| > 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\ln x < -2 \;\text{ ή }\; \ln x > 2\} \Leftrightarrow \{0 < x < e^{-2} \;\text{ ή }\; x > e^2\}.$$

5. 43 **α.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|x+1| \geq 0 \Leftrightarrow |x+1| - 2 \geq -2 \Leftrightarrow f(x) \geq f(-1)$.

Άρα, η f παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ ελάχιστο (ολικό), το $f(-1) = -2$.

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|e^x - 1| \geq 0 \Leftrightarrow |e^x - 1| + 2 \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$.

Άρα, η f παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ελάχιστο (ολικό), το $f(0) = 2$.

5. 44 **α.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 \geq -8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

Άρα, η f παρουσιάζει στο $x_0 = 3$ ελάχιστο (ολικό), το $f(3) = -8$.

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) \geq f(-2) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 \geq -2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

Άρα, η f παρουσιάζει στο $x_0 = -2$ ελάχιστο (ολικό), το $f(-2) = -2$.

5. 45 **α.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow -2x^2 + 4x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2x^2 - 4x + 2 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

Άρα, η f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ μέγιστο (ολικό), το $f(1) = 1$.

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) \leq f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 \leq 4x^2 - 20x + 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x-5)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

Άρα, η f παρουσιάζει στο $x_0 = \frac{5}{2}$ μέγιστο (ολικό), το $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

5. 46 **α.** Για κάθε $x \geq 0$ είναι:

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x + 3 \geq 2 \Leftrightarrow x^2(x-1) - (x-1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \cdot (x+1) \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

Άρα, η f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ελάχιστο (ολικό), το $f(1) = 2$.

β. Για $x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \{x \leq -\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad x \geq \sqrt{3}\}$ έχουμε:

$$f(x^2 - 3) \geq 2 \Leftrightarrow f(x^2 - 3) \geq f(1)$$

που ισχύει για κάθε $x \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$, λόγω του α.

5. 47 **α.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \geq 0$ που ισχύει ως ισότητα, αν $x = 0$.

Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 + 1 \geq 1 > 0$, οπότε:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} < 1 \Leftrightarrow x^2 < x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 < 1 \text{ που ισχύει.}$$

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $0 \leq f(x) < 1$.

β. Από το ερώτημα **α** για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(0) \leq f(x)$.

Άρα, η f παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ελάχιστο (ολικό), το $f(0) = 0$.

Έστω ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathbb{R}^*$ μέγιστο, το $f(x_0)$.

Η $f(x) = \dfrac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$.

Έστω $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow x_1^2 + 1 > x_2^2 + 1 \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{x_1^2+1} > 1 - \dfrac{1}{x_2^2+1} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Άρα $f \downarrow (-\infty, 0]$.

Ομοίως, αν $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Άρα $f \uparrow [0, +\infty)$.

Αν $x_0 < 0$, τότε για $x < x_0 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_0)$ που είναι άτοπο, διότι $f(x_0)$ μέγιστο.

Ομοίως, αν $x_0 > 0$, τότε για $x > x_0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_0)$, άτοπο.

Άρα, η f δεν έχει μέγιστο.

5. 48 **α.** Έστω:

$$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x_1} > e^{-x_2} \\ \dfrac{2}{x_1} > \dfrac{2}{x_2} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{-x_1} + \frac{2}{x_1} + 1 > e^{-x_2} + \frac{2}{x_2} + 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα $f \downarrow (-\infty, 0)$.

Ομοίως, αν $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Άρα $f \downarrow (0, +\infty)$.

β. Για κάθε $x \neq 0$ είναι $x^2 > 0$ και $x^4 > 0$, οπότε:

$$f(x^2) < f(x^4) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} x^2 > x^4 \Leftrightarrow 1 > x^2 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Επειδή $x \neq 0$, συνεπώς $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

5. 49 **α.** Έστω:

$$x_1 < x_2 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 > x_2^2 \\ -x_1 > -x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1^2} > e^{x_2^2} \\ -x_1 - 1 > -x_2 - 1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow e^{x_1^2} - x_1 - 1 > e^{x_2^2} - x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα $f \downarrow (-\infty, 0]$.

β. Για κάθε $x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$.

Άρα, η f παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ελάχιστο (ολικό), το $f(0) = 0$.

γ. Η εξίσωση έχει νόημα, όταν:

• $\pi^x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \pi^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$ και • $e^x - 1 \leq 0$ και $3^x - 1 \leq 0$ και $2^x - 1 \leq 0$

που ισχύουν για $x \le 0$.

Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα τη $x = 0$.

Αν $x < 0$, τότε $\pi > 3 \Rightarrow \pi^x < 3^x \Rightarrow \pi^x - 1 < 3^x - 1 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f\left(\pi^x - 1\right) > f\left(3^x - 1\right)$.

Ομοίως $e > 2 \Rightarrow f\left(e^x - 1\right) > f\left(2^x - 1\right)$.

Άρα $f\left(\pi^x - 1\right) + f\left(e^x - 1\right) > f\left(3^x - 1\right) + f\left(2^x - 1\right)$.

Επομένως, η $x = 0$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης.

5. 50 **α.** Έστω $M\left(x, f(x)\right)$, $x \in \mathbb{R}$, ένα σημείο της C_f. Τότε είναι:

$$(MN) = \sqrt{\left(f(x) - x\right)^2 + \left(x - f(x)\right)^2} = \left|f(x) - x\right| \cdot \sqrt{2} = \left|x^2 - 3x + 2\right| \cdot \sqrt{2}.$$

Έστω $g(x) = \sqrt{2} \cdot \left|x^2 - 3x + 2\right| \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ που ισχύει ως ισότητα μόνο για $x = 1$ ή $x = 2$.

Συνεπώς, η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ ή στο $x_1 = 2$, το $g(1) = g(2) = 0$.

Επομένως, το ζητούμενο σημείο είναι:

το $M\left(1, f(1)\right)$ με $f(1) = 1$ ή το $M'\left(2, f(2)\right)$ με $f(2) = 2$.

β. Έστω $M\left(x, f(x)\right)$, $x \in \mathbb{R}$, ένα σημείο της C_f. Τότε είναι:

$$d(M, \eta) = \frac{\left|4x - 3f(x) + 3\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{1}{5}\left|3x^2 - 10x + 3\right|.$$

Έστω $h(x) = \frac{1}{5}\left|3x^2 - 10x + 3\right| \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ που ισχύει ως ισότητα μόνο για $x = \frac{1}{3}$ ή $x = 3$.

Συνεπώς, η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{1}{3}$ ή στο $x_1 = 3$, το $h\left(\frac{1}{3}\right) = h(3) = 0$.

Επομένως, το ζητούμενο σημείο είναι:

το $M\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ με $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{9}$ ή το $M'\left(3, f(3)\right)$ με $f(3) = 5$.

5. 51 **α.** Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με:

$$x_1 < x_2 \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} \begin{cases} g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow -g(x_1) < -g(x_2) \\ \ln x_1 < \ln x_2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \ln x_1 - g(x_1) < \ln x_2 - g(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα $f \uparrow (0, +\infty)$.

β. Έχουμε $A(1, -2) \in C_g \Leftrightarrow g(1) = -2$. Για $x > 0$ είναι:

$$2\ln x < 2 + g(x^2) \Leftrightarrow \ln x^2 - g(x^2) < 2 \Leftrightarrow f(x^2) < f(1) \underset{(\alpha)}{\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}} 0 < x < 1.$$

5. 52 **α.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$|g(x)| \le 1 \Leftrightarrow \frac{4|f(x)|}{1+4f^2(x)} \le 1 \Leftrightarrow 4|f(x)| \le 1 + 4f^2(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4|f(x)|^2 - 4|f(x)| + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (2|f(x)| - 1)^2 \ge 0 \text{ που ισχύει.}$$

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$|g(x)| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le g(x) \le 1 \Leftrightarrow g(0) \le g(x) \le g(1).$$

Άρα, η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $g(0) = -1$ και μέγιστο στο $x_1 = 1$, το $g(1) = 1$.

5. 53 Έχουμε $f(x) \ge f(1)$ για κάθε $x \ge 1$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως αύξουσα. Συνεπώς, η ισότητα θα ισχύει μόνο για $x = 1$.

Ισχύει $f(e^{\alpha-1} - 1) + f(\ln(\beta+1) - 1) = 4$, (1).

Αρχικά, οι παραστάσεις της (1) ορίζονται, όταν:

- $e^{\alpha-1} - 1 \ge 1 \Leftrightarrow e^{\alpha-1} \ge 2 \Leftrightarrow \alpha - 1 \ge \ln 2 \Leftrightarrow \alpha \ge 1 + \ln 2$ και
- $\ln(\beta+1) - 1 \ge 1 \Leftrightarrow \ln(\beta+1) \ge 2 \Leftrightarrow \beta + 1 \ge e^2 \Leftrightarrow \beta \ge e^2 - 1$.

Τότε:

- για $e^{\alpha-1} - 1 > 1$ είναι $f(e^{\alpha-1} - 1) > 2$,
- για $\ln(\beta+1) - 1 > 1$ είναι $f(\ln(\beta+1) - 1) > 2$.

Με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκουμε $f(e^{\alpha-1} - 1) + f(\ln(\beta+1) - 1) > 4$, άτοπο.

Συνεπώς:

$$f(e^{\alpha-1} - 1) + f(\ln(\beta+1) - 1) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} f(e^{\alpha-1} - 1) = 2 \\ f(\ln(\beta+1) - 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\alpha-1} - 1 = 1 \\ \ln(\beta+1) - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 + \ln 2 \\ \beta = e^2 - 1 \end{cases}.$$

5. 54 Η $f(x) = x^2 - (2\ln t)x + \ln^2 t - \ln t$, $x \in \mathbb{R}$, είναι παραβολή της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με

$\alpha = 1 > 0$, άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ ή $x_0 = \dfrac{2\ln t}{2\cdot 1} = \ln t$ με:

$$f(\ln t) = \ln^2 t - 2\ln^2 t + \ln^2 t - \ln t = -\ln t.$$

Άρα, το ελάχιστο της f είναι στο σημείο:

$$M(\ln t, -\ln t) \text{ με } t \in [1, e] \Leftrightarrow 1 \le t \le e \Leftrightarrow 0 \le \ln t \le 1.$$

Αν $\begin{cases} x = \ln t \\ y = -\ln t \end{cases} \Rightarrow y = -x$ με $x \in [0, 1]$.

Συνεπώς, τα ελάχιστα της f κινούνται σε ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ επί της ευθείας $y = -x$ με $O(0, 0)$ και $A(1, -1)$.

5. 55 Για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) + f\left(e^{x-1}\right) = -\ln x + \dfrac{1}{x}$

και για $x = 1$ παίρνουμε: $f(1) + f(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) = \dfrac{1}{2}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $2f(x) > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} x < 1$.

5. 56 • Για $x > 0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$, ενώ $e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$.

Άρα $\dfrac{f(x)}{e^x - 1} < 0 \Leftrightarrow g(x) < 0$.

• Για $x < 0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$, ενώ $e^x < 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$.

Άρα $\dfrac{f(x)}{e^x - 1} < 0 \Leftrightarrow g(x) < 0$.

Συνεπώς $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

5. 57 **α.** Έχουμε $f(1) = 5 > f(5) = -2$ και $1 < 5$. Άρα $f \downarrow \mathbb{R}$.

β. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2))$.

Άρα $f \circ f \uparrow \mathbb{R}$.

γ. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f\left(f\left(e^x\right)\right) < -2 \Leftrightarrow (f \circ f)\left(e^x\right) < (f \circ f)(1) \underset{(\beta)}{\overset{f\circ f\uparrow}{=}} e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

5. 58 Έχουμε $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (1).

Η (1) για $x = \alpha$ είναι $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$, ενώ είναι γνησίως μονότονη στο $[0, \alpha]$ με:

$$0 < \alpha \Rightarrow f(0) > f(\alpha).$$

Άρα $f\downarrow [0, \alpha]$.

Επειδή η C_f είναι συμμετρική ως προς τον y′y, άρα $f\uparrow [-\alpha, 0]$.

5. 59 Ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε για:

$$x < x_0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5. 60 **α.** Το κέρδος από την πώληση x μονάδων του προϊόντος είναι:

$$P(x) = \Pi(x) - K(x) \Rightarrow P(x) = 5x - 8 - (2x^2 - 4x - 4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(x) = -2x^2 + 9x - 4,\ x \geq 0.$$

β. Η επιχείρηση έχει κέρδος, όταν $P(x) > 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 9x - 4 > 0$. Έχουμε:

	0		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$-2x^2 + 9x - 4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα, η επιχείρηση έχει κέρδος για $x \in \left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

γ. Η $P(x)$ είναι παραβολή της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha = -2 < 0$, άρα παρουσιάζει μέγιστο για $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ ή $x_0 = \frac{9}{4}$.

Το ελάχιστο κέρδος είναι $P\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{49}{8}$.

5. 61 **α.** Για κάθε $x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leq e^0 \Leftrightarrow 2 + e^{-x} \leq 3 \Leftrightarrow f(x) \leq f(0)$.

Άρα, η f παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ μέγιστο, το $f(0) = 3$.

Επιπλέον, η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1 = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$, το $g(-1) = 4$.

β. Για κάθε $x \geq 0$:

$$1 = e^x(x^2 + 2x + 3) \Leftrightarrow e^{-x} = x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow 2 + e^{-x} = x^2 + 2x + 5 \Leftrightarrow f(x) = g(x),\ (1).$$

Όμως για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) \leq 3 < 4 \leq g(x)$ από το α.

Άρα, η (1) είναι αδύνατη.

6η Ενότητα

Συνάρτηση 1 – 1 – Αντίστροφη συνάρτηση

Α. Του τύπου Σωστό / Λάθος

6. 1 **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό **στ.** Σωστό.

6. 2 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος **στ.** Σωστό **ζ.** Σωστό.

6. 3 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό **στ.** Σωστό.

6. 4 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος.

6. 5 **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό.

6. 6 **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος **στ.** Λάθος.

6. 7 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό **στ.** Λάθος.

6. 8 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος.

Β. Πολλαπλής επιλογής

6. 9 γ.

6. 10 δ.

Γ. Βασικές εφαρμογές – Ασκήσεις εμπέδωσης

6. 11 $1-1$ είναι οι α, β, γ, δ, ζ, η, θ, ι, ια, ιβ, ιγ, ιστ, ιζ.

6. 12 **α.** $f^{-1}(x)=x-3,\ x\in\mathbb{R}$ **β.** $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{2},\ x\in\mathbb{R}$ **γ.** $f^{-1}(x)=5-x,\ x\in\mathbb{R}$.

6. 13 **α.** $f^{-1}(x)=\ln(x+1),\ x>-1$ **β.** $f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x-4}{3}\right),\ x>4$

γ. $f^{-1}(x)=\ln(-5x+6),\ x<\dfrac{6}{5}$ **δ.** $f^{-1}(x)=\ln x-4,\ x>0$

ε. $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln x,\ x>0$ **στ.** $f^{-1}(x)=\frac{\ln x+5}{3},\ x>0.$

6. 14 **α.** $f^{-1}(x)=e^{x-3},\ x\in\mathbb{R}$ **β.** $f^{-1}(x)=e^{3x-7},\ x\in\mathbb{R}$

γ. $f^{-1}(x)=e^{\frac{9-x}{4}},\ x\in\mathbb{R}$ **δ.** $f^{-1}(x)=e^{x}+3,\ x\in\mathbb{R}$

ε. $f^{-1}(x)=\frac{e^{x}-1}{4},\ x\in\mathbb{R}$ **στ.** $f^{-1}(x)=3-2e^{x},\ x\in\mathbb{R}.$

6. 15 **α.** $f^{-1}(x)=(x-2)^2,\ x\in[2,+\infty)$ **β.** $f^{-1}(x)=(2x+5)^2,\ x\in\left[-\frac{5}{2},+\infty\right)$

γ. $f^{-1}(x)=\left(\frac{6-x}{8}\right)^2,\ x\in(-\infty,6]$ **δ.** $f^{-1}(x)=x^2+4,\ x\in[0,+\infty)$

ε. $f^{-1}(x)=3x^2-4,\ x\in[0,+\infty)$ **στ.** $f^{-1}(x)=\frac{2-x^2}{9},\ x\in[0,+\infty).$

6. 16 **α.** $f\uparrow$ με ορισμό **β.** $f\uparrow$ με ορισμό **γ.** $f\uparrow$ με ορισμό

δ. $f\uparrow$ με ορισμό **ε.** $f\downarrow$ με ορισμό **στ.** $f\downarrow$ με ορισμό.

6. 17 **α.** $f(-1)=f(1)=1$ **β.** $f(-1)=f(1)=-3$ **γ.** $f(0)=f(4)=4.$

6. 18 **α.** $f(-1)=f(1)=1$ **β.** $f(-6)=f(0)=6$ **γ.** $f(0)=f(6)=6.$

6. 19 **α.** $f(0)=f(-1)=0$ **β.** $f(1)=f(2)=0$ **γ.** $f(1)=f(2)=0$

δ. $f(1)=f(e^2)=0$ **ε.** $f(0)=f(2)=0.$

6. 20 **α.** $x=15$ **β.** $x=\pm 3$ **γ.** $x=-2$ ή $x=-3$

δ. $x=\pm 4$ **ε.** $x=3$ ή $x=-7$ **στ.** $x=-1.$

6. 21 $f\uparrow\mathbb{R},\ x=1.$

Δ. Ασκήσεις για λύση

6. 22 **α.** Είναι $A_f=\mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 4e^{x_1-1}-3=4e^{x_2-1}-3\Rightarrow e^{x_1-1}=e^{x_2-1}\Rightarrow x_1=x_2.$$

Συνεπώς, η f είναι $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε:

$$f(x)=y \Leftrightarrow 4e^{x-1}-3=y \Leftrightarrow e^{x-1}=\frac{y+3}{4} \overset{y>-3}{\Leftrightarrow} x-1=\ln\frac{y+3}{4} \Leftrightarrow x=\ln\frac{y+3}{4}+1.$$

Επομένως $f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+3}{4}\right)+1,\ x\in(-3,+\infty)=f(\mathbb{R})$.

β. Είναι $A_f=(1,+\infty)$. Έστω $x_1, x_2\in(1,+\infty)$ με:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2\ln(x_1-1)+1=2\ln(x_2-1)+1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln(x_1-1)=\ln(x_2-1)\Rightarrow x_1=x_2.$$

Συνεπώς, η f είναι $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε:

$$f(x)=y \Leftrightarrow 2\ln(x-1)+1=y \Leftrightarrow \ln(x-1)=\frac{y-1}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-1=e^{\frac{y-1}{2}} \Leftrightarrow x=1+e^{\frac{y-1}{2}},\ y\in\mathbb{R}.$$

Επομένως $f^{-1}(x)=1+e^{\frac{x-1}{2}},\ x\in\mathbb{R}=f((1,+\infty))$.

γ. Είναι $A_f=\mathbb{R}$ και $f(0)=|-5|+7=12,\ f(10)=|5|+7=12$. Άρα, η f δεν είναι $1-1$.

δ. Είναι $A_f=\mathbb{R}$ και $f(1)=0,\ f(3)=0$. Άρα, η f δεν είναι $1-1$.

ε. Η f ορίζεται για $x>0$ και $\ln x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq e^{-1}$. Είναι $A_f=[e^{-1},+\infty)$.

Έστω $x_1, x_2\in[e^{-1},+\infty)$ με:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2+\sqrt{\ln x_1+1}=2+\sqrt{\ln x_2+1}\Rightarrow \ln x_1=\ln x_2\Rightarrow x_1=x_2.$$

Συνεπώς, η f είναι $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow 2+\sqrt{\ln x+1}=y\Leftrightarrow \sqrt{\ln x+1}=y-2\Leftrightarrow$$
$$\overset{y\geq 2}{\Leftrightarrow} \ln x+1=(y-2)^2 \Leftrightarrow x=e^{(y-2)^2-1}.$$

Επομένως $f^{-1}(x)=e^{(x-2)^2-1},\ x\in[2,+\infty)=f([e^{-1},+\infty))$.

6. 23 α. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ως βασική συνάρτηση, άρα αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow 2x-e^{2020}=y\Leftrightarrow x=\frac{y+e^{2020}}{2}$.

Επομένως $f^{-1}(x)=\frac{x+e^{2020}}{2},\ x\in\mathbb{R}$.

β. Είναι $A_f = \mathbb{R}$ και $f(1) = 8,\ f(-1) = 8.$ Άρα, η f δεν είναι $1-1$.

γ. Είναι $A_f = (0, +\infty)$ και $f(1) = 0,\ f(e^{-2}) = 0.$ Άρα, η f δεν είναι $1-1$.

δ. Είναι $A_f = \left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$ και έστω $x_1, x_2 \in A_f$ με:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt[3]{3x_1 - 4} = \sqrt[3]{3x_2 - 4} \Rightarrow 3x_1 - 4 = 3x_2 - 4 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα, η f είναι $1-1$.

Θέτουμε $f(x) = y \Rightarrow \sqrt[3]{3x-4} = y \overset{y\geq 0}{\Rightarrow} 3x - 4 = y^3 \Rightarrow x = \frac{y^3+4}{3}.$

Επομένως $f^{-1}(x) = \frac{x^3+4}{3},\ x \in [0, +\infty) = f\left(\left[\frac{4}{3}, +\infty\right)\right).$

ε. Η f ορίζεται αν:

$$9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3 \quad \text{και} \quad x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3,$$

οπότε $A_f = (-3, 3).$ Έστω $x_1, x_2 \in A_f$ με:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \ln\left(\frac{9-x_1^2}{x_1+3}\right) = \ln\left(\frac{9-x_2^2}{x_2+3}\right) \Rightarrow 3 - x_1 = 3 - x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Συνεπώς, η f είναι $1-1$.

Θέτουμε:

$$f(x) = y \Rightarrow \ln\left(\frac{9-x^2}{x+3}\right) = y \Rightarrow \ln(3-x) = y \Rightarrow 3 - x = e^y \Rightarrow 3 - e^y = x.$$

Επιπλέον, πρέπει $3 - e^y > -3 \Leftrightarrow y < \ln 6.$ Επομένως $f^{-1}(x) = 3 - e^x,\ x < \ln 6.$

στ. Είναι $A_f = \mathbb{R}.$ Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{-2x_1-2} - 2 = e^{-2x_2-2} - 2 \Rightarrow -2x_1 - 2 = -2x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Συνεπώς, η f είναι $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε:

$$f(x) = y \Rightarrow e^{-2x-2} - 2 = y \Rightarrow e^{-2x-2} = y + 2 \overset{y>-2}{\Rightarrow} -2x - 2 = \ln(y+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = -2 - \ln(y+2) \Rightarrow x = -1 - \frac{1}{2}\ln(y+2).$$

Επομένως $f^{-1}(x) = -1 - \frac{1}{2}\ln(x+2),\ x \in (-2, +\infty) = f(\mathbb{R}).$

ζ. Είναι $A_f = \mathbb{R}.$ Ισχύουν $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2\left(\frac{-1}{2}\right) + 1 = 0$ και $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0.$

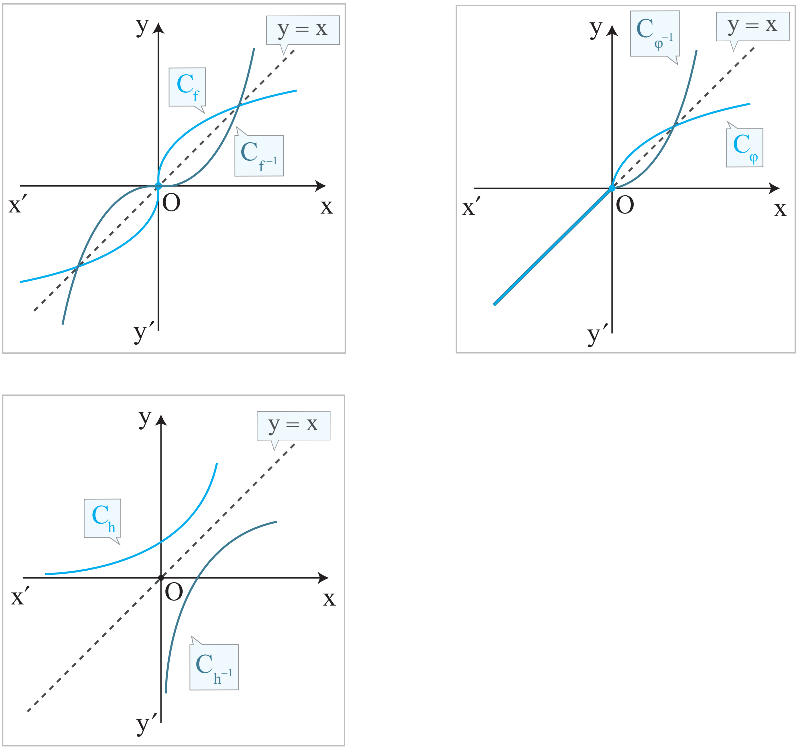
Άρα, η f δεν είναι $1-1$.

η. Είναι $A_f=\mathbb{R}-\left\{\kappa\pi,\ \kappa'\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa,\kappa'\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ισχύουν $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$ και $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2$.

Άρα, η f δεν είναι $1-1$.

6. 24



6. 25 **α.** Είναι $A_f=\mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2x_1^3-6=2x_2^3-6\Rightarrow x_1=x_2.$$

Συνεπώς, η f είναι $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε:

$$f(x)=y\Rightarrow 2x^3-6=y\Rightarrow x^3=y-3\Rightarrow y=\begin{cases}\sqrt[3]{y-3}\ , & y\geq 3\\ -\sqrt[3]{3-y}, & y<3\end{cases}.$$

Επομένως $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-3}\ , & x\geq 3\\ -\sqrt[3]{3-x}, & x<3\end{cases}$.

β. Είναι $A_f = \mathbb{R} - \{-3\}$ και $f(x) = \dfrac{x+3-5}{x+3} = 1 - \dfrac{5}{x+3}$.

Έστω $x_1, x_2 \in A_f$ με:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 - \frac{5}{x_1+3} = 1 - \frac{5}{x_2+3} \Rightarrow x_1 + 3 = x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Συνεπώς, η f είναι $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε:

$$f(x) = y \Rightarrow 1 - \frac{5}{x+3} = y \Rightarrow 1 - y = \frac{5}{x+3} \overset{y\neq 1}{\Rightarrow} x + 3 = \frac{5}{1-y} \Rightarrow x = \frac{5}{1-y} - 3.$$

Επομένως $f^{-1}(x) = \dfrac{5}{1-x} - 3,\ x \neq 1.$

γ. Η f ορίζεται για $x > 0$ και $\ln x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq e$.

Άρα $A_f = (0, e) \cup (e, +\infty)$ και είναι $f(x) = \dfrac{\ln x - 1 + 2}{\ln x - 1} = 1 + \dfrac{2}{\ln x - 1}$.

Έστω $x_1, x_2 \in A_f$ με:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 + \frac{2}{\ln x_1 - 1} = 1 + \frac{2}{\ln x_2 - 1} \Rightarrow \ln x_1 - 1 = \ln x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Συνεπώς, η f είναι $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε:

$$f(x) = y \Rightarrow 1 + \frac{2}{\ln x - 1} = y \Rightarrow 1 - y = \frac{2}{\ln x - 1} \Rightarrow$$

$$\overset{y\neq 1}{\Rightarrow} \ln x - 1 = \frac{2}{1-y} \Rightarrow \ln x = 1 + \frac{2}{1-y} \Rightarrow x = e^{1+\frac{2}{1-y}}.$$

Επομένως $f^{-1}(x) = e^{1+\frac{2}{1-x}},\ x \neq 1.$

δ. Είναι $A_f = \mathbb{R}$ και $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3e^x + 6 - 5}{e^x + 2} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(3 - \dfrac{5}{e^x + 2}\right)$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(3 - \frac{5}{e^{x_1} + 2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(3 - \frac{5}{e^{x_2} + 2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{e^{x_1} + 2} = -\frac{5}{e^{x_2} + 2} \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Συνεπώς, η f είναι $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε:

$$f(x)=y\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(3-\frac{5}{e^x+2}\right)=y\Rightarrow 3-\frac{5}{e^x+2}=2y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3-2y}{5}=\frac{1}{e^x+2}\overset{y<\frac{3}{2}}{\Rightarrow}\frac{5}{3-2y}=e^x+2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x=\frac{5}{3-2y}-2\overset{(*)}{\Rightarrow}x=\ln\left(\frac{5}{3-2y}-2\right).$$

(*) Πρέπει:

$$\frac{5}{3-2y}-2>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5>6-4y\Rightarrow y>\frac{1}{4}.$$

Επομένως $f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{5}{3-2x}-2\right),\ x\in\left(\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right).$

6. 26 **α.** Είναι $A_f=\mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1^3+1<x_2^3+1\\ e^{x_1-1}<e^{x_2-1}\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}x_1^3+1+e^{x_1-1}<x_2^3+1+e^{x_2-1}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και $1-1$.

β. Έστω $x_1, x_2\in(-\infty, 1)$ με:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}-x_1^3>-x_2^3\\ \dfrac{2}{x_1-1}>\dfrac{2}{x_2-1}\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}-x_1^3+\frac{2}{x_1-1}-2>-x_2^3+\frac{2}{x_2-1}-2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Άρα $f\downarrow(-\infty, 1)$, οπότε είναι και $1-1$.

γ. Είναι $A_f=(-1, +\infty)$. Έστω $x_1, x_2\in A_f$ με:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}\ln(x_1+1)<\ln(x_2+1)\\ x_1+2<x_2+2\end{cases}\underset{+2}{\overset{(+)}{\Rightarrow}}\ln(x_1+1)+x_1+2<\ln(x_2+1)+x_2+2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα $f\uparrow(-1, +\infty)$, οπότε είναι και $1-1$.

δ. Είναι $A_f=(-1, +\infty)$. Έστω $x_1, x_2\in A_f$ με:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}e^{-x_1+3}+4>e^{-x_2+3}+4\\ -\ln(x_1-1)>-\ln(x_2-1)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow}e^{-x_1+3}-\ln(x_1-1)+4>e^{-x_2+3}-\ln(x_2-1)+4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Άρα $f\downarrow(-1, +\infty)$, οπότε είναι και $1-1$.

6. 27 **α.** Είναι $f^{-1}(-2)=\alpha \Leftrightarrow f^{-1}(f(-1))=\alpha \Leftrightarrow -1=\alpha$.

β. Είναι $f^{-1}(2)=\alpha \Leftrightarrow f^{-1}(f(2))=\alpha \Leftrightarrow 2=\alpha$.

γ. $f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)=\alpha \Leftrightarrow f^{-1}(f(\ln 2))=\alpha \Leftrightarrow \ln 2=\alpha$.

6. 28 Η f ορίζεται, αν:

$$2-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2 \quad \text{και} \quad 3-\sqrt{2-x}\geq 0 \Leftrightarrow 2-x\leq 9 \Leftrightarrow -7\leq x.$$

Άρα $A_f=[-7,\,2]$.

Έστω $x_1,\,x_2\in A_f$ με:

$$x_1<x_2 \Rightarrow \sqrt{2-x_1}>\sqrt{2-x_2} \Rightarrow \sqrt{3-\sqrt{2-x_1}}<\sqrt{3-\sqrt{2-x_2}} \Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα $f\uparrow[-7,\,2]$, συνεπώς είναι και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε:

$$f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{3-\sqrt{2-x}}=y \overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow} 3-\sqrt{2-x}=y^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3-y^2=\sqrt{2-x} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left(3-y^2\right)^2=2-x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=2-\left(3-y^2\right)^2.$$

(*) Πρέπει: $3-y^2\geq 0 \Leftrightarrow |y|\leq\sqrt{3} \overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow} 0\leq y\leq\sqrt{3}$.

Επομένως $f^{-1}(x)=2-\left(3-x^2\right)^2,\ x\in\left[0,\,\sqrt{3}\right]$.

6. 29 Έστω $x_1,\,x_2\in A_f=[0,\,1]$ με:

$$0\leq x_1<x_2 \Rightarrow x_1^2<x_2^2 \Rightarrow \sqrt{1-x_1^2}>\sqrt{1-x_2^2} \Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Άρα $f\downarrow[0,\,1]$, συνεπώς είναι και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε:

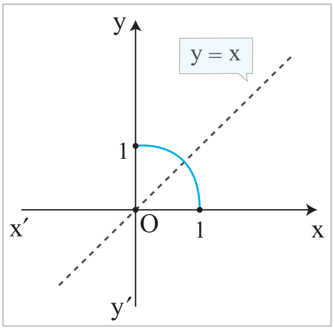
$$f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=y \overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow} 1-x^2=y^2 \Leftrightarrow 1-y^2=x^2 \underset{y\leq 1}{\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow}} \sqrt{1-y^2}=x.$$

Επομένως $f^{-1}(x)=\sqrt{1-x^2},\ 0\leq x\leq 1$.

Αν $f(x)=y \Leftrightarrow 1=x^2+y^2$.

Συνεπώς, η C_f είναι το τεταρτοκύκλιο του μοναδιαίου κύκλου στο 1ο τεταρτημόριο των αξόνων.

Η C_f ταυτίζεται με τη $C_{f^{-1}}$, όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



6. 30 **α.** Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f\left(f(\ln x+1)\right) = f(2x+1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(\ln x+1) = 2x+1.$$

Θέτουμε $\ln x + 1 = y \Leftrightarrow x = e^{y-1}$, $y \in \mathbb{R}$, οπότε:

$$f(y) = 2e^{y-1}+1,\ y \in \mathbb{R} \quad ή \quad f(x) = 2e^{x-1}+1,\ x \in \mathbb{R}.$$

β. Για την εύρεση της αντίστροφης της f, θέτουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2e^{x-1}+1 = y \overset{y>1}{\Leftrightarrow} e^{x-1} = \frac{y-1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\frac{y-1}{2}+1.$$

Επομένως $f^{-1}(y) = \ln\frac{y-1}{2}+1$, $y \in f(\mathbb{R}) = (1, +\infty)$, οπότε:

$$f^{-1}(x) = \ln\frac{x-1}{2}+1,\ x \in (1, +\infty).$$

6. 31 **α.** Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 < x_2 - 1 \\ e^{2x_1} < e^{2x_2} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{2x_1} + x_1 - 1 < e^{2x_2} + x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα $f \uparrow \mathbb{R}$, συνεπώς είναι και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

β. Για $x \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ είναι:

- $f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow x = f(0) \Leftrightarrow x = 0,$
- $f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow x = f(x) \Leftrightarrow 0 = e^{2x} - 1 \Leftrightarrow 1 = e^{2x} \Leftrightarrow x = 0.$

6. 32 **α.** Είναι $A_f = (0, +\infty)$ και έστω $x_1, x_2 \in A_f$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} -\ln x_1 + e > -\ln x_2 + e \\ \dfrac{2}{x_1} > \dfrac{2}{x_2} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} -\ln x_1 + e + \frac{2}{x_1} > -\ln x_2 + e + \frac{2}{x_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα $f \downarrow (0, +\infty)$, οπότε είναι και $1-1$.

β. i. $\frac{2}{x} - 2 = \ln x \Leftrightarrow -\ln x + \frac{2}{x} + e = 2 + e \Leftrightarrow f(x) = f(1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x = 1.$

ii. $2e^{-x} + \ln 2 = x + 1 \Leftrightarrow \frac{2}{e^x} - x = -\ln 2 + 1 \Leftrightarrow -\ln e^x + \frac{2}{e^x} + e = -\ln 2 + \frac{2}{2} + e \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(e^x) = f(2) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2.$$

6. 33 • Έστω $x_1, x_2 \in (-2, 0]$ με:

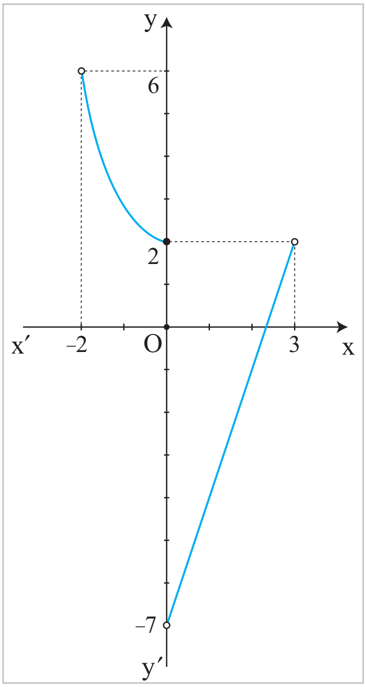
$$x_1 < x_2 \le 0 \Rightarrow x_1^2 + 2 > x_2^2 + 2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα $f \downarrow (-2, 0]$, οπότε είναι και $1-1$ στο $(-2, 0]$.

• Έστω $x_1, x_2 \in (0, 3)$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 - 7 < 3x_2 - 7 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα $f \uparrow (0, 3)$, οπότε είναι και $1-1$ στο $(0, 3)$.



Ο τύπος της f αποτελείται από βασικές συναρτήσεις, οπότε προκύπτει η γραφική παράσταση που απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα.

Άρα, η f είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, οπότε αντιστρέφεται.

• Για $x \in (-2, 0]$ θέτουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 2 = y \overset{y \ge 2}{\Leftrightarrow} x = -\sqrt{y-2}.$$

Επιπλέον, πρέπει:

$$x > -2 \Rightarrow -\sqrt{y-2} > -2 \Rightarrow \sqrt{y-2} < 2 \Rightarrow y < 6,$$

συνεπώς $f^{-1}(x) = -\sqrt{x-2}$, $x \in [2, 6)$.

• Για $x \in (0, 3)$ θέτουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3x - 7 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+7}{3}.$$

Επιπλέον, πρέπει:

$$0 < x < 3 \Leftrightarrow 0 < \frac{y+7}{3} < 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 < y + 7 < 9 \Leftrightarrow -7 < y < 2,$$

συνεπώς $f^{-1}(x)=\dfrac{x+7}{3},\ x\in(-7,2)$.

Επομένως:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{x-2}, & 2\le x<6\\ \dfrac{x+7}{3}, & -7<x<2\end{cases}.$$

6. 34 **α.** Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}g(x_1)<g(x_2)\Leftrightarrow e^{g(x_1)}<e^{g(x_2)}$, οπότε:

$$e^{g(x_1)}+g(x_1)<e^{g(x_2)}+g(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα $f\uparrow\mathbb{R}$.

β. Για $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$e^{g(x^2-2)}-e^{g(2)}=g(2)-g(x^2-2)\Leftrightarrow e^{g(x^2-2)}+g(x^2-2)=e^{g(2)}+g(2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x^2-2)=f(2)\underset{f:1-1}{\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}}x^2-2=2\Leftrightarrow x=\pm2.$$

6. 35 Ισχύει $f^3(x)+2f(x)-\ln x-1=0$ για κάθε $x>0$, (1).

Έστω $x_1, x_2\in(0,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)$. Τότε προκύπτει:

$$f^3(x_1)+2f(x_1)=f^3(x_2)+2f(x_2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\ln x_1+1=\ln x_2+1\Leftrightarrow x_1=x_2.$$

Συνεπώς, η f είναι $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

Η f έχει σύνολο τιμών το $f((0,+\infty))=\mathbb{R}$, άρα η f^{-1} ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι:

$$f^{-1}(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Θέτουμε στην (1) όπου $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και έχουμε:

$$y^3+2y-1=\ln f^{-1}(y)\Leftrightarrow e^{y^3+2y-1}=f^{-1}(y).$$

Άρα $f^{-1}(x)=e^{x^3+2x-1},\ x\in\mathbb{R}$.

6. 36 Ισχύει $f^3(x)+f(x)+e^x-1=0$ για κάθε $x\in A$, (1).

α. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$g(x)=x^3+x-1,\ x\in\mathbb{R} \quad\text{και}\quad h(x)=-e^x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Είναι $h\downarrow\mathbb{R}$ και έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2\Rightarrow x_1^3-1<x_2^3-1$.

Τότε προκύπτει

$x_1^3+x_1-1<x_2^3+x_2-1 \Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$, οπότε $g \uparrow \mathbb{R}$.

Η (1) γράφεται ισοδύναμα $g(f(x))=h(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $g\circ f \downarrow \mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \overset{g\circ f\downarrow}{\Leftrightarrow} g(f(x_1))>g(f(x_2)) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)>f(x_2)$.

Άρα $f\downarrow\mathbb{R}$.

β. Θέτουμε στην (1) όπου x το $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και έχουμε:

$$e^{f^{-1}(y)}=-y^3-y+1.$$

Είναι $y\in[-4, 0)$, άρα πρέπει:

$$-4\le y<0 \Rightarrow \begin{cases} 64\ge -y^3>0 \\ 5>1-y>1 \end{cases} \Rightarrow 69>-y^3-y+1>1>0.$$

Επομένως $f^{-1}(y)=\ln(-y^3-y+1)$ ή $f^{-1}(x)=\ln(-x^3-x+1)$, $x\in[-4, 0)$.

6. 37 **α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^{x-2}+\ln(x-1)$, $x>1$, οπότε:

$$e^{x-2}+\ln(x-1)=1 \Leftrightarrow f(x)=f(2), \ (1).$$

Έστω $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με:

$$x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1-2}<e^{x_2-2} \\ \ln(x_1-1)<\ln(x_2-1) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x_1-2}+\ln(x_1-1)<e^{x_2-2}+\ln(x_2-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα $f\uparrow(1, +\infty)$, οπότε είναι και $1-1$.

Τότε η $(1) \Leftrightarrow x=2$.

β. Για $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$e^{x^2-4x}-e^{x-6}=-x^2+5x-6 \Leftrightarrow e^{x^2-4x}+(x^2-4x)=e^{x-6}+(x-6), \ (2).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^x+x$, $x\in\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$, οπότε $e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα $f\uparrow\mathbb{R}$, οπότε είναι και $1-1$.

Η εξίσωση (2) γράφεται ισοδύναμα:

$$f(x^2-4x)=f(x-6) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x^2-4x=x-6 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2 \ \text{ ή } \ x=3.$$

γ. Για $x>0$ έχουμε:

$$\ln\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)=\frac{x^2+2-3x}{\left(x^2+2\right)\cdot 3x}\Leftrightarrow \ln 3x-\ln\left(x^2+2\right)=\frac{1}{3x}-\frac{1}{x^2+2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(3x)-\frac{1}{3x}=\ln\left(x^2+2\right)-\frac{1}{x^2+2},\ (3).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{1}{x},\ x>0.$

Έστω $x_1,\ x_2\in(0,\ +\infty)$ με:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}\ln x_1<\ln x_2\\ -\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{x_2}\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}\ln x_1-\frac{1}{x_1}<\ln x_2-\frac{1}{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα $f\uparrow(0,\ +\infty)$, οπότε είναι και $1-1$. Τότε η εξίσωση (3) γράφεται ισοδύναμα:

$$f(3x)=f\left(x^2+2\right)\overset{f:1-1}{\Rightarrow}3x=x^2+2\Rightarrow x=2\ \text{ ή }\ x=1.$$

δ. Για $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$e^{1-\sigma\upsilon\nu x}+\eta\mu x=e^{1-\eta\mu x}+\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow e^{1-\sigma\upsilon\nu x}-\sigma\upsilon\nu x=e^{1-\eta\mu x}-\eta\mu x,\ (4).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^{1-x}-x,\ x\in\mathbb{R}.$

Έστω $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}e^{1-x_1}>e^{1-x_2}\\ -x_1>-x_2\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}e^{1-x_1}-x_1>e^{1-x_2}-x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Άρα $f\downarrow\mathbb{R}$, οπότε είναι και $1-1$. Τότε η εξίσωση (4) γράφεται ισοδύναμα:

$$f(\sigma\upsilon\nu x)=f(\eta\mu x)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x,\ \ (5).$$

Αν $\sigma\upsilon\nu x=0$, τότε $\eta\mu x=1$ ή $\eta\mu x=-1$, οπότε η εξίσωση (5) είναι αδύνατη.

Συνεπώς $\sigma\upsilon\nu x\neq 0$. Τότε η $(5)\Leftrightarrow\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$

6. 38 **α.** Είναι $f(2)=5$ και $f(3)=2$. Οπότε $2<3\Leftrightarrow f(2)>f(3)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, είναι $f\downarrow\mathbb{R}$.

β. Για $x>0$ έχουμε:

$$f\left(\ln x+e^{x-1}+1\right)=5\Leftrightarrow f\left(\ln x+e^{x-1}+1\right)=f(2)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}\ln x+e^{x-1}+1=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln x+e^{x-1}=1,\ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln x+e^{x-1},\ x>0.$

Έστω $x_1,\ x_2\in(0,\ +\infty)$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \ln x_1 < \ln x_2 \\ e^{x_1 - 1} < e^{x_2 - 1} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} g(x_1) < g(x_2).$$

Άρα $g \uparrow (0, +\infty)$, οπότε είναι και $1-1$.

Τότε η $(1) \Leftrightarrow g(x) = g(1) \Leftrightarrow x = 1$.

γ. Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^{-1}\left(3 + f\left(x^2 + 2x\right)\right) > 2 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left[f^{-1}\left(3 + f\left(x^2 + 2x\right)\right)\right] > f(2) \Leftrightarrow 3 + f\left(x^2 + 2x\right) > 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(x^2 + 2x\right) > 2 \Leftrightarrow f\left(x^2 + 2x\right) > f(3) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2 + 2x > 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \{x < -3 \;\; \text{ή} \;\; x > 1\}.$$

6. 39 **α.** Έχουμε $f(2) = 1$ και $f(1) = 3$, οπότε $1 < 2 \Leftrightarrow f(1) > f(2)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, είναι $f \downarrow \mathbb{R}$.

β. **i.** Για $x > 0$ έχουμε:

$$f^{-1}\left(2 + f(\ln x)\right) = 1 \Leftrightarrow f\left[f^{-1}\left(2 + f(\ln x)\right)\right] = f(1) \Leftrightarrow 2 + f(\ln x) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\ln x) = f(2) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2.$$

ii. Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f\left(1 + f^{-1}(4 + 2\eta\mu x)\right) = 1 \Leftrightarrow f\left(1 + f^{-1}(4 + 2\eta\mu x)\right) = f(2) \Leftrightarrow$$

$$\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} 1 + f^{-1}(4 + 2\eta\mu x) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left[f^{-1}(4 + 2\eta\mu x)\right] = f(1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 + 2\eta\mu x = 3 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{7\pi}{6}.$$

Επομένως $x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

γ. **i.** Για $x > 0$ έχουμε:

$$f\left(1 + f^{-1}(2 + \ln x)\right) < 1 \Leftrightarrow f\left(1 + f^{-1}(2 + \ln x)\right) < f(2) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} 1 + f^{-1}(2 + \ln x) > 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(2 + \ln x) > 1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f\left[f^{-1}(2 + \ln x)\right] < f(1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + \ln x < 3 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow 0 < x < e.$$

ii. Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^{-1}\left(2+f\left(x^2+x-4\right)\right)>1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f\left[f^{-1}\left(2+f\left(x^2+x-4\right)\right)\right]<f(1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2+f\left(x^2+x-4\right)<3 \Leftrightarrow f\left(x^2+x-4\right)<f(2) \Leftrightarrow$$
$$\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} x^2+x-4>2 \Leftrightarrow x^2+x-6>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{x<-3 \quad \text{ή} \quad x>2\}.$$

6. 40 Ισχύει $f\left(f(x)\right)+f^3(x)=2x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, (1).

α. Έστω $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\begin{cases} f\left(f(x_1)\right)=f\left(f(x_2)\right) \\ f^3(x_1)=f^3(x_2)\end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f\left(f(x_1)\right)+f^3(x_1)=f\left(f(x_2)\right)+f^3(x_2)\Rightarrow$$
$$\overset{(1)}{\Rightarrow} 2x_1+3=2x_2+3\Rightarrow x_1=x_2.$$

Άρα, η f είναι $1-1$.

β. Για $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f\left(2x^3+x\right)=f(4-x)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} 2x^3+x=4-x\Leftrightarrow x^3+x-2=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left(x^2+x+2\right)=0\Leftrightarrow x=1.$$

Επειδή το x^2+x+2 έχει $\Delta=-7<0$, είναι $x^2+x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

6. 41 Ισχύει $2f(x)+f^3(x)=e^{x-1}-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, (1).

α. Έστω $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\begin{cases} 2f(x_1)=2f(x_2) \\ f^3(x_1)=f^3(x_2)\end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2f(x_1)+f^3(x_1)=2f(x_2)+f^3(x_2)\Rightarrow$$
$$\overset{(1)}{\Rightarrow} e^{x_1-1}-1=e^{x_2-1}-1\Rightarrow x_1=x_2.$$

Άρα, η f είναι $1-1$.

β. Για $x=1$ η (1) γίνεται $f(1)\cdot\left(2+f^2(1)\right)=0\Rightarrow f(1)=0$, διότι $2+f^2(1)>0$.

Επιπλέον, η $(1)\Leftrightarrow f(x)\cdot\left(2+f^2(x)\right)=e^{x-1}-1$.

Αν $f(x)>0\Leftrightarrow f(x)\cdot\left(2+f^2(x)\right)>0\overset{(1)}{\Leftrightarrow} e^{x-1}-1>0\Leftrightarrow e^{x-1}>1\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Ομοίως, αν $f(x)<0\Leftrightarrow x<1$.

γ. Ισχύει $2f\left(g(x)\right)+f^3\left(g(x)\right)=e^{ημx}-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, (2).

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$h(x)=e^{x-1}-1,\ x\in\mathbb{R}\quad \text{και}\quad k(x)=2x+x^3.$$

Τότε η $(2)\Leftrightarrow k\left((f\circ g)(x)\right)=h(ημx+1)$, (3).

Επιπλέον, η (1) με την g(x) στη θέση του x γίνεται:

$$k\left((f\circ g)(x)\right)=h\left(g(x)\right)\overset{(3)}{\Leftrightarrow}h(ημx+1)=h\left(g(x)\right),\ (4).$$

Όμως, $h\uparrow\mathbb{R}$ ως βασική συνάρτηση, οπότε είναι και $1-1$. Συνεπώς:

$$(4)\Leftrightarrow g(x)=ημx+1,\ x\in\mathbb{R}.$$

6. 42 Ισχύει $f^3(x)+e^{f(x)}=e^x-1$ για κάθε $x\geq 0$, (1).

α. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$g(x)=x^3+e^x,\ x\in\mathbb{R}\quad \text{και}\quad h(x)=e^x-1,\ x\in\mathbb{R}.$$

- Είναι $h\uparrow\mathbb{R}$ ως βασική συνάρτηση και έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1^3<x_2^3\\ e^{x_1}<e^{x_2}\end{cases}\Rightarrow g(x_1)<g(x_2).$$

Άρα $g\uparrow\mathbb{R}$.

- Η (1) ισοδύναμα γράφεται $g\left(f(x)\right)=h(x)$ για κάθε $x\geq 0$, οπότε $g\circ f\uparrow[0,+\infty)$.

Έστω $x_1, x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2\Leftrightarrow g\left(f(x_1)\right)<g\left(f(x_2)\right)\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα $f\uparrow[0,+\infty)$.

β. Θέτουμε στην (1) όπου $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και έχουμε:

$$y^3+e^y+1=e^{f^{-1}(y)},\ (2).$$

Όμως $y\in[\ln 2,+\infty)$, οπότε:

$$y\geq\ln 2\Rightarrow\begin{cases}e^y\geq 2\\ y^3\geq\ln^3 2>0\end{cases}\Rightarrow y^3+e^y+1>0.$$

Άρα, η $(2)\Rightarrow\ln\left(y^3+e^y+1\right)=f^{-1}(y)$.

Επομένως $f^{-1}(x)=\ln\left(x^3+e^x+1\right)$, $x\in[\ln 2,+\infty)$.

6. 43 Ισχύει $f\left(f(x)\right)=x+f(x)-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, (1).

α. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με:

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \begin{cases} f(f(x_1))=f(f(x_2)) \\ -f(x_1)=-f(x_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} f(f(x_1))-f(x_1)=f(f(x_2))-f(x_2) \Rightarrow$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} x_1=x_2.$$

Άρα, η f είναι $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

β. Θέτουμε στην (1) όπου $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και έχουμε:

$$f(y)=f^{-1}(y)+y-1 \Leftrightarrow f(y)-f^{-1}(y)=y-1 \quad ή \quad f(x)-f^{-1}(x)=x-1, \ (2).$$

- Οι $C_f, C_{f^{-1}}$ τέμνονται, αν $f(x)=f^{-1}(x) \overset{(2)}{\Rightarrow} x-1=0 \Rightarrow x=1$.
- Η C_f βρίσκεται πάνω από τη $C_{f^{-1}}$, αν $f(x)-f^{-1}(x)>0 \overset{(2)}{\Rightarrow} x>1$.
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τη $C_{f^{-1}}$, αν $f(x)-f^{-1}(x)<0 \overset{(2)}{\Rightarrow} x<1$.

6. 44 **α.** Για $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x)=\dfrac{f^2(x)-3}{4f(x)}=\dfrac{f(x)}{4}-\dfrac{3}{4f(x)}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2)$.

Τότε:

$$\begin{cases} \dfrac{f(x_1)}{4}<\dfrac{f(x_2)}{4} \\ \dfrac{-3}{4f(x_1)}<\dfrac{-3}{4f(x_2)} \end{cases} \Rightarrow g(x_1)<g(x_2).$$

Άρα $g \uparrow \mathbb{R}$.

β. Για $x \in \mathbb{R}$ η δοθείσα εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$f(2ημx)-f(\sqrt{3})=\frac{3}{f(2ημx)}-\frac{3}{f(\sqrt{3})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(2ημx)}{4}-\frac{3}{f(2ημx)}=\frac{f(\sqrt{3})}{4}-\frac{3}{4f(\sqrt{3})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(2ημx)=g(\sqrt{3}) \overset{g:1-1}{\Leftrightarrow} 2ημx=\sqrt{3} \Leftrightarrow ημx=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{x=2κπ+\frac{π}{3} \quad ή \quad x=2κπ+\frac{2π}{3}, \ κ \in \mathbb{Z}\right\}.$$

6. 45 Είναι:

$$x^2-3x+2=x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}.$$

Οπότε:

$$f(x)=\begin{cases}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}, & x\le 0\\ -3x+2 & , \ x>0\end{cases}.$$

- Για $x>0$, η f είναι γνησίως φθίνουσα ως βασική συνάρτηση, οπότε είναι και $1-1$.
- Για $x\le 0$, έστω $x_1, x_2\in(-\infty, 0]$ με:

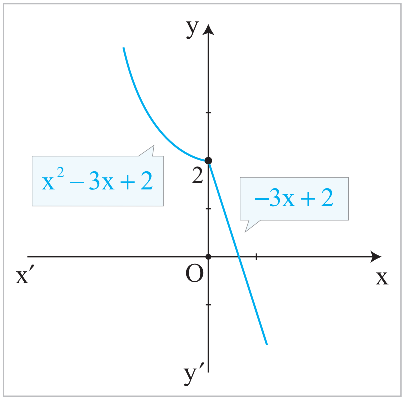
$$x_1<x_2\le 0\Rightarrow x_1-\frac{3}{2}<x_2-\frac{3}{2}\le-\frac{3}{2}<0\Rightarrow\left(x_1-\frac{3}{2}\right)^2>\left(x_2-\frac{3}{2}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Άρα $f\downarrow(-\infty, 0]$, οπότε είναι και $1-1$.

Ο τύπος της f αποτελείται από βασικές συναρτήσεις, οπότε η C_f έχει τη μορφή που απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα.

Άρα, η f είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της.



6. 46 **α.** Η συνάρτηση f ορίζεται, αν $\frac{2e^x-e^3}{e^x-2}>0\Leftrightarrow(2e^x-e^3)\cdot(e^x-2)>0.$

Θεωρούμε τον πίνακα προσήμων του γινομένου $(2e^x-e^3)\cdot(e^x-2)$.

x	$-\infty$	$\ln 2$	$3-\ln 2$	$+\infty$
$2e^x-e^3$	$-$	$-$	0	$+$
e^x-2	$-$	0 $+$		$+$
Γινόμενο	$+$	$-$		$+$

Επομένως $A_f=(-\infty, \ln 2)\cup(3-\ln 2, +\infty)$.

β. Για $x \in (-\infty, \ln 2)$ έχουμε:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2e^x - 4 + 4 - e^3}{e^x - 2}\right) = \ln\left(2 + \frac{4 - e^3}{e^x - 2}\right).$$

Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, \ln 2)$ με:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \ln\left(2 + \frac{4 - e^3}{e^{x_1} - 2}\right) = \ln\left(2 + \frac{4 - e^3}{e^{x_2} - 2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4 - e^3}{e^{x_1} - 2} = \frac{4 - e^3}{e^{x_2} - 2} \Rightarrow e^{x_1} - 2 = e^{x_2} - 2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα, η f είναι $1-1$, οπότε αντιστρέφεται στο $(-\infty, \ln 2)$.

γ. Θέτουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln\left(2 + \frac{4 - e^3}{e^x - 2}\right) = y \Leftrightarrow 2 + \frac{4 - e^3}{e^x - 2} = e^y \Leftrightarrow 0 > \frac{4 - e^3}{e^x - 2} = e^y - 2 \Leftrightarrow$$

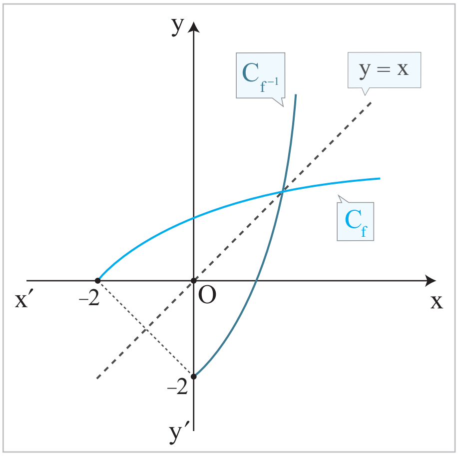
$$\overset{y<\ln 2}{\Leftrightarrow} e^x - 2 = \frac{4 - e^3}{e^y - 2} \Leftrightarrow e^x = 2 + \frac{4 - e^3}{e^y - 2} \Leftrightarrow x = \ln\left(2 + \frac{4 - e^3}{e^y - 2}\right).$$

Άρα $f^{-1}(x) = \ln\left(2 + \frac{4 - e^3}{e^x - 2}\right)$, $x \in (-\infty, \ln 2)$.

Επομένως $f = f^{-1}$ για $x \in (-\infty, \ln 2)$.

6. 47 **α.** Η $f \uparrow [-2, +\infty)$, οπότε και $1-1$, άρα αντιστρέφεται.

β. Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$.



6. 48 **α.** Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}.$$

Θέτουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{e^x + 1} = y \Leftrightarrow 1 - y = \frac{2}{e^x + 1} \Leftrightarrow$$
$$\overset{y<1}{\Leftrightarrow} \frac{2}{1-y} - 1 = e^x \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x = \ln\left(\frac{2}{1-y} - 1\right).$$

(*) Πρέπει:
$$\frac{2}{1-y} - 1 > 0 \overset{y<1}{\Leftrightarrow} 2 > 1 - y \Leftrightarrow y > -1.$$

Η $f(x) = y$ έχει μοναδική λύση ως προς x, οπότε η f είναι $1-1$.

Επομένως, η f αντιστρέφεται και είναι $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{2}{1-x} - 1\right)$, $x \in (-1, 1)$.

β. Για $x \in (-1, 1)$ έχουμε $f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow x = f(0) \Leftrightarrow x = 0$ που είναι μοναδική λύση.

6. 49 • Για $x = 0$ η δοθείσα ανισότητα γράφεται:

$$g^2(0) - 6g(0) + 9 \le 0 \Leftrightarrow (g(0) - 3)^2 \le 0.$$

Όμως $(g(0) - 3)^2 \ge 0$, οπότε $(g(0) - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow g(0) = 3$.

• Για $x = 2$ η δοθείσα ανισότητα γράφεται:

$$g^2(4) - 6g(4) + 9 \le 0 \Leftrightarrow (g(4) - 3)^2 \le 0,$$

από όπου ομοίως προκύπτει $g(4) = 3$.

Άρα $g(4) = g(0)$, οπότε η g δεν είναι $1-1$. Επομένως, η g δεν αντιστρέφεται.

6. 50 **α.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$4x^2 + 1 > 4x^2 \Rightarrow \sqrt{4x^2 + 1} > 2|x|.$$

Είναι $2|x| \ge -2x$, άρα πρέπει:

$$\sqrt{4x^2 + 1} > -2x \Rightarrow 2x + \sqrt{4x^2 + 1} > 0 \Rightarrow f(x) > 0.$$

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) = \frac{\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)\left(2x - \sqrt{4x^2 + 1}\right)}{2x - \sqrt{4x^2 + 1}} \Leftrightarrow f(x) = \frac{-1}{2x - \sqrt{4x^2 + 1}}.$$

• Έστω $x_1 < x_2 \le 0 \Rightarrow 4x_1^2 + 1 > 4x_2^2 + 1 \Rightarrow -\sqrt{4x_1^2 + 1} < -\sqrt{4x_2^2 + 1}$, οπότε:

$$2x_1-\sqrt{4x_1^2+1}<2x_2-\sqrt{4x_2^2+1}\Rightarrow\frac{1}{2x_1-\sqrt{4x_1^2+1}}>\frac{1}{2x_2-\sqrt{4x_2^2+1}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{-1}{2x_1-\sqrt{4x_1^2+1}}<\frac{-1}{2x_2-\sqrt{4x_2^2+1}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

- Έστω $0\le x_1<x_2\Rightarrow 4x_1^2+1<4x_2^2+1\Rightarrow\sqrt{4x_1^2+1}<\sqrt{4x_2^2+1}$,

  οπότε:
$$2x_1+\sqrt{4x_1^2+1}<2x_2+\sqrt{4x_2^2+1}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

  Επιπλέον $x\le 0\Leftrightarrow f(x)\le f(0)=1$ και $x>0\Leftrightarrow f(x)>f(0)=1$, οπότε:
$$f\big((-\infty,0]\big)\cap f\big((0,+\infty)\big)=\varnothing.$$

  Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς είναι και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται. Θέτουμε:
$$f(x)=y\Rightarrow\begin{cases}2x+\sqrt{4x^2+1}=y,\ (1),\ y>0\\ \dfrac{-1}{2x-\sqrt{4x^2+1}}=y,\ (2)\end{cases}.$$

Από τη $(2)\Rightarrow\dfrac{-1}{y}=2x-\sqrt{4x^2+1}\Rightarrow\sqrt{4x^2+1}=2x+\dfrac{1}{y}.$

Τότε η $(1)\Rightarrow 4x+\dfrac{1}{y}=y\Rightarrow x=\dfrac{y}{4}-\dfrac{1}{4y}.$

Επομένως $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{4x},\ x>0.$

6. 51 **α.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:
$$f\big(f(x)\big)-g\big(f(x)\big)=x,\ (1).$$

Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με:
$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\begin{cases}f\big(f(x_1)\big)=f\big(f(x_2)\big)\\ g\big(f(x_1)\big)=g\big(f(x_2)\big)\end{cases}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f\big(f(x_1)\big)-g\big(f(x_1)\big)=f\big(f(x_2)\big)-g\big(f(x_2)\big)\Rightarrow$$
$$\overset{(1)}{\Rightarrow}x_1=x_2.$$

Συνεπώς, η f είναι $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

β. Θέτουμε στην (1) όπου $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και έχουμε:

$$f(y)-g(y)=f^{-1}(y)\overset{y=x}{\Leftrightarrow}f^{-1}(x)+f(x)=g(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

6. 52 **α.** Έστω $x_1,\ x_2\in(0,+\infty)$ με:

$$0<x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1^3-4<x_2^3-4\\ \ln x_1<\ln x_2\\ 3x_1^2<3x_2^2\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}x_1^3-4+\ln x_1+3x_1^2<x_2^3-4+\ln x_2+3x_2^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα $f\uparrow(0,+\infty)$, οπότε είναι και $1-1$.

β. Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(1)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}x=1$. Για το πρόσημο της f έχουμε:

- για $x>1\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(1)\Leftrightarrow f(x)>0$ και
- για $0<x<1\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x)<0$.

γ. Για $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x-3)>e^3+3(e^2-1)\Leftrightarrow f(x-3)>f(e)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}x-3>e\Leftrightarrow x>e+3.$$

6. 53 **α.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(f(x))-f(x)=e^{\frac{x}{2}-1},\ (1).$$

Έστω $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\begin{cases}f(f(x_1))=f(f(x_2))\\ -f(x_1)=-f(x_2)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(f(x_1))-f(x_1)=f(f(x_2))-f(x_2)\Rightarrow$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow}e^{\frac{x_1}{2}-1}=e^{\frac{x_2}{2}-1}\Rightarrow x_1=x_2.$$

Άρα, η f είναι $1-1$.

β. Για $x=2$ η (1) γράφεται:

$$f(f(2))-f(2)=e^{1-1}\Rightarrow f(1)-1=1\Rightarrow f(1)=2.$$

Όμως η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $1<2\Rightarrow f(1)>f(2)$.

Επομένως $f\downarrow\mathbb{R}$.

γ. Για $x>0$ έχουμε:

$$f\left(-3+2f^{-1}(\ln x+1)\right)<2 \Leftrightarrow f\left(-3+2f^{-1}(\ln x+1)\right)<f(1) \Leftrightarrow$$

$$\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} -3+2f^{-1}(\ln x+1)>1 \Leftrightarrow f^{-1}(\ln x+1)>2 \Leftrightarrow$$

$$\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(\ln x+1)\right)<f(2) \Leftrightarrow \ln x+1<1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x<0 \Leftrightarrow 0<x<1.$$

3ο

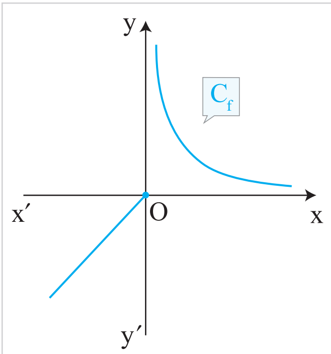
Κριτηριο Αξιολογησης

Θέμα Α

Α1. Θεωρία.

Α2. **α.** Ψ

β. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\,, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}\,, & x>0 \end{cases}$ είναι συνάρτηση 1 – 1, χωρίς να είναι γνησίως μονότονη.



Α3. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος.

Θέμα Β

Β1. **α.** Οι συναρτήσεις $k_1(x)=x-2,\ k_2(x)=1-2x$ ορίζονται στο $\mathbb{R}$ και $A_h=\mathbb{R}$.

Άρα η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με:

$$x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1-2<x_2-2 \\ 1-2x_1>1-2x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h(x_1-2)<h(x_2-2) \\ h(1-2x_1)>h(1-2x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h(x_1-2)<h(x_2-2) \\ -h(1-2x_1)<-h(1-2x_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x_1-2)-h(1-2x_1)<h(x_2-2)-h(1-2x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα $f \uparrow \mathbb{R}$.

β. Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και 1 – 1. Έχουμε:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow h(x-2)-h(1-2x)=0 \Leftrightarrow h(x-2)=h(1-2x) \Leftrightarrow$$

$$\overset{h:1-1}{\Leftrightarrow} x-2=1-2x \Leftrightarrow x=1.$$

Β2. Έστω $x_1, x_2 \in A_g=(-\infty, 1]$ με:

$$x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases}1-x_1>1-x_2\\ -2x_1>-2x_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{1-x_1}>\sqrt{1-x_2}\\ -2x_1>-2x_2\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x_1}-2x_1>\sqrt{1-x_2}-2x_2 \Rightarrow g(x_1)>g(x_2).$$

Άρα $g \downarrow (-\infty, 1]$, οπότε είναι και 1 – 1.

Επομένως:

$$g(\eta\mu x)=-2 \Leftrightarrow g(\eta\mu x)=g(1) \overset{g:1-1}{\Leftrightarrow} \eta\mu x=1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Θέμα Γ

Γ1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) \le -\ln 2 \Leftrightarrow f(x) \le f(1)$.

Για κάθε $x \in A$ έχουμε:

$$f(x) \le -\ln 2 \Leftrightarrow \ln\frac{x}{1+x^2} \le \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \le 1+x^2$$

$$\Leftrightarrow 1-2x+x^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 0 \text{ που ισχύει.}$$

Άρα, η f παρουσιάζει στο $x_0=1$ μέγιστο, το $f(1)=-\ln 2$.

Γ2. α. Επειδή $f \downarrow [1, +\infty)$, είναι και 1 – 1.

Η δοθείσα εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$f\left(e^{x^2}+1\right)=\ln 3-\ln 10 \Leftrightarrow f\left(e^{x^2}+1\right)=\ln\frac{3}{10} \Leftrightarrow f\left(e^{x^2}+1\right)=f(3),\ (1).$$

Όμως $e^{x^2}+1>1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε:

$$(1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} e^{x^2}+1=3 \Leftrightarrow e^{x^2}=2 \Leftrightarrow x^2=\ln 2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\ln 2}.$$

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\sqrt{x^2+1}+2 \ge 3>1$, οπότε η δοθείσα ανίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$f\left(\sqrt{x^2+1}+2\right) \ge f(4) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} \sqrt{x^2+1}+2 \le 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \le 2 \Leftrightarrow x^2+1 \le 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 \le 3 \Leftrightarrow |x| \le \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}.$$

Γ3. Από το ερώτημα Γ1 έχουμε:

$$f(x) \le -\ln 2 \text{ για κάθε } x \in A, \ (2).$$

Οπότε:

- για $\alpha^2 > 0$: $f(\alpha^2) \le -\ln 2$ και
- για $\beta > 0$: $f(\beta) \le -\ln 2$.

Συνεπώς:

$$f(\alpha^2) + f(\beta) \le -2\ln 2 \Leftrightarrow f(\alpha^2) + f(\beta) \le -\ln 4.$$

Η εξίσωση (2) ισχύει ως ισότητα μόνο για $x = 1$.

Επομένως, πρέπει να ισχύει:

$$\alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1 \text{ και } \beta = 1.$$

Θέμα Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x^2 + 1 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > |x| \overset{|x| \ge -x}{\Rightarrow} \sqrt{x^2+1} > -x \Rightarrow x + \sqrt{x^2+1} > 0.$$

Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση γράφεται ως $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - \sqrt{x^2+1}}{x - \sqrt{x^2+1}}\right) = \ln\left(\dfrac{-1}{x - \sqrt{x^2+1}}\right)$.

Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι $1-1$. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \ne x_2$ τέτοια, ώστε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \ln\left(x_1 + \sqrt{x_1^2+1}\right) = \ln\left(x_2 + \sqrt{x_2^2+1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + \sqrt{x_1^2+1} = x_2 + \sqrt{x_2^2+1}, \ (1).$$

Όμως:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \ln\left(\frac{-1}{x_1 - \sqrt{x_1^2+1}}\right) = \ln\left(\frac{-1}{x_2 - \sqrt{x_2^2+1}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x_1 - \sqrt{x_1^2+1}} = \frac{-1}{x_2 - \sqrt{x_2^2+1}} \Rightarrow x_1 - \sqrt{x_1^2+1} = x_2 - \sqrt{x_2^2+1}, \ (2).$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε:

$$2x_1 = 2x_2 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα, η f είναι $1-1$.

Δ2. Θέτουμε:

$$f(x) = y \Rightarrow \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = y \Rightarrow x + \sqrt{x^2+1} = e^y \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = e^y - x, \ y \in \mathbb{R}, \ (3).$$

Όμως:

$$f(x)=y \Rightarrow \ln\left(\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}\right)=y \Rightarrow \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}=e^y \Rightarrow$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow}\frac{-1}{x-\left(e^y-x\right)}=e^y \Rightarrow -1=2xe^y-e^{2y} \Rightarrow \frac{e^{2y}-1}{2e^y}=x.$$

Επομένως $f^{-1}(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x},\ x\in\mathbb{R}$.

Δ3. Για $x\in\mathbb{R}$ είναι $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(e^x-\dfrac{1}{e^x}\right)$.

Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με:

$$x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Rightarrow \frac{1}{e^{x_1}}>\frac{1}{e^{x_2}} \Rightarrow -\frac{1}{e^{x_1}}<-\frac{1}{e^{x_2}}.$$

Τότε έχουμε:

$$e^{x_1}-\frac{1}{e^{x_1}}<e^{x_2}-\frac{1}{e^{x_2}} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(e^{x_1}-\frac{1}{e^{x_1}}\right)<\frac{1}{2}\cdot\left(e^{x_2}-\frac{1}{e^{x_2}}\right) \Rightarrow f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2).$$

Επομένως $f^{-1}\uparrow\mathbb{R}$.

Δ4. Η εξίσωση $f^{-1}\left(3^x+1\right)+f^{-1}\left(2^x+1\right)=f^{-1}\left(\pi^x+1\right)+f^{-1}\left(e^x+1\right)$ αληθεύει για $x=0$, διότι ισχύει $f^{-1}(2)+f^{-1}(2)=f^{-1}(2)+f^{-1}(2)$.

- Αν $x>0$, τότε:
  - $3<\pi \Rightarrow 3^x<\pi^x \Rightarrow 3^x+1<\pi^x+1 \overset{f^{-1}\uparrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}\left(3^x+1\right)<f^{-1}\left(\pi^x+1\right)$ και
  - $2<e \Rightarrow 2^x<e^x \Rightarrow 2^x+1<e^x+1 \overset{f^{-1}\uparrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}\left(2^x+1\right)<f^{-1}\left(e^x+1\right)$.

  Άρα $f^{-1}\left(3^x+1\right)+f^{-1}\left(2^x+1\right)<f^{-1}\left(\pi^x+1\right)+f^{-1}\left(e^x+1\right)$.
- Αν $x<0$, τότε:
  - $3<\pi \Rightarrow 3^x>\pi^x \Rightarrow 3^x+1>\pi^x+1 \overset{f^{-1}\uparrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}\left(3^x+1\right)>f^{-1}\left(\pi^x+1\right)$ και
  - $2<e \Rightarrow 2^x>e^x \Rightarrow 2^x+1>e^x+1 \overset{f^{-1}\uparrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}\left(2^x+1\right)>f^{-1}\left(e^x+1\right)$.

  Άρα $f^{-1}\left(3^x+1\right)+f^{-1}\left(2^x+1\right)>f^{-1}\left(\pi^x+1\right)+f^{-1}\left(e^x+1\right)$.

Επομένως, η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

4ο

Κριτηριο Αξιολογησης

Θέμα Α

Α1. Θεωρία.

Α2. **α.** Ψ

β. Η $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Αν $x_1<0<x_2$, τότε $\frac{1}{x_1}<0<\frac{1}{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Δηλαδή, η f είναι γνησίως αύξουσα που είναι άτοπο.

Α3. **α.** γνησίως μονότονη **β.** $f(x)\le f(x_0)$ **γ.** ένα το πολύ σημείο

δ. $f(A)$ **ε.** σταθερή στο Δ.

Θέμα Β

Β1. **α.** Πρέπει $x^2+4x+5>0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, διότι $\Delta=-4<0$.

Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R}$.

β. Για $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)=3+\ln\left(x^2+4x+4+1\right)=3+\ln\left((x+2)^2+1\right) \text{ και } f(-2)=3.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$f(x)\ge f(-2) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Είναι:

$$f(x)\ge f(-2)\Leftrightarrow 3+\ln\left((x+2)^2+1\right)\ge 3\Leftrightarrow \ln\left((x+2)^2+1\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+1\ge 1\Leftrightarrow (x+2)^2\ge 0 \text{ που ισχύει για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Άρα, η ελάχιστη τιμή της f είναι το 3.

Β2. Έστω $x_1, x_2\in(0, +\infty)$ με $x_1<x_2\Leftrightarrow \ln x_1<\ln x_2$.

Άρα $\ln x_1+x_1<\ln x_2+x_2\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$, οπότε $g\uparrow(0, +\infty)$.

Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα $g(x^2)\ge 1\Leftrightarrow g(x^2)\ge g(1)$ και επειδή $x^2>0$ για κάθε

$x \neq 0$, η ανίσωση ορίζεται για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Επομένως:

$$g(x^2) \geq g(1) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow \{x \leq -1 \text{ ή } x \geq 1\}.$$

Θέμα Γ

Γ1. Έστω $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2 \overset{\eta\mu x\uparrow}{\Rightarrow} \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2$.

Άρα $\eta\mu x_1 + x_1 < \eta\mu x_2 + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Επομένως $f\uparrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Γ2. Είναι $f(0) = 0$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\pi}{2} = \frac{2+\pi}{2}$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Είναι:

- $f(0) \leq f(x) \Leftrightarrow 0 \leq \eta\mu x + x$ που ισχύει για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και
- $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \eta\mu x + x \leq 1 + \frac{\pi}{2}$ που ισχύει για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

  διότι $\eta\mu x \leq 1$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $x \leq \frac{\pi}{2}$.

Άρα, η ελάχιστη τιμή της f είναι το 0 και η μέγιστη το $\frac{2+\pi}{2}$.

Γ3. Επειδή $f\uparrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, είναι και 1 – 1, οπότε αντιστρέφεται.

Είναι $f^{-1}\left(\frac{3+\pi}{6}\right) = f^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = f^{-1}\left[f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{\pi}{6}$.

Γ4. Η εξίσωση $f^{-1}(x+1) = x$ ορίζεται, αν:

$$x + 1 \in \left[0, \frac{2+\pi}{2}\right] \Leftrightarrow 0 \leq x + 1 \leq 1 + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \ (1).$$

Είναι:

$$f^{-1}(x+1)=x \Leftrightarrow x+1=f(x) \Leftrightarrow x+1=\eta\mu x+x \Leftrightarrow \eta\mu x=1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{2}.$$

Θέμα Δ

Δ1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$h(x)=x-1,\ x\in\mathbb{R} \text{ με } h\uparrow\mathbb{R}, \text{ ως βασική και } g(x)=e^x+\ln x,\ x>0.$$

Έστω $x_1, x_2\in(0, +\infty)$ με:

$$x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1}<e^{x_2} \\ \ln x_1<\ln x_2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x_1}+\ln x_1<e^{x_2}+\ln x_2 \Rightarrow g(x_1)<g(x_2).$$

Επομένως $g\uparrow(0, +\infty)$.

Η δοθείσα σχέση γράφεται $g(f(x))=h(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $g\circ f\uparrow\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με:

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow g(f(x_1))<g(f(x_2)) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2).$$

Επομένως $f\uparrow\mathbb{R}$.

Δ2. Επειδή $f\uparrow\mathbb{R}$, είναι και 1 – 1, οπότε αντιστρέφεται.

Είναι $f(\mathbb{R})=(0, +\infty)$, οπότε θέτουμε στη δοθείσα σχέση $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και έχουμε:

$$e^y+\ln y=f^{-1}(y)-1 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=e^y+\ln y+1.$$

Επομένως $f^{-1}(x)=e^x+\ln x+1,\ x\in f(\mathbb{R})=(0, +\infty)$.

Δ3. α. Η $f^{-1}(x)=g(x)+1,\ x>0,$ και από το Δ1 είναι $f^{-1}\uparrow(0, +\infty)$.

β. Η ανίσωση ορίζεται, αν:

- $e^{2x}+e^x+2>0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, διότι, ως τριώνυμο του e^x, έχει $\Delta=-7<0$ και
- $4e^x>0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε, για $x\in\mathbb{R}$ η ανίσωση γράφεται:

$$f^{-1}\left(e^{2x}+e^x+2\right)\le f^{-1}\left(4e^x\right) \overset{f^{-1}\uparrow}{\Leftrightarrow} e^{2x}+e^x+2\le 4e^x \Leftrightarrow e^{2x}-3e^x+2\le 0,\ (1).$$

Αν θέσουμε $e^x=t>0$, τότε η (1) γίνεται: $t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \{t=1 \ \text{ ή } \ t=2\}$.

Θεωρούμε τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου t^2-3t+2.

	$-\infty$		1		2		$+\infty$
t^2-3t+2		+	0	−	0	+	

Άρα:

$$1 \le t \le 2 \Rightarrow 1 \le e^x \le 2 \Rightarrow \ln 1 \le x \le \ln 2 \Rightarrow 0 \le x \le \ln 2.$$

Επομένως $x \in [0, \ln 2]$.

7η Ενότητα

Ερωτήσεις κατανόησης στις συναρτήσεις (Ενότητες 1η - 6η)

Α. Του τύπου Σωστό / Λάθος

7. 1	α. Λάθος	β. Σωστό	γ. Σωστό	δ. Λάθος	ε. Σωστό.
7. 2	α. Λάθος	β. Λάθος	γ. Σωστό	δ. Σωστό	ε. Σωστό.
7. 3	α. Σωστό	β. Σωστό	γ. Σωστό	δ. Λάθος	ε. Λάθος.
7. 4	α. Λάθος	β. Σωστό	γ. Λάθος	δ. Σωστό	ε. Σωστό.
7. 5	α. Λάθος	β. Λάθος	γ. Λάθος	δ. Λάθος	ε. Λάθος.
7. 6	α. Λάθος	β. Σωστό	γ. Λάθος	δ. Σωστό	ε. Σωστό.
7. 7	α. Σωστό	β. Σωστό	γ. Λάθος	δ. Σωστό	ε. Λάθος.
7. 8	α. Λάθος	β. Σωστό	γ. Λάθος	δ. Σωστό	ε. Σωστό.
7. 9	α. Σωστό	β. Σωστό	γ. Σωστό	δ. Λάθος	ε. Λάθος
	στ. Λάθος	ζ. Σωστό.			
7. 10	α. Σωστό	β. Λάθος	γ. Λάθος	δ. Σωστό.	

7. 11 **1ος** α. Ψ β. Με ορισμό συνάρτησης.

2ος α. Ψ β. Για παράδειγμα $f(x)=-\frac{1}{|x|}\leq 0$, χωρίς μέγιστο.

3ος α. Ψ β. Για παράδειγμα $f(x)=\frac{1}{x}$.

4ος α. Ψ β. Για παράδειγμα $f(x)=\frac{1}{|x|}\geq 0$, χωρίς ελάχιστο.

5ος α. Ψ β. Για παράδειγμα $f(x)=\frac{1}{|x|}$.

6ος α. Ψ β. Για παράδειγμα $f(x)=\frac{1}{x}$.

Β. Πολλαπλής επιλογής

7. 12 δ

7. 13 α

7. 14 γ

7. 15 α

7. 16 α

7. 17 α

7. 18 α

8η Ενότητα

Πεπερασμένο όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

A. Του τύπου Σωστό / Λάθος

8. 1 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό.

8. 2 **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος.

8. 3 **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό **στ.** Σωστό.

8. 4 **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος **στ.** Λάθος **ζ.** Σωστό **η.** Σωστό.

B. Ασκήσεις για λύση

8. 5 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό **στ.** Σωστό **ζ.** Σωστό **η.** Σωστό **θ.** Λάθος **ι.** Λάθος **ια.** Λάθος **ιβ.** Σωστό **ιγ.** Σωστό **ιδ.** Λάθος **ιε.** Σωστό.

8. 6 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος **στ.** Λάθος **ζ.** Σωστό **η.** Λάθος **θ.** Λάθος **ι.** Σωστό.

8. 7 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος **στ.** Λάθος **ζ.** Σωστό **η.** Λάθος **θ.** Λάθος **ι.** Λάθος **ια.** Σωστό **ιβ.** Λάθος.

8. 8 **α.**
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4$, οπότε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει, $f(1)=4$
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$, $2\notin D_f$
- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=4$, οπότε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ δεν υπάρχει, $3\notin D_f$
- $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=f(4)=1$.

β. • $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 2$

• $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3,\ f(1) = 2$

• $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 2$

• $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -1,\ 3 \notin D_f$

• $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 2,\ f(4) = 3.$

γ. • $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 2$

• $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1,\ f(1) = 2$

• $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1,\ \ f(2) = 0$

• $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1,\ \ 3 \notin D_f$

• $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = f(4) = 1.$

δ. • $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$

• $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0,\ \ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$, οπότε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει, $f(1) = 2$

• $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 1$

• $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 0,\ \ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$, οπότε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ δεν υπάρχει, $f(3) = 2$

• $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 1,\ 4 \notin D_f.$

8. 9 Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.

α. $f(1) = 2$ **β.** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 4,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$, οπότε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει

γ. Το $f(4)$ δεν ορίζεται **δ.** $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 2$ **ε.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 3.$

8. 10 Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, -2) \cup (-2,\ 2) \cup (2, +\infty)$.

α. Το $f(-2)$ δεν ορίζεται, διότι $-2 \notin A$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -2$ και $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 5$, οπότε το $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ δεν υπάρχει.

β. Είναι $f(0) = 4$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 4$, οπότε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

γ. Το $f(2)$ δεν ορίζεται, διότι $2 \notin A$. Έχουμε $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0.$

δ. Είναι $f(4) = 2$. Έχουμε $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = 4.$

8. 11 **α.** Υπάρχει μικρό $\delta > 0$, ώστε $(-\delta, \delta) \subseteq A_f$, άρα είναι καλώς ορισμένο.

β. Υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $(2-\delta, 2+\delta) \cap A_f = \varnothing$, άρα δεν είναι καλώς ορισμένο.

γ. Υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $[1, 1+\delta) \subseteq A_f$, άρα είναι καλώς ορισμένο.

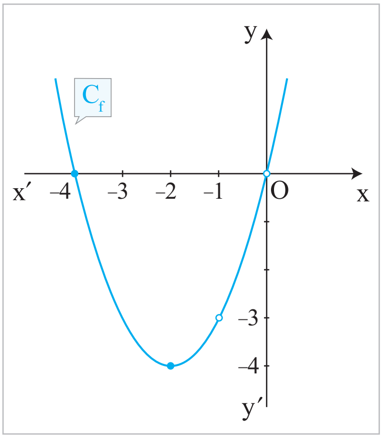
δ. Υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $(2, 2+\delta) \subseteq A_f$, άρα είναι καλώς ορισμένο.

8. 12 **α.** Για $x \in A = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x) = \frac{x^2(x^2+5x+4)}{x(x+1)} = \frac{x(x+1)(x+4)}{x+1} =$$

$$= x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4.$$

Είναι $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -3$ και $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

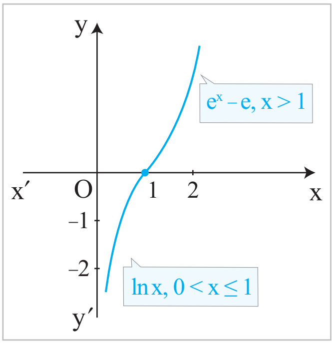


β. Είναι:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$ και

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$.

Άρα $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

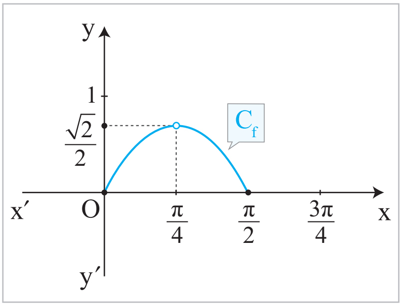


γ. Είναι:

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Άρα $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



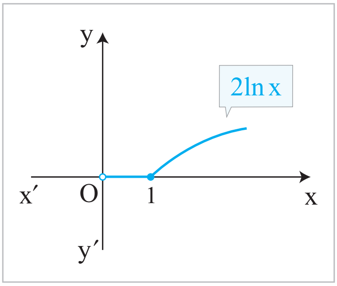
δ. Έχουμε:

$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ και $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Συνεπώς $f(x)=\begin{cases} 2\ln x, & x \geq 1 \\ 0 & , 0 < x < 1 \end{cases}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.



8. 13 **α.** Για $x \in A = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ είναι:

$$f(x) = \frac{4x(1-x)+3(x^2+1)+1-x^3}{4-x^2} = \frac{-x^3-x^2+4x+4}{4-x^2} =$$

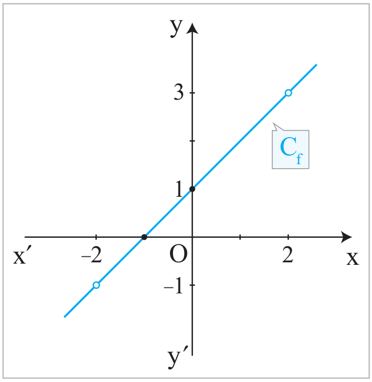
$$= \frac{-x^2(x+1)+4(x+1)}{4-x^2} = \frac{(x+1)(-x^2+4)}{4-x^2} = x+1.$$

Η γραφική παράσταση της f απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα.

Είναι:

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -1$ και

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$.



β. Για $x \in (-\infty, \ln 3) \cup (\ln 3, +\infty)$ είναι:

$$f(x) = \frac{e^x - 3(x+1) + xe^x}{\sqrt{e^{2x} - 6e^x + 9}} = \frac{e^x(x+1) - 3(x+1)}{\sqrt{(e^x-3)^2}} =$$

$$= \frac{(x+1)(e^x-3)}{|e^x-3|} = \begin{cases} x+1 & , x > \ln 3 \\ -x-1, & x < \ln 3 \end{cases}.$$

Η γραφική παράσταση της f απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα όπου λάβαμε υπόψη ότι:

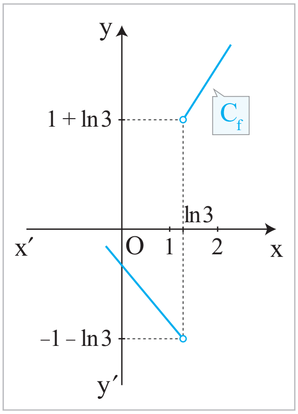
$$e < 3 < 4 \Leftrightarrow 1 < \ln 3 < \ln 4 \Leftrightarrow 1 < \ln 3 < 2\ln 2$$

Είναι:

$\lim\limits_{x \to \ln 3^-} f(x) = -1 - \ln 3$ και

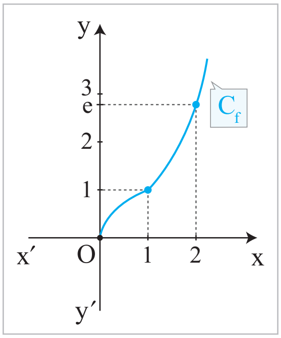
$\lim\limits_{x \to \ln 3^+} f(x) = 1 + \ln 3$.

Άρα, το $\lim\limits_{x \to \ln 3} f(x)$ δεν υπάρχει.



8. 14 **α.** Η C_f αποτελείται από τμήματα βασικών συναρτήσεων όπως απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα.

Είναι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.



β. Έχουμε $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\sqrt{x}\right) = 1$.

γ. Έχουμε $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(e^x - 1\right) = 1$.

8. 15 Πρέπει:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3 = 3\lambda - 9 \Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 2) - 3(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda = 2 \text{ ή } \lambda = \pm\sqrt{3}).$$

8. 16 Πρέπει:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + \lambda + 4) = \lambda^2 - \lambda + 6 \Leftrightarrow \lambda^3 + 5\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 + \lambda + 6) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

8. 17 Πρέπει:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow ημ^3α + συν^2α = ημα - συν^2α \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ημ^3α + 2συν^2α - ημα = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ημ^3α - 2ημ^2α - ημα + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ημ^2α(ημα - 2) - (ημα - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (ημα - 2) \cdot (ημ^2α - 1) = 0.$$

Είναι $|ημα| \leq 1$ για κάθε $α \in \mathbb{R}$, οπότε $ημ^2α = 1 \Leftrightarrow ημα = \pm 1$.

- $ημα = 1 \Leftrightarrow α = κπ + \dfrac{π}{2},\ κ \in \mathbb{Z}$,
- $ημα = = -1 \Leftrightarrow α = κπ + \dfrac{3π}{2},\ κ \in \mathbb{Z}$.

8. 18 Πρέπει:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow 4(α^2 - β) = 4α - β^2 - 5 \Leftrightarrow 4α^2 - 4α + β^2 - 4β + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2α - 1)^2 + (β - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow α = \frac{1}{2} \ \text{ και } \ β = 2.$$

9η Ενότητα

Ιδιότητες ορίων

Α. Του τύπου Σωστό / Λάθος

9. 1 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος **στ.** Σωστό **ζ.** Σωστό **η.** Σωστό **θ.** Σωστό.

9. 2 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό.

9. 3 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό.

9. 4 **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος.

9. 5 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος **στ.** Σωστό.

9. 6 **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος **στ.** Λάθος.

9. 7 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό.

9. 8 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό.

9. 9 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό.

9. 10 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό **στ.** Σωστό.

9. 11 **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό.

9. 12 **1ος** **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=0$ και $g(x)=x^2$ στο $x_0=0$.

2ος **α.** Α **β.** Με άτοπο.

3ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\begin{cases}1\ , & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=-f(x)$ στο $x_0=0$.

4ος **α.** Α **β.** Ισχύει $g=(f+g)-f$.

5ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\begin{cases}1\ , & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=-f(x)$ στο $x_0=0$.

6ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$.

7ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\begin{cases}1\ , & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=-f(x)$ στο $x_0=0$.

8ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\begin{cases}1\ , & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=-f(x)$ στο $x_0=0$.

Β. Βασικές εφαρμογές – Ασκήσεις εμπέδωσης

9. 13 **α.** 2 **β.** 2 **γ.** 1 **δ.** 1 **ε.** 1 **στ.** 2.

9. 14 **α.** 3 **β.** $\frac{1}{3}$ **γ.** $\frac{2}{3}$ **δ.** -2 **ε.** $\frac{4}{3}$ **στ.** α.

9. 15 **α.** $\frac{1}{2}$ **β.** 4 **γ.** $-\frac{1}{6}$ **δ.** 8 **ε.** -10 **στ.** $\frac{1}{12}$
ζ. 1 **η.** $\frac{2}{\alpha}$ **θ.** 18.

9. 16 **α.** 1 **β.** $-\frac{1}{3}$ **γ.** $\frac{1}{5}$ **δ.** $\frac{1}{3}$ **ε.** $\frac{2}{3}$ **στ.** 12
ζ. $\frac{7}{12}$ **η.** $\frac{12}{5}$ **θ.** 8.

9. 17 **α.** $\frac{1}{2}$ **β.** $2\sqrt{2}$ **γ.** $\frac{1}{4}$ **δ.** $-2\sqrt{3}$ **ε.** 8 **στ.** $\frac{1}{4\sqrt{5}}$
ζ. $-\frac{1}{6\sqrt{2}}$ **η.** 3.

9. 18 **α.** $\frac{1}{4}$ **β.** $\frac{1}{2}$ **γ.** $\frac{3}{4}$ **δ.** 3 **ε.** $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ **στ.** 2
ζ. $-\frac{1}{2}$ **η.** $\frac{2}{3}$ **θ.** $-\frac{3}{2}$.

9. 19 **α.** 6α **β.** $\frac{1}{4}$ **γ.** 8 **δ.** 3 **ε.** $-\frac{1}{128}$ **στ.** 4.

9. 20 **α.** 1 **β.** $\frac{1}{3}$ **γ.** 2 **δ.** $\frac{3}{7}$ **ε.** 1 **στ.** $-\frac{3}{2}$
ζ. -1 **η.** 6 **θ.** 4.

9. 21 **α.** 0 **β.** 0 **γ.** 0.

9. 22 **α.** 0 **β.** 0 **γ.** 0.

Γ. Ασκήσεις για λύση

9. 23 **α.** $\lim_{x\to 0}\left(x^{2020}-1821x^{1453}+\ln 2021\right)=0-0+\ln 2021=\ln 2021.$

β. $\lim_{x\to 1}\left(x^{17}-17x^{16}+16x^{15}-15x^{14}\right)=1-17+16-15=-15.$

γ. $\lim_{x\to -1}\left(x^{100}+100x+x^{99}-99x^{3}\right)^{98}=\left[(-1)^{100}+100\cdot(-1)+(-1)^{99}-99\cdot(-1)^{3}\right]^{98}=$

$$=(1-100-1+99)^{98}=(-1)^{98}=1.$$

δ. $\lim_{x\to\sqrt{2}}\left[\left(x^4-3\right)\left(x^6-x^2-5\right)\right]=\left(\sqrt{2}^4-3\right)\left(\sqrt{2}^6-\sqrt{2}^2-5\right)=(4-3)(8-2-5)=1.$

ε. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu 4x}{2x+\pi}=\dfrac{\eta\mu\left(2\frac{\pi}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(4\frac{\pi}{2}\right)}{2\frac{\pi}{2}+\pi}=\dfrac{0+1}{2\pi}=\dfrac{1}{2\pi}.$

στ. $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{\left|e^x-1\right|}{x^2+\left|\eta\mu x-1\right|}+\left|\ln(x+1)+1\right|\right]=\dfrac{|1-1|}{0+|0-1|}+|\ln 1+1|=1.$

ζ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sqrt[3]{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^4}=\sqrt[3]{(1+0)^4}=1.$

η. $\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-2)^{2021}\cdot\left(e^{2x}-1\right)}{x^2+5x+6}=\dfrac{(1-2)^{2021}\cdot\left(e^2-1\right)}{1+5+6}=\dfrac{1-e^2}{12}.$

9. 24 **α.** $\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)+f(x)}{|f(x)+2020|}=\dfrac{\left(\lim_{x\to 1}f(x)\right)^2+\lim_{x\to 1}f(x)}{\left|\lim_{x\to 1}f(x)+2020\right|}=\dfrac{0}{2020}=0.$

β. $\lim_{x\to 2}h(x)=\lim_{x\to 2}\left(f^3(x)+\dfrac{1}{f(x)}\right)=\left(\lim_{x\to 2}f(x)\right)^3+\dfrac{1}{\lim_{x\to 2}f(x)}=1^3+\dfrac{1}{1}=2.$

9. 25 **α.** $\lim_{x\to -1}\left(2f(x)+g(x)\right)=2\lim_{x\to 1}f(x)+\lim_{x\to 1}g(x)=2\cdot 1+1=3.$

β. $\lim_{x\to 0^-}\left(f(x)+g^2(x)\right)=\lim_{x\to 0^-}f(x)+\left(\lim_{x\to 0^-}g(x)\right)^2=0+0^2=0.$

γ. $\lim_{x\to 1}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to 1}f(x)\cdot\lim_{x\to 1}g(x)=1\cdot 1=1.$

δ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{3g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}f(x)}{3\lim\limits_{x\to 2}g(x)}=\dfrac{4}{3\cdot 2}=\dfrac{2}{3}.$

ε. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2f(x)-3g(x)+f(1)\right)=2\lim\limits_{x\to 1}f(x)-3\lim\limits_{x\to 1}g(x)+f(1)=2\cdot 1-3\cdot 1+2=1.$

9. 26 • Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $0\le f^2(x)\le f^2(x)+g^2(x)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}0=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to x_0}f^2(x)=0.$$

Επιπλέον, ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=\lim_{x\to x_0}\sqrt{f^2(x)}=\sqrt{\lim_{x\to x_0}f^2(x)}=\sqrt{0}=0.$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$, οπότε από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0.$$

• Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}g^2(x)=\lim_{x\to x_0}\left[\left(f^2(x)+g^2(x)\right)-f^2(x)\right]=0-0=0.$$

Οπότε ομοίως προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0.$

9. 27 Για x κοντά στο x_0, θέτουμε:

- $h(x)=f(x)-2g(x)\Leftrightarrow f(x)=2g(x)+h(x)$ και
- $k(x)=2f(x)+g(x)\Leftrightarrow k(x)=2\left(2g(x)+h(x)\right)+g(x)\Leftrightarrow k(x)-2h(x)=5g(x)$

με $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=2$ και $\lim\limits_{x\to x_0}k(x)=1.$

Επομένως:

$$\lim_{x\to x_0}5g(x)=\lim_{x\to x_0}\left(k(x)-2h(x)\right)=1-4\Rightarrow\lim_{x\to x_0}g(x)=-\frac{3}{5}$$

και:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\left(2g(x)+h(x)\right)=2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+2\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=\frac{4}{5}.$$

9. 28 **α.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=1+1=2.$

β. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{x\cancel{(x-3)}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x}=\dfrac{3+3}{3}=2.$

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x-4)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x-4}=\dfrac{1-2}{1-4}=\dfrac{1}{3}.$

δ. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\cancel{(x-4)}(x+2)}{\cancel{(x-4)}(x+4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+2}{x+4}=\dfrac{4+2}{4+4}=\dfrac{3}{4}.$

ε. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)\cancel{(x-2)}(x-3)}{x\cancel{(x-2)}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-3)}{x}=$

$$=\frac{(2-1)(2-3)}{2}=-\frac{1}{2}.$$

στ. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3+x^2-4x-4}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-1)^2\cancel{(x+2)}}{(x+1)(x-2)\cancel{(x+2)}}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-2)}=$

$$=\frac{(-2-1)^2}{(-2+1)(-2-2)}=\frac{9}{4}.$$

ζ. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{6x^2-7x+2}{6x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\cancel{(2x-1)}(3x-2)}{\cancel{(2x-1)}(3x+2)}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{3x-2}{3x+2}=\dfrac{3\cdot\frac{1}{2}-2}{3\cdot\frac{1}{2}+2}=-\dfrac{1}{7}.$

η. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)(x^2+4)}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x^2+4)}{x^2+2x+4}=$

$$=\frac{(2+2)(2^2+4)}{2^2+2\cdot 2+4}=\frac{8}{3}.$$

9. 29 **α.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}^2-1^2}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=\sqrt{1}+1=2.$$

β. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-10}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(2x-10)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(2x-10)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{\sqrt{x}^2-\sqrt{5}^2}=$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{2\cancel{(x-5)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}{\cancel{x-5}}=\lim_{x\to 5}\left[2\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)\right]=2\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)=4\sqrt{5}.$$

γ. $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{\sqrt{2x-5}-1}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(x^2-3x\right)\left(\sqrt{2x-5}+1\right)}{\left(\sqrt{2x-5}-1\right)\left(\sqrt{2x-5}+1\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(x^2-3x\right)\left(\sqrt{2x-5}+1\right)}{\sqrt{2x-5}^2-1^2}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)\left(\sqrt{2x-5}+1\right)}{2x-5-1}=\lim_{x\to 3}\frac{x\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{2x-5}+1\right)}{2\cancel{(x-3)}}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left[\frac{x\left(\sqrt{2x-5}+1\right)}{2}\right]=\frac{3\cdot\left(\sqrt{2\cdot 3-5}+1\right)}{2}=3.$$

δ. $$\lim_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{x+7}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(3-\sqrt{x+7}\right)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{\left(x^2-4\right)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3^2-\sqrt{x+7}^2}{\left(x^2-4\right)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{9-(x+7)}{\left(x^2-4\right)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{-x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}=\frac{-1}{(2+2)\left(3+\sqrt{2+7}\right)}=-\frac{1}{24}.$$

ε. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{2x+3}^2-\sqrt{5}^2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}^2-2^2\right)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+3-5)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x+3-4)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{1+3}+2\right)}{\sqrt{2\cdot 1+3}+\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

στ. $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{3x^2-7x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\left(3x^2-7x-6\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}^2-2^2}{\left(3x^2-7x-6\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{x-3}}{(3x+2)\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(3x+2)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=$$

$$=\frac{1}{(3\cdot 3+2)\left(\sqrt{3+1}+2\right)}=\frac{1}{44}.$$

9. 30 **α.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 2x}{2x}\cdot 2\right)\underset{u\to 0}{\overset{2x=u}{=\!=}}\dfrac{2}{3}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=\dfrac{2}{3}\cdot 1=\dfrac{2}{3}.$

β. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\varepsilon\varphi 2020x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2020x}{\dfrac{\eta\mu 2020x}{x}}=\dfrac{1}{2020},$

διότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2020x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 2020x}{x}\cdot 2020\right)\underset{u\to 0}{\overset{2020x=u}{=\!=}}2020\cdot\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=2020.$

γ. $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu 3x\cdot\sigma\varphi 4x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 3x}{\eta\mu 4x}\cdot\sigma\upsilon\nu 4x\right)=\dfrac{3}{4}\cdot 1=\dfrac{3}{4},$

διότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{\eta\mu 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}\cdot 3}{\dfrac{\eta\mu 4x}{4x}\cdot 4}=\dfrac{1\cdot 3}{1\cdot 4}=\dfrac{3}{4},\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}\underset{u\to 0}{\overset{3x=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 4x}{4x}=\underset{u\to 0}{\overset{4x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1.$

δ. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x-3\eta\mu 4x}{5x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{\eta\mu 4x}{4x}\cdot 4\right)\underset{u\to 0}{\overset{4x=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{12}{5}\cdot\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)=\dfrac{2}{5}-\dfrac{12}{5}\cdot 1=-2.$

ε. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{8x^3+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 2x}{2x}\cdot\dfrac{1}{4x^2+1}\right)=1\cdot\dfrac{1}{1}=1.$

9. 31 **α.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1-\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\eta\mu^2x}{1-\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\eta\mu x)=1+1=2.$

β. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu^4x+\sigma\upsilon\nu^2x-2}{\eta\mu 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sigma\upsilon\nu^2x-1)(\sigma\upsilon\nu^2x+1)+(\sigma\upsilon\nu^2x-1)}{\eta\mu 3x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sigma\upsilon\nu x-1)(\sigma\upsilon\nu x+1)(\sigma\upsilon\nu^2x+2)}{\eta\mu 3x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\eta\mu 3x}{x}}\cdot(\sigma\upsilon\nu x+1)\cdot(\sigma\upsilon\nu^2x+2)\right)=$

$=0\cdot\dfrac{1}{3}\cdot(1+1)(1+2)=0,$

διότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}\cdot 3\right)\underset{u\to 0}{\overset{3x=u}{=}}3\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=3\cdot 1=3.$

γ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\kappa x}{\eta\mu\lambda x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu\kappa x}{\kappa x}\cdot\kappa\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\eta\mu\lambda x}{\lambda x}\cdot\lambda}\right)=\dfrac{\kappa}{\lambda}$,

διότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\kappa x}{\kappa x}\overset{\kappa x=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\lambda x}{\lambda x}\overset{\lambda x=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

9. 32 **α.** Για $\gamma=\lambda$ ισχύουν:

$$\eta\mu\theta=\frac{\alpha}{\beta},\quad \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\lambda}{\alpha},\quad \varepsilon\varphi\theta=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\beta}{\lambda}.$$

Έχουμε $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha-\beta)=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\lambda}{\sigma\upsilon\nu\theta}-\lambda\cdot\varepsilon\varphi\theta\right)=\lambda\cdot\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\lambda\cdot\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(1+\eta\mu\theta)}$

$$=\lambda\cdot\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(1+\eta\mu\theta)}=\lambda\cdot\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}=\lambda\cdot\frac{0}{1+1}=0.$$

β. Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\alpha^2=\beta^2+\lambda^2\Leftrightarrow\alpha^2-\beta^2=\lambda^2.$$

Επομένως $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha^2-\beta^2)=\lambda^2$.

γ. $\lim\limits_{\theta\to 0}(\alpha\cdot\beta)=\lim\limits_{\theta\to 0}\left(\dfrac{\lambda}{\sigma\upsilon\nu\theta}-\lambda\cdot\varepsilon\varphi\theta\right)=\dfrac{\lambda^2\cdot 0}{1}=0.$

9. 33 **α.** Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$\left|x^\nu\cdot\eta\mu\frac{1}{x^\kappa}\right|=|x|^\nu\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{x^\kappa}\right|\le|x|^\nu\cdot 1\Rightarrow\left|x^\nu\cdot\eta\mu\frac{1}{x^\kappa}\right|\le|x|^\nu\Rightarrow-|x|^\nu\le x^\nu\cdot\eta\mu\frac{1}{x^\kappa}\le|x|^\nu.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}|x|^\nu=0,\ \lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|^\nu\right)=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^\nu\cdot\eta\mu\frac{1}{x^\kappa}\right)=0.$$

β. Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$\left|x^\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x^\kappa}\right|=|x|^\nu\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x^\kappa}\right|\le|x|^\nu\cdot 1\Rightarrow\left|x^\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x^\kappa}\right|\le|x|^\nu\Rightarrow-|x|^\nu\le x^\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x^\kappa}\le|x|^\nu.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}|x|^\nu=0,\ \lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|^\nu\right)=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x^\kappa}\right)=0.$$

9. 34 Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x^{2020}}{x}\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x^{2020}}{x^{2020}}\cdot x^{2019}\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=1\cdot 0=0,$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x^{2020}}{x^{2020}}\underset{u\to 0}{\overset{x^{2020}=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$ και για $x\neq 0$ έχουμε:

- $\left|x^{2019}\cdot \sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right|=|x|^{2019}\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right|\leq |x|^{2019}\Rightarrow -|x|^{2019}\leq x^{2019}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\leq |x|^{2019}$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|^{2019}\right)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}|x|^{2019}=0.$

Επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^{2019}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=0.$$

9. 35 Ο ισχυρισμός είναι ψευδής. Είναι $A_f=\mathbb{R}-\{3\}$, οπότε το $f(3)$ δεν ορίζεται.

9. 36 **α.** Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}g(h-2)\underset{x\to -2}{\overset{h-2=x}{=\!=}}\lim_{x\to -2}g(x)\Rightarrow 3=\lim_{x\to -2}g(x).$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to -2}\left[xf(x)+\left(x^2+1\right)g(x)\right]=\lim_{x\to -2}x\cdot\lim_{x\to -2}f(x)+\lim_{x\to -2}\left(x^2+1\right)\cdot\lim_{x\to -2}g(x)=$$
$$=-2\cdot 2+5\cdot 3=11.$$

β. $$\lim_{x\to -2}\left(\frac{xf(x)}{1+x^2}-2g(x)\right)=\lim_{x\to -2}\frac{x}{1+x^2}\cdot\lim_{x\to -2}f(x)-2\lim_{x\to -2}g(x)=\frac{-2}{5}\cdot 2-2\cdot 3=\frac{-34}{5}.$$

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to -2}f(x)\underset{h\to 0}{\overset{x=h-2}{=}}\lim_{h\to 0}f(h-2)\Rightarrow 2=\lim_{h\to 0}f(h-2).$$

Επομένως:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h-2)+e^h\cdot g^2(h-2)}{h-3}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h-3}\cdot\left[\lim_{h\to 0}f(h-2)+\lim_{h\to 0}e^h\cdot\left(\lim_{h\to 0}g(h-2)\right)^2\right]=$$
$$=\frac{1}{-3}\cdot\left(2+1\cdot 3^2\right)=-\frac{11}{3}.$$

δ. $$\lim_{x\to -2}\left(|f(x)|+\left|\sqrt{g(x)}-7f(x)\right|\right)=\left|\lim_{x\to -2}f(x)\right|+\left|\sqrt{\lim_{x\to -2}g(x)}-7\lim_{x\to -2}f(x)\right|$$
$$=|2|+\left|\sqrt{3}-7\cdot 2\right|=2+14-\sqrt{3}=16-\sqrt{3}.$$

10η

Ενότητα

Συνέχεια συνάρτησης

Α. Του τύπου Σωστό / Λάθος

10. 1 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος.

10. 2 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος.

10. 3 **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος **στ.** Λάθος.

10. 4 **1ος** **α.** Α **β.** Με άτοπο.

2ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\begin{cases}1 \ , & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=-f(x)$ στο $x_0=0$.

3ος **α.** Α **β.** Ισχύει $g=(f+g)-f$.

4ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\begin{cases}1 \ , & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=-f(x)$ στο $x_0=0$.

5ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=0$.

6ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\begin{cases}1 \ , & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=-f(x)$ στο $x_0=0$.

7ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\begin{cases}1 \ , & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=-f(x)$ στο $x_0=0$.

8ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\begin{cases}1 \ , & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=-f(x)$ στο $x_0=0$.

10. 5 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό **στ.** Σωστό
ζ. Λάθος **η.** Σωστό **θ.** Λάθος.

Β. Βασικές εφαρμογές – Ασκήσεις εμπέδωσης

10. 6 **α.** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=2$ **β.** $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=3$

γ. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1) = 1$

δ. $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = f(2) = 0$

ε. $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0) = 1$

στ. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1) = 0.$

10. 7 **α.** Μη συνεχής στο 0 **β.** Μη συνεχής στο 1

γ. Μη συνεχής στο 2 **δ.** Μη συνεχής στο 0.

10. 8 **α.** 3 **β.** 3

γ. 2 ή –1 **δ.** 0

ε. –6 **στ.** –1.

10. 9 **α.** $\alpha = \pm 1$ **β.** $\alpha = 1$

γ. $\alpha = 2$ **δ.** $\alpha = \frac{8}{3}, \quad \beta = -\frac{4}{3}.$

Γ. Ασκήσεις για λύση

10. 10 **α.** Είναι $A_f = (-\infty, 5)$. Η f δεν είναι συνεχής στα σημεία 1, 3 και 4, ενώ είναι συνεχής στο σημείο 2.

β. Είναι $A_f = (-\infty, 3] \cup [4, 5) \cup (5, +\infty)$. Η f δεν είναι συνεχής στα σημεία 2 και 4, ενώ είναι συνεχής στα σημεία 1 και 3.

γ. Είναι $A_f = (-\infty, 2) \cup (2, 5) \cup (5, +\infty)$. Η f δεν είναι συνεχής στα σημεία 1 και 3, ενώ είναι συνεχής στο σημείο 4.

δ. Είναι $A_f = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \{1\} \cup (2, 5) \cup (5, +\infty)$. Η f δεν είναι συνεχής στο σημείο 3, ενώ είναι συνεχής στο σημείο 4.

10. 11 **α.** Είναι $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-}(x^2 - 4) = 0$ και $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = f(2) = 0$. Άρα, η f είναι συνεχής στο 2.

β. Είναι $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(2x^2 + 1) = 3$ και $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1) = 3$. Άρα, η f είναι συνεχής στο 1.

γ. Είναι $f(2) = -7$ και $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim\limits_{x\to2}(x + 3) = 5$. Άρα, η f δεν είναι συνεχής στο 2.

10. 12 **α.** Πρέπει $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$, (1).

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = (1-\alpha)(1-\beta) = 1-\beta-\alpha+\alpha\beta$ και
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (\alpha\beta - \alpha x) = \alpha\beta - \alpha$.

Τότε από την (1) προκύπτει ότι $1-\beta-\alpha+\alpha\beta = \alpha\beta-\alpha \Rightarrow \beta = 1$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

β. Πρέπει $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$, (2).

Είναι:

- $f(4) = \alpha^2 - 6$,
- $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{x^2-5x+4}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{\cancel{(x-4)}(x-1)}{\cancel{(x-4)}} = 3$ και
- $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \left(\beta x + x^2\right) = 4\beta + 16$.

Τότε από τη (2) προκύπτει ότι:

$$\alpha^2 - 6 = 3 \Rightarrow \alpha = \pm 3 \text{ και } 4\beta + 16 = 3 \Rightarrow \beta = \frac{-13}{4}.$$

γ. Πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, (3).

Είναι:

- $f(0) = \beta - \alpha - 2$,
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\eta\mu\alpha x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}\cdot\alpha \underset{u\to 0}{\overset{\alpha x = u}{=}} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\eta\mu u}{u}\cdot\alpha = \alpha$ και
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (\alpha x + 2\beta) = 2\beta$.

Τότε από την (3) προκύπτει ότι:

$$\begin{cases} \beta - \alpha - 2 = \alpha \\ \alpha = 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{4}{3} \\ \beta = -\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

10. 13 **α.** Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $[1, +\infty)$, διότι στους κλάδους της έχουμε βασικές συναρτήσεις.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = \sqrt{1} = 1$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$, οπότε η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$.

β. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left(-\infty, \frac{\pi}{4}\right)$ και $\left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} (\eta\mu x + x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}$ και
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, οπότε η f είναι συνεχής και στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

10. 14 α. Είναι $A_f = \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0], (0, 2], (2, +\infty)$, διότι στους κλάδους της έχουμε πολυωνυμικές συναρτήσεις.

- Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (2 - x) = 2.$$

Συνεπώς, το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

- Στο $x_1 = 2$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-2)^2 = 0.$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_1 = 2$.

β. Είναι $A_f = \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 1]$ ως πολυωνυμική συνάρτηση, συνεχής στο (1, 3) ως βασική συνάρτηση και συνεχής στο $[3, +\infty)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

- Στο $x_0 = 1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1.$$

Συνεπώς, το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

- Στο $x_1 = 3$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) = 0.$$

Συνεπώς, το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ δεν υπάρχει, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_1 = 3$.

γ. Είναι $A_f = \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0], (2, +\infty)$, διότι στους αντίστοιχους κλάδους έχουμε πολυωνυμικές συναρτήσεις και συνεχής στο $(0, 2]$ ως βασική συνάρτηση.

- Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1.$$

Συνεπώς, το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

- Στο $x_1 = 2$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = e^2 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2 - x) = 0.$$

Συνεπώς, το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ δεν υπάρχει, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_1 = 2$.

10. 15 **α.** Είναι $A_f = \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στα $(-\infty, 1), [1, 3), [3, +\infty)$, διότι στους αντίστοιχους κλάδους έχουμε πολυωνυμικές συναρτήσεις.

- Στο $x_0 = 1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^3 - 3x + 2) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 0.$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

- Στο $x_1 = 3$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2 + 5x - 6) = 18 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) = 24.$$

Συνεπώς, το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ δεν υπάρχει, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_1 = 3$.

β. Είναι $A_f = \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στα $(-\infty, 3)$ και $(3, +\infty)$, διότι στους αντίστοιχους κλάδους έχουμε ρητές συναρτήσεις.

Στο $x_0 = 3$ έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} (x - 1) = 2$ και
- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} (x + 2) = 5.$

Συνεπώς, το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ δεν υπάρχει, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

γ. Είναι $A_f = \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, \sqrt{2})$ ως ρητή συνάρτηση και συνεχής στο $[\sqrt{2}, +\infty)$ ως πολυωνυμική συνάρτηση.

Στο $x_0 = \sqrt{2}$ έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}^+} f(x) = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ και

- $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} \dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} = \lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} \dfrac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{x-\sqrt{2}} = \lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-}\left(x+\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} f(x) = f\left(\sqrt{2}\right)$, οπότε η f είναι συνεχής και στο $x_0 = \sqrt{2}$.

10. 16 **α.** Είναι $A_f = \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$ ως ρητή συνάρτηση.

Στο $x_0 = 1$ έχουμε:

- $f(1) = 2,$
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2+3x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^2-x+2\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-x+2\right) = 2.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$, οπότε η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$.

β. Είναι $A_f = \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως πηλίκο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

- $f(0) = 4,$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{\sqrt{x^2+4}^{\,2}-2^2} =$

$$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x^2+4-4} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x^2+4}+2\right) = 4.$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

γ. Είναι $A_f = \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $[1, 5)\cup(5, +\infty)$ ως πηλίκο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Στο $x_0 = 5$ έχουμε:

- $f(5) = 1,$
- $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}-2} = \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}^{\,2}-2^2}{\sqrt{x-1}-2} = \lim\limits_{x\to 5}\left(\sqrt{x-1}+2\right) = 4.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 5} f(x) \neq f(5)$, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

δ. Είναι $A_f = \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως πηλίκο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

- $f(0) = -2,$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x - \eta\mu 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 5x}{5x}\cdot 5 - \dfrac{\eta\mu 3x}{3x}\cdot 3\right) = 2.$

διότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x}{5x}\overset{5x=u}{=\!=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$ και ομοίως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}=1$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$.

10. 17 **α.** Είναι $A_f=\mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{1\}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση.

Θα είναι συνεχής και στο $x_0=1$, αν $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$, (1).

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2\alpha^2x^2-2\alpha x+5)=2\alpha^2-2\alpha+5$ και
- $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)=\alpha^2+\alpha+3$.

Τότε από την (1) προκύπτει ότι:

$$2\alpha^2-2\alpha+5=\alpha^2+\alpha+3\Rightarrow\alpha^2-3\alpha+2=0\Rightarrow\{\alpha=1\ \text{ή}\ \alpha=2\}.$$

β. Είναι $A_f=\mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως πολυωνυμική συνάρτηση.

Θα είναι συνεχής και στο $x_0=0$, αν $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$, (2).

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x+2\sqrt{\alpha}\right)=2\sqrt{\alpha}$, $\alpha\geq 0$ και
- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=\alpha+1$.

Τότε από τη (2) προκύπτει ότι $\alpha+1=2\sqrt{\alpha}\Rightarrow\left(\sqrt{\alpha}-1\right)^2=0\Rightarrow\alpha=1$.

γ. Είναι $A_f=\mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στα $(-\infty,1)$, $[1,2]$ και $(2,+\infty)$ ως πολυωνυμική συνάρτηση. Θα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αν ισχύουν:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1),\ (3)\quad\text{και}\quad\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2),\ (4).$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2\alpha x^2+\beta x+3)=2\alpha+\beta+3$ και
- $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)=5$.

Τότε από τη (3) προκύπτει ότι $2\alpha+\beta+3=5\Rightarrow 2\alpha+\beta=2$, (5).

Επιπλέον, ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=f(2)=12$ και
- $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(\beta x^2+2\alpha x-6)=4\beta+4\alpha-6$.

Τότε από τη (4) προκύπτει ότι $4\beta+4\alpha-6=12\Rightarrow 2\alpha+2\beta=9$, (6).

Από τις (5) και (6) έχουμε $\alpha=-\frac{5}{2}$, $\beta=7$.

δ. Είναι $A_f=[-2,+\infty)$.

Η f είναι συνεχής στο $[-2,-1)$ ως πηλίκο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, συνεχής στο $[-1,3]$ ως πολυωνυμική και συνεχής στο $(3,+\infty)$ ως ρητή.

Θα είναι συνεχής στο A_f, αν ισχύουν:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1),\ (7) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3),\ (8).$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{\sqrt{x+2}^2-1^2}{\sqrt{x+2}-1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\sqrt{x+2}+1\right)=2$ και
- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)=-\alpha^2+1+\beta$.

Τότε από τη (7) προκύπτει ότι $-\alpha^2+1+\beta=2 \Rightarrow \beta=\alpha^2+1$, (9).

Επιπλέον, ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)=3\alpha^2-3+\beta$ και
- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{3x^2-4x-15}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(3x+5)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}(3x+5)=14.$

Τότε από τη (8) προκύπτει ότι:

$$3\alpha^2-3+\beta=14 \overset{(9)}{\Rightarrow} 3\alpha^2+\alpha^2+1=17 \Rightarrow \alpha^2=4 \Rightarrow \alpha=\pm 2.$$

Αν $\alpha=2$, τότε η $(9)\Rightarrow \beta=5$.

Αν $\alpha=-2$, τότε η $(9)\Rightarrow \beta=5$.

10. 18 Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$h(x)=3f(x)-2g(x),\ x\in\Delta \quad \text{και} \quad k(x)=f(x)-5g(x),\ x\in\Delta.$$

Είναι $f(x)=k(x)+5g(x)$, $x\in\Delta$, οπότε:

$$h(x)=3k(x)+13g(x)\Rightarrow g(x)=\frac{h(x)-3k(x)}{13},\ x\in\Delta.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η g είναι συνεχής στο Δ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Επομένως, η συνάρτηση $f(x)=k(x)+5g(x)$ είναι συνεχής στο Δ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο Δ.

10. 19 Ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, (1) και η f + g δεν είναι συνεχής στο x_0.

Έστω ότι η g είναι συνεχής στο x_0. Τότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$, (2).

Έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))\underset{(2)}{\overset{(1)}{=}}f(x_0)+g(x_0)=(f+g)(x_0)$.

Δηλαδή, η f + g είναι συνεχής στο x_0, που είναι άτοπο.

Επομένως, η g δεν είναι συνεχής στο x_0.

10. 20 Η f είναι συνεχής στο 0, άρα ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, (1).

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$x\cdot f(x)-x^2+x+1\le\sqrt{1+3x}\Rightarrow\begin{cases} f(x)\le\dfrac{\sqrt{1+3x}+x^2-x-1}{x}, & x>0,\ (2)\\ f(x)\ge\dfrac{\sqrt{1+3x}+x^2-x-1}{x}, & x<0,\ (3)\end{cases}.$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+x^2-x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}+x-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+3x}^2-1^2}{x\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}+x-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{\sqrt{1+3x}+1}+x-1\right)=\frac{1}{2}.$$

Τότε, από τη $(2)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\le\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+3x}+x^2-x-1}{x}\overset{(1)}{\Rightarrow}f(0)\le\dfrac{1}{2}$

και από την $(3)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\ge\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1+3x}+x^2-x-1}{x}\overset{(1)}{\Rightarrow}f(0)\ge\dfrac{1}{2}$.

Επομένως $f(0)=\dfrac{1}{2}$.

10. 21 Έχουμε $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$, (1) και για κάθε $x\neq 2$ ισχύει:

$$2x^3-8x\le(x-2)f(x)\le 3x^3-6x^2+4x-8\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2x\left(x^2-4\right)}{x-2}\le f(x)\le\frac{3x^2(x-2)+4(x-2)}{x-2},\ x>2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x(x+2)\le f(x)\le 3x^2+4,\ x>2.$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 2^-}\left[2x(x+2)\right]=16$ και
- $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(3x^2+4\right)=16.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=16$ και από την (1) έχουμε $f(2)=16.$

10. 22 α. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, άρα ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, (1).

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\eta\mu 3x}{2x}=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{2}-\dfrac{\eta\mu 3x}{2x}\right)=1.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=\frac{f(x)}{2}-\frac{\eta\mu 3x}{2x}\Leftrightarrow f(x)=2g(x)+\frac{\eta\mu 3x}{x}$$

για x κοντά στο 0 με $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1.$ Τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(2g(x)+\frac{\eta\mu 3x}{x}\right)=2\cdot 1+3=5\overset{(1)}{\Rightarrow} f(0)=5,$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}\cdot 3\underset{u\to 0}{\overset{3x=u}{=\!=}}3\cdot\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=3\cdot 1=3.$

β. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, άρα ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0),\ (2)$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\eta\mu x+x\le xf(x)\le x^5+x^3+2x\Rightarrow \frac{\eta\mu x}{x}+1\le f(x)\le x^4+x^2+2,\ x>0.$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}+1\right)=1+1=2$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4+x^2+2\right)=2.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$ και από τη (2) έχουμε $f(0)=2.$

10. 23 α. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο α, οπότε ισχύει:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha),\ (1).$$

Για κάθε $x\neq\alpha$ ισχύει:

$$|f(x)| \le \kappa|x-\alpha| \overset{\kappa>0}{\Leftrightarrow} -\kappa|x-\alpha| \le f(x) \le \kappa|x-\alpha|.$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(-\kappa|x-\alpha|\right) = -\kappa \cdot 0 = 0$ και
- $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\kappa|x-\alpha|\right) = 0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0$ και από την (1) έχουμε $f(\alpha) = 0.$

β. Για $x \neq 0$ ισχύει:

$$\left|x^\nu \cdot f(x)\right| = |x|^\nu \cdot |f(x)| \le M \cdot |x|^\nu \Rightarrow -M \cdot |x|^\nu \le x^\nu \cdot f(x) \le M \cdot |x|^\nu.$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(-M \cdot |x|^\nu\right) = 0$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(M \cdot |x|^\nu\right) = 0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^\nu \cdot f(x)\right) = 0$ και επειδή $g(0) = 0,$ η $g(x) = x^\nu \cdot f(x)$ είναι συνεχής στο 0.

10. 24 Σε όλες τις περιπτώσεις οι συναρτήσεις είναι συνεχείς ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

10. 25 Η f είναι συνεχής στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$

Η g είναι συνεχής στο $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty),$ ενώ δεν είναι συνεχής στο 1.

Η h είναι συνεχής στο $A = (-3, 2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty),$ ενώ δεν είναι συνεχής στα σημεία 2 και 4.

10. 26 **α.** Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

β. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

γ. Η f είναι συνεχής στο $[-2, 2) \cup (2, +\infty)$ ως πηλίκο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Στο $x_0 = 2$ είναι:

- $f(2) = 5,$
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\sqrt{x+2}^{\,2} - 2^2} =$

$$= \lim_{x\to 2}(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right) = 16.$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

δ. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Στο $x_0 = 0$ είναι:

- $f(0) = -3$,
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^x - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{(e^x - 1)}(e^x - 3)}{\cancel{e^x - 1}} = -2.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

10. 27 **α.** Είναι:

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2, & -2 \le x \le 2 \\ \dfrac{-1}{x}, & x < -2 \text{ ή } x > 2 \end{cases}.$$

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-2, 2]$, $(-\infty, -2)$ και $(2, +\infty)$.

Στο $x_0 = -2$ είναι:

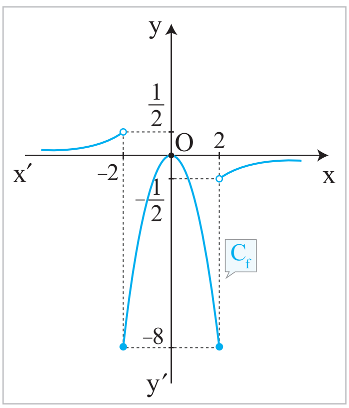
- $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = f(-2) = -8$ και
- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{-1}{x} = \dfrac{1}{2}.$

Στο $x_0 = 2$ είναι:

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = -8.$ και
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-1}{x} = -\dfrac{1}{2}.$

Συνεπώς, η f δεν είναι συνεχής στα σημεία –2 και 2.

Η γραφική παράσταση της f απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



β. Για $x \neq 3$ είναι $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=x-2$.

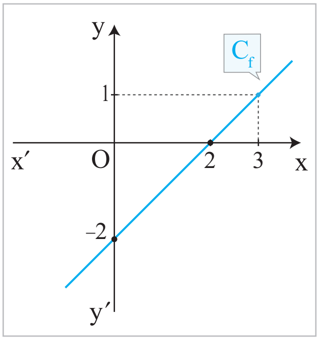
Στο $x_0=3$ είναι:

- $f(3)=1$,
- $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x-2)=1$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0=3$.

Επομένως, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση.

Η γραφική παράσταση της f απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



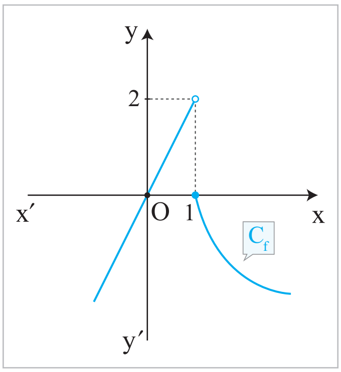
γ. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $[1, +\infty)$.

Στο $x_0=1$ είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=0$ και
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x)=2$.

Συνεπώς, η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Η γραφική παράσταση της f απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



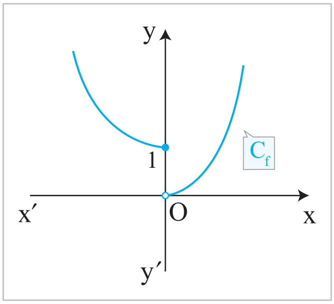
δ. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $(0, +\infty)$.

Στο $x_0 = 0$ είναι:

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 1$ και
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$.

Συνεπώς, η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Η γραφική παράσταση της f απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



5ο
ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα A

A1. Θεωρία.

A2. Θεωρία.

A3. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος.

Θέμα B

B1. **α.** Είναι $\lim\limits_{h\to 0} g(1+h)=-2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} g(x)=-2$. Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\left(g(x)+1\right)=-2+1=-1$.

β. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{f(x)+g^2(x)}=\sqrt{3+(-2)^2}=\sqrt{7}$.

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|f(x)+g(x)|}{f(x)+g(x)}=\dfrac{|3-2|}{3-2}=1$.

δ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{g(x)+x+2}=\dfrac{3\cdot(-2)}{-2+1+2}=-6$.

B2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0=0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0),\quad (1).$$

Είναι:

- $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=3\alpha$ και
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\eta\mu\alpha^2 x}{x}+x+2\right)=\alpha 22^2+2$,

διότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu\alpha^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu\alpha^2 x}{\alpha^2 x}\cdot\alpha^2 \underset{u\to 0}{\overset{\alpha^2 x=u}{=\!=}} \alpha^2\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=\alpha^2\cdot 1=\alpha^2$.

Συνεπώς, από την (1) έχουμε:

$$\alpha 22^2+2=3\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-3\alpha+2=0 \Leftrightarrow \alpha=1 \;\text{ ή }\; \alpha=2.$$

Θέμα Γ

Γ1. α. Η f ορίζεται, όταν:

$$x^2-3x\neq 0 \Leftrightarrow x(x-3)\neq 0 \Leftrightarrow \{x\neq 0 \quad \text{και} \quad x\neq 3\}.$$

Άρα $D_f=\mathbb{R}-\{0,3\}$.

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner το πολυώνυμο $x^3-6x^2+11x-6$ γράφεται:

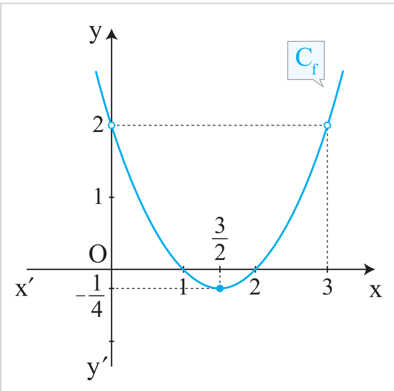
1	−6	11	−6	3
	3	−9	6	
1	−3	2	0	

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-3)(x^2-3x+2).$$

Επομένως, ο τύπος της συνάρτησης απλοποιείται ως εξής:

$$f(x)=\frac{x(x^3-6x^2+11x-6)}{x(x-3)}=\frac{(x-3)(x^2-3x+2)}{x-3}=x^2-3x+2.$$

β. Η C_f είναι παραβολή με κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $x_0=-\frac{-3}{2\cdot 1}=\frac{3}{2}$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ και τέμνει τον άξονα x′x στα σημεία Α(1, 0), Β(2, 0).



γ. Από τη C_f έχουμε:

i. $\lim_{x\to 0} f(x)=2$ **ii.** $\lim_{x\to 3} f(x)=2$ **iii.** $\lim_{x\to 2} f(x)=0$.

Γ2. α. Έχουμε:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{1-\eta\mu x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\eta\mu^2 x)^2}{1-\eta\mu x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\eta\mu x)^2\cdot(1+\eta\mu x)^2}{1-\eta\mu x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\eta\mu x)\cdot(1+\eta\mu x)^2=(1-1)\cdot(1+1)^2=0.$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\etaμx(\etaμx+1)+συνx(συνx-\etaμx)-1}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\etaμ^2x+\etaμx+συν^2x-συνx\cdot\etaμx-1}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\etaμx(1-συνx)}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\etaμx}{x}\cdot\frac{1-συνx}{x}\right)=1\cdot 0=0.$$

γ. Για $x\neq 1$ έχουμε $\left|(x-1)^2\cdot\etaμ\frac{1}{x^2-1}\right|=(x-1)^2\left|\etaμ\frac{1}{x^2-1}\right|\leq(x-1)^2$, οπότε:

$$-(x-1)^2\leq(x-1)^2\cdot\etaμ\frac{1}{x^2-1}\leq(x-1)^2.$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$ και
- $\lim\limits_{x\to 1}\left[-(x-1)^2\right]=0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 1}\left[(x-1)^2\cdot\etaμ\frac{1}{x^2-1}\right]=0.$$

Θέμα Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0=0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\lim_{x\to 0^-}f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0),\ (2).$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\etaμ2x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\etaμ2x}{2x}\cdot 2\right)\underset{u\to 0}{\overset{2x=u}{\Rightarrow}}\lim_{u\to 0}\left(\frac{\etaμu}{u}\cdot 2\right)=1\cdot 2=2.$$

- Για $x>0$ η (1) γίνεται:

$$f(x)\leq\frac{\etaμ2x}{x}+x,$$

οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\leq\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\etaμ2x}{x}+x\right)\overset{(2)}{\Rightarrow}f(0)\leq 2+0\Rightarrow f(0)\leq 2,\ (3).$

- Για $x<0$ η (1) γίνεται:

$$f(x)\geq\frac{\etaμ2x}{x}+x,$$

οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \geq \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\eta\mu 2x}{x}+x\right) \overset{(2)}{\Rightarrow} f(0) \geq 2,\ \ (4).$

Από τις (3) και (4) έχουμε $f(0)=2$.

Δ2. Πρέπει:

$$\lim_{x\to x_0^-} g(x) = \lim_{x\to x_0^+} g(x) \Leftrightarrow e^{\lambda+1}+\lambda=-\lambda^3-1 \Leftrightarrow e^{\lambda+1}+\lambda+\lambda^3+1=0,\quad (5).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{x+1}+x^3+x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Έχουμε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1+1}<e^{x_2+1} \\ x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3+1<x_2^3+1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow e^{x_1+1}+x_1^3+1+x_1<e^{x_2+1}+x_2^3+1+x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x_1)<h(x_2).$$

Άρα $h\uparrow\mathbb{R}$, οπότε είναι και $1-1$.

Επομένως, από την (5) έχουμε $h(\lambda)=h(-1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \lambda=-1$.

11η

Ενότητα

Μη πεπερασμένο (άπειρο) όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

A. Του τύπου Σωστό / Λάθος

11. 1 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος **στ.** Λάθος **ζ.** Λάθος **η.** Σωστό.

11. 2 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος.

11. 3 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος.

11. 4 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό **στ.** Λάθος.

11. 5 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό.

11. 6 **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό.

11. 7 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος.

11. 8 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό **στ.** Λάθος.

11. 9 **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\frac{2}{x},\ x>0$ και $g(x)=-\frac{1}{x},\ x>0$.

B. Βασικές εφαρμογές – Ασκήσεις εμπέδωσης

11. 10 **α.** $+\infty$ **β.** $+\infty$ **γ.** $+\infty$ **δ.** $-\infty$ **ε.** $+\infty$ **στ.** $-\infty$ **ζ.** $+\infty$ **η.** $+\infty$. **θ.** $+\infty$.

11. 11 **α.** $+\infty$ **β.** $-\infty$ **γ.** $+\infty$ **δ.** $-\infty$ **ε.** $+\infty$ **στ.** $-\infty$.

11. 12 **α.** έως **στ.** Σε κάθε περίπτωση βρίσκουμε άνισα πλευρικά όρια. Επομένως, τα ζητούμενα όρια δεν υπάρχουν.

11. 13 **α.** έως **στ.** Σε κάθε περίπτωση βρίσκουμε άνισα πλευρικά όρια. Επομένως, τα ζητούμενα όρια δεν υπάρχουν.

11. 14 **α.** $+\infty$ **β.** $+\infty$ **γ.** $+\infty$.

11. 15 **α.** $+\infty$ **β.** $+\infty$ **γ.** $+\infty$.

Γ. Ασκήσεις για λύση

11. 16 α. Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\left[(x+3)\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$ και $(x-1)^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x\to 1}(x+3)=4>0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x+3)\cdot\dfrac{1}{(x-1)^2}\right]\overset{4\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty$.

β. Είναι:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x-3}{(x+1)^2}=\lim_{x\to -1}\left[(x-3)\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)^2=0$ και $(x+1)^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x\to -1}(x-3)=-4<0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-3}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to -1}\left[(x-3)\cdot\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]\overset{(-4)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty$.

γ. Είναι:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to 3}\left[(2x+1)\cdot\frac{1}{(x-3)^2}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^2=0$ και $(x-3)^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x\to 3}(2x+1)=7>0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+1}{x^2-6x+9}=\lim\limits_{x\to 3}\left[(2x+1)\cdot\dfrac{1}{(x-3)^2}\right]\overset{7\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty$.

δ. Είναι:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-4x+4}{x^2+6x+9}=\lim_{x\to -3}\left[(x-2)^2\cdot\frac{1}{(x+3)^2}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to -3}(x+3)^2=0$ και $(x+3)^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x\to -3}(x-2)^2=25>0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+6x+9}=\lim\limits_{x\to -3}\left[(x-2)^2\cdot\dfrac{1}{(x+3)^2}\right]\overset{25\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

ε. Είναι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x^3-4x^2+4x}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{x+3}{x}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2=0$ και $(x-2)^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{5}{2}>0.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x^3-4x^2+4x}=\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x+3}{x}\cdot\dfrac{1}{(x-2)^2}\right]\overset{\frac{5}{2}\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

στ. Είναι:

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x+1}{x^3\left(x^4+4x^3+4x^2\right)}=\lim_{x\to -2}\left[\frac{2x+1}{x^5}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)^2=0$ και $(x+2)^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+1}{x^5}=\dfrac{3}{32}>0.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+1}{x^3\left(x^4+4x^3+4x^2\right)}=\lim\limits_{x\to -2}\left[\dfrac{2x+1}{x^5}\cdot\dfrac{1}{(x+2)^2}\right]\overset{\frac{3}{32}\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

11. 17 α. Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-9}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-9}{x-2}\cdot\frac{1}{x-1}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-9}{x-2}=8>0,$
    - $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}\overset{x-1>0}{=\!=}+\infty,$

    άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x+2}\overset{8\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty$ και

    - $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}\overset{x-1<0}{=}-\infty,$

    άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x+2}\overset{8\cdot(-\infty)}{=\!=}-\infty.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x+2}\neq\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x+2}$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

β. Είναι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-9}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-9}{x-1}\cdot\frac{1}{x-2}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-9}{x-1}=-5<0,$
    - $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}\overset{x-2>0}{=\!=}+\infty,$

    άρα $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x+2}\overset{(-5)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty$ και

    - $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}\overset{x-2<0}{=}-\infty,$

    άρα $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x+2}\overset{(-5)\cdot(-\infty)}{=\!=}+\infty.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x+2}\neq\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x+2}$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

γ. Είναι:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x+2}=\frac{0}{2}=0.$$

11. 18 **α.** Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1}\left[(x+1)\cdot\frac{1}{|x-1|}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}|x-1| = 0$ και $|x-1| \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2 > 0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{|x-1|} = \lim\limits_{x\to 1}\left[(x+1)\cdot\dfrac{1}{|x-1|}\right] \overset{2\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty$.

β. Είναι:

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}}\frac{4x-5}{|2x-3|} = \lim_{x\to \frac{3}{2}}\left[(4x-5)\cdot\frac{1}{|2x-3|}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}|2x-3| = 0$ και $|2x-3| \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}(4x-5) = 1 > 0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\dfrac{4x-5}{|2x-3|} = \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\left[(4x-5)\cdot\dfrac{1}{|2x-3|}\right] \overset{1\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty$.

γ. Είναι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x+2|}{|x-2|+|x^2-4|} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{|x+2|}{1+|x+2|}\cdot\frac{1}{|x-2|}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}|x-2| = 0$ και $|x-2| \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x+2|}{1+|x+2|} = \dfrac{4}{5} > 0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x+2|}{|x-2|+|x^2-4|} = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{|x+2|}{1+|x+2|}\cdot\dfrac{1}{|x-2|}\right) \overset{\frac{4}{5}\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty$.

δ. Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-1}{2|x-1|-|x^2-x|} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x-1}{2-|x|}\cdot\frac{1}{|x-1|}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}|x-1| = 0$ και $|x-1| \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-1}{2-|x|} = -1 < 0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-1}{2|x-1|-|x^2-x|}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln x-1}{2-|x|}\cdot\dfrac{1}{|x-1|}\right)\overset{(-1)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty.$

ε. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4x}{x|x|}=\lim_{x\to 0}\left[(x+4)\cdot\frac{1}{|x|}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}=+\infty,$
- $\lim\limits_{x\to 0}(x+4)=4>0.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+4x}{x|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(x+4)\cdot\dfrac{1}{|x|}\right]\overset{4\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

11. 19 α. Είναι:

$$\lim_{x\to -6^+}\frac{3x}{x+6}=\lim_{x\to -6^+}\left(3x\cdot\frac{1}{x+6}\right).$$

Ισχύουν:

- $x>-6\Leftrightarrow x+6>0$ και $\lim\limits_{x\to -6^+}(x+6)=0,$
- $\lim\limits_{x\to -6^+}(3x)=-18<0.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to -6^+}\dfrac{3x}{x+6}=\lim\limits_{x\to -6^+}\left(3x\cdot\dfrac{1}{x+6}\right)\overset{(-18)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty.$

β. Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-5}{x(x-1)^2}=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{-5}{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{x}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty,$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-5}{(x-1)^2}=-5<0.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-5}{x(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{-5}{(x-1)^2}\cdot\dfrac{1}{x}\right]\overset{(-5)\cdot(+\infty)}{=}-\infty.$

γ. Είναι:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+3}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\left[(x^2+3)\cdot\frac{1}{x-3}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$,
- $\lim\limits_{x\to 3^-} \left(x^2+3\right) = 12 > 0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2+3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \left[\left(x^2+3\right)\cdot\dfrac{1}{x-3}\right] \overset{12\cdot(-\infty)}{=\!=} -\infty$.

δ. Είναι:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-2}{2x-6} = \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x^2-2}{2}\cdot\frac{1}{x-3}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$,
- $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-2}{2} = \dfrac{7}{2} > 0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-2}{2x-6} = \lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{x^2-2}{2}\cdot\dfrac{1}{x-3}\right) \overset{\frac{7}{2}\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty$.

ε. Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x+2}{x^3-x^2} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x+2}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$,
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x+2}{x-1} = -2 < 0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x+2}{x^3-x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2x+2}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x^2}\right) \overset{(-2)\cdot(+\infty)}{=\!=} -\infty$.

στ. Είναι:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1^-}\left[(x+1)\cdot\frac{1}{(x-1)^3}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(x-1)^3} = -\infty$,
- $\lim\limits_{x\to 1^-} (x+1) = 2 > 0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[(x+1)\cdot\dfrac{1}{(x-1)^3}\right]\overset{2\cdot(-\infty)}{=\!=}-\infty.$

ζ. Είναι:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{3x-2}{x^3-x^2}=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{3x-2}{x^2}\cdot\frac{1}{x-1}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty,$
- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x-2}{x^2}=1>0.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x-2}{x^3-x^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{3x-2}{x^2}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right)\overset{1\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

11. 20 **α.** Θέτουμε $u=e^x$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}u=\lim\limits_{x\to 0}e^x=1$. Άρα, το $u\to 1$ και το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-5e^x}{e^{2x}-3e^x+2}=\lim_{u\to 1}\frac{u^2-5u}{u^2-3u+2}=\lim_{u\to 1}\left(\frac{u^2-5u}{u-2}\cdot\frac{1}{u-1}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u^2-5u}{u-2}=4>0,$
  - $\lim\limits_{u\to 1^+}\dfrac{1}{u-1}=+\infty,$

  άρα $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u^2-5u}{u^2-3u+2}=+\infty$ και

  - $\lim\limits_{u\to 1^-}\dfrac{1}{u-1}=-\infty,$

  άρα $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u^2-5u}{u^2-3u+2}=-\infty.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

β. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x+3e^{2020}}{(e^x-1)^2}=\lim_{x\to 0}\left[\left(xe^x+3e^{2020}\right)\cdot\frac{1}{(e^x-1)^2}\right].$$

Ισχύουν:

- $(e^x-1)^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)^2=0,$

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(xe^x + 3e^{2020}\right) = 3e^{2020} > 0.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x + 3e^{2020}}{\left(e^x - 1\right)^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(xe^x + 3e^{2020}\right)\cdot\dfrac{1}{\left(e^x - 1\right)^2}\right] \overset{3e^{2020}\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty.$

γ. Θέτουμε $u = \ln x$, οπότε $\lim\limits_{x\to e} u = \lim\limits_{x\to e}(\ln x) = 1$. Άρα, το $u \to 1$ και το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x + 2}{\ln^2 x - 5\ln x + 4} = \lim_{u\to 1}\frac{u+2}{u^2 - 5u + 4} = \lim_{u\to 1}\left(\frac{u+2}{u-4}\cdot\frac{1}{u-1}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{u\to 1^+}\dfrac{1}{u-1} = +\infty,$
  - $\lim\limits_{u\to 1^+}\dfrac{1}{u-1} = +\infty,$

  άρα $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u+2}{u^2 - 5u + 4} = -\infty$ και
  - $\lim\limits_{u\to 1^-}\dfrac{1}{u-1} = -\infty,$

  άρα $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u+2}{u^2 - 5u + 4} = +\infty.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

δ. Είναι:

$$\lim_{x\to e^2}\frac{x + \ln x}{\ln^2 x - 2\ln x} = \lim_{x\to e^2}\left(\frac{x + \ln x}{\ln x}\cdot\frac{1}{\ln x - 2}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to e^2}\dfrac{x + \ln x}{\ln x} = \dfrac{e^2 + \ln e^2}{\ln e^2} = \dfrac{e^2 + 2}{2} > 0,$
- για το όριο $\lim\limits_{x\to e^2}\dfrac{1}{\ln x - 2}$ θέτουμε $u = \ln x$, οπότε $\lim\limits_{x\to e^2} u = \lim\limits_{x\to e^2}(\ln x) = \ln e^2 = 2.$

  Άρα, το $u \to 2$ και το όριο γράφεται $\lim\limits_{u\to 2}\dfrac{1}{u-2}$ που δεν υπάρχει.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

11. 21 **α.** Θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0} u = \lim\limits_{x\to 0}(\sigma\upsilon\nu x) = 1$. Άρα, το $u \to 1$ και το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{u\to 1}\frac{1+u}{1-u} = \lim_{u\to 1}\left[(1+u)\cdot\frac{1}{1-u}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{u\to 1}(1+u)=2$,
- το $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{1}{1-u}$ δεν υπάρχει.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

β. Είναι:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{\eta\mu x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(e^x\cdot\frac{1}{\eta\mu x-1}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}e^x=e^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{e^{\pi}}>0$,
- για το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\eta\mu x-1}$ θέτουμε $u=\eta\mu x-1$ και είναι $u<0$.

  Άρα, το $u\to 0^-$ και το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\eta\mu x-1}=\lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{1}{u}=-\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^x}{\eta\mu x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(e^x\cdot\dfrac{1}{\eta\mu x-1}\right)\overset{\sqrt{e^{\pi}}\cdot(-\infty)}{=\!=}-\infty$.

γ. Είναι:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}=\lim_{x\to\pi}\left[(\eta\mu x+1)\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to\pi}(\eta\mu x+1)=1>0$
- για το όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x+1}$ θέτουμε $u=\sigma\upsilon\nu x+1$ και είναι $u>0$.

  Άρα, το $u\to 0^+$ και το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x+1}=\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}=\lim\limits_{x\to\pi}\left[(\eta\mu x+1)\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right]\overset{\sqrt{e^{\pi}}\cdot(-\infty)}{=\!=}-\infty$.

11. 22 α. Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^2\cdot g(x)}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{2}{3}$,
- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2\cdot g(x)}=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot\dfrac{1}{(x-1)^2}\right]\overset{\frac{2}{3}\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty$.

β. Είναι:

$$\lim_{x\to1}\frac{2g(x)}{\left(f(x)-2\right)^2}=\lim_{x\to1}\left[2g(x)\cdot\frac{1}{\left(f(x)-2\right)^2}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to1}\left(2g(x)\right)=6>0$,
- $\lim\limits_{x\to1}\left(f(x)-2\right)^2=0$ με $\left(f(x)-2\right)^2\geq0$ για κάθε x κοντά στο 1.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2g(x)}{\left(f(x)-2\right)^2}=\lim\limits_{x\to1}\left[2g(x)\cdot\dfrac{1}{\left(f(x)-2\right)^2}\right]\overset{6\cdot(+\infty)}{=}+\infty$.

γ. Είναι:

$$\lim_{x\to1}\frac{2f(x)+3g(x)}{\left|3f(x)-2g(x)\right|}=\lim_{x\to1}\left[\left(2f(x)+3g(x)\right)\cdot\frac{1}{\left|3f(x)-2g(x)\right|}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to1}\left(2f(x)+3g(x)\right)=13>0$,
- $\lim\limits_{x\to1}\left|3f(x)-2g(x)\right|=0$ με $\left|3f(x)-2g(x)\right|\geq0$ για κάθε x κοντά στο 1.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2f(x)+3g(x)}{\left|3f(x)-2g(x)\right|}=\lim\limits_{x\to1}\left[\left(2f(x)+3g(x)\right)\cdot\dfrac{1}{\left|3f(x)-2g(x)\right|}\right]\overset{13\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty$.

δ. Είναι:

$$\lim_{x\to1}\frac{1-xg^2(x)}{\left|xf(x)-2\right|}=\lim_{x\to1}\left[\left(1-xg^2(x)\right)\cdot\frac{1}{\left|xf(x)-2\right|}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to1}\left(1-xg^2(x)\right)=-8<0$,
- $\lim\limits_{x\to1}\left|xf(x)-2\right|=0$ με $\left|xf(x)-2\right|\geq0$ για κάθε x κοντά στο 1.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-xg^2(x)}{|xf(x)-2|}=\lim\limits_{x\to 1}\left[\left(1-xg^2(x)\right)\cdot\dfrac{1}{|xf(x)-2|}\right]\overset{(-8)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty.$

ε. Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{-|f(x)-g(x)|}{9f^2(x)-12f(x)g(x)+4g^2(x)}=\lim_{x\to 1}\left[-|f(x)-g(x)|\cdot\frac{1}{\left(3f(x)-2g(x)\right)^2}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\left[-|f(x)-g(x)|\right]=-|-1|=-1<0,$
- $\lim\limits_{x\to 1}\left(3f(x)-2g(x)\right)^2=0$ με $\left(3f(x)-2g(x)\right)^2\geq 0$ για κάθε x κοντά στο 1.

Συνεπώς:

$$\lim_{x\to 1}\frac{-|f(x)-g(x)|}{9f^2(x)-12f(x)g(x)+4g^2(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[-|f(x)-g(x)|\cdot\frac{1}{\left(3f(x)-2g(x)\right)^2}\right]\overset{-(+\infty)}{=\!=}-\infty.$$

11. 23 α. Είναι:

$$\lim_{x\to -3}\left(\frac{x^2+5x}{x^2+6x+9}-\frac{x}{x+3}\right)=\lim_{x\to -3}\frac{x^2+5x-x(x+3)}{(x+3)^2}=\lim_{x\to -3}\left[2x\cdot\frac{1}{(x+3)^2}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to -3}(2x)=-6<0,$
- $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{(x+3)^2}=+\infty.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x^2+5x}{x^2+6x+9}-\dfrac{x}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to -3}\left[2x\cdot\dfrac{1}{(x+3)^2}\right]\overset{(-6)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty.$

β. Είναι:

$$\lim_{x\to 5}\left[\frac{x+6}{x-5}+\frac{4x-17}{(x-5)^2}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{(x+6)(x+5)+4x-17}{(x-5)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\left[\left(x^2+15x+13\right)\cdot\frac{1}{(x-5)^2}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 5}\left(x^2+15x+13\right)=113>0,$

- $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{1}{(x-5)^2}=+\infty.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to5}\left[\dfrac{x+6}{x-5}+\dfrac{4x-17}{(x-5)^2}\right]=\lim\limits_{x\to5}\left[\left(x^2+15x+13\right)\cdot\dfrac{1}{(x-5)^2}\right]\overset{113\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

γ. Είναι:

$$\lim_{x\to6^+}\left(\frac{x+4}{x-6}-\frac{2}{x^2-36}\right)=\lim_{x\to6^+}\frac{(x+4)(x+6)-2}{(x-6)(x+6)}=$$

$$=\lim_{x\to6^+}\left(\frac{x^2+10x+22}{x+6}\cdot\frac{1}{x-6}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to6^+}\dfrac{x^2+10x+22}{x+6}=\dfrac{59}{6}>0,$
- $\lim\limits_{x\to6^+}\dfrac{1}{x-6}=+\infty.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to6^+}\left(\dfrac{x+4}{x-6}-\dfrac{2}{x^2-36}\right)=\lim\limits_{x\to6^+}\left(\dfrac{x^2+10x+22}{x+6}\cdot\dfrac{1}{x-6}\right)\overset{\frac{59}{6}\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

δ. Είναι:

$$\lim_{x\to1^-}\left(\frac{x^2+2}{1-x}-\frac{x+3}{1-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{x^2+2}{1-x}+\frac{x^2+3x}{1-x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\left[\left(2x^2+3x+2\right)\cdot\frac{1}{1-x}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to1^-}\left(2x^2+3x+2\right)=7>0,$
- $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{1-x}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-1}{x-1}=+\infty.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{x^2+2}{1-x}-\dfrac{x+3}{1-\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to1^-}\left[\left(2x^2+3x+2\right)\cdot\dfrac{1}{1-x}\right]\overset{7\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

11. 24 α. Είναι:

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-2\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}.$$

Θέτουμε $u=\sqrt{x}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}u=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}=1$. Άρα, το $u\to 1$ και το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-2\sqrt{x}+1}=\lim_{u\to 1}\frac{1}{(u-1)^2}=+\infty.$$

β. Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2}-1^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}.$$

Θέτουμε $u=\sqrt{x}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}u=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}=1$. Άρα, το $u\to 1$ και το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}=\lim_{u\to 1}\frac{u+1}{(u-1)^2}=\lim_{u\to 1}\left[(u+1)\cdot\frac{1}{(u-1)^2}\right]\overset{2\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$$

11. 25 **α.** Είναι:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2+1}{x-2}\cdot\frac{1}{x-3}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+1}{x-2}=10>0$,
  - $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=+\infty$,

  άρα $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}=+\infty$ και
  - $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}=-\infty$,

  άρα $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}=-\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\neq\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

β. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{|x|\cdot\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}^2-1^2}{|x|\cdot\eta\mu x\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\cdot\frac{1}{|x|}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{2}>0$,

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}=+\infty.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{|x|\cdot ημx}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\dfrac{ημx}{x}\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\cdot\dfrac{1}{|x|}\right]\overset{\frac{1}{2}\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

γ. Κοντά στο 1 είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4}{|x|-1}=\lim_{x\to 1}\left[\left(x^2+4\right)\cdot\frac{1}{x-1}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+4\right)=5>0,$
  - $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty,$

    άρα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4}{x-1}=+\infty$ και
  - $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty,$

    άρα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4}{x-1}=-\infty.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

δ. Είναι:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3x-8}{ημx-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(3x-8)\cdot\frac{1}{ημx-1}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(3x-8)=\dfrac{3\pi-16}{2}<0,$
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(ημx-1\right)=0$ με $ημx-1\leq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3x-8}{ημx-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(3x-8)\cdot\dfrac{1}{ημx-1}\right]\overset{\frac{3\pi-16}{2}\cdot(-\infty)}{=\!=}+\infty.$

11. 26 α. Είναι:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{16x^4-1}{8x^3-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)\cdot(2x+1)\cdot\left(4x^2+1\right)}{(2x-1)\cdot\left(4x^2+2x+1\right)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x+1)\cdot\left(4x^2+1\right)}{4x^2+2x+1}=\frac{4}{3}.$$

β. Είναι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^3-2x^2-8x}{\left(x^2-4\right)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{x\cdot(x-2)\cdot(3x+4)}{(x-2)^2\cdot(x+2)^2}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{x(3x+4)}{(x+2)^2}\cdot\frac{1}{x-2}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(3x+4)}{(x+2)^2}=\dfrac{5}{4}>0,$
- το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$ δεν υπάρχει.

Συνεπώς το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

γ. Είναι:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{1-\frac{3}{x}}{\left(\frac{9}{x^2}-1\right)^2}=\lim_{x\to 3^-}\frac{1-\frac{3}{x}}{\left(1-\frac{3}{x}\right)^2\cdot\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}=\lim_{x\to 3^-}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{x}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\left[\frac{x^3}{(x+3)^2}\cdot\frac{1}{x-3}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^3}{(x+3)^2}=\dfrac{3}{4}>0,$
- $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{x-3}=-\infty.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1-\frac{3}{x}}{\left(\frac{9}{x^2}-1\right)^2}=\lim\limits_{x\to 3^-}\left[\dfrac{x^3}{(x+3)^2}\cdot\dfrac{1}{x-3}\right]\overset{\frac{3}{4}\cdot(-\infty)}{=\!=}-\infty.$

δ. Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(2-3\ln x)^3-8}{\ln^3 x}=\lim_{x\to 1}\frac{-3\ln x\cdot\left[(2-3\ln x)^2+2(2-3\ln x)+4\right]}{\ln^3 x}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{-3\cdot\left[(2-3\ln x)^2+8-6\ln x\right]\cdot\frac{1}{\ln^2 x}\right\}.$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\left\{-3\cdot\left[(2-3\ln x)^2+8-6\ln x\right]\right\}=-36<0,$
- για το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\ln^2 x}$ θέτουμε $u=\ln x,$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1}u=\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)=0.$

Άρα, το $u \to 0$ και το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\ln^2 x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u^2}=+\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2-3\ln x)^3-8}{\ln^3 x}=\lim\limits_{x\to 1}\left\{-3\cdot\left[(2-3\ln x)^2+8-6\ln x\right]\cdot\dfrac{1}{\ln^2 x}\right\}\overset{(-36)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty$.

11. 27 α. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2020x^2+x}{x^{2021}+x^{2019}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2020x+1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{x^{2018}}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2020x+1}{x^2+1}=1>0$,
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2018}}=+\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2020x+1}{x^2+1}\cdot\dfrac{1}{x^{2018}}\right)\overset{1\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty$.

β. Είναι:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+e^x}{3(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x+e^x}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+e^x}{3}=\dfrac{e}{3}>0$,
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln x+e^x}{3}\cdot\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)\overset{\frac{e}{3}\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty$.

γ. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\alpha}{\eta\mu x}-\frac{\alpha}{|\eta\mu x|}\right).$$

Ισχύουν:

- αν $x>0$ κοντά στο 0, τότε $\eta\mu x>0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\alpha}{\eta\mu x}-\dfrac{\alpha}{|\eta\mu x|}\right)=0$,
- αν $x<0$ κοντά στο 0, τότε $\eta\mu x<0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2\alpha}{\eta\mu x}\right)$. Τότε είναι:
  - $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=+\infty$, αν $\alpha>0$ και

‣ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, αν $\alpha < 0$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

11. 28 α. Είναι:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-2x} - \frac{2}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{4(x+2)-2x}{x(x^2-4)} = \lim_{x\to 2}\left[\frac{2x+8}{x(x+2)}\cdot\frac{1}{x-2}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+8}{x(x+2)} = \dfrac{3}{2} > 0$,

‣ $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2} = -\infty$,

άρα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ και

‣ $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2} = +\infty$,

άρα $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

β. Είναι:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}+x-2}{x^3\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(e^{3x}+x-2\right)\cdot\frac{1}{x^3\cdot|x|}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{3x}+x-2\right) = -1 < 0$,

‣ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^3\cdot|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^4} = +\infty$,

άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ και

‣ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^3\cdot|x|} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{-x^4} = -\infty$.

άρα $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

γ. Είναι:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[x^2\left(x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left(x^5+x^3+x+\frac{1}{x}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim_{x \to 0}\left(x^5 + x^3 + x\right) = 0$,
  - $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$,

  άρα $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ και
  - $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$,

  άρα $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.

Συνεπώς $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

11. 29 **α.** Είναι:

$$\lim_{x \to 0}\left[3f(x) + g(x)\right] = 3\lim_{x \to 0} f(x) + \lim_{x \to 0} g(x) = 3 \cdot 1 - 5 = -2.$$

β. Είναι:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2f(x) + g(x)}{\left(f(x) + 1\right)^2} = \frac{2\lim_{x \to 0} f(x) + \lim_{x \to 0} g(x)}{\left(\lim_{x \to 0} f(x) + 1\right)^2} = \frac{2 \cdot 1 - 5}{(1+1)^2} = -\frac{3}{4}.$$

γ. Είναι:

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) + 1}{\left(f(x) - 1\right)^4} = \lim_{x \to 0}\left[\left(g(x) + 1\right) \cdot \frac{1}{\left(f(x) - 1\right)^4}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim_{x \to 0}\left(g(x) + 1\right) = -4 < 0$,
- $\lim_{x \to 0}\left(f(x) - 1\right)^4 = 0$ και $\left(f(x) - 1\right)^4 \geq 0$ για x κοντά στο 0.

Συνεπώς $\lim_{x \to 0} \frac{g(x) + 1}{\left(f(x) - 1\right)^4} = \lim_{x \to 0}\left[\left(g(x) + 1\right) \cdot \frac{1}{\left(f(x) - 1\right)^4}\right] \overset{(-4)\cdot(+\infty)}{=\!=} -\infty.$

δ. Είναι:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + g(x)}{\left|g(x) + 5\right|} = \lim_{x \to 0}\left\{\left[f(x) + g(x)\right] \cdot \frac{1}{\left|g(x) + 5\right|}\right\}.$$

Ισχύουν:

- $\lim_{x \to 0}\left[f(x) + g(x)\right] = 1 - 5 = -4 < 0$,
- $\lim_{x \to 0}\left|g(x) + 5\right| = 0$ και $\left|g(x) + 5\right| \geq 0$ για x κοντά στο 1.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+g(x)}{|g(x)+5|}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\left[f(x)+g(x)\right]\cdot\dfrac{1}{|g(x)+5|}\right\}\overset{(-4)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty.$

ε. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)+3f(x)g(x)}{\left(|g(x)|-5\right)^2}=\lim_{x\to 0}\left\{\left[f^2(x)+3f(x)g(x)\right]\cdot\frac{1}{\left(|g(x)|-5\right)^2}\right\}.$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0}\left[f^2(x)+3f(x)g(x)\right]=1^2+3\cdot 1\cdot(-5)=-14<0,$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(|g(x)|-5\right)^2=0$ και $\left(|g(x)|-5\right)^2\geq 0$ για x κοντά στο 0.

Συνεπώς:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)+3f(x)g(x)}{\left(|g(x)|-5\right)^2}=\lim_{x\to 0}\left\{\left[f^2(x)+3f(x)g(x)\right]\cdot\frac{1}{\left(|g(x)|-5\right)^2}\right\}\overset{(-14)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty.$$

11. 30 α. Είναι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(3x\cdot\frac{1}{x-2}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}(3x)=6>0,$
  - ▸ $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty,$

    άρα $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x}{x-2}=-\infty$ και
  - ▸ $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty,$

    άρα $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x}{x-2}=+\infty.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x}{x-2}\neq\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x}{x-2}$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

β. Είναι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x-3|}{3x^2-6x}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{|x-3|}{3x}\cdot\frac{1}{x-2}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-3|}{3x}=\dfrac{1}{6}>0,$

- $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$,

άρα $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-3|}{3x^2-6x} = -\infty$ και

- $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$,

άρα $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x-3|}{3x^2-6x} = +\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-3|}{3x^2-6x} \neq \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x-3|}{3x^2-6x}$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

γ. Είναι:

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^x - e}{4-2x} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{e^x-e}{2}\cdot\frac{1}{2-x}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x-e}{2} = \dfrac{e^2-e}{2} > 0$,
  - $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{2-x} = +\infty$,

  άρα $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{e^x-e}{4-2x} = +\infty$ και

  - $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{2-x} = -\infty$,

  άρα $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{e^x-e}{4-2x} = -\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{e^x-e}{4-2x} \neq \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{e^x-e}{4-2x}$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

δ. Είναι:

$$\lim_{x\to 3} \frac{3x}{(x-3)^3} = \lim_{x\to 3}\left[3x\cdot\frac{1}{(x-3)^3}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 3}(3x) = 9 > 0$,
  - $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{(x-3)^3} = -\infty$,

  άρα $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{3x}{(x-3)^3} = -\infty$ και

- $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{(x-3)^3}=+\infty$,

άρα $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{3x}{(x-3)^3}=+\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x}{(x-3)^3}\neq\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{3x}{(x-3)^3}$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

ε. Είναι:

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x-1}{(x+2)^4}=\lim_{x\to -2}\left[(2x-1)\cdot\frac{1}{(x+2)^4}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to -2}(2x-1)=-5<0$,
- $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)^4=0$ με $(x+2)^4\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x-1}{(x+2)^4}=\lim\limits_{x\to -2}\left[(2x-1)\cdot\dfrac{1}{(x+2)^4}\right]\overset{(-5)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty$.

στ. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2021x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(e^{2021x}\cdot\frac{1}{x}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0}e^{2021x}=1>0$,

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$,

άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2021x}}{x}=+\infty$ και

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$,

άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2021x}}{x}=-\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2021x}}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{2021x}}{x}$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

11. 31 α. Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x+1|}{x^3-3x^2+3x-1}=\lim_{x\to 1}\left[|x+1|\cdot\frac{1}{(x-1)^3}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}|x+1| = 2 > 0$,
  - $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{(x-1)^3} = -\infty$,

  άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x+1|}{(x-1)^3} = -\infty$ και
  - $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{(x-1)^3} = +\infty$,

  άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x+1|}{(x-1)^3} = +\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x+1|}{(x-1)^3} \neq \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x+1|}{(x-1)^3}$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

β. Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)^3} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x(x-1)}.$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x(x-1)} = -\infty$,
- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x(x-1)} = +\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x(x-1)} \neq \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x(x-1)}$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

11. 32 α. Είναι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+x-2}{x+1}\cdot\frac{1}{x-2}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-2}{x+1} = \dfrac{4}{3} > 0$,
  - $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2} = -\infty$,

  άρα $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2} = -\infty$ και

- $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$,

άρα $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}=+\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}\neq\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

β. Είναι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-3}{x+3}\cdot\frac{1}{x-2}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x+3}=\dfrac{-1}{5}<0$,

- $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$,

άρα $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-3}{x^2+x-6}=+\infty$ και

- $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$,

άρα $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-3}{x^2+x-6}=-\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-3}{x^2+x-6}\neq\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-3}{x^2+x-6}$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

γ. Είναι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^3-4x}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-1}{x(x+2)}\cdot\frac{1}{x-2}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x(x+2)}=\dfrac{3}{8}>0$,

- $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$,

άρα $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-1}{x^3-4x}=-\infty$ και

- $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$,

άρα $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-1}{x^3-4x}=+\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-1}{x^3-4x} \neq \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-1}{x^3-4x}$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

11. 33 α. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\eta\mu x} = \lim_{x\to 0}\left(e^x \cdot \frac{1}{\eta\mu x}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1 > 0$,

  - $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\eta\mu x} = -\infty$, διότι $\eta\mu x < 0$ για $x < 0$ και κοντά στο 0,

  άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x}{\eta\mu x} = -\infty$ και

  - $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\eta\mu x} = +\infty$, διότι $\eta\mu x > 0$ για $x > 0$ και κοντά στο 0,

  άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{\eta\mu x} = +\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x}{\eta\mu x} \neq \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{\eta\mu x}$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

β. Είναι:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{x^2+x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left[\left(x^2+x\right)\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^3 x}\right] = .$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x^2+x\right) = \dfrac{\pi^2+2\pi}{4} > 0$,

- για το όριο $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^3 x}$ θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x$, οπότε $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} u = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x = 0$.

  Άρα, το $u \to 0$ και το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^3 x} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u^3}$.

  - αν $x < \dfrac{\pi}{2}$, τότε $\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u^3} = +\infty$,

  άρα $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\dfrac{x^2+x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} = +\infty$ και

  - αν $x > \dfrac{\pi}{2}$, τότε $\lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{1}{u^3} = -\infty$, άρα $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{x^2 + x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} = -\infty.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{x^2 + x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} \neq \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{x^2 + x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

Παρατήρηση

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να εργαστούμε και στο ερώτημα α.

11. 34 α. Είναι:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x - 5}{x(x-1)^2} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{3x - 5}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{x} \right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x - 5}{(x-1)^2} = -5 < 0,$

  - $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$

  άρα $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{3x - 5}{x(x-1)^2} = -\infty$ και

  - $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$

  άρα $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{3x - 5}{x(x-1)^2} = +\infty.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{3x - 5}{x(x-1)^2} \neq \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{3x - 5}{x(x-1)^2}$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

β. Είναι:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2}{|x^2 - 2x|} = \lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 + 2}{|x|} \cdot \frac{1}{|x - 2|} \right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 2}{|x|} = 3 > 0,$
- $\lim\limits_{x \to 2} |x - 2| = 0$ και $|x - 2| \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 2}{|x^2 - 2x|} = \lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x^2 + 2}{|x|} \cdot \frac{1}{|x - 2|} \right) \overset{3 \cdot (+\infty)}{=\!=} +\infty.$

γ. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x-1}{x+1}\cdot\frac{1}{x^2}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x-1}{x+1}=-1<0,$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x-1}{x^3+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+x-1}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x^2}\right)\overset{(-1)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty.$

11. 35 α. Είναι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(g(x)+3)^2\cdot(x^2-2x)}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{(g(x)+3)^2\cdot(x-2)}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{2}>0,$
- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(g(x)+3)^2}=+\infty,$ διότι $\lim\limits_{x\to 2}(g(x)+3)^2=0$ και $(g(x)+3)^2\geq 0$ για x κοντά στο 2,
  - $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty,$

    άρα $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)}{(g(x)+3)^2\cdot(x^2-2x)}=-\infty$ και
  - $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty,$

    άρα $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)}{(g(x)+3)^2\cdot(x^2-2x)}=+\infty.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)}{(g(x)+3)^2\cdot(x^2-2x)}\neq\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)}{(g(x)+3)^2\cdot(x^2-2x)},$ οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

β. Είναι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{(x-2)^2(3-f(x))}=\lim_{x\to 2}\left[g(x)\cdot\frac{1}{(x-2)^2(3-f(x))}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -3 < 0$,
- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$,
- για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow f(x) \geq 3 \Leftrightarrow 3 - f(x) \leq 0$, διότι η f είναι

  συνεχής στο 2 και $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 3 = f(2)$, άρα $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{3 - f(x)} = -\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{(x-2)^2(3-f(x))} = +\infty$.

11. 36 α. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2 \Leftrightarrow f(1) = 2$.

Επιπλέον, ισχύει:

$$f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(x) \leq 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \ (1).$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - e^x}{\sqrt{2 - f(x)}} = \lim_{x\to 1}\left[\left(x^2 - e^x\right)\cdot \frac{1}{\sqrt{2-f(x)}}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2 - e^x\right) = 1 - e < 0$,
- $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{2 - f(x)} = 0$ με $\sqrt{2 - f(x)} \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{2-f(x)}} = +\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - e^x}{\sqrt{2-f(x)}} = -\infty$.

β. Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = -1 \Leftrightarrow g(1) = -1$.

Επιπλέον, ισχύει:

$$g(x) \geq g(1) \Leftrightarrow g(x) \geq -1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \ (2).$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-2}{(f(x)-2)(g(x)+1)} = \lim_{x\to 1}\left[(x-2)\cdot \frac{1}{(f(x)-2)(g(x)+1)}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}(x-2) = -1 < 0$,
- $\lim\limits_{x\to 1}\left[(f(x)-2)(g(x)+1)\right] = 0$

και από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\left(f(x)-2\right)\left(g(x)+1\right) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\left(f(x)-2\right)\left(g(x)+1\right)} = -\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2}{\left(f(x)-2\right)\left(g(x)+1\right)} = \lim\limits_{x \to 1}\left[(x-2) \cdot \dfrac{1}{\left(f(x)-2\right)\left(g(x)+1\right)}\right] = +\infty$.

γ. Από τη (2) έχουμε:

$$g(x)+1>0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Ισχύει $\lim\limits_{x \to 1}\left(g(x)+1\right)=0$, οπότε θέτοντας $u=g(x)+1$ το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x \to 1}\left(\ln\left(g(x)+1\right)\right) = \lim_{u \to 0^+} \ln u = -\infty.$$

11. 37 α. Είναι:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x-2}{\ln(x+1)} = \lim_{x \to 0}\left[(x-2) \cdot \frac{1}{\ln(x+1)}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x \to 0}(x-2) = -2 < 0$,
- $\lim\limits_{x \to 0}\left(\ln(x+1)\right) = 0$,
  - αν $x>0 \Leftrightarrow x+1>1 \Leftrightarrow \ln(x+1)>0$, τότε $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x+1)} = +\infty$,

  άρα $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-2}{\ln(x+1)} = -\infty$ και
  - αν $-1<x<0 \Rightarrow x+1<1 \Rightarrow \ln(x+1)<0$, τότε $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{\ln(x+1)} = -\infty$,

  άρα $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x-2}{\ln(x+1)} = +\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x-2}{\ln(x+1)} \neq \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-2}{\ln(x+1)}$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

β. Είναι:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2-2}{\ln x} = \lim_{x \to 0}\left[\left(x^2-2\right) \cdot \frac{1}{\ln x}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x \to 0}\left(x^2-2\right) = -2 < 0$,

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x) = -\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x} = 0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(x^2-2\right)\cdot\dfrac{1}{\ln x}\right] \overset{(-2)\cdot 0}{=\!=} 0$.

γ. Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-1}{x\sqrt{x}-3x+3\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\left[\left(4x^2-1\right)\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\left(4x^2-1\right) = 3 > 0$,
  - για $\sqrt{x}-1 = u > 0$ είναι $u \to 0^+$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^3} = \lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u^3} = +\infty$,

  άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4x^2-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^3} = +\infty$ και

  - για $\sqrt{x}-1 = u < 0$ είναι $u \to 0^-$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^3} = \lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{1}{u^3} = -\infty$,

  άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{4x^2-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^3} = -\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{4x^2-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^3} \neq \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4x^2-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}$, οπότε το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

Παρατήρηση

Αν δεν παρατηρήσουμε την ταυτότητα $x\sqrt{x}-3x+3\sqrt{x}-1 = \left(\sqrt{x}-1\right)^3$, τότε μπορούμε να κάνουμε την αντικατάσταση $u = \sqrt{x}$.

11. 38 α. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x\eta\mu x} = \lim_{x\to 0}\left(e^x\cdot\frac{1}{x\eta\mu x}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1 > 0$,
- $\lim\limits_{x\to 0}(x\eta\mu x) = 0$ και έχουμε:

- αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, τότε $ημx < 0$, οπότε $x \cdot ημx > 0$ και
- αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $ημx > 0$, οπότε $x \cdot ημx > 0$.

Άρα $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{xημx} = +\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x}{xημx} = \lim\limits_{x \to 0}\left(e^x \cdot \frac{1}{xημx}\right) \overset{1\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty$.

Επειδή ισχύει $\frac{e^x}{xημx} \leq f(x)$, θα είναι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

β. Η δοθείσα ανίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{1}{\ln x - 1} - \frac{2}{(\ln x - 1)^2} \geq f(x) \Leftrightarrow \frac{\ln x - 3}{(\ln x - 1)^2} \geq f(x), \quad (1).$$

Για να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x \to e} \frac{\ln x - 3}{(\ln x - 1)^2}$, θέτουμε $u = \ln x$, οπότε θα είναι $\lim\limits_{x \to e} u = \lim\limits_{x \to e}(\ln x) = 1$. Άρα, το $u \to 1$ και το όριο γράφεται:

$$\lim_{x \to e} \frac{\ln x - 3}{(\ln x - 1)^2} = \lim_{u \to 1} \frac{u - 3}{(u - 1)^2} = \lim_{u \to 1}\left[(u - 3) \cdot \frac{1}{(u - 1)^2}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{u \to 1}(u - 3) = -2 < 0$,
- $\lim\limits_{u \to 1} \frac{1}{(u - 1)^2} = +\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x \to e} \frac{\ln x - 3}{(\ln x - 1)^2} = \lim\limits_{u \to 1}\left[(u - 3) \cdot \frac{1}{(u - 1)^2}\right] \overset{(-2)\cdot(+\infty)}{=\!=} -\infty$.

Επομένως, από την (1) έχουμε $\lim\limits_{x \to e} f(x) = -\infty$.

γ. Για $x > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$, η δοθείσα ανίσωση γράφεται:

$$f(x) \leq \frac{\ln x}{e^x - 1} \text{ για κάθε } x > 0, \quad (2).$$

Είναι:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0^+}\left(\ln x \cdot \frac{1}{e^x - 1}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$,
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^x - 1\right) = 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{e^x - 1} = +\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{e^x - 1} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln x \cdot \dfrac{1}{e^x - 1}\right) = -\infty$.

Επομένως, από τη (2) έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right) = -\infty$.

12η Ενότητα

Κατακόρυφη ασύμπτωτη

Α. Του τύπου Σωστό / Λάθος

12. 1 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος
ε. Σωστό **στ.** Σωστό **ζ.** Λάθος.

12. 2 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος
ε. Λάθος.

Β. Βασικές εφαρμογές – Ασκήσεις εμπέδωσης

12. 3 **α.** Δεν έχει **β.** Δεν έχει **γ.** Δεν έχει **δ.** Δεν έχει
ε. Δεν έχει **στ.** Δεν έχει **ζ.** Δεν έχει **η.** Δεν έχει
θ. $x = 0$ **ι.** $x = 0$ **ια.** Δεν έχει **ιβ.** Δεν έχει
ιγ. $x = 0$ **ιδ.** Δεν έχει **ιε.** Δεν έχει **ιστ.** $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \ \kappa \in \mathbb{Z}$
ιζ. $x = \kappa\pi, \ \kappa \in \mathbb{Z}$.

12. 4 **α.** $x = 0$ **β.** $x = 2$ **γ.** $x = 3$ **δ.** $x = -1$
ε. $x = -2$ **στ.** $x = 2$.

12. 5 **α.** $x = 0$ **β.** $x = 2$ **γ.** $x = -1$.

12. 6 **α.** $x = 1, \ x = 2$ **β.** $x = 0, \ x = -1$ **γ.** $x = 1, \ x = -1$.

12. 7 **α.** $x = -3$ **β.** $x = 3$ **γ.** $x = 5$.

12. 8 **α.** $x = 0$ **β.** $x = 2$ **γ.** $x = 1$ **δ.** $x = -1$
ε. $x = 0$ **στ.** $x = \frac{\pi}{2}$.

Γ. Ασκήσεις για λύση

12. 9 **α.** Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$, οπότε αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης στο $x_0 = 4$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{1}{x-4} = -\infty.$$

Συνεπώς, η ευθεία $x = 4$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

β. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, -1)\cup(-1, +\infty)$, οπότε αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης στο $x_0 = -1$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-3x-4}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-4)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x-4) = -5.$$

Συνεπώς, η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = -1$, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

γ. Η f είναι συνεχής στα $(-\infty, 0]$ και $(0, +\infty)$, οπότε αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης στο $x_0 = 0$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Συνεπώς, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

12. 10 α. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, -3)\cup(-3, 3)\cup(3, +\infty)$, οπότε αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης στα σημεία –3, 3. Έχουμε:

$$f(x) = \frac{x^2+9}{x^2-9} = \frac{x^2+9}{x-3}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

- Στο $x_1 = -3$ είναι $\lim\limits_{x\to -3^+} \frac{x^2+9}{x-3} = -3 < 0$ και $\lim\limits_{x\to -3^+} \frac{1}{x+3} = +\infty$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+}\left(\frac{x^2+9}{x-3}\cdot\frac{1}{x+3}\right) \overset{(-3)\cdot(+\infty)}{=\!=} -\infty.$

  Συνεπώς, η ευθεία $x = -3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Στο $x_2 = 3$ είναι $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^2+9}{x+3} = 3 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}\left(\frac{x^2+9}{x+3}\cdot\frac{1}{x-3}\right) \overset{3\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty.$

  Συνεπώς, η ευθεία $x = 3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

β. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 3)\cup(3, +\infty)$, οπότε αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης στο $x_0 = 3$. Έχουμε $f(x) = \dfrac{x^3+27}{x^3-27} = \dfrac{x^3+27}{x^2+3x+9} \cdot \dfrac{1}{x-3}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^3+27}{x^2+3x+9} = 2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \left(\dfrac{x^3+27}{x^2+3x+9} \cdot \dfrac{1}{x-3} \right) \overset{2\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty$.

Συνεπώς, η ευθεία $x = 3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

γ. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$, οπότε αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης στα σημεία -2, 2. Έχουμε:

$$f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{x^3-8}{x-2} \cdot \frac{1}{x+2}.$$

- Στο $x_1 = -2$ είναι $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^3-8}{x-2} = 4 > 0$ και $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{1}{x+2} = -\infty$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \left(\dfrac{x^3-8}{x-2} \cdot \dfrac{1}{x+2} \right) \overset{4\cdot(-\infty)}{=\!=} -\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία $x = -2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Στο $x_2 = 2$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x+4}{x+2} = 3$.

  Συνεπώς, η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_2 = 2$.

12. 11 α. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$, οπότε αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης στα σημεία -2, 1. Έχουμε:

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} = \frac{x^2+2x-3}{x-1} \cdot \frac{1}{x+2}.$$

- Στο $x_1 = -2$ είναι $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} = 1 > 0$ και $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{1}{x+2} = -\infty$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \left(\dfrac{x^2+2x-3}{x-1} \cdot \dfrac{1}{x+2} \right) \overset{1\cdot(-\infty)}{=\!=} -\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία $x = -2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Στο $x_2 = 1$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+3}{x-2} = -4$.

  Συνεπώς, η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_2 = 1$.

β. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{-2, 0, 3\}$, οπότε αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης στα σημεία –2, 0, 3. Έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-6x}=\frac{x^2+x-2}{x(x+2)(x-3)}.$$

- Στο $x_1=-2$ έχουμε:

$$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to-2}\frac{x-1}{x(x-3)}=-\frac{3}{10}.$$

Συνεπώς, η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_1=-2$.

- Στο $x_2=0$ είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-1}{x-3}=\frac{1}{3}>0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{\cancel{(x+2)}(x-3)}\cdot\frac{1}{x}\right]\overset{\frac{1}{3}\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

Συνεπώς, η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Στο $x_3=3$ είναι $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x-1}{x}=\frac{2}{3}>0$ και $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{1}{x-3}=+\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\left[\frac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{x\cancel{(x+2)}}\cdot\frac{1}{x-3}\right]\overset{\frac{2}{3}\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

Συνεπώς, η ευθεία $x=3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

γ. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{-4,0,2\}$, οπότε αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης στα σημεία –4, 0, 2. Έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^2+3x-4}{x^3+2x^2-8x}=\frac{x^2+3x-4}{x(x+4)(x-2)}.$$

- Στο $x_1=-4$ έχουμε:

$$\lim_{x\to-4}f(x)=\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)(x-1)}{x(x+4)(x-2)}=\lim_{x\to-4}\frac{x-1}{x(x-2)}=-\frac{5}{24}.$$

Συνεπώς, η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_1=-4$.

- Στο $x_2=0$ είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-1}{x-2}=\frac{1}{2}>0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{\cancel{(x+4)}(x-1)}{\cancel{(x+4)}(x-2)}\cdot\frac{1}{x}\right]\overset{\frac{1}{2}\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

Συνεπώς, η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Στο $x_3=2$ είναι $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x-1}{x}=\frac{1}{2}>0$ και $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left[\dfrac{\cancel{(x+4)}(x-1)}{x\cancel{(x+4)}}\cdot\dfrac{1}{x-2}\right] \overset{\frac{1}{2}\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty.$

Συνεπώς, η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

δ. Η f είναι συνεχής στο $A = \mathbb{R} - \{-5, -4, 0\}$. Για $x \in A$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{x^2(x+4)(x-3)}{x(x+4)(x+5)} = \frac{x(x-3)}{x+5}.$$

Οπότε αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης στο $x_0 = -5$.

Είναι $\lim\limits_{x\to -5^-}\left[x(x-3)\right] = 40 > 0$ και $\lim\limits_{x\to -5^-}\dfrac{1}{x+5} = -\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -5^-}\left[x(x-3)\cdot\dfrac{1}{x+5}\right] \overset{40\cdot(-\infty)}{=\!=} -\infty.$

Συνεπώς, η ευθεία $x = -5$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Παρατήρηση

Στα προηγούμενα ερωτήματα μπορούσαμε πρώτα να απλοποιήσουμε τον τύπο της συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της και έτσι να αποφύγουμε τον υπολογισμό ορίων που δίνουν πραγματικό αριθμό, όπως κάναμε στο δ. Ωστόσο, για διδακτικούς λόγους, παρατίθενται και οι δύο τρόποι σε περίπτωση που δεν αναγνωρίσουμε κοινή ρίζα σε αριθμητή και παρονομαστή.

ε. Η f είναι συνεχής στο $A = \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$. Για $x \in A$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{x(x-3)(x+1)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x-2)}.$$

Οπότε αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης στα σημεία 1, 2.

- Στο $x_1 = 1$ είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x(x+1)}{x-2} = -2 < 0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1} = +\infty$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{x(x+1)}{x-2}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right] \overset{(-2)\cdot(+\infty)}{=\!=} -\infty.$

  Συνεπώς, η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Στο $x_2 = 2$ είναι $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x(x+1)}{x-1} = 6 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left[\dfrac{x(x+1)}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x-2}\right] \overset{6\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty.$

Συνεπώς, η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

12. 12 **α.** Η f ορίζεται, όταν $x^2 + 5x \neq 0 \Leftrightarrow x(x+5) \neq 0 \Leftrightarrow \{x \neq 0 \;\text{ και }\; x \neq -5\}$.

Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{0, -5\}$.

Η f είναι συνεχής στο A ως ρητή συνάρτηση και για $x \in A$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{4x}{x(x+5)} = \frac{4}{x+5}.$$

Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης στο $x_0 = -5$.

Έχουμε $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -5^+} \dfrac{4}{x+5} = +\infty$.

Συνεπώς, η ευθεία $x = -5$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

β. Η f ορίζεται, όταν $(x-4)(x+6) \neq 0 \Leftrightarrow \{x \neq 4 \;\text{ και }\; x \neq -6\}$.

Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{-6, 4\}$.

Αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης στα σημεία –6, 4.

- Στο $x_1 = -6$ είναι $\lim\limits_{x \to -6^-} \dfrac{3-x}{x-4} = \dfrac{-9}{10} < 0$ και $\lim\limits_{x \to -6^-} \dfrac{1}{x+6} = -\infty$.

  Άρα $\lim\limits_{x \to -6^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -6^-} \left(\dfrac{3-x}{x-4} \cdot \dfrac{1}{x+6} \right) \overset{\frac{-9}{10}\cdot(-\infty)}{=\!=} +\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία $x = -6$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Στο $x_2 = 4$ είναι $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{3-x}{x+6} = \dfrac{-1}{10} < 0$ και $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{1}{x-4} = -\infty$.

  Άρα $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} \left(\dfrac{3-x}{x+6} \cdot \dfrac{1}{x-4} \right) \overset{\frac{-1}{10}\cdot(-\infty)}{=\!=} +\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία $x = 4$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

γ. Η f ορίζεται, όταν $x(x+5)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-5, 0) \cup (2, +\infty)$ όπως συνάγεται από τον ακόλουθο πίνακα προσήμων του γινομένου $x(x+5)(x-2)$.

	$-\infty$	-5		0		2	$+\infty$
x	–		–	0	+		+
x + 5	–	0	+		+		+
x – 2	–		–		–	0	+
Γινόμενο	–	‖	+	‖	–	‖	+

Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=(-5,\,0)\cup(2,\,+\infty)$.

Για $x\in A$ έχουμε $f(x)=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x(x+5)(x-2)}}=(x^2-4)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x(x+5)(x-2)}}$.

Αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης στα σημεία –5, 0, 2.

- Στο $x_1=-5$ είναι $\lim\limits_{x\to -5^+}(x^2-4)=21>0$, $\lim\limits_{x\to -5^+}\sqrt{x(x+5)(x-2)}=0$ και $\sqrt{x(x+5)(x-2)}>0$ για $x\in A$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to -5^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -5^+}\left[(x^2-4)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x(x+5)(x-2)}}\right]\overset{21\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία $x=-5$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Στο $x_2=0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-4)=-4<0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x(x+5)(x-2)}=0$ και $\sqrt{x(x+5)(x-2)}>0$ για $x\in A$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[(x^2-4)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x(x+5)(x-2)}}\right]\overset{(-4)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Στο $x_3=2$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x(x+5)(x-2)}}\underset{x-2>0}{\overset{x(x+5)>0}{=\!=}}\lim_{x\to 2^+}\frac{(x+2)\cdot\sqrt{x-2}^{\,2}}{\sqrt{x(x+5)}\cdot\sqrt{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x+2)\cdot\sqrt{x-2}}{\sqrt{x(x+5)}}=0.$$

  Συνεπώς, η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_3=2$.

δ. Η f ορίζεται, όταν:

$$2x^3-x^2-3x\neq 0\Leftrightarrow x\cdot(2x^2-x-3)\neq 0\Leftrightarrow\left\{x\neq 0\ \text{ και }\ x\neq\frac{3}{2}\ \text{ και }\ x\neq -1\right\}.$$

Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R}-\left\{-1,\,0,\,\dfrac{3}{2}\right\}$.

Για $x\in A$ έχουμε $f(x)=\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(2x-3)(x+1)}=\dfrac{x^2-x+1}{x(2x-3)}$.

Αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης στα σημεία $0,\ \dfrac{3}{2}$.

- Στο $x_1 = 0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 - x + 1}{2x - 3} = -\dfrac{1}{3} < 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x^2 - x + 1}{2x - 3} \cdot \dfrac{1}{x} \right) \overset{\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(+\infty)}{=\!=} -\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Στο $x_2 = \dfrac{3}{2}$ είναι $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^+} \dfrac{x^2 - x + 1}{x} = \dfrac{7}{6} > 0$ και $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^+} \dfrac{1}{2x - 3} = +\infty$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^+} \left(\dfrac{x^2 - x + 1}{x} \cdot \dfrac{1}{2x - 3} \right) \overset{\frac{7}{6}\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία $x = \dfrac{3}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

12. 13 **α.** Η f είναι συνεχής στο $A = [-1, 8) \cup (8, +\infty)$, οπότε αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης στο $x_0 = 8$. Έχουμε:

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x+1} - 3} = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x+1} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 3}{\sqrt{x+1} + 3} = (x^2 + x) \cdot \left(\sqrt{x+1} + 3\right) \cdot \frac{1}{x - 8}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 8^+} \left[(x^2 + x) \cdot \left(\sqrt{x+1} + 3\right) \right] = 432 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 8^+} \dfrac{1}{x - 8} = +\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 8^+} f(x) == \lim\limits_{x\to 8^+} \left[(x^2 + x) \cdot \left(\sqrt{x+1} + 3\right) \cdot \dfrac{1}{x - 8} \right] \overset{432\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty$.

Συνεπώς, η ευθεία $x = 8$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

β. Η f ορίζεται, όταν:

$$x \geq -7 \quad \text{και} \quad x \geq -\frac{5}{2} \quad \text{και} \quad \sqrt{x+7} - \sqrt{2x+5} \neq 0.$$

Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \left[-\dfrac{5}{2}, 2\right) \cup (2, +\infty)$ στο οποίο η f είναι συνεχής.

Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης στο $x_0 = 2$.

Έχουμε:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+7} - \sqrt{2x+5}} = \frac{x\left(\sqrt{x+7} + \sqrt{2x+5}\right)}{\sqrt{x+7}^2 - \sqrt{2x+5}} = x\left(\sqrt{x+7} + \sqrt{2x+5}\right) \cdot \frac{1}{2 - x}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+} \left[x\left(\sqrt{x+7} + \sqrt{2x+5}\right) \right] = 12 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{2 - x} = -\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left[x\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{2x+5}\right)\cdot\dfrac{1}{2-x}\right] \overset{12\cdot(-\infty)}{=\!=} -\infty.$

Συνεπώς, η ευθεία x = 2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

12. 14 **α.** Η f είναι συνεχής στο $A=(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$, οπότε αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης στο $x_0 = 1$. Για x > 1 και κοντά στο 1 έχουμε $|x+1| = x+1,\ |3-x| = 3-x$ και είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-1}{2} = \dfrac{1}{2} > 0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1} = +\infty.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-1}{x+1-(3-x)} = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2x-1}{2}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right) \overset{\frac{1}{2}\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty.$

Συνεπώς, η ευθεία x = 1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

β. Η f είναι συνεχής στο $A = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$, οπότε αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης στα σημεία –1, 3.

- Για x > –1 και κοντά στο –1 έχουμε $|x+3| = x+3,\ |x| = -x$ και είναι

  $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+7x}{3} = -2 < 0$ και $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x+1} = +\infty.$

  Άρα $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+7x}{x+3+2x} = \lim\limits_{x\to -1^+}\left(\dfrac{x^2+7x}{3}\cdot\dfrac{1}{x+1}\right) \overset{(-2)\cdot(+\infty)}{=\!=} -\infty.$

  Συνεπώς, η ευθεία x = –1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Για x > 3 και κοντά στο 3 έχουμε $|x+3| = x+3,\ |x| = x$ και είναι

  $$\lim_{x\to 3^+}\left(x^2+7x\right) = 30 > 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 3^+}\frac{1}{3-x} = -\infty.$$

  Άρα $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2+7x}{x+3-2x} = \lim\limits_{x\to 3^+}\left[\left(x^2+7x\right)\cdot\dfrac{1}{3-x}\right] \overset{30\cdot(-\infty)}{=\!=} -\infty.$

  Συνεπώς, η ευθεία x = 3 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

12. 15 **α.** Η f είναι συνεχής στα διαστήματα (0, 1) και $(1, +\infty)$. Για $x\in(0, 1)$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης στο $x_0 = 1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1) = 2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1} = -\infty.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left[(x+1)\cdot\dfrac{1}{x-1}\right] \overset{2\cdot(-\infty)}{=\!=} -\infty.$

Συνεπώς, η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

β. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(0, 3)$ και $(3, +\infty)$. Για $x \in (0, 3)$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}^2 - 2^2}{x(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \frac{1}{x\left(\sqrt{x+1}+2\right)}.$$

Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης στο $x_0 = 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \dfrac{1}{3} > 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}\cdot\dfrac{1}{x}\right] \overset{\frac{1}{3}\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty$.

Για $x \in (3, +\infty)$ είναι $f(x) = x + 3$.

Συνεπώς, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

γ. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[3, 4)$ και $[4, +\infty)$. Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης στο $x_0 = 4$ για $x \in [3, 4)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 4^-}\left[2x\left(\sqrt{x-3}+1\right)\right] = 16 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{1}{x-4} = -\infty$.

Άρα:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{2x}{\sqrt{x-3}-1} = \lim_{x\to 4^-} \frac{2x\left(\sqrt{x-3}+1\right)}{\sqrt{x-3}^2 - 1^2} =$$

$$= \lim_{x\to 4^-}\left[2x\left(\sqrt{x-3}+1\right)\cdot\frac{1}{x-4}\right] \overset{16\cdot(-\infty)}{=\!=} -\infty.$$

Συνεπώς, η ευθεία $x = 4$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

δ. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1, 3)$ και $(3, +\infty)$. Για $x \in [-1, 3)$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{x(x-3)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}{2^2 - \sqrt{x+1}} = -x\left(2+\sqrt{x+1}\right).$$

Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης στο $x_0 = 3$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x+9}{(x+3)\left(x^2+9\right)} = \dfrac{1}{9} > 0$ και $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}\left[\dfrac{x+9}{(x+3)\left(x^2+9\right)}\cdot\dfrac{1}{x-3}\right] \overset{\frac{1}{9}\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty$.

Συνεπώς, η ευθεία $x = 3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

12. 16 **α.** • Για $x < -\frac{\pi}{2}$ και κοντά στο $-\frac{\pi}{2}$ είναι:

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \text{ με } \eta\mu x < 0 \text{ και } \sigma\upsilon\nu x < 0,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-}\left(\eta\mu x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) \overset{(-1)\cdot(-\infty)}{=\!=} +\infty.$$

• Για $x > -\frac{\pi}{2}$ και κοντά στο $-\frac{\pi}{2}$ είναι:

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \text{ με } \eta\mu x < 0 \text{ και } \sigma\upsilon\nu x > 0,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \varepsilon\varphi x = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\left(\eta\mu x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) \overset{(-1)\cdot(+\infty)}{=\!=} -\infty.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x \neq \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \varepsilon\varphi x$, συνεπώς το $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} \varepsilon\varphi x$ δεν υπάρχει.

β. Για $x > \pi$ και κοντά στο π είναι $\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ με $\sigma\varphi x < 0$ και $\eta\mu x < 0$. Άρα:

$$\lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to \pi^+}\left(\sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{1}{\eta\mu x}\right) \overset{(-1)\cdot(-\infty)}{=\!=} +\infty.$$

Συνεπώς, η ευθεία $x = \pi$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

12. 17 **α.** Οι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f είναι οι ευθείες με εξισώσεις $x = -\sqrt{5}$, $x = 0$ και $x = \sqrt{5}$.

β. Η f είναι συνεχής στο $A = \mathbb{R} - \{-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}\}$. Για $x \in A$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^3 - 5x} = \frac{x-2}{x\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)}.$$

Αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία $-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}$.

• Στο $x_1 = -\sqrt{5}$ είναι $\lim\limits_{x\to -\sqrt{5}^-} \frac{x-2}{x\left(x-\sqrt{5}\right)} = -\frac{\sqrt{5}+2}{10} < 0$ και $\lim\limits_{x\to -\sqrt{5}^-} \frac{1}{x+\sqrt{5}} = -\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to -\sqrt{5}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -\sqrt{5}^-}\left[\frac{x-2}{x\left(x-\sqrt{5}\right)} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{5}}\right] \overset{-\frac{\sqrt{5}+2}{10}\cdot(-\infty)}{=\!=} +\infty.$

Συνεπώς, η ευθεία $x=-\sqrt{5}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Στο $x_2=0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-2}{x^2-5}=\dfrac{2}{5}>0$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x-2}{x^2-5}\cdot\dfrac{1}{x}\right)\overset{\frac{2}{5}\cdot(-\infty)}{=\!=}-\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Στο $x_3=\sqrt{5}$ είναι $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}^-}\dfrac{x-2}{x\left(x+\sqrt{5}\right)}=\dfrac{\sqrt{5}-2}{5+\sqrt{5}}>0$ και $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}^-}\dfrac{1}{x-\sqrt{5}}=-\infty$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to \sqrt{5}^-}\left[\dfrac{x-2}{x\left(x+\sqrt{5}\right)}\cdot\dfrac{1}{x-\sqrt{5}}\right]\overset{\frac{\sqrt{5}-2}{5+\sqrt{5}}\cdot(-\infty)}{=\!=}-\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία $x=\sqrt{5}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

6ο

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα Α

Α1. Θεωρία.

Α2. Θεωρία.

Α3. **α.** $-\infty$ ή $\alpha < 0$ **β.** 0 **γ.** $+\infty$ **δ.** $0,\ f(x) < 0$ **ε.** $+\infty$ ή $-\infty$.

Θέμα Β

Β1. **α.** Το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 7}\left[\frac{x}{x-7}+\frac{3x-2}{(x-7)^2}\right]=\lim_{x\to 7}\frac{x(x-7)+3x-2}{(x-7)^2}=\lim_{x\to 7}\left[\left(x^2-4x-2\right)\cdot\frac{1}{(x-7)^2}\right].$$

Έχουμε:

- $(x-7)^2 \geq 0$ και $\lim\limits_{x\to 7}(x-7)^2=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1}{(x-7)^2}=+\infty$,

- $\lim\limits_{x\to 7}\left(x^2-4x-2\right)=19.$

Επομένως, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to 7}\left[\frac{x}{x-7}+\frac{3x-2}{(x-7)^2}\right]=\lim_{x\to 7}\left[\left(x^2-4x-2\right)\cdot\frac{1}{(x-7)^2}\right]\overset{19\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$$

β. Το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to e^2}\left(\frac{\ln x}{\ln x-2}-\frac{3\ln x+1}{\ln^2 x-2\ln x}\right)=\lim_{x\to e^2}\frac{\ln^2 x-(3\ln x+1)}{\ln x(\ln x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to e^2}\left(\frac{\ln^2 x-3\ln x-1}{\ln x}-\frac{1}{\ln x-2}\right).$$

- Για το όριο του πρώτου κλάσματος έχουμε:

$$\lim_{x\to e^2}\frac{\ln^2 x-3\ln x-1}{\ln x}=\frac{\left(\ln e^2\right)^2-3\ln e^2-1}{\ln e^2}=\frac{4-6-1}{2}=-\frac{3}{2}.$$

- Για το όριο του δεύτερου κλάσματος έχουμε $\lim\limits_{x\to e^2}(\ln x-2)=0$, οπότε:

- αν $x < e^2 \Leftrightarrow \ln x < 2$, τότε $\lim\limits_{x\to e^{2-}} \dfrac{1}{\ln x - 2} = -\infty$ και
- αν $x > e^2 \Leftrightarrow \ln x > 2$, τότε $\lim\limits_{x\to e^{2+}} \dfrac{1}{\ln x - 2} = +\infty$.

Επομένως, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

B2. α. Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f και $A = (1, +\infty)$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$. Άρα $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

β. Το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x - \ln x}{f(x) - 2} = \lim\limits_{x\to 3}\left((x - \ln x)\cdot \dfrac{1}{f(x)-2}\right)$.

- Είναι $\lim\limits_{x\to 3}(x - \ln x) = 3 - \ln 3 > 0$.
- Από τη γραφική παράσταση έχουμε:

  $f(x) \le f(3) \Leftrightarrow f(x) \le 2$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και $\lim\limits_{x\to 3}(f(x) - 2) = 0$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{f(x)-2} = -\infty$.

Επομένως, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x - \ln x}{f(x) - 2} = \lim\limits_{x\to 3}\left((x - \ln x)\cdot \dfrac{1}{f(x)-2}\right) = -\infty$.

γ. Το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 2}\left((x+1)\cdot \dfrac{1}{f(x)}\right)$.

- Είναι $\lim\limits_{x\to 2}(x+1) = 3 > 0$.
- Από τη γραφική παράσταση έχουμε:

  $f(x) < 0$ για $1 < x < 2$, $f(x) > 0$ για $2 < x < 3$ και $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 0$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 2^-}\left[(x+1)\cdot \dfrac{1}{f(x)}\right] \overset{3\cdot(-\infty)}{=\!=} -\infty$ και

  $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 2^+}\left[(x+1)\cdot \dfrac{1}{f(x)}\right] \overset{3\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty$.

Επομένως, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

δ. Το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{e^4 - e^{2x}}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 4^+}\left((e^4 - e^{2x})\cdot \dfrac{1}{f(x)}\right)$.

- Είναι $\lim\limits_{x\to 4^+}\left(e^4 - e^{2x}\right) = e^4 - e^8 < 0$.

- Για $x > 4$ είναι $f(x) < 0$ και $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

Επομένως, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{e^4 - e^{2x}}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 4^+} \left(\left(e^4 - e^{2x}\right) \cdot \dfrac{1}{f(x)} \right) = +\infty$.

Θέμα Γ

Γ1. Για $x < 0$, η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$x f(x) \geq \frac{x^2 + 1}{-\left(1 - \text{συν}^2 x\right) + x^2} \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{x^2 + 1}{x\left(x^2 - \text{ημ}^2 x\right)}, \quad (2).$$

- Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(x^2 + 1\right) = 1 > 0$.
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $|\text{ημ}x| \leq |x| \Leftrightarrow \text{ημ}^2 x \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 - \text{ημ}^2 x \geq 0$.

  Για $x < 0$ είναι $x(x^2 - \text{ημ}^2 x) \leq 0$ και $\lim\limits_{x\to 0} \left[x\left(x^2 - \text{ημ}^2 x\right) \right] = 0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x\left(x^2 - \text{ημ}^2 x\right)} = -\infty$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2 + 1}{x\left(x^2 - \text{ημ}^2 x\right)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\left(x^2 + 1\right) \cdot \dfrac{1}{x\left(x^2 - \text{ημ}^2 x\right)} \right) = -\infty$.

Επομένως, από τη σχέση (2) έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

Γ2. **α.** Γνωρίζουμε ότι σε κάθε ρίζα του παρονομαστή μιας ρητής συνάρτησης, που δεν είναι ρίζα του αριθμητή, η γραφική παράσταση έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Τα $x = 1$, $x = 2$ δεν είναι ρίζες του αριθμητή της f και εφόσον είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f, πρέπει να είναι ρίζες του παρονομαστή $x^2 + \kappa x + \lambda$.

Από τύπους Vieta έχουμε:

$$-\kappa = 1 + 2 \Rightarrow \kappa = -3 \text{ και } \lambda = 1 \cdot 2 = 2.$$

Άρα, ο τύπος της συνάρτησης γράφεται $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$.

β. Για $x > 2$ έχουμε:

$$g(x) = \frac{x+1}{f(x)(x-1)} + \ln x = \frac{x+1}{\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)} \cdot (x-2)} + \ln x = x - 1 + \ln x.$$

Έστω $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \ln x_1 < \ln x_2 \\ x_1 - 1 < x_2 - 1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} \ln x_1 + x_1 - 1 < \ln x_2 + x_2 - 1 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2).$$

Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

γ. Το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to e^{2+}} \dfrac{\ln x - x}{g(x)-e^2-1} = \lim\limits_{x\to e^{2+}} \left((\ln x - x)\cdot \dfrac{1}{g(x)-e^2-1}\right)$.

- Είναι $\lim\limits_{x\to e^{2+}} (\ln x - x) = 2 - e^2 < 0$.
- Έχουμε $x > e^2 \Leftrightarrow g(x) > g(e^2) \Leftrightarrow g(x) > e^2+1 \Leftrightarrow g(x)-e^2-1>0$ και

$\lim\limits_{x\to e^{2+}} (g(x)-e^2-1) = 0$. Άρα $\lim\limits_{x\to e^{2+}} \dfrac{1}{g(x)-e^2-1} = +\infty$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to e^{2+}} \frac{\ln x - x}{g(x)-e^2-1} = \lim_{x\to e^{2+}} \left((\ln x - x)\cdot \frac{1}{g(x)-e^2-1}\right) = -\infty.$$

Θέμα Δ

Δ1. Το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{\alpha}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x+1-\alpha}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x+1-\alpha}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}\right),$$

οπότε λαμβάνει τη μορφή $\dfrac{2-\alpha}{2}\cdot(-\infty)$.

- Αν $\alpha < 2$, τότε το όριο είναι $-\infty$.
- Αν $\alpha > 2$, τότε το όριο είναι $+\infty$.
- Αν $\alpha = 2$, τότε το όριο είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$.

Δ2. Για $\alpha = 2$ και για $x \neq -1$, $x \neq 1$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}.$$

Η συνάρτηση h ορίζεται στο διάστημα:

$$D = \left\{x \in A_f \,/\, f(x) \in A_g\right\} = \left\{x \neq \pm 1 \,/\, \frac{1}{x+1} > 0\right\} \Leftrightarrow D = (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

Επιπλέον, για τον τύπο της h έχουμε:

$$h(x) = (g\circ f)(x) = \ln f(x) + f(x) = \ln(x+1)^{-1} + \frac{1}{x+1}.$$

Επομένως $h(x) = -\ln(x+1) + \dfrac{1}{x+1}$, $x \in D$.

Δ3. Αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες στα σημεία -1 και 1.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to -1^+}\left(-\ln(x+1)\right)\underset{u\to 0^+}{\overset{x+1=u>0}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$. Άρα:

$$\lim_{x\to -1^+}h(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(-\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}\right)=+\infty.$$

Συνεπώς, η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_h.

- Από το ερώτημα Δ1 έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\dfrac{1}{2}$ και ομοίως βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\dfrac{1}{2}$. Άρα:

$$\lim_{x\to 1^-}h(x)=\lim_{x\to 1^+}h(x)=-\ln 2+\frac{1}{2}.$$

Συνεπώς, η C_h δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0=1$.

Δ4. Το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-h(x)}{\eta\mu(x+1)+x+1}=\lim_{x\to -1}\left[\left(f(x)-h(x)\right)\cdot\frac{1}{\eta\mu(x+1)+x+1}\right].$$

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to -1}\left(f(x)-h(x)\right)=\lim\limits_{x\to -1}\ln(x+1)\overset{(\Delta 3)}{=}-\infty$.
- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x|\leq|x|$. Αντικαθιστώντας όπου x το x + 1 έχουμε:

$$|\eta\mu(x+1)|\leq|x+1|\Leftrightarrow -|x+1|\leq\eta\mu(x+1)\leq|x+1|.$$

Για $x>-1$ είναι $\eta\mu(x+1)\geq-(x+1)\Leftrightarrow\eta\mu(x+1)+(x+1)\geq 0$ και

$\lim\limits_{x\to -1}\left(\eta\mu(x+1)+x+1\right)=0$. Άρα $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{\eta\mu(x+1)+x+1}=+\infty$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-h(x)}{\eta\mu(x+1)+x+1}=\lim_{x\to -1}\left[\left(f(x)-h(x)\right)\cdot\frac{1}{\eta\mu(x+1)+x+1}\right]=-\infty.$$

13η Ενότητα

Αλγεβρικός υπολογισμός ορίων στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Α. Ασκήσεις για λύση

13. 1 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}\left(x^2+1\right)}{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x+1\right)}=\dfrac{2}{3}$.

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\alpha x^{\nu+1}-\beta x+\alpha x^{\nu}-\beta}{x^3+x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\alpha x^{\nu}\cdot(x+1)-\beta(x+1)}{x^2(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x+1)}\left(\alpha x^{\nu}-\beta\right)}{x^2\cancel{(x+1)}}=\alpha-\beta.$$

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\sqrt{x}-7\sqrt{x}+6}\overset{\sqrt{x}=u\Leftrightarrow x=u^2}{\underset{u\to\sqrt{1}=1}{=\!=}}\lim_{u\to 1}\frac{u^2-1}{u^3-7u+6}=\lim_{u\to 1}\frac{\cancel{(u-1)}(u+1)}{\cancel{(u-1)}\left(u^2+u-6\right)}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}.$$

13. 2 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-g(x)}{\sqrt{|f(x)-2|}}=\lim\limits_{x\to 1}\left[\left(f(x)-g(x)\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{|f(x)-2|}}\right]$.

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)-g(x)\right)=2-4=-2<0$,
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{|f(x)-2|}}\overset{|f(x)-2|=u>0}{\underset{u\to 0^+}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{u}}=+\infty$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt{|f(x)-2|}}=\lim_{x\to 1}\left[\left(f(x)-g(x)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{|f(x)-2|}}\right]\overset{(-2)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty.$$

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)}{\left(g(x)-1\right)^4}=\dfrac{\left(\lim\limits_{x\to 1}f(x)\right)^2}{\left(\lim\limits_{x\to 1}\left(g(x)-1\right)\right)^4}=\dfrac{4}{81}$.

γ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-4}{\left(f(x)-1\right)^3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}\left(g(x)-4\right)}{\left(\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)-1\right)\right)^3}=\dfrac{0}{1}=0$.

δ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g^2(x)-4g(x)+4}{\left(g(x)-4\right)^4} \overset{g(x)=u}{\underset{u\to\lim\limits_{x\to 1} g(x)=4}{=\!=}} \lim\limits_{u\to 4}\dfrac{(u-2)^2}{(u-4)^4}=\lim\limits_{u\to 4}\left[(u-2)^2\cdot\dfrac{1}{(u-4)^4}\right]$.

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{u\to 4}(u-2)^2=4>0$,
- $\lim\limits_{u\to 4}\dfrac{1}{(u-4)^4}=+\infty$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g^2(x)-4g(x)+4}{\left(g(x)-4\right)^4}=\lim_{u\to 4}\left[(u-2)^2\cdot\frac{1}{(u-4)^4}\right]=+\infty.$$

13. 3 **α.** Για x κοντά στο 4 είναι $x>0$, οπότε $|x|=x$. Το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2}{x\sqrt{x}-2x-\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2}{\left(\sqrt{x}-2\right)(x-1)}=\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2}{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}-2}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{16}{3}>0$,
- $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{x}-2\right)=0$.
  - Για $x>4\Rightarrow\sqrt{x}-2>0$ κοντά στο 4 είναι $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}=+\infty$.

    Άρα $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{x}-2\right)(x-1)}=+\infty$.
  - Για $x<4\Rightarrow\sqrt{x}-2<0$ κοντά στο 4 είναι $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}=-\infty$.

    Άρα $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{x}-2\right)(x-1)}=-\infty$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2+2x-8}{x-2}\cdot\dfrac{1}{x+2}\right)$.

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x-8}{x-2}=2>0$,
  - $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{1}{x+2}=-\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4}=-\infty$ και

▸ $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4} = +\infty$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

13. 4 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x^2-\sqrt{x^5}}{x^2-4x} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{-x^2\left(\sqrt{x}-2\right)}{x\left(x-4\right)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{-x\cdot\cancel{\left(\sqrt{x}-2\right)}}{\cancel{\left(\sqrt{x}-2\right)}\left(\sqrt{x}+2\right)} = -1$.

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{16-x^2}-4}{x^3+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{16-x^2}^{\,2}-4^2}{x^2\left(x+1\right)\cdot\left(\sqrt{16-x^2}+4\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\left(x+1\right)\cdot\left(\sqrt{16-x^2}+4\right)} = -\frac{1}{8}.$$

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{4x-3}-1}{3-\sqrt{4+5x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{4x-3}^{\,2}-1^2\right)\left(3+\sqrt{4+5x}\right)}{\left(3^2-\sqrt{4+5x}^{\,2}\right)\left(\sqrt{4x-3}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{4\cancel{\left(x-1\right)}\left(3+\sqrt{4+5x}\right)}{-5\cancel{\left(x-1\right)}\left(\sqrt{4x-3}+1\right)} = -\frac{12}{5}.$$

δ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 10} \frac{x^2-x-90}{\sqrt{x-1}-3} = \lim_{x\to 10} \frac{\left(x-10\right)\left(x+9\right)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}{\sqrt{x-1}^{\,2}-3^2} = \lim_{x\to 10}\left[\left(x+9\right)\cdot\left(\sqrt{x-1}+3\right)\right] = 114.$$

ε. Έχουμε :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-3x}-2}{\eta\mu 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-3x}^{\,2}-2^2}{\eta\mu 3x\left(\sqrt{4-3x}+2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}\cdot\left(\sqrt{4-3x}+2\right)} = \frac{-1}{1\cdot 4} = -\frac{1}{4},$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu 3x}{3x} \underset{u\to 0}{\overset{3x=u}{=\!=}} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\eta\mu u}{u} = 1$.

13. 5 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} \underset{\text{κοντά στο 1}}{\overset{x>0}{=\!=}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}^{\,2}-1^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$.

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x-3}-\sqrt{5-x}}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{2x-3}-\sqrt{5-x}}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x-2}\right)$.

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x-3}-\sqrt{5-x}}{x-1} = 1-\sqrt{3} < 0$,

- $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{2x-3}-\sqrt{5-x}}{x^2-3x+2}=+\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{2x-3}-\sqrt{5-x}}{x^2-3x+2}=-\infty$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{\left|x^2-4\right|}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-\sqrt{3x-2}^{\,2}}{|x+2|\cdot|x-2|\cdot\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}\underset{\text{κοντά στο 2}}{\overset{x+2>0}{=\!=}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{x-1}{(x+2)\cdot\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}\cdot\frac{x-2}{|x-2|}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{(x+2)\cdot\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}=\dfrac{1}{16}>0$,
  - κοντά στο 2 με $x<2\Leftrightarrow x-2<0$ είναι $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-2}{|x-2|}=-1$, οπότε

    $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{\left|x^2-4\right|}=-\dfrac{1}{16}$,
  - κοντά στο 2 με $x>2\Leftrightarrow x-2>0$ είναι $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{|x-2|}=1$, οπότε

    $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{\left|x^2-4\right|}=\dfrac{1}{16}$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

δ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)}^{\,2}-1^2}{x\left(\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x^2-1}{x\left(\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha+\beta+\alpha\beta x}{\left(\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)}+1\right)}=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

ε. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x+6}-7}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}+\frac{\sqrt{5x+6}-4}{x^2-4}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\sqrt{4x+1}^2-3^2}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}+\frac{\sqrt{5x+6}^2-4^2}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{5x+6}+4\right)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{4}{(x+2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}+\frac{5}{(x+2)\left(\sqrt{5x+6}+4\right)}\right]=\frac{31}{96}.$$

στ. Το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x+3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}-\frac{\sqrt{7x+4}-5}{x-3}+\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}\right).$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}^2-2^2}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4},$

- $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{7x+4}-5}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{7x+4}^2-5^2}{(x-3)\left(\sqrt{7x+4}+5\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{7}{\sqrt{7x+4}+5}=\frac{7}{10}$ και

- $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}^2-3^2}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2}{\sqrt{2x+3}+3}=\frac{1}{3}.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x+3}}{x-3}=\frac{1}{4}-\frac{7}{10}+\frac{1}{3}=-\frac{7}{60}.$$

13. 6 **α.** Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{\sqrt[3]{x}^3-1^3}}{\cancel{(x-1)}(x+1)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\frac{1}{6}.$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{x+h}^2+\sqrt[3]{x+h}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}^2\right)}{h\cdot\left(\sqrt[3]{x+h}^2+\sqrt[3]{x+h}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}^2\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}^3-\sqrt[3]{x}^3}{h\cdot\left(\sqrt[3]{x+h}^2+\sqrt[3]{x+h}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}^2\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x+h}^2+\sqrt[3]{x+h}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}^2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\ \ x\geq 0.$$

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}=\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}\cdot 2+4\right)\left(\sqrt[3]{x+19}^2+\sqrt[3]{x+19}\cdot 3+9\right)}{\left(\sqrt[3]{x+19}-3\right)\left(\sqrt[3]{x+19}^2+\sqrt[3]{x+19}\cdot 3+9\right)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}\cdot 2+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{\cancel{\left(\sqrt[3]{x}^3-2^3\right)}\left(\sqrt[3]{x+19}^2+3\cdot\sqrt[3]{x+19}+9\right)}{\cancel{\left(\sqrt[3]{x+19}^3-3^3\right)}\left(\sqrt[3]{x}^2+2\cdot\sqrt[3]{x}+4\right)}=\frac{\sqrt[3]{27}^2+3\sqrt[3]{27}+9}{\sqrt[3]{8}^2+2\sqrt[3]{8}+4}=\frac{9}{4}.$$

δ. Έχουμε: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[\nu]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[\nu]{1+x}-1\right)\left(\sqrt[\nu]{1+x}^{\nu-1}+\sqrt[\nu]{1+x}^{\nu-2}+\ldots+1\right)}{x\left(\sqrt[\nu]{1+x}^{\nu-1}+\sqrt[\nu]{1+x}^{\nu-2}+\ldots+1\right)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\sqrt[\nu]{1+x}^{\nu}-1^{\nu}}}{\cancel{x}\left(\sqrt[\nu]{1+x}^{\nu-1}+\sqrt[\nu]{1+x}^{\nu-2}+\ldots+1\right)}=\frac{1}{1+1+\ldots+1}=\frac{1}{\nu}.$$

13. 7 **α.** Αν $f(x)=x^2$ και $x_0=1$, τότε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h+1)\cancel{(1+h-1)}}{\cancel{h}}=2.$$

β. Αν $f(x)=3\sqrt{x}-4$ και $x_0=2$, τότε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\sqrt{2+h}-4-\left(3\sqrt{2}-4\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\left(\sqrt{2+h}-\sqrt{2}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3\cancel{\left(\sqrt{2+h}^2-\sqrt{2}^2\right)}}{\cancel{h}\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}=\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

γ. Αν $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ και $x_0=1$, τότε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h}\cdot\frac{2(2+h)}{2(2+h)}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2-(2+h)}{h\cdot 2(2+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+h)}=-\frac{1}{4}.$$

13. 8 **α.** Είναι:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\text{συν}x - 2\sqrt{x}\right) = 1.$$

Συνεπώς $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β. • Είναι:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = -2 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right) = -\infty.$$

Συνεπώς, η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

• Είναι:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1.$$

Συνεπώς $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

13. 9 **α.** Η f είναι συνεχής στο 2, αν $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$.

• $\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \alpha + \beta + 3 = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = -2, \quad (1).$

• $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x^2 - \beta}{x} + \alpha \cdot e^{x-2}\right) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{4-\beta}{2} + \alpha = 1 \Leftrightarrow -\beta + 2\alpha = -2, \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) έχουμε $\alpha = -\dfrac{4}{3}$ και $\beta = -\dfrac{2}{3}$.

β. Για $\alpha = -\dfrac{4}{3}$ και $\beta = -\dfrac{2}{3}$ είναι $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) + 1 & , \ 1 < x \le 2 \\ \dfrac{3x^2+2}{3x} - \dfrac{4e^{x-2}}{3}, & x > 2 \end{cases}$.

Επομένως $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = \dfrac{3\cdot 3^2 + 2}{3\cdot 3} - \dfrac{4e^{3-2}}{3} = \dfrac{29 - 12e}{9}$.

γ. Έχουμε $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\ln(x-1) + 1\right) \underset{u\to 0^+}{\overset{x-1=u>0}{=\!=}} \lim_{u\to 0^+}(\ln u + 1) = -\infty$.

Επομένως, η ευθεία x = 1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

13. 10 **α.** Έχουμε $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{1 - 2x} = \lim_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt{(2x-1)^2}}{1-2x} = \lim_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{|2x-1|}{1-2x}$.

Για x κοντά στο $\frac{1}{2}$ ισχύουν:

- με $x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x-1<0$ είναι $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{-(2x-1)}{1-2x}=1$ και
- με $x>\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x-1>0$ είναι $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{2x-1}{1-2x}=-1$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

β. Για $x<-2\Leftrightarrow x+2<0\Rightarrow x^2(x+2)<0$ είναι $|x^3+2x^2|=-x^3-2x^2$, οπότε το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{-x^3-2x^2-2x+x^2-8}{x+2}=\lim_{x\to-2^-}\frac{-\cancel{(x+2)}(x^2-x+4)}{\cancel{x+2}}=-10.$$

γ. Για $x>-2\Leftrightarrow x+2>0\Rightarrow x^2(x+2)>0$ είναι $|x^3+2x^2|=x^3+2x^2$, οπότε το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{x^3+2x^2-2x+x^2-8}{x+2}=\lim_{x\to-2^+}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2+x-4)}{\cancel{x+2}}=-2.$$

δ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^3-8x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\underset{u\to\sqrt{4}=2}{\overset{\sqrt{x}=u\Leftrightarrow x=u^2}{=\!=}}\lim\limits_{u\to2}\frac{u^6-8u^3}{u-2}=\lim\limits_{u\to2}\frac{u^3\cancel{(u-2)}(u^2+2u+4)}{\cancel{u-2}}=96.$

13. 11 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5}=\frac{0}{6}=0.$

β. Για $x>1\Leftrightarrow \ln x>0$ το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-x-3}{\sqrt{\ln x}}=\lim_{x\to1^+}\left[(x^2-x-3)\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to1^+}(x^2-x-3)=-3<0,$
- $\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{\ln x}=0$ με $\sqrt{\ln x}>0$ για κάθε $x>1$, οπότε $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt{\ln x}}=+\infty.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x-3}{\sqrt{\ln x}}=\lim\limits_{x\to1^+}\left[(x^2-x-3)\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\right]=-\infty.$

γ. Έχουμε $\lim\limits_{h\to0}\frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\sqrt{1+h}^2-\sqrt{1}^2}{h\left(\sqrt{1+h}+\sqrt{1}\right)}=\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}.$

δ. Για x κοντά στο 2 είναι $x-4<0$, οπότε $|x-4|=-x+4$ και $x>0$, οπότε $|x|=x$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x-4|+5|x|-12}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{-x+4+5x-12}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{4\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=1.$$

ε. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+1}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(2x^2+1\right)\cdot\dfrac{1}{|x|}\right]\overset{1\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

στ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-4}{x-4}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right).$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x-4}=1>0,$
  - $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty,$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+4}=-\infty$ και
  - $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty,$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+4}=+\infty.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

13. 12 α. Για x κοντά στο 2 είναι $x-1>0$, $x>0$, $x-3<0$ και $x+1>0$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5|x-1|+|x|-1}{x^2-7|x-3|+|x+1|}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5(x-1)+x-1}{x^2+7(x-3)+x+1}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2+8x-20}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-2)}(x+10)}=\frac{0}{12}=0.$$

β. Για x κοντά στο 2 είναι $x-1>0$ και $x-3<0$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2|x-1|-2}{x^2-3|x-3|-1}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2(x-1)-2}{x^2+3(x-3)-1}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2+3x-10}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+5)}=\frac{2}{7}.$$

γ. Για $x>2$ είναι $x-2>0$ και $x>0$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-7(x-2)+x-5}{\sqrt{x^2+5}-3}=\lim_{x\to 2^+}\left[(x-3)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+5}-3}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-3)^2=1>0,$
- $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)=0$ και για $x>2\Rightarrow x^2>4\Rightarrow x^2+5>9\Rightarrow\sqrt{x^2+5}-3>0,$

οπότε $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5}-3}=+\infty$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-7(x-2)+x-5}{\sqrt{x^2+5}-3}=\lim_{x\to 2^+}\left[(x-3)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+5}-3}\right]=+\infty.$$

δ. Είναι:

$$x^2-3x+2>0\Leftrightarrow\{x<1 \;\text{ ή }\; x>2\} \quad\text{και}\quad x^2-4x+3>0\Leftrightarrow\{x<1 \;\text{ ή }\; x>3\}.$$

Άρα, για x κοντά στο 1 με $x > 1$ είναι:

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \;\text{ και }\; x^2 - 4x + 3 < 0.$$

Επομένως, το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{-(x^2-3x+2)+(x-1)^2}{-(x^2-4x+3)+(x-1)^3}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-(x-1)(x-2)+(x-1)^2}{-(x-1)(x-3)+(x-1)^3}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{-(x-2)+x-1}{-(x-3)+(x-1)^2}=\frac{1}{2}.$$

13. 13 α. Το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 5x-\eta\mu 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu 5x\cdot\dfrac{\eta\mu 5x}{x}-\dfrac{\eta\mu 3x}{x}\right)$.

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu 5x)=0$,
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 5x}{5x}\cdot 5\right)\underset{u\to 0}{\overset{5x=u}{=\!=}}5\cdot\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=5$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}\cdot 3\right)\underset{u\to 0}{\overset{3x=u}{=\!=}}3\cdot\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=3$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 5x-\eta\mu 3x}{x}=0\cdot 5-3=-3$.

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu x\cdot(1^2-\sigma\upsilon\nu^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{1}{\eta\mu x}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}=2>0$,
- για x κοντά στο 0:
  - για $x < 0$ είναι $\eta\mu x < 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\eta\mu x}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=-\infty$ και

- για $x>0$ είναι $ημx>0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{ημx}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{εφx}{1-συνx}=+\infty$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

γ. Για x κοντά στο 0 ισχύουν:

- για $x<0$ είναι $ημx<0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|ημx|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-ημx}{x}=-1$ και
- για $x>0$ είναι $ημx>0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|ημx|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ημx}{x}=1$.

Συνεπώς, το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|ημx|}{x}$ δεν υπάρχει.

δ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημx-εφx}{ημ^3x}=\lim_{x\to 0}\frac{ημx-\dfrac{ημx}{συνx}}{ημ^3x}=\lim_{x\to 0}\frac{συνx-1}{συνx\cdot ημ^2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-συνx)}{συνx\cdot(1-συν^2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{συνx\cdot(1+συνx)}=-\frac{1}{2}.$$

ε. Το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx^ν}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ημx^ν}{x^ν}\cdot x^{ν-1}\right)$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx^ν}{x^ν}\underset{u\to 0}{\overset{x^ν=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{ημu}{u}=1$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx^ν}{x}=1\cdot 0=0$.

στ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-συνx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1^2-συν^2x}{x^2(1+συνx)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\dfrac{ημx}{x}\right)^2\cdot\dfrac{1}{1+συνx}\right)=\dfrac{1}{2}$.

13. 14 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ημx}{x}\cdot\dfrac{1}{x^2+1}\right)=1\cdot\dfrac{1}{0+1}=1$.

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημ^2x}{\sqrt{x^2+9}-3}=\lim_{x\to 0}\frac{ημ^2x\cdot\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{\sqrt{x^2+9}^{\,2}-3^2}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{ημx}{x}\right)^2\cdot\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)\right]=$$

$$=1^2\cdot\left(\sqrt{0+9}+3\right)=6.$$

γ. Το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ημ|x-2|}{x^2-7x+10}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{ημ|x-2|}{|x-2|}\cdot\dfrac{1}{x-5}\cdot\dfrac{|x-2|}{x-2}\right)$.

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu|x-2|}{|x-2|}\overset{|x-2|=u}{\underset{u\to 0}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\eta\mu|x-2|}{|x-2|}\cdot\dfrac{1}{x-5}\right)=-\dfrac{1}{3}<0$,

  ▸ $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-(x-2)}{x-2}=-1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\eta\mu|x-2|}{x^2-7x+10}=\dfrac{1}{3}$ και

  ▸ $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{x-2}=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\eta\mu|x-2|}{x^2-7x+10}=-\dfrac{1}{3}$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

δ. Για $x\neq 1$ έχουμε:

$$\left|\ln x\cdot\eta\mu\frac{1}{x-1}\right|=|\ln x|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{x-1}\right|\leq|\ln x|\Rightarrow-|\ln x|\leq\ln x\cdot\eta\mu\frac{1}{x-1}\leq|\ln x|.$$

Ισχύουν $\lim\limits_{x\to 1}|\ln x|=0$ και $\lim\limits_{x\to 1}\left(-|\ln x|\right)=0$.

Άρα, από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\left(\ln x\cdot\eta\mu\frac{1}{x-1}\right)=0.$$

ε. Το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu(x-1)}{x^2+4x-5}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu(x-1)}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+5}\right)$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu(x-1)}{x-1}\overset{x-1=u}{\underset{u\to 0}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu u}{u}=0$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu(x-1)}{x^2+4x-5}=0\cdot\dfrac{1}{6}=0$.

13. 15 • Έστω $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ για x κοντά στο 2, $(x^2-4)\cdot f(x)=|2\lambda+3|x^2+2x-8$, οπότε:

$$\lim_{x\to 2}\left[(x^2-4)\cdot f(x)\right]=\lim_{x\to 2}\left(|2\lambda+3|x^2+2x-8\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\cdot\ell=4|2\lambda+3|-4\Rightarrow\{2\lambda+3=1\ \text{ή}\ 2\lambda+3=-1\}\Rightarrow\{\lambda=-1\ \text{ή}\ \lambda=-2\}.$$

▸ Για $\lambda=-1$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+4)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\dfrac{3}{2}$.

▸ Για $\lambda=-2$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+4)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\dfrac{3}{2}$.

- Έστω $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\kappa\in\mathbb{R}$ για x κοντά στο 0, $xg(x)=3x^2-2x+3\mu^2-2\mu$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0}\left[x\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to 0}\left(3x^2-2x+3\mu^2-2\mu\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \cdot \kappa = 3\mu^2 - 2\mu \Rightarrow \mu(3\mu - 2) = 0 \Rightarrow \{\mu = 0 \text{ ή } \mu = \frac{2}{3}\}.$$

- Για $\mu = 0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2 - 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(3x - 2) = -2.$
- Για $\mu = \frac{2}{3}$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2 - 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(3x - 2) = -2.$

13. 16 α. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A_f = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ και για $x \neq 3$ γράφεται:

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+3)(x^2+9)}{x-3} = (x+3)(x^2+9).$$

Η f είναι συνεχής στο A_f, οπότε η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

β. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A_f = \mathbb{R}^*$ και για $x \neq 0$ γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2(3x+4)}{x^5} = \frac{3x+4}{x^3}.$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left[(3x+4)\cdot\frac{1}{x^3}\right] \overset{4\cdot(-\infty)}{=\!=} -\infty.$

Συνεπώς, η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

γ. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ και είναι συνεχής σε αυτό. Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+1}{x-1}\cdot\frac{1}{|x|}\right) \overset{(-1)\cdot(+\infty)}{=\!=} -\infty,$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2+1}{|x|}\cdot\frac{1}{x-1}\right) \overset{2\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty.$

Συνεπώς, οι ευθείες $x = 0$, $x = 1$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f.

δ. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A_f = \mathbb{R} - \{-2, -1\}$ και είναι συνεχής σε αυτό. Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{|2x|+x}{(x+2)}\cdot\frac{1}{|x+1|}\right) \overset{1\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty.$
- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-}\left(\frac{|2x|+x}{|x+1|}\cdot\frac{1}{(x+2)}\right) \overset{2\cdot(-\infty)}{=\!=} -\infty.$

Συνεπώς, οι ευθείες $x = -1$ και $x = -2$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f.

ε. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ και ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left[(x+2)\cdot\frac{1}{|x|-1}\right] \overset{3\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty,$ διότι $|x|-1 > 0 \Leftrightarrow \{x < -1 \text{ ή } x > 1\}$ και

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}\left[(x+2)\cdot\dfrac{1}{|x|-1}\right] \overset{1\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty.$

Συνεπώς, οι ευθείες $x=-1$ και $x=1$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f.

13. 17 α. Είναι:

$$g(0)=\alpha \text{ και } \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{|x^2-12|-12}{x}.$$

Επειδή $x^2-12<0 \Leftrightarrow |x|<\sqrt{12} \Leftrightarrow -2\sqrt{3}<x<2\sqrt{3}$ και $0\in\left(-2\sqrt{3},\, 2\sqrt{3}\right)$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2+12-12}{x} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και είναι συνεχής στο 0, αν:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) \Leftrightarrow 0=\alpha.$$

β. Για κάθε $x\in A$ ισχύει $\alpha\le f(x)\le\beta$. Αν $\gamma=\max\{|\alpha|, |\beta|\}$, τότε για κάθε $x\in A$ ισχύει:

$$-\gamma\le f(x)\le\gamma \Leftrightarrow |f(x)|\le\gamma.$$

Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$|g(x)\cdot f(x)| = |g(x)|\cdot|f(x)| \le \gamma\cdot|g(x)| \Rightarrow -\gamma\cdot|g(x)| \le g(x)\cdot f(x) \le \gamma\cdot|g(x)|.$$

Ισχύουν:

$$\lim_{x\to 0}\left(-\gamma\cdot|g(x)|\right)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\left(\gamma\cdot|g(x)|\right)=0.$$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)\cdot f(x)\right)=0$.

13. 18 Το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3+\lambda x^2+(3\lambda-2)x-3}{x^2-6x+9} = \lim_{x\to 3}\left\{\left[x^3+\lambda x^2+(3\lambda-2)x-3\right]\cdot\frac{1}{(x-3)^2}\right\}.$$

Ισχύουν:

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}=+\infty \text{ και } \lim_{x\to 3}\left[x^3+\lambda x^2+(3\lambda-2)x-3\right]=18(\lambda+1).$$

- Αν $\lambda+1>0 \Leftrightarrow \lambda>-1$, τότε το όριο είναι $+\infty$.
- Αν $\lambda+1<0 \Leftrightarrow \lambda<-1$, τότε το όριο είναι $-\infty$.
- Αν $\lambda=-1$, τότε το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-x^2-5x-3}{(x-3)^2} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+2x+1)}{(x-3)^2} = \lim_{x\to 3}\left[(x+1)^2\cdot\frac{1}{x-3}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to 3}\left[(x+1)^2\cdot\dfrac{1}{x-3}\right]\overset{16\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty$ και

– $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to 3^-}\left[(x+1)^2\cdot\dfrac{1}{x-3}\right]\overset{16\cdot(-\infty)}{=\!=}-\infty$.

Συνεπώς, για $\lambda=-1$ το όριο δεν υπάρχει.

13. 19 α. Για x κοντά στο 3 θέτουμε $g(x)=\dfrac{x^2-8x+15}{(x-5)\cdot f(x)}$ και έχουμε:

$$g(x)=\frac{x^2-8x+15}{(x-5)\cdot f(x)}\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2-8x+15}{x-5}\cdot\frac{1}{g(x)}=(x-3)\cdot\frac{1}{g(x)}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 3}g(x)=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{g(x)}=0$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left[(x-3)\cdot\dfrac{1}{g(x)}\right]=0\cdot 0=0$.

β. Για x κοντά στο 4 με $x<4$ θέτουμε $g(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\cdot f(x)}{x-3}$ και έχουμε:

$$g(x)=\frac{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\cdot f(x)}{x-3}\Leftrightarrow f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x+5}-3}\cdot g(x)\ \text{ με }\ \lim_{x\to 4^-}g(x)=+\infty.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{x-3}{\sqrt{x+5}-3}=\lim_{x\to 4^-}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{\sqrt{x+5}^{\,2}-3^2}=\lim_{x\to 4^-}\left[(x-3)\cdot\left(\sqrt{x+5}+3\right)\cdot\frac{1}{x-4}\right]\overset{6\cdot(-\infty)}{=\!=}-\infty.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\left(\dfrac{x-3}{\sqrt{x+5}-3}\cdot g(x)\right)\overset{(-\infty)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty$.

γ. Για x κοντά στο 0 θέτουμε $g(x)=f(x)\cdot\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^{2021}-x^{2020}-1}$ και έχουμε:

$$g(x)=f(x)\cdot\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^{2021}-x^{2020}-1}\Leftrightarrow f(x)=g(x)\cdot\frac{x^{2021}-x^{2020}-1}{\ln\left(x^2+1\right)}\ \text{ με }\ \lim_{x\to 0}g(x)=-\infty.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(x^2+1\right)=0$ και επειδή $x^2+1\geq 1\Leftrightarrow \ln\left(x^2+1\right)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln\left(x^2+1\right)}=+\infty$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(x^{2021}-x^{2020}-1\right)\cdot\dfrac{1}{\ln\left(x^2+1\right)}\right]\overset{(-1)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)\cdot \dfrac{x^{2021}-x^{2020}-1}{\ln(x^2+1)} \right) \overset{(-\infty)\cdot(-\infty)}{=\!=} +\infty$.

13. 20 **α.** Έστω $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+(\lambda+3)x-2\lambda-2}{x^2+x-2} = \ell \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2+(\lambda+3)x-2\lambda-2}{x^2+x-2} \Leftrightarrow (x^2+x-2)\cdot f(x) = x^2+(\lambda+3)x-2\lambda-2$$

για x κοντά στο 1 με $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\left[(x^2+x-2)\cdot f(x)\right] = \lim_{x\to 1}\left[x^2+(\lambda+3)x-2\lambda-2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\cdot \ell = 1+(\lambda+3)\cdot 1-2\lambda-2 \Rightarrow \lambda = 2.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+6)}{\cancel{(x-1)}(x+2)} = \frac{7}{3} = \ell.$$

β. Έστω $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\lambda+3)x^2-(2\lambda-1)x+3\lambda-5}{x^3+x^2-6x} = \ell \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{(\lambda+3)x^2-(2\lambda-1)x+3\lambda-5}{x^3+x^2-6x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^3+x^2-6x)\cdot f(x) = (\lambda+3)x^2-(2\lambda-1)x+3\lambda-5$$

για x κοντά στο 2 με $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\left[(x^3+x^2-6x)\cdot f(x)\right] = \lim_{x\to 2}\left[(\lambda+3)x^2-(2\lambda-1)x+3\lambda-5\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\cdot \ell = (\lambda+3)\cdot 4-(2\lambda-1)\cdot 2+3\lambda-5 \Rightarrow \lambda = -3.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{7x-14}{x(x^2+x-6)} = \lim_{x\to 2}\frac{7\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}(x+3)} = \frac{7}{10} = \ell.$$

γ. Έστω $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+\lambda x+3}-3}{x^2-4x+3} = \ell \in \mathbb{R}$.

Για x κοντά στο 3 θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+\lambda x+3}-3}{x^2-4x+3} \Leftrightarrow \left(x^2-4x+3\right)\cdot f(x)=\sqrt{x^2+\lambda x+3}-3 \text{ με } \lim_{x\to 3} f(x)=\ell.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 3}\left[\left(x^2-4x+3\right)\cdot f(x)\right]=\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{x^2+\lambda x+3}-3\right) \Rightarrow 0\cdot \ell=\sqrt{9+3\lambda+3}-3 \Rightarrow \lambda=-1.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-x+3}-3}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-x+3}^{\,2}-3^2}{\left(x^2-4x+3\right)\left(\sqrt{x^2-x+3}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}\,(x+2)}{\cancel{(x-3)}\,(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+3}+3\right)}=\frac{5}{12}.$$

13. 21 Για x κοντά στο –2 θέτουμε $f(x)=\dfrac{x^2+3\lambda x+\mu-4}{x^2+5x+6}$ και έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^2+3\lambda x+\mu-4}{x^2+5x+6} \Leftrightarrow \left(x^2+5x+6\right)\cdot f(x)=x^2+3\lambda x+\mu-4 \text{ με } \lim_{x\to -2} f(x)=2.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to -2}\left[\left(x^2+5x+6\right)\cdot f(x)\right]=\lim_{x\to -2}\left(x^2+3\lambda x+\mu-4\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\cdot 2=4-6\lambda+\mu-4 \Rightarrow \mu=6\lambda, \quad (1).$$

και:

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3\lambda x+6\lambda-4}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)+3\lambda(x+2)}{(x+2)(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x-2+3\lambda}{x+3}=-4+3\lambda \Rightarrow 3\lambda-4=2 \Rightarrow \lambda=2.$$

Από την (1) προκύπτει ότι $\mu=12$.

Οι τιμές $\lambda=2$, $\mu=12$ επαληθεύουν το αρχικό πρόβλημα, άρα είναι δεκτές.

13. 22 **α.** Είναι $\lim_{x\to 0}(2x-1)^2=1$ και $\lim_{x\to 0}\left[(2-x)^2-3\left(1-|x|-x^2\right)\right]=1$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x\to 0} f(x)=1$.

β. Είναι $\lim_{x\to 0}\left(1-\eta\mu^2 x\right)=1$ και $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{4x^4}{1+4x^2}+1\right)=1$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x\to 0} f(x)=1$.

13. 23 α. Το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x-3}{x+1}\cdot\dfrac{1}{(x-1)^2}\right]$.

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x+1}=-1<0$,
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι :

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x-3}{x+1}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\right]\overset{(-1)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty.$$

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)^2}{x^2+5x+6}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+2)}(x+3)}=\dfrac{0}{1}=0$.

γ. Έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h^2+h}{\sqrt{3h+1}-1}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(3h+1)\left(\sqrt{3h+1}+1\right)}{\sqrt{3h+1}^2-1^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3h+1)\left(\sqrt{3h+1}+1\right)}{3}=\dfrac{2}{3}$.

δ. Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$\left|\frac{3x^3-2x^2}{|x|}\cdot ημ\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\right|=\frac{|3x^3-2x^2|}{|x|}\cdot\left|ημ\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\right|\le\frac{|3x^3-2x^2|}{|x|}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{|3x^3-2x^2|}{|x|}\le\frac{3x^3-2x^2}{|x|}\cdot ημ\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\le\frac{|3x^3-2x^2|}{|x|}.$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{|3x^3-2x^2|}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{|x|^{\cancel{2}}\cdot|3x-2|}{\cancel{|x|}}\right)=0$ και ομοίως βρίσκουμε

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|3x^3-2x^2|}{|x|}=0$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^3-2x^2}{|x|}\cdot ημ\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\right)=0.$$

ε. Έχουμε $\lim\limits_{x\to -5^+}\ln(x+5)\underset{u\to 0^+}{\overset{x+5=u>0}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to -5^+}\dfrac{1}{\ln(x+5)}=0$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to -5^+}\frac{x^2+3x-10}{\ln(x+5)}=\lim_{x\to -5^+}\left[\left(x^2+3x-10\right)\cdot\frac{1}{\ln(x+5)}\right]=0\cdot 0=0.$$

στ. Το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{4}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(x^2+x+1\right)-4\left(x+1\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+x+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(x^2-x-1\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+x+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{2\left(x^2-x-1\right)}{\left(x+1\right)\left(x^2+x+1\right)}\cdot\frac{1}{x-1}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\left(x^2-x-1\right)}{\left(x+1\right)\left(x^2+x+1\right)}=-\dfrac{1}{3}<0,$
  - $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty,$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{4}{x^3-1}\right)=+\infty$ και
  - $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty,$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{4}{x^3-1}\right)=-\infty.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

13. 24 **α.** Αν $1-x=u$ με $x\to 1$, τότε το $u\to 0$ και έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}=\sigma\upsilon\nu\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1-u)\right]=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi u}{2}\right)=\eta\mu\frac{\pi u}{2}.$$

Τότε το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}}{1-x}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu\frac{\pi u}{2}}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu\frac{\pi u}{2}}{\frac{\pi u}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\underset{y\to 0}{\overset{\frac{\pi u}{2}=y}{=\!=}}\lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\eta\mu x}-\sqrt{1-\eta\mu x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\eta\mu x}^{\,2}-\sqrt{1-\eta\mu x}^{\,2}}{x\left(\sqrt{1+\eta\mu x}+\sqrt{1-\eta\mu x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\eta\mu x}+\sqrt{1-\eta\mu x}}\right)=2\cdot 1\cdot\frac{1}{1+1}=1.$$

γ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\eta\mu^2x+\eta\mu x-1}{2\eta\mu^2x-3\eta\mu x+1}\underset{u\to\frac{1}{2}}{\overset{\eta\mu x=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to\frac{1}{2}}\dfrac{2u^2+u-1}{2u^2-3u+1}=\lim\limits_{u\to\frac{1}{2}}\dfrac{\cancel{(2u-1)}(u+1)}{\cancel{(2u-1)}(u-1)}=-3.$

δ. Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$\left|\eta\mu 2x\cdot\eta\mu\frac{2}{x}\right|=|\eta\mu 2x|\cdot\left|\eta\mu\frac{2}{x}\right|\le|\eta\mu 2x|\Rightarrow-|\eta\mu 2x|\le\eta\mu 2x\cdot\eta\mu\frac{2}{x}\le|\eta\mu 2x|.$$

Ισχύουν:

$$\lim_{x\to 0}\left(-|\eta\mu 2x|\right)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}|\eta\mu 2x|=0.$$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu 2x\cdot\eta\mu\frac{2}{x}\right)=0.$

ε. Έχουμε $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\eta\mu x}{x-\pi}\overset{x-\pi=u}{\underset{u\to 0}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu(\pi+u)}{u}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{-\eta\mu u}{u}=-1.$

13. 25 **α.** Για x = 1 από την (1) έχουμε:

$$0\le f(1)\le 0\Rightarrow f(1)=0.$$

Ισχύουν $\lim\limits_{x\to 1}\left[3\left(x^2-1\right)\right]=0$ και $\lim\limits_{x\to 1}\left[2\left(x^3-1\right)\right]=0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0.$

Επομένως, η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

β. Από την (1) έχουμε:

- για x > 1:

$$3(x+1)\le\frac{f(x)}{x-1}\le 2\left(x^2+x+1\right),\ (2),$$

- για x < 1:

$$3(x+1)\ge\frac{f(x)}{x-1}\ge 2\left(x^2+x+1\right),\ (3).$$

Ισχύουν:

$$\lim_{x\to 1}\left[3(x+1)\right]=6 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1}\left[2\left(x^2+x+1\right)\right]=6.$$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής και τη (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{x-1}=6$ και από το κριτήριο παρεμβολής και την (3) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1}=6.$ (Είναι $f(1)=0.$)

γ. Το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f^2(x)}{\eta\mu(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)\cdot\frac{f(x)}{x-1}\cdot\frac{1}{\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}}\right).$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\overset{x-1=u}{\underset{u\to 0}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1.$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (α) και (β) το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f^2(x)}{\eta\mu(x-1)} = f(1) \cdot 6 \cdot \frac{1}{1} = 0.$$

13. 26 Για κάθε $x \in [0, 2]$ είναι $3x - 6 \le 0$. Η δοθείσα σχέση για $x \in [0, 2)$ γίνεται:

$$\frac{3\sqrt{x^2+5}-9}{3x-6} \ge f(x) \ge \frac{4\left(x - \sqrt{2|x|}\right)}{3x-6}.$$

Έχουμε:

- $$\lim_{x \to 2^-} \frac{4\left(x-\sqrt{2|x|}\right)}{3x-6} \overset{0<x<2}{=\!=} \lim_{x \to 2^-} \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{x^2 - \sqrt{2x}^2}{(x-2)\left(x+\sqrt{2x}\right)} \right] = \lim_{x \to 2^-} \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\left(x+\sqrt{2x}\right)} \right] = \frac{2}{3}.$$

- $$\lim_{x \to 2^-} \frac{3\sqrt{x^2+5}-9}{3x-6} = \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{x^2+5}^2 - 3^2}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{2}{3}.$$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \frac{2}{3}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα είναι συνεχής και στο 2, οπότε:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) \Rightarrow f(2) = \frac{2}{3}.$$

13. 27 **α.** **Α΄ τρόπος**

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $0 \le |f(x) - 1| \le |x^2 + x|$.

Είναι $\lim\limits_{x \to 0} |x^2 + x| = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$\lim\limits_{x \to 0} |f(x) - 1| = 0$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-|f(x)-1| \le f(x) - 1 \le |f(x) - 1|$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x \to 0}\left(f(x) - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

Β΄ τρόπος

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$|f(x) - 1| \le |x^2 + x| \Leftrightarrow 1 - |x^2 + x| \le f(x) \le 1 + |x^2 + x|.$$

Ισχύουν $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\left|x^2+x\right|\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\left|x^2+x\right|\right)=1$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

β. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left|f(x)-x+2\right|<\left|x-\eta\mu 2x\right| \Leftrightarrow x-2-\left|x-\eta\mu 2x\right|\le f(x)\le x-2+\left|x-\eta\mu 2x\right|.$$

Ισχύουν $\lim\limits_{x\to 0}\left(x-2-\left|x-\eta\mu 2x\right|\right)=-2$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(x-2+\left|x-\eta\mu 2x\right|\right)=-2$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-2$.

γ. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left|x\cdot f(x)-\eta\mu 2x\right|\le\left|x\cdot\eta\mu x\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\left|x\cdot\eta\mu x\right|+\eta\mu 2x\le x\cdot f(x)\le \eta\mu 2x+\left|x\cdot\eta\mu x\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-\left|x\cdot\eta\mu x\right|+\eta\mu 2x}{x}\le f(x)\le\dfrac{\eta\mu 2x+\left|x\cdot\eta\mu x\right|}{x}, & x>0,\ (1) \\ \dfrac{-\left|x\cdot\eta\mu x\right|+\eta\mu 2x}{x}\ge f(x)\ge\dfrac{\eta\mu 2x+\left|x\cdot\eta\mu x\right|}{x}, & x<0,\ (2) \end{cases}.$$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 2x}{x}\cdot 2\right)\overset{2x=u}{\underset{u\to 0}{=\!=}}2\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=2.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left|x\eta\mu x\right|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\left|\eta\mu x\right|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left|\eta\mu x\right|=0$ και ομοίως, βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\left|x\eta\mu x\right|}{x}=0$,

  οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left|x\eta\mu x\right|}{x}=0$.

Επομένως, έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\left|x\cdot\eta\mu x\right|+\eta\mu 2x}{x}=0+2=2$ και ομοίως, βρίσκουμε

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x+\left|x\cdot\eta\mu x\right|}{x}=2+0=2$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής και την (1) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$ και από το κριτήριο παρεμβολής και τη (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=2$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$.

δ. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$-4\le f^2(x)+4f(x)\le|x|-4 \Leftrightarrow 0\le\left(f(x)+2\right)^2\le|x| \Leftrightarrow 0\le\left|f(x)+2\right|\le\sqrt{|x|}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{|x|}-2\le f(x)\le\sqrt{|x|}-2.$$

Ισχύουν $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\sqrt{|x|}-2\right)=-2$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{|x|}-2\right)=-2$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-2$.

13. 28 α. Για x κοντά στο 1 θέτουμε $f(x)=\dfrac{\alpha x^3+2x+\alpha+\beta}{x-1}$ και έχουμε:

$$f(x)=\frac{\alpha x^3+2x+\alpha+\beta}{x-1}\Leftrightarrow (x-1)\cdot f(x)=\alpha x^3+2x+\alpha+\beta \text{ με } \lim_{x\to 1} f(x)=2.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\left[(x-1)\cdot f(x)\right]=\lim_{x\to 1}(\alpha x^3+2x+\alpha+\beta)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\cdot 2=\alpha+2+\alpha+\beta\Rightarrow \beta=-2-2\alpha,\quad (1)$$

και:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\alpha x^3+2x+\alpha-2-2\alpha}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\alpha(x^3-1)+2(x-1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left[\alpha\cdot(x^2+x+1)+2\right]}{\cancel{x-1}}=3\alpha+2,$$

οπότε $\lim_{x\to 1} f(x)=2\Rightarrow\ 3\alpha+2=2\Rightarrow \alpha=0.$

Από την (1) προκύπτει ότι $\beta=-2$.

β. Για x κοντά στο –1 θέτουμε $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+\alpha}+\beta}$ και έχουμε:

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x+\alpha}+\beta}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+\alpha}+\beta\right)\cdot f(x)=x+1 \text{ με } \lim_{x\to -1} f(x)=1.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to -1}\left[\left(\sqrt{x+\alpha}+\beta\right)\cdot f(x)\right]=\lim_{x\to -1}(x+1)\Rightarrow\left(\sqrt{\alpha-1}+\beta\right)\cdot 1=0\Rightarrow \beta=-\sqrt{\alpha-1},\ (1)$$

και:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x+\alpha}-\sqrt{\alpha-1}}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+\alpha}+\sqrt{\alpha-1}\right)}{\sqrt{x+\alpha}^{\,2}-\sqrt{\alpha-1}^{\,2}}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\left(\sqrt{x+\alpha}+\sqrt{\alpha-1}\right)=2\sqrt{\alpha-1},$$

οπότε $\lim_{x\to -1} f(x)=1\Rightarrow 2\sqrt{\alpha-1}=1\Rightarrow 4(\alpha-1)=1\Rightarrow \alpha=\dfrac{5}{4}.$

Από την (1) προκύπτει ότι $\beta=-\dfrac{1}{2}$.

γ. Για x κοντά στο 2 θέτουμε $f(x)=\dfrac{x^2+(\alpha-\beta)x+\alpha}{\alpha x-2\alpha}$ και έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^2+(\alpha-\beta)x+\alpha}{\alpha x-2\alpha}\Leftrightarrow(\alpha x-2\alpha)\cdot f(x)=x^2+(\alpha-\beta)x+\alpha \text{ με } \lim_{x\to 2} f(x)=1.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\left[(\alpha x-2\alpha)\cdot f(x)\right]=\lim_{x\to 2}\left[x^2+(\alpha-\beta)x+\alpha\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\cdot 1=4+2(\alpha-\beta)+\alpha\Rightarrow \beta=2+\frac{3\alpha}{2},\ (1)$$

και:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+\left(\alpha-2-\frac{3\alpha}{2}\right)x+\alpha}{\alpha(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+\frac{-4-\alpha}{2}\cdot x+\alpha}{\alpha(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha\cancel{(x-2)}}=\frac{4-\alpha}{2\alpha},$$

οπότε $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1\Rightarrow \dfrac{4-\alpha}{2\alpha}=1\Rightarrow 4-\alpha=2\alpha\Rightarrow \alpha=\dfrac{4}{3}$.

Από την (1) προκύπτει ότι $\beta=4$.

δ. Για x κοντά στο 3 θέτουμε $f(x)=\dfrac{x^2+2\alpha x+\beta-5}{x-3}$ και έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^2+2\alpha x+\beta-5}{x-3}\Leftrightarrow (x-3)\cdot f(x)=x^2+2\alpha x+\beta-5 \text{ με } \lim_{x\to 3}f(x)=12.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 3}\left[(x-3)\cdot f(x)\right]=\lim_{x\to 3}\left(x^2+2\alpha x+\beta-5\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\cdot 12=9+6\alpha+\beta-5\Rightarrow \beta=-6\alpha-4,\ (1)$$

και:

$$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2\alpha x-6\alpha-4-5}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3+2\alpha)}{\cancel{x-3}}=6+2\alpha,$$

οπότε $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=12\Rightarrow 6+2\alpha=12\Rightarrow \alpha=3$.

Από την (1) προκύπτει ότι $\beta=-22$.

13. 29 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lambda x-2}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\left[(\lambda x-2)\cdot\dfrac{1}{(x-1)^2}\right]$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$, το όριο λαμβάνει τη μορφή $(\lambda-2)\cdot(+\infty)$.

- Αν $\lambda>2$, τότε το όριο είναι ίσο με $+\infty$.
- Αν $\lambda<2$, τότε το όριο είναι ίσο με $-\infty$.

- Αν $\lambda = 2$, τότε το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x-1}$ που δεν υπάρχει.

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\lambda x^3+27}{|x+3|} = \lim\limits_{x\to -3}\left[\left(\lambda x^3+27\right)\cdot\dfrac{1}{|x+3|}\right]$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{|x+3|} = +\infty$, το όριο λαμβάνει τη μορφή –27(λ – 1) · (+∞).

- Αν $\lambda > 1$, τότε το όριο είναι ίσο με –∞.
- Αν $\lambda < 1$, τότε το όριο είναι ίσο με +∞.
- Αν $\lambda = 1$, τότε το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{|x+3|} = \lim\limits_{x\to -3}\left[\dfrac{x+3}{|x+3|}\cdot\left(x^2+3x+9\right)\right]$.

  Ισχύουν:

  - $\lim\limits_{x\to -3}\left(x^2+3x+9\right) = 9 > 0$,
  - $\lim\limits_{x\to -3^-}\left[\dfrac{x+3}{|x+3|}\cdot\left(x^2+3x+9\right)\right] = \lim\limits_{x\to -3^-}\left[\dfrac{x+3}{-(x+3)}\cdot\left(x^2+3x+9\right)\right] = -9$ και
  - $\lim\limits_{x\to -3^+}\left[\dfrac{x+3}{|x+3|}\cdot\left(x^2+3x+9\right)\right] = \lim\limits_{x\to -3^+}\left[\dfrac{x+3}{x+3}\cdot\left(x^2+3x+9\right)\right] = 9$.

  Συνεπώς, για $\lambda = 1$ το όριο δεν υπάρχει.

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-(2+\lambda x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}^2-(2+\lambda x)^2}{x^3\left(\sqrt{4+x}+2+\lambda x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4+x-\left(4+4\lambda x+\lambda^2x^2\right)}{x^3\left(\sqrt{4+x}+2+\lambda x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\lambda^2x+4\lambda-1}{\sqrt{4+x}+2+\lambda x}\cdot\frac{1}{x^2}\right).$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{\lambda^2x+4\lambda-1}{\sqrt{4+x}+2+\lambda x}\right) = -\dfrac{4\lambda-1}{4}$, το όριο λαμβάνει τη μορφή $-\left(\dfrac{4\lambda-1}{4}\right)\cdot(+\infty)$.

- Αν $\lambda > \dfrac{1}{4}$, τότε το όριο είναι ίσο με –∞.
- Αν $\lambda < \dfrac{1}{4}$, τότε το όριο είναι ίσο με +∞.

- Αν $\lambda=\frac{1}{4}$, τότε το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\left(2+\frac{1}{4}x\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{4+x-4-x-\frac{x^2}{16}}{x^3\cdot\left(\sqrt{4+x}+2+\frac{1}{4}x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{16\left(\sqrt{4+x}+2+\frac{1}{4}x\right)}\right).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{16\left(\sqrt{4+x}+2+\frac{1}{4}x\right)}=-\frac{1}{64}$ και το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Συνεπώς, για $\lambda=-\frac{1}{4}$ το όριο δεν υπάρχει.

δ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-\lambda}{(x-9)^4}=\lim\limits_{x\to 9}\left[\left(\sqrt{x}-\lambda\right)\cdot\frac{1}{(x-9)^4}\right].$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 9}\left(\sqrt{x}-\lambda\right)=3-\lambda$ και $\lim\limits_{x\to 9}\frac{1}{(x-9)^4}=+\infty$, το όριο λαμβάνει τη μορφή

$(3-\lambda)\cdot(+\infty)$.

- Αν $3-\lambda>0\Leftrightarrow\lambda<3$, τότε το όριο είναι ίσο με $+\infty$.
- Αν $\lambda>3$, τότε το όριο είναι ίσο με $-\infty$.
- Αν $\lambda=3$, τότε το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{(x-9)^4}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}^2-3^2\right)^4}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}-3\right)^4\cdot\left(\sqrt{x}+3\right)^4}=$$

$$=\lim_{x\to 9}\left[\frac{1}{\left(\sqrt{x}+3\right)^4}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x}-3\right)^3}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 9}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+3\right)^4}=\frac{1}{6^4}>0,$

- $\lim\limits_{x\to 9}\frac{1}{\left(\sqrt{x}-3\right)^3}\overset{\left(\sqrt{x}-3\right)^3=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\frac{1}{u},$

- $\lim\limits_{u \to 0^-} \frac{1}{u} = -\infty$, οπότε $\lim\limits_{x \to 9^-} \frac{\sqrt{x}-3}{(x-9)^4} = -\infty$ και
- $\lim\limits_{u \to 0^+} \frac{1}{u} = +\infty$, οπότε $\lim\limits_{x \to 9^+} \frac{\sqrt{x}-3}{(x-9)^4} = +\infty$.

Συνεπώς, για $\lambda = 3$ το όριο δεν υπάρχει.

ε. Έχουμε $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{|x|^\lambda + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1^2 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\left(|x|^\lambda + x^2\right)\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)} = \lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{1}{|x|^{\lambda-2}+1}\right)$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right) = \frac{1}{2}$, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2$, τότε $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|^{\lambda-2}+1} = 1$. Άρα, το όριο είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.
- Αν $\lambda - 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 2$, τότε $\lim\limits_{x \to 0}\left(|x|^{\lambda-2}+1\right) = +\infty$, οπότε $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|^{\lambda-2}+1} = 0$.

  Άρα, το όριο είναι ίσο με 0.
- Αν $\lambda = 2$, τότε το όριο γίνεται:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{|x|^2 + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1^2 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{2x^2(1+\sigma\upsilon\nu x)} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{2(1+\sigma\upsilon\nu x)}\right) = \frac{1}{4}.$$

στ. Έχουμε $\lim\limits_{x \to -\lambda} \frac{-\lambda x^2 + \left(\lambda^2 - 3\lambda\right)x - 3\lambda^2}{|x+\lambda|} = \lim\limits_{x \to -\lambda}\left\{\left[-\lambda x^2 + \left(\lambda^2 - 3\lambda\right)x - 3\lambda^2\right]\cdot\frac{1}{|x+\lambda|}\right\}$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to -\lambda} \frac{1}{|x+\lambda|} = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to -\lambda}\left[-\lambda x^2 + \left(\lambda^2 - 3\lambda\right)x - 3\lambda^2\right] = -2\lambda^3$, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $-2\lambda^3 > 0 \Leftrightarrow \lambda < 0$, τότε το όριο είναι ίσο με $+\infty$.
- Αν $-2\lambda^3 < 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$, τότε το όριο είναι ίσο με $-\infty$.
- Αν $\lambda = 0$, τότε το όριο είναι $\lim\limits_{x \to 0} \frac{0}{|x|} = 0$.

ζ. Έχουμε $\lim\limits_{x \to \lambda} \frac{x^2 - (\lambda+1)x + \lambda}{x^3 - \lambda^3} = \lim\limits_{x \to \lambda} \frac{\cancel{(x-\lambda)}(x-1)}{\cancel{(x-\lambda)}\left(x^2 + \lambda x + \lambda^2\right)} = \frac{\lambda - 1}{3\lambda^2}$, $\lambda \neq 0$.

Αν $\lambda = 0$, τότε το όριο γίνεται $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0}\left[(x-1)\cdot\frac{1}{x^2}\right] \overset{(-1)\cdot(+\infty)}{=} -\infty$.

η. Έχουμε $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 + (\lambda+1)x + 3\lambda}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x \to 2}\left\{\left[x^3 + (\lambda+1)x + 3\lambda\right]\cdot\frac{1}{(x-2)^2}\right\}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2}\left[x^3+(\lambda+1)x+3\lambda\right]=10+5\lambda$, το όριο είναι της μορφής $(10 + 5\lambda)\cdot(+\infty)$.

- Αν $10 + 5\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda > -2$, τότε το όριο είναι ίσο με $+\infty$.
- Αν $10 + 5\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda < -2$, τότε το όριο είναι ίσο με $-\infty$.
- Αν $\lambda = -2$, τότε το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x-6}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+3)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\left[(x^2+2x+3)\cdot\frac{1}{x-2}\right].$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+3)=11>0$,
  - $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-x-6}{(x-2)^2}=-\infty$ και
  - $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3-x-6}{(x-2)^2}=+\infty$.

Συνεπώς, για $\lambda = -2$ το όριο δεν υπάρχει.

13. 30 Για $x \neq 3$ κοντά στο 3 η δοθείσα γίνεται:

$$(x^2-4x+3)\cdot f(x)=\kappa|x+3|+\lambda|x-4|-2\mu+1 \text{ με } \lim_{x\to 3}f(x)=\ell\in\mathbb{R}.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 3}\left[(x^2-4x+3)\cdot f(x)\right]=\lim_{x\to 3}\,[\kappa|x+3|+\lambda|x-4|-2\mu+1]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\cdot\ell=6\kappa+\lambda-2\mu+1\Rightarrow -2\mu+1=-6\kappa+\lambda.$$

Κοντά στο 3 είναι $x + 2 > 0$ και $x - 4 < 0$, οπότε:

$$f(x)=\frac{\kappa(x+2)+\lambda(4-x)-6\kappa+\lambda}{x^2-4x+3}\Leftrightarrow (x^2-4x+3)\cdot f(x)=(\kappa-\lambda)x-4\kappa+3\lambda.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 3}\left[(x^2-4x+3)\cdot f(x)\right]=\lim_{x\to 3}\,[(\kappa-\lambda)x-4\kappa+3\lambda]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\cdot 3=(\kappa-\lambda)\cdot 3-4\kappa+3\lambda\Rightarrow \kappa=0.$$

Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(\kappa, \lambda)$ είναι η ευθεία ε: $x = 0$.

13. 31 • $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\eta\mu\left[\lambda(x-2)\right]}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\left\{\dfrac{\eta\mu\left[\lambda(x-2)\right]}{\lambda(x-2)}\cdot\dfrac{\lambda}{x}\right\}=\dfrac{\lambda}{2}$, διότι $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\eta\mu[\lambda(x-2)]}{\lambda(x-2)} \overset{\lambda(x-2)=u}{\underset{u\to 0}{=\!=}} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\eta\mu u}{u} = 1.$

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{x-2}{\sqrt{x-2+\lambda^2} - |\lambda|} - 1 \right) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x-2+\lambda^2} + |\lambda|\right)}{\sqrt{x-2+\lambda^2}^{\,2} - |\lambda|^2} - 1 \right) =$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\sqrt{x-2+\lambda^2} + |\lambda| - 1 \right) = 2|\lambda| - 1.$

Αν $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \in \mathbb{R}$, τότε πρέπει:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} = 2|\lambda| - 1 \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{\lambda+2}{4},\ (1).$$

- Αν $\lambda < -2$, τότε η (1) είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda \geq -2$, τότε από την (1) έχουμε $\left\{\lambda = \dfrac{\lambda+2}{4} \text{ ή } \lambda = -\dfrac{\lambda+2}{4}\right\} \Rightarrow \left\{\lambda = \dfrac{2}{3} \text{ ή } \lambda = \dfrac{2}{5}\right\}.$

  Η f θα είναι συνεχής στο 2, αν $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 0.$

  - Για $\lambda = \dfrac{2}{3}$ είναι $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{2}{3} \Rightarrow 0 = \dfrac{2}{3}$ που είναι άτοπο.
  - Για $\lambda = \dfrac{2}{5}$ είναι $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{2}{5} \Rightarrow 0 = \dfrac{2}{5}$ που είναι άτοπο.

Επομένως, δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο 2.

13. 32 Για x κοντά στο $\dfrac{1}{2}$ θέτουμε $f(x) = \dfrac{2x^2 + (5+2\alpha^2)x + \beta - 1}{2x-1}$ και έχουμε:

$$\frac{2x^2 + (5+2\alpha^2)x + \beta - 1}{2x-1} = f(x) \Leftrightarrow (2x-1)\cdot f(x) = 2x^2 + (5 + 2\alpha 2)x + \beta - 1$$

με $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = 9.$ Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} [(2x-1)\cdot f(x)] = \lim_{x\to \frac{1}{2}} \left[2x^2 + (5+2\alpha^2)x + \beta - 1\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\cdot 9 = \frac{1}{2} + \frac{5+2\alpha^2}{2} + \beta - 1 \Rightarrow \beta = -2 - \alpha^2,\ (1)$$

και:

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) \overset{(1)}{=} \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + (5+2\alpha^2)x - \alpha^2 - 3}{2x-1} \overset{\text{Horner}}{=\!=} \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\cancel{(2x-1)}(2x+6+2\alpha^2)}{\cancel{2x-1}} = 7 + 2\alpha^2,$$

οπότε $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = 9 \Rightarrow 7 + 2\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1.$ Από την (1) προκύπτει ότι $\beta = -3.$

13. 33 Για $x \neq 0$ η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$4 \cdot \frac{f^3(x)}{x^3} + \frac{f^2(x)}{x^2} - 2 \cdot \frac{f(x)}{x} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[4 \cdot \left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 - 2 \cdot \frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{x\to 0} 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha = 3 \Rightarrow (\alpha - 1)(4\alpha^2 + 5\alpha + 3) = 0 \Rightarrow \alpha = 1,$$

διότι $4\alpha^2 + 5\alpha + 3 \neq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. (Η διακρίνουσα του τριωνύμου $4\alpha^2 + 5\alpha + 3$ είναι $\Delta = -23 < 0$.)

13. 34 Έχουμε $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + (\mu-1)x - \mu}{x^2 - 4x + 4} = \lim\limits_{x\to 2}\left\{\left[x^2 + (\mu-1)x - \mu\right] \cdot \dfrac{1}{(x-2)^2}\right\}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2} [x^2 + (\mu - 1)x - \mu] = \mu + 2$, το όριο είναι της μορφής $(\mu + 2) \cdot (+\infty)$.

- Αν $\mu + 2 > 0 \Leftrightarrow \mu > -2$, τότε το όριο είναι ίσο με $+\infty$.
- Αν $\mu + 2 < 0 \Leftrightarrow \mu < -2$, τότε το όριο είναι ίσο με $-\infty$.
- Αν $\mu = -2$, τότε το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to 2}\left[(x-1) \cdot \dfrac{1}{x-2}\right]$.

  Ισχύουν:

  - $\lim\limits_{x\to 2^-}\left[(x-1) \cdot \dfrac{1}{x-2}\right] = -\infty$ και
  - $\lim\limits_{x\to 2^+}\left[(x-1) \cdot \dfrac{1}{x-2}\right] = +\infty$.

Συνεπώς, για $\mu = -2$ το όριο δεν υπάρχει.

13. 35 **α.** Για x κοντά στο 3 θέτουμε $g(x) = \dfrac{3f(x) + x - 2}{x^2 - 1}$ και έχουμε:

$$g(x) = \frac{3f(x) + x - 2}{x^2 - 1} \Leftrightarrow (x^2 - 1) \cdot g(x) - x + 2 = 3f(x) \text{ με } \lim_{x\to 3} g(x) = 2.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\left[(x^2 - 1) \cdot g(x) - x + 2\right] = 8 \cdot 2 - 3 + 2 = 15.$$

β. Για $x > 0$ και κοντά στο 0 θέτουμε $g(x) = \dfrac{\ln x}{f(x)}$ και έχουμε:

$$g(x)=\frac{\ln x}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)=\ln x\cdot\frac{1}{g(x)} \text{ με } \lim_{x\to 0} g(x)=0.$$

Για x κοντά στο 0 είναι $\ln x<0$. Επίσης, είναι $f(x)>0$ για $x>0$, οπότε $g(x)<0$ κοντά στο 0. Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{g(x)}=-\infty$.

Επομένως:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\ln x\cdot\frac{1}{g(x)}\right)\overset{(-\infty)\cdot(-\infty)}{=\!=}+\infty.$$

13. 36 α. Για x κοντά στο 1 θέτουμε $g(x)=\frac{x^2+e^x}{f(x)}$ και έχουμε:

$$g(x)=\frac{x^2+e^x}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2+e^x}{g(x)} \text{ με } \lim_{x\to 1} g(x)=+\infty.$$

Τότε έχουμε $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{g(x)}=0$.

Επομένως:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left[\left(x^2+e^x\right)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]=(1+e)\cdot 0=0.$$

β. Για x κοντά στο 1 θέτουμε $g(x)=\frac{\left(x^2-3x\right)\cdot f(x)}{\ln(x-1)-e^{2x}}$ και έχουμε:

$$g(x)=\frac{\left(x^2-3x\right)\cdot f(x)}{\ln(x-1)-e^{2x}} \Leftrightarrow \frac{g(x)\cdot\left(\ln(x-1)-e^{2x}\right)}{x^2-3x}=f(x) \text{ με } \lim_{x\to 1} g(x)=-\infty.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\left(\ln(x-1)-e^{2x}\right)\underset{u\to 0^+}{\overset{x-1=u>0}{=\!=}}\lim_{u\to 0^+}\left(\ln u-e^{2(u+1)}\right)=-\infty,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)-e^{2x}}{x^2-3x}\overset{\left(\frac{-\infty}{-2}\right)}{=\!=}+\infty.$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left[g(x)\cdot\frac{\ln(x-1)-e^{2x}}{x^2-3x}\right]=-\infty.$$

γ. Για x κοντά στο 1 θέτουμε $g(x)=\frac{\eta\mu\frac{1}{x-1}}{f(x)\left(x+\sqrt{x}\right)}$ και έχουμε:

$$g(x)=\frac{\eta\mu\frac{1}{x-1}}{f(x)\left(x+\sqrt{x}\right)}\Leftrightarrow f(x)=\frac{\eta\mu\frac{1}{x-1}}{x+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{g(x)},\ (1),$$

με $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{g(x)}=0,\ g(x)>0.$

Για x κοντά στο 1 με $x\neq 1$ έχουμε:

$$\left|\frac{\eta\mu\frac{1}{x-1}}{x+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{g(x)}\right|=\frac{\left|\eta\mu\frac{1}{x-1}\right|}{x+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{g(x)}\leq\frac{1}{x+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{g(x)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{x+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{g(x)}\leq\frac{\eta\mu\frac{1}{x-1}}{x+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{g(x)}\leq\frac{1}{x+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{g(x)}.$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{g(x)}\right)=-\frac{1}{2}\cdot 0=0$ και ομοίως, βρίσκουμε

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{g(x)}\right)=0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\eta\mu\frac{1}{x-1}}{x+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{g(x)}\right)=0\overset{(1)}{\Rightarrow}\lim_{x\to 1}f(x)=0.$$

13. 37 Για x κοντά στο 0 θέτουμε $\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)f(x)}{\eta\mu 3x}=g(x)$ και έχουμε:

$$\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)f(x)}{\eta\mu 3x}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\frac{g(x)\cdot\eta\mu 3x}{\sqrt{x+4}-2}\ \text{ με }\ \lim_{x\to 0}g(x)=-\infty.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\sqrt{x+4}^2-2^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu 3x}{3x}\cdot 3\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)\right]=$$

$$=1\cdot 3\cdot\left(\sqrt{4}+2\right)=12>0.$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left(g(x)\cdot\frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{x+4}-2}\right)=-\infty.$$

13. 38 **α.** Για x κοντά στο 0 θέτουμε $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ και έχουμε:

$$g(x)=\frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xg(x)=f(x) \text{ με } \lim_{x\to 0} g(x)=2.$$

Η f είναι συνεχής στο 0, άρα $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \Rightarrow \lim_{x\to 0}(xg(x))=f(0) \Rightarrow f(0)=0.$

Ισχύουν:

- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right)=2-1=1,$
- $\lim_{x\to 0}\left(2+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{1}{x^2}\right)\overset{2+1\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty,$ οπότε $\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{1}{x^2}}=0.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\eta\mu^2 x}{2x^2+\sigma\upsilon\nu x} \overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}}{2+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{1}{x^2}}=0.$$

β. Επειδή η f είναι συνεχής στο 1, ισχύει $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=1.$

Αν $u=f(x),$ τότε το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)+3}-2}{f^2(x)-1}=\lim_{u\to 1}\frac{\sqrt{u+3}-2}{u^2-1}=\lim_{u\to 1}\frac{\sqrt{u+3}^2-2^2}{(u^2-1)(\sqrt{u+3}+2)}=$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{1}{(u+1)(\sqrt{u+3}+2)}=\frac{1}{8}.$$

13. 39 **α.** Για x κοντά στο 0 θέτουμε $\frac{x+1+\eta\mu(\ln x)}{f(x)}=g(x)$ και έχουμε:

$$\frac{x+1+\eta\mu(\ln x)}{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow f(x)=(x+1+\eta\mu(\ln x))\cdot\frac{1}{g(x)}, \quad (1),$$

με $\lim_{x\to 0} g(x)=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{g(x)}=0.$

Για x κοντά στο 0 με x > 0 έχουμε:

$$\left|(x+1+\eta\mu(\ln x))\cdot\frac{1}{g(x)}\right|=$$

$$=\left|(x+1+\eta\mu(\ln x))\right|\cdot\frac{1}{|g(x)|}\le\frac{|x+1|+|\eta\mu(\ln x)|}{|g(x)|}\le\frac{|x+1|+1}{|g(x)|}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{|x+1|+1}{|g(x)|} \le \left(x+1+\eta\mu(\ln x)\right)\cdot\frac{1}{g(x)} \le \frac{|x+1|+1}{|g(x)|}.$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\left[-\left(|x+1|+1\right)\cdot\dfrac{1}{g(x)}\right] = -2\cdot 0 = 0$ και ομοίως, βρίσκουμε

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(|x+1|+1\right)\cdot\dfrac{1}{g(x)}\right] = 0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1+\eta\mu(\ln x)}{g(x)} = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

β. Για x κοντά στο 0 θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)\cdot\eta\mu 3x}{\sqrt{2x+1}-1}$ και έχουμε:

$$g(x)=\frac{f(x)\cdot\eta\mu 3x}{\sqrt{2x+1}-1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\eta\mu 3x}\cdot g(x) = f(x),\ (2),\ \text{με } \lim_{x\to 0} g(x) = +\infty.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\eta\mu 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}^{\,2}-1^2}{\eta\mu 3x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}\cdot 3\cdot\left(\sqrt{2x+1}+1\right)} = \frac{1}{3} > 0.$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{(2)}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\eta\mu 3x}\cdot g(x)\right) \overset{\frac{1}{3}\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty.$$

13. 40 α. Για $x \neq 0$ η (1) γίνεται:

$$\frac{1}{x^3}\cdot\left(f^3(x)+5x^2 f(x)\right) = \frac{1}{x^3}\cdot 6\eta\mu^3 x \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + 5\cdot\frac{f(x)}{x} = 6\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + 5\cdot\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[6\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell^3 + 5\ell - 6 = 0 \Rightarrow (\ell - 1)\cdot\left(\ell^2+\ell+6\right) = 0 \Rightarrow \ell = 1$$

όπου $\ell^2+\ell+6 \neq 0$, διότι το τριώνυμο έχει $\Delta = -23 < 0$.

β. i. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}\right) = 1$, διότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x} \underset{u\to 0}{\overset{\eta\mu x = u}{=\!=}} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u} \overset{(\alpha)}{=} 1.$

ii. Για x κοντά στο 0 θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ και έχουμε:

$$g(x)=\frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xg(x)=f(x) \text{ με } \lim_{x\to 0} g(x) \overset{(\alpha)}{=} 1.$$

Τότε ισχύουν:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(xg(x)\right)=0\cdot 1=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}\frac{f\left(f(x)\right)}{f(x)} \underset{u\to 0}{\overset{f(x)=u}{=\!=}} \lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u} \overset{(\alpha)}{=} 1.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f\left(f(x)\right)}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f\left(f(x)\right)}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{2x}\right) \overset{(\alpha)}{=} 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

iii. Το όριο γράφεται $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x^2-x\right)}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{f\left(x^2-x\right)}{x^2-x}\cdot\frac{x^2-x}{x^2-5x+4}\right).$

Ισχύουν:

- $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x-4)}=-\frac{1}{3},$

- $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x^2-x\right)}{x^2-x} \underset{u\to 0}{\overset{x^2-x=u}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u} \overset{(\alpha)}{=} 1.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x^2-x\right)}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{f\left(x^2-x\right)}{x^2-x}\cdot\frac{x^2-x}{x^2-5x+4}\right)=-\frac{1}{3}.$$

13. 41 **α.** Για x κοντά στο 2 θέτουμε $g(x)=f(x)\cdot\dfrac{\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x^2+5}-3}$ και έχουμε:

$$g(x)=f(x)\cdot\frac{\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x^2+5}-3} \Leftrightarrow f(x)=g(x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\eta\mu(x-2)},\ (1),$$

με $\displaystyle\lim_{x\to 2} g(x)=-\infty.$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\eta\mu(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}^{\,2}-3^2}{\eta\mu(x-2)\cdot\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\eta\mu(x-2)\cdot\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\cdot\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\frac{2}{3}>0,$$

διότι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\underset{u\to 0}{\overset{x-2=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$ και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\dfrac{2}{3}$.

Συνεπώς, από την (1) βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(g(x)\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\eta\mu(x-2)}\right)=-\infty$.

β. Για x κοντά στο 2 θέτουμε $\dfrac{f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{4}}{x^2-4}=g(x)$ και έχουμε:

$$\frac{f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{4}}{x^2-4}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)\cdot\frac{x^2-4}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{4}},\ (2),\ \mu\varepsilon\ \lim_{x\to 2}g(x)=+\infty.$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{4}}=\lim\limits_{x\to 2}\left[(x+2)\cdot\dfrac{1}{\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{4}}{x-2}}\right]=-\dfrac{16}{\pi}<0$, διότι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{4}}{x-2}\underset{u\to 0}{\overset{x-2=u}{=\!=}}\lim_{u\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\left[\frac{\pi}{4}\cdot(u+2)\right]}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi u}{4}\right)}{u}=$$

$$=\lim_{u\to 0}\left(\frac{-\eta\mu\frac{\pi u}{4}}{\frac{\pi u}{4}}\cdot\frac{\pi}{4}\right)\underset{y\to 0}{\overset{\frac{\pi u}{4}=u}{=\!=}}\lim_{y\to 0}\frac{-\eta\mu y}{y}\cdot\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4},$$

Συνεπώς, από τη (2) βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to 2}f(x)\overset{(2)}{=}\lim\limits_{x\to 2}\left(g(x)\cdot\dfrac{x^2-4}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{4}}\right)=-\infty$.

γ. Για x κοντά στο 2 θέτουμε $g(x)=\dfrac{x^3-x+1}{f(x)+1}$ και έχουμε:

$$g(x)=\frac{x^3-x+1}{f(x)+1}\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^3-x+1}{g(x)}-1,\ (3),$$

με $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{g(x)}=0$.

Συνεπώς, από την (3) βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3-x+1}{g(x)}-1\right)=7\cdot 0-1=-1$.

13. 42 Έστω $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\ell\neq 0$.

Αν $\ell < 0$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cdot\dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$ που είναι άτοπο.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ell > 0$, οπότε υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ κοντά στο 0, ώστε $f(x_1) > 0$.

Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cdot\dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$ που είναι άτοπο.

Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cdot\dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$, οπότε υπάρχει x_1 κοντά στο 0, ώστε $f(x_1) > 0$.

13. 43 Για x κοντά στο 1 θεωρούμε τις συναρτήσεις:

- $h(x) = \dfrac{f(x)}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = (x-1)\cdot h(x)$, (1), με $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = 3$ και
- $k(x) = g(x)\cdot(x^3-1) \Leftrightarrow g(x) = \dfrac{k(x)}{x^3-1}$, (2), με $\lim\limits_{x\to 1} k(x) = -\infty$.

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\left[f(x)\cdot g(x)\right] \overset{(1)}{\underset{(2)}{=\!=}} \lim_{x\to 1}\left[(x-1)\cdot h(x)\cdot\frac{k(x)}{x^3-1}\right] = \lim_{x\to 1}\left(\frac{h(x)}{x^2+x+1}\cdot k(x)\right) \overset{1\cdot(-\infty)}{=\!=} -\infty.$$

13. 44 **α.** Για $x = -1$ από την (1) προκύπτει ότι $2 \le f(-1) \le 2 \Leftrightarrow f(-1) = 2$.

β. Από την (1) έχουμε:

$$2\sqrt{x+2} - 2 \le f(x) - 2 \le x+1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{x+2}-2}{x+1} \le \dfrac{f(x)-2}{x+1} \le 1, \ x > -1, \ (2) \\ \dfrac{2\sqrt{x+2}-2}{x+1} \ge \dfrac{f(x)-2}{x+1} \ge 1, \ x < -1, \ (3) \end{cases}.$$

Επίσης έχουμε $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2\left(\sqrt{x+2}-1\right)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2\left(\sqrt{x+2}^{\,2} - 1^2\right)}{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+1} = 1.$

Άρα, από το κριτήριο παρεμβολής και τη (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-2}{x+1} = 1$

και από το κριτήριο παρεμβολής και την (3) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-2}{x+1} = 1.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-2}{x+1} = 1.$

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-1}\frac{2f^2(x)-8}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-1}\frac{2\big(f(x)-2\big)\big(f(x)+2\big)}{(x+1)(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\left(2\cdot\frac{f(x)-2}{x+1}\cdot\frac{f(x)+2}{x+2}\right)\overset{(\beta)}{=}2\cdot1\cdot4=8.$$

13. 45 **α.** Θέτουμε $\sqrt[6]{x}=u\Rightarrow\left\{\sqrt[3]{x}=u^2,\ \sqrt{x}=u^3,\ x=u^6\right\}$ και επειδή $x\to0$, το $x\to0^+$ και το $u\to0^+$. Επομένως:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{u\to0}\frac{u^3+u^2}{u^6}=\lim_{u\to0}\left[(u+1)\cdot\frac{1}{u^4}\right]\overset{1\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$$

β. Θέτουμε $\sqrt[15]{x}=u\Rightarrow\left\{\sqrt[3]{x}=u^5,\ \sqrt[5]{x}=u^3\right\}$ και επειδή $x\to1$, το $u\to1$. Επομένως:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=\lim_{u\to1}\frac{u^5-1}{u^3-1}=\lim_{u\to1}\frac{\cancel{(u-1)}\left(u^4+u^3+u^2+u+1\right)}{\cancel{(u-1)}\left(u^2+u+1\right)}=\frac{5}{3}.$$

13. 46 **α.** Θέτουμε $\sqrt[60]{x}=u\Rightarrow\left\{\sqrt{x}=u^{30},\ \sqrt[3]{x}=u^{20},\ \sqrt[4]{x}=u^{15},\ \sqrt[5]{x}=u^{12}\right\}$ και επειδή $x\to1$, το $u\to1$. Επομένως:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}}=\lim_{u\to1}\frac{u^{30}-u^{20}}{u^{15}-u^{12}}=\lim_{u\to1}\frac{u^{20}\left(u^{10}-1\right)}{u^{12}\left(u^3-1\right)}=$$

$$=\lim_{u\to1}\left[u^8\cdot\frac{(u-1)\left(u^9+u^8+...+u+1\right)}{(u-1)\left(u^2+u+1\right)}\right]=\frac{10}{3}.$$

β. Θέτουμε $\sqrt[6]{1+x}=u\Rightarrow\left\{\sqrt[3]{1+x}=u^2,\ \sqrt{1+x}=u^3\right\}$ και επειδή $x\to0$, το $u\to1$.

Επομένως:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{u\to1}\frac{1-u^2}{u^3-1}=\lim_{u\to1}\frac{-(u+1)}{u^2+u+1}=-\frac{2}{3}.$$

γ. Για x κοντά στο 0 έχουμε:

$$\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt[4]{x^2+1}-1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+4}^{\,2}-2^2\right)\left(\sqrt[4]{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)\left(\sqrt[4]{x^2+1}^{\,2}-1^2\right)}=\frac{x^2\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}=$$

$$=\frac{x^2\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)\left(\sqrt{x^2+1}^{\,2}-1^2\right)}=\frac{\left(\sqrt[4]{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\sqrt{x^2+4}+2}.$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt[4]{x^2+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[4]{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\sqrt{x^2+4}+2}=1.$

δ. Θέτουμε $\sqrt[60]{x}=u \Rightarrow \left\{\sqrt[4]{x}=u^{15},\ \sqrt[3]{x}=u^{20},\ \sqrt{x}=u^{30},\ \sqrt[5]{x}=u^{12}\right\}$ και επειδή $x \to 1$, το $u \to 1$. Επομένως:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-3}{\sqrt[5]{x}-\sqrt{x}}=\lim_{u\to 1}\frac{u^{15}+u^{20}+u^{30}-3}{u^{12}-u^{30}}=$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{\cancel{(u-1)}\left[\left(u^{14}+\ldots+1\right)+\left(u^4+\ldots+1\right)\cdot\left(u^5+1\right)\left(u^{10}+1\right)+\left(u^{14}+\ldots+1\right)\left(u^{15}+1\right)\right]}{-u^{12}\cdot\cancel{(u-1)}\left(u^8+\ldots+1\right)\left(u^9+1\right)}=$$

$$=\frac{15+5\cdot 2\cdot 2+15\cdot 2}{-9\cdot 2}=-\frac{65}{18}.$$

13. 47 Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(-x)=f(x),\ (1).$

Επομένως:

$$\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to -3}\frac{f(-x)-f(3)}{x+3}\underset{u\to 3}{\overset{-x=u}{=\!=}}\lim_{u\to 3}\frac{f(u)-f(3)}{-u+3}=$$

$$=-\lim_{u\to 3}\frac{f(u)-f(3)}{u-3}=-(-5)=5.$$

13. 48 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to -1}f(x-1)\underset{u\to -2}{\overset{x-1=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to -2}f(u)=1.$

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}f(2x-3)\underset{u\to -2}{\overset{2x-3=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to -2}f(u)=1.$

13. 49 **α.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(-x)=-f(x),\ (1).$

Επομένως: $\lim\limits_{x\to -1}f(x)\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to -1}\left(-f(-x)\right)\underset{u\to 1}{\overset{-x=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 1}\left(-f(u)\right)=-2.$

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}f(x-2)\underset{u\to -1}{\overset{x-2=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to -1}f(u)\overset{(\alpha)}{=}-2.$

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(-x)+6}-f(x)}{-f(x)+2}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{6-f(x)}-f(x)}{-f(x)+2}\underset{u\to 2}{\overset{f(x)=u}{=\!=}}\lim_{u\to 2}\frac{\sqrt{6-u}-u}{2-u}=$$

$$=\lim_{u\to 2}\frac{\sqrt{6-u}^{\,2}-u^2}{(2-u)\left(\sqrt{6-u}+u\right)}=\lim_{u\to 2}\frac{(u+3)\cancel{(2-u)}}{\cancel{(2-u)}\left(\sqrt{6-u}+u\right)}=\frac{5}{4}.$$

13. 50 Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(-x)=-f(x)$, (1).

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-2} f(x)\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to-2}\left(-f(-x)\right)\underset{u\to2}{\overset{-x=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to2}\left(-f(u)\right)$, (2).

Για x κοντά στο 2 θέτουμε $\dfrac{f(x)-3x^2+5}{\sqrt{x^3+1}-3}=g(x)$ και έχουμε:

$$\frac{f(x)-3x^2+5}{\sqrt{x^3+1}-3}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\left(\sqrt{x^3+1}-3\right)\cdot g(x)+3x^2-5 \text{ με } \lim_{x\to2}g(x)=2.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\left[\left(\sqrt{x^3+1}-3\right)\cdot g(x)+3x^2-5\right]=0\cdot2+12-5=7\overset{(2)}{\Rightarrow}\lim_{x\to-2}f(x)=-7.$$

13. 51 Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f(-x)=f(x),\ (1) \text{ και } g(-x)=-g(x),\ (2).$$

- Ισχύει:

$$\lim_{x\to-4}\frac{f(x)}{x^2+4x}=\alpha\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\lim_{x\to-4}\frac{f(-x)}{(-x)^2+4(-x)}=\alpha\underset{u\to4}{\overset{-x=u}{\Leftrightarrow}}\lim_{u\to4}\frac{f(u)}{u^2-4u}=\alpha \text{ ή } \lim_{x\to4}\frac{f(x)}{x^2-4x}=\alpha.$$

Για x κοντά στο 4 θέτουμε $h(x)=\dfrac{f(x)}{x^2-4x}$ και έχουμε:

$$h(x)=\frac{f(x)}{x^2-4x}\Leftrightarrow\left(x^2-4x\right)\cdot h(x)=f(x) \text{ με } \lim_{x\to4}h(x)=\alpha.$$

- Ισχύει:

$$\lim_{x\to-4}\frac{1-\sqrt{5+x}}{g(x)}=\beta\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\lim_{x\to-4}\frac{1-\sqrt{5-(-x)}}{-g(-x)}=\beta\underset{u\to4}{\overset{-x=u}{\Leftrightarrow}}\lim_{u\to4}\frac{\sqrt{5-u}-1}{g(u)}=\beta \text{ ή}$$

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{5-x}-1}{g(x)}=\beta.$$

Για x κοντά στο 4 θέτουμε $k(x)=\dfrac{\sqrt{5-x}-1}{g(x)}$ και έχουμε:

$$k(x)=\frac{\sqrt{5-x}-1}{g(x)}\Leftrightarrow g(x)=\frac{\sqrt{5-x}-1}{k(x)} \text{ με } \lim_{x\to4}k(x)=\beta.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to4}\frac{\left(x^2-4x\right)\cdot h(x)}{\dfrac{\sqrt{5-x}-1}{k(x)}}=\lim_{x\to4}\left[\frac{x(x-4)\left(\sqrt{5-x}+1\right)}{\sqrt{5-x}^2-1^2}\cdot h(x)\cdot k(x)\right]=$$

$$= \lim_{x\to4}\left[\frac{x\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{5-x}+1\right)}{-\cancel{(x-4)}}\cdot h(x)\cdot k(x)\right] = -8\alpha\cdot\beta.$$

13. 52 Για $x \neq 0$ είναι $x^3 \neq 0$ και διαιρώντας κατά μέλη την (1) με x^3 έχουμε:

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + 4\cdot\frac{f(x)}{x} = 12\cdot\frac{ημx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + 4\cdot\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{x\to0}\left(12\cdot\frac{ημx}{x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell^3 - 3\ell^2 + 4\ell - 12 = 0 \Rightarrow (\ell-3)\left(\ell^2+4\right) = 0 \Rightarrow \ell = 3,$$

διότι $\ell^2 + 4 > 0$ για οποιοδήποτε $\ell \in \mathbb{R}$. Άρα $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = 3,\ (2)$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x-3)}{x^2-9} = \lim_{x\to3}\left(\frac{f(x-3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x+3}\right) \underset{u\to0}{\overset{x-3=u}{=\!=}} \lim_{u\to0}\left(\frac{f(u)}{u}\cdot\frac{1}{u+6}\right) \overset{(2)}{=} 3\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

13. 53 **α.** Το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to0}f(x) = \lim_{x\to0}\frac{1-συνx}{ημx^2-2x^2} = \lim_{x\to0}\frac{1^2-συν^2x}{\left(ημx^2-2x^2\right)(1+συνx)}$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{ημ^2x}{ημx^2-2x^2}\cdot\frac{1}{1+συνx}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{ημ^2x}{x^2}}{\frac{ημx^2}{x^2}-2}\cdot\frac{1}{1+συνx}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to0}\frac{ημx^2}{x^2} \underset{u\to0}{\overset{x^2=u}{=\!=}} \lim\limits_{u\to0}\frac{ημu}{u} = 1,$
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{ημ^2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{ημx}{x}\right)^2 = 1.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to0}f(x) = \frac{1}{1-2}\cdot\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}.$

β. Για $x \neq 0$ έχουμε $f\left(\frac{1}{x}\right) = \dfrac{1-συν\frac{1}{x}}{ημ\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2}} = \dfrac{x^2-x^2συν\frac{1}{x}}{x^2ημ\frac{1}{x^2}-2}$ και ισχύουν:

- $\left|x^2\cdot συν\frac{1}{x}\right| = x^2\cdot\left|συν\frac{1}{x}\right| \le x^2 \Rightarrow -x^2 \le x^2\cdot συν\frac{1}{x} \le x^2$ με $\lim\limits_{x\to0}\left(-x^2\right) = 0$ και

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$. Άρα, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \cdot \text{συν}\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

- $\left|x^2 \cdot \text{ημ}\dfrac{1}{x^2}\right| = x^2 \cdot \left|\text{ημ}\dfrac{1}{x^2}\right| \le x^2 \Rightarrow -x^2 \le x^2 \cdot \text{ημ}\dfrac{1}{x^2} \le x^2$.

  Άρα, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \cdot \text{ημ}\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 - x^2\text{συν}\dfrac{1}{x}}{x^2\text{ημ}\dfrac{1}{x^2} - 2} = \dfrac{0}{-2} = 0$.

13. 54 Θέτουμε $\sqrt{x} = u \Rightarrow x = u^2$ και επειδή $x \to 9$, το $u \to \sqrt{9} = 3$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 9}\frac{5e^{\sqrt{x}} + x - 8}{x^2\sqrt{x} - 9x\sqrt{x} - 3x^2 + 27x} = \lim_{u\to 3}\frac{5e^u + u^2 - 8}{u^5 - 9u^3 - 3u^4 + 27u^2} =$$

$$= \lim_{u\to 3}\left(\frac{5e^u + u^2 - 8}{u^2}\cdot\frac{1}{u^3 - 3u^2 - 9u + 27}\right) =$$

$$= \lim_{u\to 3}\left(\frac{5e^u + u^2 - 8}{u^2\cdot(u+3)}\cdot\frac{1}{(u-3)^2}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{u\to 3}\dfrac{5e^u + u^2 - 8}{u^2(u+3)} = \dfrac{5e^3 + 1}{54} > 0$,
- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(u-3)^2} = +\infty$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{5e^{\sqrt{x}} + x - 8}{x^2\sqrt{x} - 9x\sqrt{x} - 3x^2 + 27x} = +\infty$.

13. 55 Για $x > 0$ είναι $f(x) > 2$ και έχουμε:

$$f^2(x) - 3\big(f(x) - 1\big) = \frac{x+2}{f(x)} \Leftrightarrow f^3(x) - 3f^2(x) + 3f(x) - 1 = x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \big(f(x) - 1\big)^3 = x + 1 \overset{x+1>0}{\Leftrightarrow} f(x) - 1 = \sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1 + \sqrt[3]{x+1}.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \sqrt[3]{x+1}\right) = 2$.

13. 56 Για $x \in (-2, 2)$ είναι $f(x) > 1$ και έχουμε:

$$-\frac{2-x^2}{2x^3} \le f^2(x) - \frac{f(x)}{2} \le \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow \frac{1}{16} - \frac{2-x^2}{2x^3} \le f^2(x) - \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{16} \le \frac{1}{x^3} + \frac{1}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} - \frac{2-x^2}{2x^3} \le \left(f(x) - \frac{1}{4}\right)^2 \le \frac{1}{x^3} + \frac{1}{16},\ (1).$$

Είναι $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{16} - \frac{2-x^2}{2x^3}\right) = \frac{3}{16} > 0$, οπότε $\frac{1}{16} - \frac{2-x^2}{2x^3} > 0$ κοντά στο 2.

Άρα, για x κοντά στο 2 με $f(x) > 1 \Rightarrow f(x) - \frac{1}{4} > \frac{3}{4} > 0$, από την (1) προκύπτει η σχέση:

$$\sqrt{\frac{1}{16} - \frac{2-x^2}{2x^3}} + \frac{1}{4} \le f(x) \le \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{16}}.$$

Έχουμε $\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{\frac{1}{16} - \frac{2-x^2}{2x^3}} + \frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{3}{16}} + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$ και $\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{16}} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$.

13. 57 Για x > 0 έχουμε:

$$f(x) > 1 \Rightarrow f(x) + 3 > 4 \Rightarrow 0 < \frac{1}{f(x)+3} < \frac{1}{4},\ (1).$$

Η δοθείσα γράφεται:

$$|f(x)| = \left|\frac{x^3+4x}{f(x)+3}\right| = \frac{|x^3+4x|}{f(x)+3} < \frac{|x^3+4x|}{4} \Rightarrow -\frac{|x^3+4x|}{4} \le f(x) \le \frac{|x^3+4x|}{4}.$$

Ισχύουν $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{|x^3+4x|}{4}\right) = 0$ και $\lim_{x\to 0}\frac{|x^3+4x|}{4} = 0$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

13. 58 Για κάθε $x \in A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ έχουμε:

$$xf(x) + \frac{f(x)+2}{x} \ge 2f(x) + 3 \Leftrightarrow x^2 f(x) + f(x) - 2xf(x) \ge 3x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)\cdot(x-1)^2 \ge 3x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) \ge \frac{3x-2}{(x-1)^2},\ (1).$$

Επειδή $\lim_{x\to 1}\frac{3x-2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\left[(3x-2)\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\right] \overset{1\cdot(+\infty)}{=} +\infty$, από την (1) προκύπτει ότι

$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$. Συνεπώς, η ευθεία x = 1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

13. 59 Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\left[4f^2(x)+g^2(x)+4f(x)-6g(x)\right]=-10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\left[4f^2(x)+4f(x)+g^2(x)-6g(x)+10\right]=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\left[\left(2f(x)-1\right)^2+\left(g(x)-3\right)^2\right]=0.$$

Έστω $h(x)=2f(x)-1,\ x\in\mathbb{R}$ και $k(x)=g(x)-3,\ x\in\mathbb{R}$. Τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\left(h^2(x)+g^2(x)\right)=0.$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $0\le h^2(x)\le h^2(x)+g^2(x)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to 1}h^2(x)=0$. Ομοίως, βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to 1}k^2(x)=0$.

Επίσης έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}|h(x)|=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{h^2(x)}=0$ και $\lim\limits_{x\to 1}|k(x)|=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{k^2(x)}=0$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $-|h(x)|\le h(x)\le |h(x)|$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to 1}h(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\left(2f(x)-1\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}f(x)=\frac{1}{2}.$$

Ομοίως, βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to 1}k(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\left(g(x)-3\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}g(x)=3.$$

13. 60 **α.** Για $x\neq 0$ η δοθείσα γράφεται:

$$|x|\cdot f(x)\ge x^2-x+2 \Leftrightarrow f(x)\ge \frac{x^2-x+2}{|x|},\ (1).$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x+2}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(x^2-x+2\right)\cdot\dfrac{1}{|x|}\right]\overset{2\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

Συνεπώς, από την (1) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$.

β. Για $x\neq 0$ η δοθείσα γράφεται:

$$x^2\cdot f(x)\le x^2-x-3 \Leftrightarrow f(x)\le \frac{x^2-x-3}{x^2},\ (2).$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x-3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(x^2-x-3\right)\cdot\dfrac{1}{x^2}\right]\overset{(-3)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty.$

Συνεπώς, από τη (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$.

13. 61 Είναι $g(x_0)=0$, οπότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{|(x-x_0)\cdot f(x)|}{x-x_0}.$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{|(x-x_0)\cdot f(x)|}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{-(x-x_0)\cdot|f(x)|}{x-x_0}=-|f(x_0)|$ και
- $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{|(x-x_0)\cdot f(x)|}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{(x-x_0)\cdot|f(x)|}{x-x_0}=|f(x_0)|.$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\ell\in\mathbb{R}$, πρέπει να ισχύει:

$$-|f(x_0)|=|f(x_0)|\Leftrightarrow 2|f(x_0)|=0\Leftrightarrow f(x_0)=0\Leftrightarrow x_0^3+5x_0-6=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_0-1)(x_0^2+x_0+6)=0\Leftrightarrow x_0=1.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=0=\ell.$$

13. 62 Για t κοντά στο 1 θεωρούμε $f(t)=\dfrac{t^3+2xt+4y-5}{t^2-1}$ και έχουμε:

$$f(t)=\frac{t^3+2xt+4y-5}{t^2-1}\Leftrightarrow (t^2-1)\cdot f(t)=t^3+2xt+4y-5 \text{ με } \lim_{t\to 1}f(t)=\ell\in\mathbb{R}.$$

Έχουμε:

$$\lim_{t\to 1}\left[(t^2-1)\cdot f(t)\right]=\lim_{t\to 1}(t^3+2xt+4y-5)\Rightarrow 0\cdot\ell=1+2x+4y-5\Rightarrow x+2y-2=0.$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,\ y)$ είναι η ευθεία ε: $x + 2y - 2 = 0$, (1).

Η δοθείσα παράσταση γράφεται:

$$w=xy-y^2+6y+4\overset{(1)}{=}(2-2y)y-y^2+6y+4\Leftrightarrow w=-3y^2+8y+4$$

που είναι εξίσωση παραβολής της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha < 0$.

Άρα, η παράσταση λαμβάνει μέγιστη τιμή $y_0=-\dfrac{8}{2\cdot(-3)}=\dfrac{4}{3}$.

Τότε, από την (1) βρίσκουμε $x+\dfrac{8}{3}-2=0\Rightarrow x=-\dfrac{2}{3}$.

Επομένως, το ζητούμενο σημείο είναι το $N\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)$.

13. 63 **α.** Για $x = 0$ η (1) γράφεται $3\le f(0)\le 3\Leftrightarrow f(0)=3$.

Ισχύουν $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2+x+3\right)=3$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x+3\right)=3$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

Άρα, η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-3}{x}$.

Από την (1) έχουμε $\begin{cases} -x+1\le \dfrac{f(x)-3}{x}\le x+1, & x>0, \ (2) \\ -x+1\ge \dfrac{f(x)-3}{x}\ge x+1, & x<0, \ (3) \end{cases}$.

Ισχύουν $\lim\limits_{x\to 0}(-x+1)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής και τη (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-3}{x}=1$ και

από το κριτήριο παρεμβολής και την (3) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-3}{x}=1$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-3}{x}=1$.

13. 64 Η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$, (2).

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ από την (1) έχουμε $f(x)\cdot\left(x^3+2x-3\right)\le \eta\mu(x-1)+2\left(x^2-1\right)$.

Είναι:

$$x^3+2x-3=(x-1)\left(x^2+x+3\right) \text{ με } x^2+x+3>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

διότι το τριώνυμο x^2+x+3 έχει $\Delta=-11<0$.

- Αν $x>1$, τότε $f(x)\le \dfrac{\eta\mu(x-1)+2\left(x^2-1\right)}{(x-1)\left(x^2+x+3\right)}$, άρα:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)\le \lim_{x\to 1^+}\frac{\eta\mu(x-1)+2\left(x^2-1\right)}{(x-1)\left(x^2+x+3\right)}, \ (3).$$

- Αν $x<1$, τότε $f(x)\ge \dfrac{\eta\mu(x-1)+2\left(x^2-1\right)}{(x-1)\left(x^2+x+3\right)}$, άρα:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)\ge \lim_{x\to 1^-}\frac{\eta\mu(x-1)+2\left(x^2-1\right)}{(x-1)\left(x^2+x+3\right)}, \ (4).$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to1}\frac{\eta\mu(x-1)+2(x^2-1)}{(x-1)(x^2+x+3)}=\lim_{x\to1}\left\{\left[\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\cdot 2(x+1)\right]\cdot\frac{1}{x^2+x+3}\right\}=(1+2\cdot2)\cdot\frac{1}{5}=1,$$

διότι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\overset{x-1=u}{\underset{u\to0}{=\!=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1.$

Τότε $(3)\overset{(2)}{\Rightarrow}f(1)\le1$ και $(4)\overset{(2)}{\Rightarrow}f(1)\ge1$, άρα $f(1)=1$.

Δηλαδή το σημείο Μ(1, 1) ανήκει στη C_f, αλλά ανήκει και στην ευθεία (ε), διότι $3\cdot1-4\cdot1+1=0$. Συνεπώς, η ευθεία (ε) τέμνει τη C_f.

13. 65 Για x = 0 από την (1) βρίσκουμε $f(0)\le0$ και για x = y = 0 από τη (2) βρίσκουμε $f(0)\le f(0)+f(0)\Rightarrow 0\le f(0)$. Άρα $f(0)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

Για x κοντά στο 0 θέτουμε $g(x)=\dfrac{\sqrt{f(x)+\kappa}-2}{\eta\mu4x}$ και έχουμε:

$$g(x)=\frac{\sqrt{f(x)+\kappa}-2}{\eta\mu4x}\Leftrightarrow g(x)\cdot\eta\mu4x=\sqrt{f(x)+\kappa}-2 \text{ με } \lim_{x\to0}g(x)=\ell\in\mathbb{R}.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to0}[g(x)\cdot\eta\mu4x]=\lim_{x\to0}\left(\sqrt{f(x)+\kappa}-2\right)\Rightarrow \ell\cdot0=\sqrt{f(0)+\kappa}-2\Rightarrow\sqrt{\kappa}=2\Rightarrow\kappa=4.$$

Επιπλέον, από την $(1)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}\le1, & \text{αν } x>0\\ \dfrac{f(x)}{x}\ge1, & \text{αν } x<0\end{cases}$.

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}\le\lim\limits_{x\to0^+}1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}\le1$ και
- $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)}{x}\ge\lim\limits_{x\to0^-}1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)}{x}\ge1$.

Εφόσον το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ υπάρχει, πρέπει να είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$. Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{f(x)+\kappa}-2}{\eta\mu4x}\overset{\kappa=4}{=\!=}\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu4x}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)+4}+2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\eta\mu4x}{4x}\cdot4}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)+4}+2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}.$$

Άρα $\ell = \dfrac{1}{16}$.

13. 66 **α.** Για κάθε $x \neq 1$ η δοθείσα σχέση γράφεται $f(x) = \dfrac{\eta\mu(x^2-1)}{x-1}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x^2-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\eta\mu(x^2-1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\right] = 1\cdot 2 = 2 = f(1)$,

διότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x^2-1)}{x^2-1} \overset{x^2-1=u}{\underset{u\to 0}{=\!=}} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u} = 1$.

Άρα $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu(x^2-1)}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2 & , x = 1 \end{cases}$.

β. Για $x > 0$ η δοθείσα σχέση γράφεται:

$$\ln x\cdot f(x) + 3\ln x = \ln^2 x + 2 + f(x) \Leftrightarrow (\ln x - 1)\cdot f(x) = \ln^2 x - 3\ln x + 2$$

και για $0 < x \neq e$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{(\ln x - 1)(\ln x - 2)}{\ln x - 1} \Leftrightarrow f(x) = \ln x - 2.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, είναι συνεχής και στο $x_0 = e$, οπότε:

$$\lim_{x\to e} f(x) = \lim_{x\to e}(\ln x - 2) = -1 = f(e).$$

Άρα:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 2, & 0 < x \neq e \\ -1 & , x = e \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \ln x - 2,\ x > 0.$$

γ. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η δοθείσα σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$\left(3 - \sqrt{x^2+8}\right)\cdot f(x) = -x^2 + 1 \overset{x\neq\pm 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}-3} = \frac{(x^2-1)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}{\sqrt{x^2+8}^{\,2} - 3^2} = \sqrt{x^2+8}+3.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και στα $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, οπότε:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1} f(x) = f(1).$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt{x^2+8}+3\right) = 6 = f(-1)$ και ομοίως, βρίσκουμε

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 6 = f(1)$.

Άρα:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+8}+3, & x\neq \pm 1\\ 6 & , x=-1 \text{ ή } x=1\end{cases} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+8}+3,\ x\in\mathbb{R}.$$

13. 67 Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=2$, τότε $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$, (1).

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)=-4\kappa-\kappa^3 \text{ και } \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(-3x+\kappa)=\kappa-6.$$

Άρα, από την (1) έχουμε:

$$-4\kappa-\kappa^3=\kappa-6 \Rightarrow \kappa^3+5\kappa-6=0 \Leftrightarrow (\kappa-1)(\kappa^2+\kappa+6)=0 \Leftrightarrow \kappa=1.$$

13. 68 Η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, αν $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$.

Ισχύουν:

- $f(1)=7$,
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}[-\alpha^2x^2+(\alpha-\beta)x]=-\alpha^2+\alpha-\beta$ και
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}[\beta x+3x^2(\alpha+1)+16]=\beta+3\alpha+19.$

Επομένως, πρέπει να ισχύουν $\begin{cases}-\alpha^2+\alpha-\beta=7\\ \beta+3\alpha+19=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=5,\ \beta=-27\\ \text{ή}\\ \alpha=-1,\ \beta=-9\end{cases}.$

13. 69 Για $x_0\geq 1$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x}=-2$, (1).

Η g είναι συνεχής στο x_0, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$, (2).

Είναι $g(x_0)=x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^3(x)+xf^2(x)+x^3\eta\mu(x-1)}{f^3(x)-5x^2+9x^3}$.

Για x κοντά στο x_0, θέτουμε $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ και έχουμε $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow f(x)=x\cdot h(x)$ με $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=-2$, από την (1). Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^3\cdot h^3(x)+x^3\cdot h^2(x)+x^3\eta\mu(x-1)}{x^3\cdot h^3(x)-5x^2+9x^3}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{x^3\left(h^3(x)+h^2(x)+\eta\mu(x-1)\right)}{x^2\left(x\cdot h^3(x)-5+9x\right)}=$$

$$=x_0\cdot\frac{-8+4+\eta\mu(x_0-1)}{-8x_0-5+9x_0}$$

και από τη (2) έχουμε:

$$x_0 \cdot \frac{-4+\eta\mu\left(x_0-1\right)}{x_0-5} = x_0 \Rightarrow -4+\eta\mu\left(x_0-1\right) = x_0-5 \Rightarrow \eta\mu\left(x_0-1\right) = x_0-1.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x| \le |x|$ και θέτοντας όπου x το $x_0 - 1$, έχουμε:

$$|\eta\mu(x_0-1)| \le |x_0-1| \Leftrightarrow -|x_0-1| \le \eta\mu(x_0-1) \le |x_0-1|, \quad (3)$$

η οποία ισχύει ως ισότητα μόνο, όταν $x_0-1=0 \Leftrightarrow x_0=1$.

- Αν $x_0>1 \Leftrightarrow x_0-1>0$, τότε η (3) γίνεται:

$$-(x_0-1) < \eta\mu(x_0-1) < x_0-1 \text{ που είναι άτοπο.}$$

- Αν $0<x_0<1 \Leftrightarrow x_0-1<0$, τότε η (3) γίνεται:

$$x_0-1 < \eta\mu(x_0-1) < -(x_0-1) \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα $x_0 = 1$.

13. 70 Η f είναι συνεχής στο $A_f = \mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 2$, οπότε ισχύει:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2), \ (1).$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 4-2\kappa-2\lambda$, (2) και $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+\kappa-\lambda}{x-2} \overset{(1)}{=} f(2)$.

Για $x<2$ και κοντά στο 2 θέτουμε $g(x) = \dfrac{x^2+\kappa-\lambda}{x-2}$ και έχουμε:

$$g(x) = \frac{x^2+\kappa-\lambda}{x-2} \Leftrightarrow (x-2)\cdot g(x) = x^2+\kappa-\lambda \ \text{ με } \lim_{x\to 2^-} g(x) = f(2).$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^-}\left[(x-2)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to 2^-}(x^2+\kappa-\lambda) \Rightarrow 0\cdot f(2) = 4+\kappa-\lambda \Rightarrow \kappa = \lambda-4, \quad (3)$$

και:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \overset{(3)}{=} \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+\lambda-4-\lambda}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}(x+2) = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(2) = 4 \overset{(2)}{\Rightarrow} 4-2\kappa-2\lambda = 4 \Rightarrow \kappa = -\lambda, \quad (4).$$

Από τις (3) και (4) βρίσκουμε $\lambda = 2$, $\kappa = -2$.

13. 71 Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 2$, οπότε ισχύει $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$, (1).

Έχουμε $f(2) = 5\beta - 7\alpha + 2$ και $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-(\alpha-1)x+1-\beta}{x-2} \overset{(1)}{=} f(2)$.

Για x κοντά στο 2 θέτουμε $g(x) = \dfrac{x^2-(\alpha-1)x+1-\beta}{x-2}$ και έχουμε:

$$g(x)=\frac{x^2-(\alpha-1)x+1-\beta}{x-2} \Leftrightarrow (x-2)\cdot g(x)=x^2-(\alpha-1)x+1-\beta$$

με $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=f(2)$. Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\left[(x-2)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to 2}\,[x^2-(\alpha-1)x+1-\beta] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\cdot f(2)=4-2\alpha+2+1-\beta \Rightarrow \beta=7-2\alpha, \quad (2).$$

και:

$$\lim_{x\to 2} f(x) \overset{(2)}{=} \lim_{x\to 2}\frac{x^2-(\alpha-1)x+1-7+2\alpha}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6-\alpha(x-2)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-2)-\alpha(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3-\alpha)=5-\alpha,$$

οπότε $5-\alpha=5\beta-7\alpha+2 \Rightarrow 5\beta-6\alpha=3$, (3).

Από τις (2) και (3) βρίσκουμε $\alpha=2$, $\beta=3$.

13. 72 Για κάθε $x>-\frac{1}{2}$ ισχύει:

$$3f^3(x)+4f(x)-7x=\ln(2x+1), \quad (1).$$

Για $x=0$ η (1) γράφεται:

$$3f^3(0)+4f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)\cdot\left(3f^2(0)+4\right)=0 \Leftrightarrow f(0)=0,$$

διότι $3f^2(0)+4>0$ για οποιοδήποτε $f(0)$.

Από την (1) έχουμε $f(x)\cdot\left(3f^2(x)+4\right)=7x+\ln(2x+1) \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{7x+\ln(2x+1)}{3f^2(x)+4}$, (2).

Για κάθε $x>-\frac{1}{2}$ ισχύει $3f^2(x)+4\ge 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3f^2(x)+4}\le\dfrac{1}{4}$.

Για x κοντά στο 0 έχουμε:

$$|f(x)|=\left|\frac{7x+\ln(2x+1)}{3f^2(x)+4}\right|=\frac{|7x+\ln(2x+1)|}{3f^2(x)+4}\le\frac{|7x+\ln(2x+1)|}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{|7x+\ln(2x+1)|}{4}\le f(x)\le\frac{|7x+\ln(2x+1)|}{4}.$$

Ισχύουν:

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{|7x+\ln(2x+1)|}{4}\right)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}\frac{|7x+\ln(2x+1)|}{4}=0.$$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής, (το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει), έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=f(0).$$

13. 73 **α.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(-x) = f(x)$, (1) και για x = 1 η ευθεία (ε) γίνεται y = 1.

Άρα το σημείο M(1, 1) ανήκει στη C_f, δηλαδή είναι $f(1) = 1$.

Για x κοντά στο 1 θέτουμε $\dfrac{f(x) - 1 + \eta\mu(x-1)}{x-1} = h(x)$ και έχουμε:

$$\frac{f(x) - 1 + \eta\mu(x-1)}{x-1} = h(x) \Leftrightarrow f(x) = 1 - \eta\mu(x-1) + h(x)\cdot(x-1) \text{ με } \lim_{x\to 1} h(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left[1 - \eta\mu(x-1) + h(x)\cdot(x-1)\right] = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1).$$

Συνεπώς, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x) - \eta\mu(x+1) - x^2}{x+1} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to -1}\frac{f(-x) - \eta\mu(x+1) - x^2}{x+1} \underset{u\to 1}{\overset{-x=u}{=\!=}}$$

$$= \lim_{u\to 1}\frac{f(u) - \eta\mu(-u+1) - (-u)^2}{-u+1} =$$

$$= \lim_{u\to 1}\frac{f(u) + \eta\mu(u-1) - u^2}{-(u-1)} =$$

$$= \lim_{u\to 1}\frac{f(u) - 1 + \eta\mu(u-1) - u^2 + 1}{-(u-1)} =$$

$$= \lim_{u\to 1}\left(\frac{f(u) - 1 + \eta\mu(u-1)}{-(u-1)} + \frac{u^2 - 1}{u-1}\right) =$$

$$= -\lim_{u\to 1}\frac{f(u) - 1 + \eta\mu(u-1)}{u-1} + \lim_{u\to 1}(u+1) = -\ell + 2.$$

Επομένως $3 = -\ell + 2 \Rightarrow \ell = -1$.

13. 74 Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ ως πηλίκα συνεχών συναρτήσεων και $A_f = \mathbb{R}$. Θα είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, αν:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \text{ με } f(1) = \gamma.$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x\sqrt{x} - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x\sqrt{x} - \sqrt{x} + \sqrt{x} - 1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1}\right) = \frac{3}{2}.$$

Άρα $\gamma = \dfrac{3}{2}$.

Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\alpha x^2 + \beta x + \frac{3}{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2\alpha x^2 + 2\beta x + 3}{2(x-1)} = f(1).$$

Για $x < 1$ κοντά στο 1 θέτουμε $g(x) = \dfrac{2\alpha x^2 + 2\beta x + 3}{2(x-1)}$ και έχουμε:

$$g(x) = \frac{2\alpha x^2 + 2\beta x + 3}{2(x-1)} \Leftrightarrow 2(x-1)\cdot g(x) = 2\alpha x^2 + 2\beta x + 3, \text{ με } \lim_{x\to 1^-} g(x) = f(1).$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-}\left[2(x-1)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to 1^-}\left(2\alpha x^2 + 2\beta x + 3\right) \Rightarrow 0 = 2\alpha + 2\beta + 3 \Rightarrow 2\beta = -2\alpha - 3, \quad (1)$$

και:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{2\alpha x^2 + (-2\alpha - 3)x + 3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2\alpha(x^2-1) - 3(x-1)}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 1^-}\left[2\alpha(x+1) - 3\right] = 4\alpha - 3,$$

οπότε $f(1) = 4\alpha - 3 \Rightarrow \dfrac{3}{2} = 4\alpha - 3 \Rightarrow \alpha = \dfrac{9}{8}$.

Από την (1) βρίσκουμε $\beta = -\dfrac{21}{8}$.

13. 75 Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{\pi - x}\cdot \alpha^2 + x, & x < \pi \\ \dfrac{\pi^2}{x} - \beta^2 + \pi, & x \geq \pi \end{cases}$ είναι συνεχής στο $x_0 = \pi$, άρα:

$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^+} f(x) = f(\pi), \quad (1).$$

Ισχύουν:

- $\lim_{x\to \pi^+} f(x) = f(\pi) = 2\pi - \beta^2$ και
- $\lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to \pi^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{\pi - x}\cdot \alpha^2 + x\right) = \alpha^2 + \pi,$

διότι $\lim_{x\to \pi^+} \dfrac{\eta\mu x}{\pi - x} = \lim_{x\to \pi^+} \dfrac{\eta\mu(\pi - x)}{\pi - x} \underset{u\to 0}{\overset{\pi - x = u}{=\!=}} \lim_{u\to 0} \dfrac{\eta\mu u}{u} = 1.$

Από την (1) έχουμε:

$$2\pi - \beta^2 = \alpha^2 + \pi \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \pi.$$

Συνεπώς, τα σημεία Ν(α, β) ανήκουν σε κύκλο κέντρου Ο(0, 0) και ακτίνας $\rho=\sqrt{\pi}$.

13. 76 Η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} -8\eta\mu x & , \ x\le -\frac{\pi}{2} \\ \alpha\eta\mu x+\kappa^2+\lambda^2, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x & , \ x\ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στα σημεία $-\frac{\pi}{2}$ και $\frac{\pi}{2}$.

Στο $x_1=-\frac{\pi}{2}$ ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x)=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=8$ και
- $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\left(\alpha\eta\mu x+\kappa^2+\lambda^2\right)=-\alpha+\kappa^2+\lambda^2.$

Πρέπει να είναι $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x)=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε προκύπτει:

$$\kappa^2+\lambda^2-\alpha=-8\Leftrightarrow \kappa^2+\lambda^2=\alpha+8, \quad (1).$$

Στο $x_2=\frac{\pi}{2}$ ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\alpha\eta\mu x+\kappa^2+\lambda^2\right)=\alpha+\kappa^2+\lambda^2$ και
- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

Πρέπει να είναι $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε προκύπτει:

$$\alpha+\kappa^2+\lambda^2=0\overset{(1)}{\Rightarrow}\alpha+\alpha+8=0\Rightarrow\alpha=-4.$$

Από την (1) προκύπτει ότι $\kappa^2+\lambda^2=4$.

Συνεπώς, ο γεωμετρικός τόπος των Μ(κ, λ) είναι κύκλος με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα $\rho=2$.

13. 77 **α.** Για x κοντά στο 2 θέτουμε $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$ και έχουμε:

$$g(x)=\frac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow x^2 \cdot g(x)=f(x),\ (1),\ \text{με } \lim_{x\to 2} g(x)=1.$$

Ισχύει $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(x^2 \cdot g(x)\right)=4.$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0=2$, οπότε:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2) \Leftrightarrow f(2)=4.$$

β. Το όριο γράφεται $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-8x^2}{x^3-4x^2+4x} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 2}\frac{x^2 g(x)-8x^2}{x(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\left[x\left(g(x)-8\right)\cdot\frac{1}{(x-2)^2}\right].$

Ισχύουν:

- $\lim_{x\to 2}\left[x\left(g(x)-8\right)\right]=2\cdot(1-8)=-14<0,$
- $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-8x^2}{x^3-4x^2+4x}=\lim_{x\to 2}\left[x\left(g(x)-8\right)\cdot\frac{1}{(x-2)^2}\right]=-\infty.$$

13. 78 **α.** Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0=2$, οπότε $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2).$

Για x κοντά στο 2 θέτουμε $g(x)=\frac{4f(x)\cdot\ln(x-2)-3}{5+f(x)}$ και έχουμε:

$$g(x)=\frac{4f(x)\cdot\ln(x-2)-3}{5+f(x)} \Leftrightarrow \frac{g(x)\cdot\left(5+f(x)\right)+3}{4\ln(x-2)}=f(x)\ \text{με } \lim_{x\to 2} g(x)=0.$$

Τότε έχουμε $\lim_{x\to 2}\ln(x-2) \underset{u\to 0^+}{\overset{x-2=u>0}{=\!=}} \lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$, άρα $\lim_{x\to 2}\frac{1}{\ln(x-2)}=0.$

Επομένως:

$$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left\{\left[g(x)\cdot\left(5+f(x)\right)+3\right]\cdot\frac{1}{4\ln(x-2)}\right\}=$$

$$=\left[0\cdot\left(5+f(2)\right)+3\right]\cdot 0=0.$$

13. 79 Για $x>3$ η $f(x)=\frac{1-e^x}{2\ln(x-3)-x}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και

για $-6\le x<3$ η $f(x)=\frac{3-\sqrt{x+6}}{(x-3)^3}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $f(3)=0$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left[\left(1+e^x\right)\cdot\dfrac{1}{2\ln(x-3)-x}\right]$.

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(1+e^x\right)=1-e^3<0$,
- $\lim\limits_{x\to 3^+}\ln(x-3)\overset{x-3=u>0}{\underset{u\to 0}{=\!=}}\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln u)=-\infty$, οπότε είναι $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(2\ln(x-3)-x\right)=-\infty$ και

  $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{2\ln(x-3)-x}=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left[\left(1+e^x\right)\cdot\dfrac{1}{2\ln(x-3)-x}\right]=0$ και είναι $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)=0$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{(x-3)^3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3^2-\sqrt{x+6}^2}{(x-3)^3\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-1}{(x-3)^2\left(3+\sqrt{x+6}\right)}$.

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-1}{3+\sqrt{x+6}}=-\dfrac{1}{6}<0$,
- $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{(x-3)^2}=+\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-1}{(x-3)^2\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=-\infty$.

Συνεπώς, η f δεν είναι συνεχής στο 3.

Επομένως, η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,\,3)$ και $[3,\,+\infty)$.

13. 80 Είναι $f(0)=0$ και έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2e^x}{\eta\mu^2x+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2+\dfrac{1}{x}}$.

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0} e^x=0$,
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2=1$,
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=+\infty$, διότι $x>0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2 + \dfrac{1}{x}} = 0$ και είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$.

Συνεπώς, η f είναι συνεχής στο 0.

Επιπλέον, επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, θα είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

13. 81 Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $\alpha \in \mathbb{R}^*$, οπότε $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$, (1).

Για x κοντά στο α με x > α θέτουμε $g(x) = \dfrac{f(x)}{1 + f(x)\cdot\ln(x-\alpha)}$ και έχουμε:

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + f(x)\cdot\ln(x-\alpha)} \Leftrightarrow g(x) + g(x)\cdot f(x)\cdot\ln(x-\alpha) = f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = f(x)\cdot\left(1 - g(x)\cdot\ln(x-\alpha)\right)$$

από την οποία προκύπτει ότι $f(x) = \dfrac{g(x)}{1 - g(x)\cdot\ln(x-\alpha)}$ με $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \alpha$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to\alpha} \ln(x-\alpha) \underset{u\to 0^+}{\overset{x-\alpha=u>0}{=\!=}} \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$, οπότε:

- $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(1 - g(x)\cdot\ln(x-\alpha)\right) = +\infty$, αν $\alpha < 0$ ή
- $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(1 - g(x)\cdot\ln(x-\alpha)\right) = -\infty$, αν $\alpha > 0$.

Σε κάθε περίπτωση ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{1 - g(x)\cdot\ln(x-\alpha)} = 0$, άρα:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} \frac{g(x)}{1 - g(x)\cdot\ln(x-\alpha)} = \alpha\cdot 0 = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f(\alpha) = 0.$$

Συνεπώς, η C_f τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο Μ(α, 0).

13. 82 • Για x κοντά στο 0 θέτουμε $h(x) = \dfrac{f(x)}{\eta\mu^4 x + e^x}$ και έχουμε:

$$h(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu^4 x + e^x} \Leftrightarrow f(x) = h(x)\cdot\left(\eta\mu^4 x + e^x\right) \text{ με } \lim_{x\to 0} h(x) = 3.$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[h(x)\cdot\left(\eta\mu^4 x + e^x\right)\right] = 3\cdot(0+1) = 3.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f(0) = 3$.

- Επίσης θέτουμε $k(x)=g(x)\cdot\left(1-\sqrt{x^4+1}\right)$ και έχουμε:

$$k(x)=g(x)\cdot\left(1-\sqrt{x^4+1}\right)\Leftrightarrow g(x)=\frac{k(x)}{1-\sqrt{x^4+1}} \text{ με } \lim_{x\to 0}k(x)=-1.$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{k(x)}{1-\sqrt{x^4+1}}=\lim_{x\to 0}\left(k(x)\cdot\left(1+\sqrt{x^4+1}\right)\frac{1}{-x^4}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0}\left[k(x)\cdot\left(1+\sqrt{x^4+1}\right)\right]=-2<0,$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{-x^4}=-\infty.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(k(x)\cdot\left(1+\sqrt{x^4+1}\right)\frac{1}{-x^4}\right)=+\infty.$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=+\infty.$

13. 83 Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$x^3f(x)=\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu x+2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{\eta\mu^2x}{x^3(\sigma\upsilon\nu x+2)}.$$

Τότε η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες σε $x_0\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu^2x}{x^2}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x+2}\cdot\frac{1}{x}\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu^2x}{x^2}=1^2=1,$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x+2}=\frac{1}{3},$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$, οπότε η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

13. 84 Η f είναι συνεχής στο 1, άρα $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$, (1).

Για $x\neq 1$ η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x^4}{x-1} \le f(x) \le \dfrac{-3x+3}{x-1}, \ x>1, \ (2) \\ \dfrac{x-x^4}{x-1} \ge f(x) \ge \dfrac{-3x+3}{x-1}, \ x<1, \ (3) \end{cases}.$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^4}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x\left(x^3-1\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\left[-x\cdot\left(x^2+x+1\right)\right] = -3$ και

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3x+3}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}(-3) = -3.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής και τη (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -3$ και από το κριτήριο παρεμβολής και την (3) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -3$.

Άρα $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -3 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(1) = -3$.

13. 85 **α.** Είναι $f(0)=0$ και για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\left|x^2\cdot ημ\frac{1}{x}\right| = x^2\cdot\left|ημ\frac{1}{x}\right| \le x^2 \Rightarrow -x^2 \le x^2 ημ\frac{1}{x} \le x^2.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0$ και $\lim\limits_{x\to0}\left(-x^2\right) = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0 = f(0).$$

Συνεπώς, η f είναι συνεχής στο 0.

Επιπλέον, η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ ως γινόμενο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2-2x}{x-1} = \dfrac{0}{-1} = 0.$

Είναι $f(0)=0$ και για $x<0$ έχουμε:

$$\left|x\cdot συν\frac{1}{x}\right| = |x|\cdot\left|συν\frac{1}{x}\right| \le |x| \Rightarrow -|x| \le x\cdot συν\frac{1}{x} \le |x|.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to0}(-|x|) = 0$ και $\lim\limits_{x\to0}|x| = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to0^-}\left(x\cdot συν\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)$.

Επιπλέον, η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

13. 86 **α.** Η f είναι συνεχής στο 2, άρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$, (1).

Για x κοντά στο 2 θέτουμε $g(x) = \dfrac{f(x)+1-2\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2+5}-f(2)}$ και έχουμε:

$$g(x) = \frac{f(x)+1-2\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2+5}-f(2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x)\cdot\left(\sqrt{x^2+5}-f(2)\right)+2\sqrt{x+2}-1 = f(x),\ (2),$$

με $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 2$.

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left[g(x)\cdot\left(\sqrt{x^2+5}-f(2)\right)+2\sqrt{x+2}-1\right] =$$

$$= 2\cdot\left(\sqrt{9}-f(2)\right)+2\sqrt{4}-1 = 9-2f(2).$$

Από την (1) βρίσκουμε $f(2) = 9-2f(2) \Rightarrow f(2) = 3$.

β. Το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \underset{(\alpha)}{\overset{(2)}{=\!=}} \lim_{x\to 2}\frac{g(x)\cdot\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)+2\sqrt{x+2}-1-3}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(g(x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}+2\cdot\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\right).$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}^{\,2}-3^2}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \dfrac{2}{3}$ και

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}^{\,2}-2^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \dfrac{1}{4}$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 2\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{4} = \frac{11}{6}.$$

13. 87 Η f είναι συνεχής στο Α, άρα και στο 3, οπότε ισχύει $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$, (1).

Για $x \in A - \{3\}$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{(x-3)^3}{x^2 - 4x + 3} \cdot ημ\frac{7x}{x-3} = \frac{(x-3)^2}{x-1} \cdot ημ\frac{7x}{x-3} \quad \text{και}$$

$$|f(x)| = \left|\frac{(x-3)^2}{x-1} \cdot ημ\frac{7x}{x-3}\right| = \frac{(x-3)^2}{|x-1|} \cdot \left|ημ\frac{7x}{x-3}\right| \leq \frac{(x-3)^2}{|x-1|} \Rightarrow -\frac{(x-3)^2}{|x-1|} \leq f(x) \leq \frac{(x-3)^2}{|x-1|}.$$

Ισχύουν $\lim\limits_{x \to 3}\left(-\frac{(x-3)^2}{|x-1|}\right) = 0$ και $\lim\limits_{x \to 3}\frac{(x-3)^2}{|x-1|} = 0$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f(3) = 0$.

Ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-3)^2}{x-1} \cdot ημ\frac{7x}{x-3}, & x \in A - \{3\} \\ 0 & , x = 3 \end{cases}.$$

13. 88 **α.** Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{συν2x - συν^2x}{x}.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και στο 0, άρα $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\frac{συν2x - συν^2x}{x} = \lim_{x \to 0}\frac{συν2x - 1 + ημ^2x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{συν2x - 1}{x} + ημx \cdot \frac{ημx}{x}\right) = 0 + 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow f(0) = 0,$$

διότι $\lim\limits_{x \to 0}\frac{συν2x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0}\frac{συν2x - 1}{2x} \cdot 2 \underset{u \to 0}{\overset{2x=u}{=\!=}} \lim\limits_{u \to 0}\frac{συνu - 1}{u} \cdot 2 = 0$.

Ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{συν2x - συν^2x}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}.$$

13. 89 Η f είναι συνεχής στο 2, άρα $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$, (1).

Για x κοντά στο 2 θέτουμε $g(x) = \frac{ημ(x-2) - f(x)(x^2 - 4)}{x - 2}$ και έχουμε:

$$g(x)=\frac{\eta\mu(x-2)-f(x)(x^2-4)}{x-2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4}-\frac{g(x)(x-2)}{x^2-4} \text{ με } \lim_{x\to 2}g(x)=7.$$

Τότε έχουμε $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4}-\frac{g(x)(x-2)}{x^2-4}\right)$.

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{4}$, διότι $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\underset{u\to 0}{\overset{x-2=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$,
- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)(x-2)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)}{x+2}=\frac{7}{4}$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\frac{1}{4}-\frac{7}{4}=-\frac{3}{2}$.

Άρα, από την (1) έχουμε $f(2)=-\frac{3}{2}$.

13. 90 Από την (1) έχουμε ισοδύναμα:

$$2x^2-8\le f^2(x)-2xf(x)+x^2\le -2x^2+3x+2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-8\le (f(x)-x)^2\le -2x^2+3x+2 \text{ για κάθε } x\in[-1,\,2],\ (2).$$

Για x = 2 η (2) γίνεται:

$$0\le (f(2)-2)^2\le 0\Rightarrow (f(2)-2)^2=0\Rightarrow f(2)=2.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow \lim_{x\to 2}(f(x)-2)=0.$$

Ισχύουν $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-8)=0$ και $\lim\limits_{x\to 2}(-2x^2+3x+2)=0$. Άρα από το κριτήριο παρεμβολής και τη (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)-x)^2=0$.

Έστω $g(x)=f(x)-x,\ x\in\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to 2}g^2(x)=0$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $-|g(x)|\le g(x)\le |g(x)|$. Είναι $\lim\limits_{x\to 2}|g(x)|=\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{g^2(x)}=\sqrt{0}=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}g(x)=0\Rightarrow \lim_{x\to 2}(f(x)-2)=0\Rightarrow \lim_{x\to 2}f(x)=2.$$

13. 91 **α.** Έχουμε:

$$f(x)\ne 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},\ (2).$$

Για x = y = 0 η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$f(0)=f(0)\cdot f(0)\overset{(2)}{\Rightarrow}1=f(0).$$

β. Από το ερώτημα (α) έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x_0\in\mathbb{R}^*$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{h\to 0}f(x_0+h)\underset{y\to 0}{\overset{h=-\alpha y}{=\!=}}\lim_{y\to 0}f(x_0-\alpha y)\overset{(1)}{=}\lim_{y\to 0}\big(f(x_0)\cdot f(\alpha y)\big)=$$
$$=f(x_0)\cdot f(0)=f(x_0),$$

διότι $\lim\limits_{y\to 0}f(\alpha y)\underset{x\to 0}{\overset{\alpha y=x}{=\!=}}\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$.

13. 92 **α.** Για $x=y=1$ η (1) γίνεται $f(1)=f(1)+f(1)+\lambda\Rightarrow f(1)=-\lambda$.

β. Είναι $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$, (2).

Έχουμε:

$$\lim_{x\to\alpha}f(x)\underset{u\to 1}{\overset{x=u\cdot\alpha}{=\!=}}\lim_{u\to 1}f(u\cdot\alpha)\overset{(1)}{=}\lim_{u\to 1}\big(f(u)+f(\alpha)+\lambda\big)=\lim_{u\to 1}f(u)+f(\alpha)+\lambda\overset{(2)}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow f(\alpha)=\lim_{u\to 1}f(u)+f(\alpha)-f(1)\Rightarrow\lim_{u\to 1}f(u)=f(1).$$

Άρα, η f είναι συνεχής στο 1.

γ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ για κάθε $x_0>0$ και $x_0\neq\alpha$.

Έχουμε

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\overset{x=h\cdot x_0}{=\!=}\lim_{h\to 1}f(h\cdot x_0)\overset{(1)}{=}\lim_{h\to 1}\big(f(h)+f(x_0)+\lambda\big)=f(1)+f(x_0)+\lambda=f(x_0).$$

7ο

Κριτηριο Αξιολογησης

Θέμα A

A1. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος.

A2. **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό.

A3. **α.** $\lim\limits_{x\to -5} f(x)=0$ **β.** $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=-\infty$ **γ.** το $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ δεν υπάρχει

δ. $\lim\limits_{x\to 8} f(x)=+\infty$ **ε.** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)-2}=+\infty$ **στ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|f(x)-2|}=+\infty$

ζ. $\lim\limits_{x\to 3^+}|f(x)|=+\infty$ **η.** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-\infty$ **θ.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-1}{|f(x)|}=-\infty$

ι. $\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to -1} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to 3} f(x)}=0.$

Θέμα B

B1. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{\sqrt{4x-3}-x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)\left(\sqrt{4x-3}+x\right)}{\left(\sqrt{4x-3}-x\right)\left(\sqrt{4x-3}+x\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)\left(\sqrt{4x-3}+x\right)}{4x-3-x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x\,\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{4x-3}+x\right)}{-(x-1)\,\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}\frac{x\left(\sqrt{4x-3}+x\right)}{-(x-1)}=$$

$$=\frac{3\cdot\left(\sqrt{4\cdot 3-3}+3\right)}{-(3-1)}=-9.$$

B2. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+2x\,ημx-5ημ^2x}{x^2-4x\,ημx}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3x^2+2x\,ημx-5ημ^2x}{x^2}}{\dfrac{x^2-4x\,ημx}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{3+2\cdot\dfrac{ημx}{x}-5\cdot\left(\dfrac{ημx}{x}\right)^2}{1-4\cdot\dfrac{ημx}{x}}=$$

$$= \frac{3+2\cdot 1-5\cdot 1^2}{1-4\cdot 1} = \frac{0}{-3} = 0.$$

B3. • Για x > 2 είναι $x+3>0$, $x+7>0$, $x^2-4>0$, άρα:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2x+|x+3|-|x+7|}{|x^2-4|} = \lim_{x\to 2^+}\frac{2x+(x+3)-(x+7)}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+}\frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2^+}\frac{2}{x+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

• Για x κοντά στο 2 με x < 2 είναι $x+3>0$, $x+7>0$, $x^2-4<0$, άρα:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2x+|x+3|-|x+7|}{|x^2-4|} = \lim_{x\to 2^-}\frac{2x+(x+3)-(x+7)}{-x^2+4} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{2\cancel{(x-2)}}{-\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2^-}\frac{2}{-(x+2)} = -\frac{1}{2}.$$

Τα πλευρικά όρια διαφέρουν, άρα το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

B4. Για x κοντά στο $\frac{3\pi}{4}$ έχουμε:

$$\left|\sigma\upsilon\nu 2x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2021}{4x-3\pi}\right| = |\sigma\upsilon\nu 2x|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2021}{4x-3\pi}\right| \le |\sigma\upsilon\nu 2x|\cdot 1 = |\sigma\upsilon\nu 2x|,$$

άρα:

$$-|\sigma\upsilon\nu 2x| \le \sigma\upsilon\nu 2x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2021}{4x-3\pi} \le |\sigma\upsilon\nu 2x|.$$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}\left(-|\sigma\upsilon\nu 2x|\right) = \lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}\left(+|\sigma\upsilon\nu 2x|\right) = 0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\left(\sigma\upsilon\nu 2x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2021}{4x-3\pi}\right) = 0.$$

Θέμα Γ

Γ1. **α.** Για x κοντά στο 1 έχουμε $f(x) = \frac{(\lambda-1)x^2+2x-3}{x^2-1} \Leftrightarrow f(x)\cdot(x^2-1) = (\lambda-1)x^2+2x-3$

και για x κοντά στο 0 έχουμε $g(x) = \frac{x^2+3x+\mu}{x} \Leftrightarrow g(x)\cdot x = x^2+3x+\mu.$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$, άρα:

- $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)\cdot\left(x^2-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[(\lambda-1)x^2+2x-3\right]\Leftrightarrow \ell_1\cdot 0=\lambda-2\Leftrightarrow\lambda=2$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\left[g(x)\cdot x\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+3x+\mu\right)\Leftrightarrow \ell_2\cdot 0=\mu\Leftrightarrow\mu=0.$

β. Για $\lambda=2,\ \mu=0,$ έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3}{x+1}=2,$
- $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x}(x+3)}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(x+3)=3.$

Γ2. Είναι $f(0)=\dfrac{0^2+2\cdot 0-3}{0^2-1}=3,$ οπότε $G(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x}{x}, & x\neq 0\\ 3, & x=0\end{cases}$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}G(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x+3)}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}(x+3)=3=G(0).$$

Άρα, η G είναι συνεχής στο 0.

Γ3. Είναι $g(-1)=\dfrac{(-1)^2+3\cdot(-1)}{-1}=2,$ οπότε $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}, & x\in\mathbb{R}-\{\pm 1\}\\ 2, & x=1 \text{ ή } x=-1\end{cases}.$

Για $x\neq\pm 1$ η $F(x)=f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ είναι συνεχής ως ρητή συνάρτηση.

- Για x = 1 είναι $F(1)=2$ και έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}F(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=2.$

  Άρα $\lim\limits_{x\to 1}F(x)=F(1)=2,$ οπότε η F είναι συνεχής στο 1.

- Για $x=-1$ είναι $F(-1)=2$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to -1^+}F(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{x^2+2x-3}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right).$$

  Ισχύουν:

  - $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=2>0,$
  - $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty.$

  Άρα $\lim\limits_{x\to -1^+}F(x)\overset{2\cdot(+\infty)}{=}+\infty.$

  Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\lim\limits_{x\to -1^-}F(x)=-\infty,$ άρα το $\lim\limits_{x\to -1}F(x)$ δεν υπάρχει.

Συνεπώς, η F δεν είναι συνεχής στο –1.

Επομένως, η F είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{-1\}$.

Γ4. Έχουμε:

$$\frac{f(x)}{|x^2+x|\cdot g(x)}=\frac{\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}}{|x^2+x|\cdot\dfrac{x^2+3x}{x}}=\frac{\dfrac{\cancel{x+3}}{x+1}x}{|x^2+x|\cdot\cancel{(x+3)}}=\frac{x}{|x^2+x|\cdot(x+1)}=\frac{x}{|x|\cdot|x+1|\cdot(x+1)}.$$

- Για $x>-1$ είναι $x+1>0$ και $x<0$, οπότε $|x+1|=x+1$ και $|x|=-x$.

  Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)}{|x^2+x|\cdot g(x)}=\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{x}{-x}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\right)=-\infty.$$

- Για $x<-1$ είναι $x+1<0$ και $x<0$, οπότε $|x+1|=-(x+1)$ και $|x|=-x$.

  Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)}{|x^2+x|\cdot g(x)}=\lim_{x\to-1^-}\left(\frac{-x}{-x}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\right)=+\infty.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

Θέμα | Δ

Δ1. Έστω:

$$P(x)=\frac{x^3+\lambda x^2+(3\lambda-2)x-3}{x^2-6x+9}=\left[x^3+\lambda x^2+(3\lambda-2)x-3\right]\cdot\frac{1}{(x-3)^2},\ x\neq 3.$$

και:

$$L=\lim_{x\to3}\left[x^3+\lambda x^2+(3\lambda-2)x-3\right]=27+9\lambda+(3\lambda-2)\cdot 3-3=18\lambda+18.$$

Είναι:

$$L=0\Leftrightarrow\lambda=-1,\quad L>0\Leftrightarrow\lambda>-1,\quad L<0\Leftrightarrow\lambda<-1.$$

- Για $L\neq0\Leftrightarrow\lambda\neq-1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to3}P(x)=\lim_{x\to3}\left\{\left[x^3+\lambda x^2+(3\lambda-2)x-3\right]\cdot\frac{1}{(x-3)^2}\right\}\overset{L\cdot(+\infty)}{=}\begin{cases}+\infty, & \lambda>-1\\ -\infty, & \lambda<-1\end{cases}.$$

- Για $\lambda=-1$ έχουμε:

$$P(x)=\frac{x^3-x^2-5x-3}{(x-3)^2}=\frac{(x-3)(x^2+2x+1)}{(x-3)^2}=\frac{(x+1)^2}{x-3}=(x+1)^2\cdot\frac{1}{x-3}.$$

Άρα:

- $\lim_{x\to 3^+} P(x) = \lim_{x\to 3^+}\left[(x+1)^2 \cdot \frac{1}{x-3}\right] \overset{16\cdot(+\infty)}{=} +\infty$,
- $\lim_{x\to 3^-} P(x) = \lim_{x\to 3^-}\left[(x+1)^2 \cdot \frac{1}{x-3}\right] \overset{16\cdot(-\infty)}{=} -\infty$.

Συνεπώς, για $\lambda = -1$ το $\lim_{x\to 3} P(x)$ δεν υπάρχει.

Τελικά:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3+\lambda x^2+(3\lambda-2)x-3}{x^2-6x+9} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \lambda > -1 \\ -\infty, & \text{αν } \lambda < -1 \end{cases}$$

και για $\lambda = -1$ το όριο δεν υπάρχει.

Δ2. α. Έστω $g(x) = \frac{x^2-8x+15}{(x-5)\cdot f(x)}$ για x κοντά στο 3.

Τότε έχουμε:

$$f(x) = \frac{x^2-8x+15}{(x-5)\cdot g(x)} = \frac{(x-5)(x-3)}{(x-5)\cdot g(x)} = \frac{x-3}{g(x)} \quad \text{ή} \quad f(x) = (x-3)\cdot\frac{1}{g(x)}$$

και επειδή $\lim_{x\to 3} g(x) = +\infty$, θα είναι $\lim_{x\to 3}\frac{1}{g(x)} = 0$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\left[(x-3)\cdot g(x)\right] = 0\cdot 0 = 0$.

β. Έστω $g(x) = \frac{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\cdot f(x)}{x-3}$ για $x > 4$ και x κοντά στο 4.

Τότε έχουμε $f(x) = \frac{(x-3)\cdot g(x)}{\sqrt{x+5}-3}$ και ισχύουν:

- $\lim_{x\to 4^+}(x-3) = 1 > 0$,
- $\lim_{x\to 4^+} g(x) = +\infty$ και
- $\lim_{x\to 4^+}\left(\sqrt{x+5}-3\right) = \sqrt{4+5}-3 = 0$ με $\sqrt{x+5} > 0$ για $x > 4$, οπότε είναι

  $\lim_{x\to 4^+}\frac{1}{\sqrt{x+5}-3} = +\infty$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+}\left[(x-3)\cdot g(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{x+5}-3}\right] \overset{1\cdot(+\infty)\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty.$$

γ. Έστω $g(x) = f(x)\cdot\left(x^{2021}-x^{2020}-1\right)$ για x κοντά στο 1.

Τότε έχουμε $f(x)=\dfrac{g(x)}{x^{2021}-x^{2020}-1}$ και ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=-\infty$,
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^{2021}-x^{2020}-1}=-1$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^{2021}-x^{2020}-1}\cdot g(x)\right)\overset{(-1)\cdot(-\infty)}{=\!=}+\infty.$$

8ο

Κριτηριο Αξιολογησης

Θέμα Α

Α1. **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό.

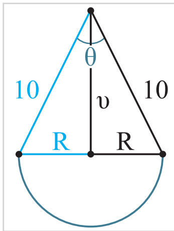
Α2. **α.** $\leq$, $\mathbb{R}$ **β.** $\ln x_0$ **γ.** 0 **δ.** λ, κ **ε.** ℓ, ℓ.

Α3. **α.** Ψ

β. Το όριο γίνεται $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{(x-1)^2}=+\infty$.

Έτσι, καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή $0\cdot(+\infty)$.

Θέμα Β



Β1. Το ύψος υ του ισοσκελούς τριγώνου από την κορυφή του είναι και διχοτόμος της γωνίας θ. Οπότε ισχύουν:

- $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\upsilon}{10}\Leftrightarrow \upsilon=10\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}$,
- $\eta\mu\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{R}{10}\Leftrightarrow R=10\cdot\eta\mu\dfrac{\theta}{2}$.

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $f(\theta)=\dfrac{1}{2}\cdot 2R\cdot\upsilon=10^2\cdot\eta\mu\dfrac{\theta}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2},\ 0<\theta<\pi$

και το εμβαδόν του ημικύκλιου είναι:

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\pi\cdot R^2=\frac{1}{2}\pi\cdot 10^2\cdot\eta\mu^2\frac{\theta}{2}\Leftrightarrow g(\theta)=50\pi\cdot\eta\mu^2\frac{\theta}{2},\ 0<\theta<\pi.$$

Β2. **α.** Έχουμε $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{g(\theta)}{f(\theta)}=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{50\pi\eta\mu^2\dfrac{\theta}{2}}{10^2\eta\mu\dfrac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\eta\mu\dfrac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{0}{1}=0.$

β. Το όριο γράφεται $\lim\limits_{\theta\to\pi}\dfrac{g(\theta)}{f(\theta)}=\lim\limits_{\theta\to\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot\eta\mu\dfrac{\theta}{2}\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}}\right)$.

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{\theta\to\pi}\eta\mu\frac{\theta}{2}=\eta\mu\frac{\pi}{2}=1$,
- για $0<\theta<\pi \Leftrightarrow 0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ είναι $\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}>0$ και έχουμε $\lim\limits_{\theta\to\pi}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$,

  οπότε $\lim\limits_{\theta\to\pi}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}=+\infty$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{\theta\to\pi}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=\lim\limits_{\theta\to\pi}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\eta\mu\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}\right)\overset{\frac{\pi}{2}\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty$.

γ. Το όριο γράφεται $\lim\limits_{\theta\to0}\frac{g(3\theta^2)}{25\pi\cdot\theta}=\lim\limits_{\theta\to0}\frac{50\pi\cdot\eta\mu^2\frac{3\theta^2}{2}}{25\pi\cdot\theta}=\lim\limits_{\theta\to0}\left(2\cdot\eta\mu\frac{3\theta}{2}\cdot\frac{\eta\mu\frac{3\theta}{2}}{\frac{3}{2}\theta}\cdot\frac{3}{2}\right)$. Ισχύουν:

- $\lim\limits_{\theta\to0}\eta\mu\frac{3\theta}{2}=\eta\mu0=0$,
- $\lim\limits_{\theta\to0}\frac{\eta\mu\frac{3\theta}{2}}{\frac{3\theta}{2}}\ \underset{u\to0}{\overset{\frac{3\theta}{2}=u}{=\!=}}\ \lim\limits_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$.

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{\theta\to0}\frac{g(3\theta^2)}{25\pi\cdot\theta}=\lim\limits_{\theta\to0}\left(2\cdot\eta\mu\frac{3\theta}{2}\cdot\frac{\eta\mu\frac{3\theta}{2}}{\frac{3}{2}\theta}\cdot\frac{3}{2}\right)=2\cdot0\cdot1\cdot\frac{3}{2}=0$.

δ. Το όριο γράφεται:

$$\lim_{\theta\to0}\frac{50\pi\cdot f\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{2g(\theta)-25\pi\theta^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{50\pi\cdot10^2\cdot\eta\mu\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{2\cdot50\pi\cdot\eta\mu^2\frac{\theta}{2}-25\pi\cdot\theta^2}=$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{200\cdot\eta\mu\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{4\cdot\left(\eta\mu^2\frac{\theta}{2}-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right)}.$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{\theta\to0}\left[200\cdot\eta\mu\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]=200\cdot\eta\mu\frac{\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=100>0$,

- για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $|\eta\mu x| \le |x| \Rightarrow \left|\eta\mu \frac{\theta}{2}\right| \le \left|\frac{\theta}{2}\right| \Rightarrow \eta\mu^2 \frac{\theta}{2} \le \frac{\theta^2}{4} \Rightarrow \eta\mu^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{4} \le 0$ και

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\eta\mu^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{4}\right) = 0, \text{ οπότε } \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{4\left(\eta\mu^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{4}\right)} = -\infty.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{50\pi\cdot f\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{2g(\theta)-25\pi\theta^2} = \lim_{\theta\to 0}\frac{200\cdot \eta\mu\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cdot \sigma\upsilon\nu\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{4\cdot\left(\eta\mu^2\frac{\theta}{2}-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right)} = -\infty.$$

Θέμα Γ

Γ1. α. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, αν $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \alpha$.

Έχουμε $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu\left(x^2-1\right)}{\left|x^2-3x+2\right|} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\eta\mu\left(x^2-1\right)}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{\left|x^2-3x+2\right|}\right).$

Ισχύουν:

- $\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu\left(x^2-1\right)}{x^2-1} \underset{u\to 0}{\overset{x^2-1=u}{=\!=}} \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u} = 1,$

- $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\left|x^2-3x+2\right|} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{|x-1|}\cdot\frac{x+1}{|x+2|}\right).$

  - Αν $x > 1$, τότε $|x-1| = x-1$ και $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{\left|x^2-3x+2\right|} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{|x+2|} = \frac{2}{3}$, οπότε

    $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$

  - Αν $x < 1$, τότε $|x-1| = -(x-1)$ και $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{\left|x^2-3x+2\right|} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x+1)}{|x+2|} = -\frac{2}{3}$,

    οπότε $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1\cdot\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}.$

Συνεπώς, το $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

β. Η f είναι συνεχής στο $A = \mathbb{R} - \{1, 2\}$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Ισχύουν:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\frac{2}{3} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2}{3},$$

οπότε αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 2.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\eta\mu(x^2-1)}{|x^2-3x+2|} = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\eta\mu(x^2-1)}{|x-1|}\cdot\dfrac{1}{|x-2|}\right).$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{|x-2|} = +\infty,$
- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(x^2-1)}{|x-1|} = \eta\mu 3 > 0$, διότι $0 < 3 < \pi$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\eta\mu(x^2-1)}{|x-1|}\cdot\dfrac{1}{|x-2|}\right) = +\infty$, οπότε η ευθεία $x = 2$ είναι κατακό– ρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Γ2. Η f είναι συνεχής στο 0, οπότε ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

- Για $x > 0$ η δοθείσα γράφεται $f(x) \le \dfrac{1}{x\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{x}$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \le \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x\sqrt{1+x}} - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f(0) \le \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x\sqrt{1+x}} - \frac{1}{x}\right), \ (1).$$

- Για $x < 0$ η δοθείσα γράφεται $f(x) \ge \dfrac{1}{x\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{x}$, οπότε αντίστοιχα βρίσκουμε:

$$f(0) \ge \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x\sqrt{1+x}} - \frac{1}{x}\right), \ (2).$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sqrt{1+x}} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1^2 - \sqrt{1+x}^2}{x\sqrt{1+x}\left(1+\sqrt{1+x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)}{x\sqrt{1+x}\left(1+\sqrt{1+x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1+x}\left(1+\sqrt{1+x}\right)} = -\frac{1}{2}.$$

Συνεπώς, από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $f(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Γ3. ***α.*** Για x κοντά στο 0 θεωρούμε:

$$g(x) = \frac{x f(x) + 1 - \sigma\upsilon\nu^3 x + x e^x}{x^2} \Leftrightarrow x g(x) + \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x - 1}{x} - e^x = f(x), \ (2),$$

με $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=2$.

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(xg(x)+\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x-1}{x}-e^x\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[xg(x)+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu x+1\right)-e^x\right]=$$
$$=0\cdot 2+0\cdot 3-1=-1.$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)+10}-\sqrt{10-e^x}}{f(x)+e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)+10}^{\,2}-\sqrt{10-e^x}^{\,2}}{\left(f(x)+e^x\right)\cdot\left(\sqrt{f(x)+10}+\sqrt{10-e^x}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+10-10+e^x}{\left(f(x)+e^x\right)\cdot\left(\sqrt{f(x)+10}+\sqrt{10-e^x}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{f(x)+10}+\sqrt{10-e^x}}=\frac{1}{\sqrt{-1+10}+\sqrt{10-1}}=\frac{1}{6}.$$

Θέμα Δ

Δ1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $|\eta\mu x|\le |x|\Leftrightarrow \eta\mu^2 x\le x^2\Leftrightarrow x^2-\eta\mu^2 x\ge 0$.

Η δοθείσα γράφεται:

$$f(x)\cdot\left(f^2(x)+1\right)=x^2-\eta\mu^2 x\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2-\eta\mu^2 x}{f^2(x)+1}\ge 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad (1).$$

Επιπλέον, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^2(x)+1\ge 1\Leftrightarrow\frac{1}{f^2(x)+1}\le 1\Leftrightarrow\frac{x^2-\eta\mu^2 x}{f^2(x)+1}\le x^2-\eta\mu^2 x\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x)\le x^2-\eta\mu^2 x.$$

Άρα, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$0\le f(x)\le x^2-\eta\mu^2 x, \quad (2).$$

Δ2. **α.** Για $x\ne 0$ είναι $x^2>0$ και από τη (2) έχουμε:

$$0\le\frac{f(x)}{x^2}\le 1-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left[1-\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]=1-1^2=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=0, \quad (3).$$

β. Θεωρούμε:

$$h(x)=\frac{f(x)}{x^2}\Leftrightarrow x^2h(x)=f(x) \text{ για x κοντά στο 0 με } \lim_{x\to 0}h(x)=0.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2h(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x\cdot h(x)\right)=0\cdot 0=0.$$

γ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 2}f(2x-4)\overset{2x-4=u}{\underset{u\to 0}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}f(u)\overset{\Delta 2\,(\beta)}{=\!=}\lim\limits_{u\to 0}\left(u^2\cdot h(u)\right)=0$

και ομοίως, βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to 2}f(x-2)\overset{x-2=u}{\underset{u\to 0}{=\!=}}\lim_{u\to 0}f(u)=0.$$

Επειδή $f(x-2)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ από το Δ1, θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x-2)}=+\infty$.

Επίσης έχουμε $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(2x-4)+x\right)=0+2=2$.

Επομένως:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(2x-4)+x}{f(x-2)}=+\infty.$$

Δ3. Έχουμε:

$$2=\lim_{x\to 0}\frac{3\sqrt{f(x)}\cdot e^x\cdot\alpha+4\sqrt{f(x)}\cdot\ln^2\left(x+e^{\beta}\right)+f(x)}{\sqrt{f(x)}-f(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)}\left(3e^x\cdot\alpha+4\ln^2\left(x+e^{\beta}\right)+\sqrt{f(x)}\right)}{\sqrt{f(x)}\left(1-\sqrt{f(x)}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3e^x\cdot\alpha+4\ln^2\left(x+e^{\beta}\right)+\sqrt{f(x)}}{1-\sqrt{f(x)}}=$$

$$=\frac{3\alpha+4\cdot\ln^2 e^{\beta}+0}{1-0}=3\alpha+4\beta^2.$$

Συνεπώς, τα σημεία Μ κινούνται στην παραβολή με εξίσωση $3x+4y^2=2$.

14η Ενότητα

Όριο συνάρτησης στο άπειρο

Α. Του τύπου Σωστό / Λάθος

14.1 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό.

14.2 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό.

14.3 **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Λάθος.

14.4 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό **στ.** Σωστό.

14.5 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος.

14.6 **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό.

14.7 **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος **στ.** Λάθος **ζ.** Λάθος **η.** Σωστό.

14.8 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό **στ.** Σωστό.

Β. Βασικές εφαρμογές – Ασκήσεις εμπέδωσης

14.9 **α.** $\lim_{x\to-\infty} c = c$, $\lim_{x\to+\infty} c = c$ **β.** $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

γ. $\lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$

δ. $\lim_{x\to+\infty}(\alpha x+\beta) = +\infty$ και $\lim_{x\to-\infty}(\alpha x+\beta) = -\infty$, όταν $\alpha > 0$

ε. $\lim_{x\to+\infty}(\alpha x+\beta) = -\infty$ και $\lim_{x\to-\infty}(\alpha x+\beta) = +\infty$, όταν $\alpha < 0$

στ. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

ζ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2\right)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$

η. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

θ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3\right)=-\infty$

ι. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

ια. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$

ιβ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

ιγ. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

ιδ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

ιε. Δεν υπάρχει

ιστ. Δεν υπάρχει

ιζ. Δεν υπάρχει

ιη. Δεν υπάρχει.

14. 10 **α.** $+\infty$ **β.** $+\infty$ **γ.** $+\infty$ **δ.** $+\infty$ **ε.** $-\infty$ **στ.** $-\infty$.

14. 11 **α.** $+\infty$ **β.** $-\infty$ **γ.** $+\infty$ **δ.** $-\infty$ **ε.** $-\infty$ **στ.** $+\infty$.

14. 12 **α.** $\frac{1}{2}$ **β.** 5 **γ.** -4 **δ.** $-\frac{2}{3}$.

14. 13 **α.** $+\infty$ **β.** $-\infty$ **γ.** $+\infty$ **δ.** $+\infty$.

14. 14 **α.** 0 **β.** 0 **γ.** $+\infty$ **δ.** $-\infty$.

14. 15 **α.** $+\infty$ **β.** $+\infty$ **γ.** $+\infty$ **δ.** $+\infty$ **ε.** 1 **στ.** $-\infty$ **ζ.** $+\infty$ **η.** 0.

14. 16 **α.** 0 **β.** 0 **γ.** $\frac{5}{2}$ **δ.** -1.

14. 17 **α.** -2 **β.** 2 **γ.** $\frac{1}{4}$ **δ.** $-\frac{1}{4}$ **ε.** 1 **στ.** -1 **ζ.** $\frac{1}{2}$ **η.** 2.

14. 18 **α.** 1 **β.** 2 **γ.** e^2 **δ.** $-\frac{25}{4}$.

14. 19 **α.** -1 **β.** $\frac{1}{3}$ **γ.** $-\frac{1}{2}$ **δ.** $\frac{9}{2}$.

Γ. Ασκήσεις για λύση

14. 20 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x^5+4x+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}5x^5=-\infty.$

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{1}{2}\cdot x^4-5x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{1}{2}\cdot x^4\right)\overset{\ln\frac{1}{2}<0}{=\!=}-\infty.$

14. 21 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2021}{x^5+7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2021}{x^5}=0.$

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{x^5+x^3+\eta\mu\theta}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0.$

γ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^5+x^4-1}{9x^5-x+6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^5}{9x^5}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$

δ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^5-2x+6}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^5}{x^2}\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty.$

14. 22 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0,$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+2}-\frac{2}{x-3}\right)=0-0=0.$

β. Ομοίως, βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2}-\frac{x-4}{x^2-3}\right)=1-0=1.$

γ. Ομοίως, βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}+\frac{2x}{x-1}\right)\overset{(+\infty)+2}{=\!=}+\infty.$

δ. Ομοίως, βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x}{x+1}-\frac{2-x^2}{x-4}\right)\overset{(+\infty)-(-\infty)}{=\!=}+\infty.$

ε. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3}{x}-\frac{2x^2+3x}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-3\right)\left(x-1\right)-\left(2x^2+3x\right)\cdot x}{x\left(x-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3-4x^2-3x+3}{x^2-x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(-x\right)=-\infty.$$

στ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-\frac{x^2+2x}{x-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+1)(x-2)-(x^2+2x)(x+1)}{(x+1)(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x^2-x-2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x^2}{x^2}=-5.$$

14. 23 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x^3-2x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x}\cdot\sqrt{3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}}\right)\overset{(+\infty)\cdot\sqrt{3}}{=\!=}+\infty.$

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^4+8x^2+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\cdot\sqrt{1+\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x^4}}\right)\overset{(+\infty)\cdot 1}{=\!=}+\infty.$

14. 24 **α.** Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+5x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}+\sqrt{x^4\left(1+\frac{5}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)}\right)\underset{x>0}{\overset{x\to+\infty}{=\!=}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+x^2\sqrt{1+\frac{5}{x^3}-\frac{1}{x^4}}\right)\overset{(+\infty)\cdot1+(+\infty)\cdot1}{=\!=}+\infty.$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(x+\ln 2)(x+\ln 3)}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2\left(1+\frac{\ln 2}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{\ln 3}{x}\right)}-x\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[|x|\cdot\sqrt{\left(1+\frac{\ln 2}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{\ln 3}{x}\right)}-x\right]\underset{\substack{x<0\\|x|=-x}}{\overset{x\to-\infty}{=\!=}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[-x\cdot\sqrt{\left(1+\frac{\ln 2}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{\ln 3}{x}\right)}-x\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[x\cdot\left(-\sqrt{\left(1+\frac{\ln 2}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{\ln 3}{x}\right)}-1\right)\right]\overset{(-\infty)\cdot(-1-1)}{=\!=}+\infty.$$

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+2}+5x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}+5x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\cdot\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}+5x\right)\underset{\substack{x<0\\|x|=-x}}{\overset{x\to-\infty}{=\!=}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\cdot\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}+5x\right)=$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x\cdot\left(-\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}+5\right)\right] \overset{(-\infty)\cdot\overbrace{\left(-\sqrt{3}+5\right)}^{(+)}}{=\!=} -\infty.$$

δ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)\cdot\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}+2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cdot\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+2\right)} = 0.$$

ε. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x+2-\sqrt{9x^2-x+3}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3x+2-\sqrt{9x^2-x+3}\right)\cdot\left(3x+2+\sqrt{9x^2-x+3}\right)}{3x+2+\sqrt{9x^2-x+3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+2)^2-\sqrt{9x^2-x+3}^{\,2}}{3x+2+\sqrt{9x^2-x+3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{13x+1}{3x+2+\sqrt{9x^2-x+3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{13+\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}+\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \frac{13+0}{3+0+3} = \frac{13}{6}.$$

στ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x^4+5x+3}-x^3\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x\sqrt{x^4+5x+3}-x^3\right)\cdot\left(x\sqrt{x^4+5x+3}+x^3\right)}{x\sqrt{x^4+5x+3}+x^3} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(x^4+5x+3\right)-x^6}{x\sqrt{x^4+5x+3}+x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+3x^2}{x\sqrt{x^4+5x+3}+x^3} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(5+\frac{3}{x}\right)}{x^3\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^3}+\frac{3}{x^4}}+1\right)} = \frac{5+0}{\sqrt{1}+1} = \frac{5}{2}.$$

14. 25 α. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{4x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{4x} \underset{\substack{x>0\\|x|=x}}{\overset{x\to+\infty}{=\!=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{4\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{4} = \frac{\sqrt{2+0}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+x+2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x} \overset{x\to-\infty}{\underset{\substack{x<0\\|x|=-x}}{=\!=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{-\cancel{x}\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}{\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}{1} = -\sqrt{2}.$$

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-\sqrt{x^2+3}}{2x-\sqrt{x^2-3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-|x|\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{2x-|x|\cdot\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}} \overset{x\to+\infty}{\underset{\substack{x>0\\|x|=x}}{=\!=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-x\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{2x-x\cdot\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{2-\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}} = \frac{2-\sqrt{1+0}}{2-\sqrt{1-0}} = 1.$$

14. 26 α. • Αν $\lambda \neq 1$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+\lambda x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\lambda x\right) \overset{x\to-\infty}{\underset{\substack{x<0\\|x|=-x}}{=\!=}} \lim_{x\to-\infty}\left(-x\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\lambda x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x\cdot\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\lambda\right)\right] \overset{(-\infty)\cdot(\lambda-1)}{=\!=} \begin{cases} +\infty\ , & \text{αν } \lambda<1 \\ -\infty\ , & \text{αν } \lambda>1 \end{cases}.$$

• Αν $\lambda = 1$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+\lambda x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)}{\sqrt{x^2+2}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{-x\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x\cdot\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-1\right)} = 0.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+\lambda x\right)=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } \lambda<1\\ 0\ , & \text{αν } \lambda=1.\\ -\infty, & \text{αν } \lambda>1\end{cases}$$

β. Έστω:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\lambda+2)x^4+2x^2+3}{\lambda x^3-5x+6}.$$

- Αν $\lambda=-2$, τότε έχουμε:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3}{-2x^3-5x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{-2x^3}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0.$$

- Αν $\lambda=0$, τότε έχουμε:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4+2x^2+3}{-5x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4}{-5x}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{5}\cdot x^3\right)=-\infty.$$

- Αν $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq -2$, τότε έχουμε:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\lambda+2)x^4}{\lambda x^3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\lambda+2}{\lambda}\cdot x\right)=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } \lambda<-2 \text{ ή } \lambda>0\\ -\infty, & \text{αν } -2<\lambda<0\end{cases}.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$L=\begin{cases}0\ , & \text{αν } \lambda=-2\\ -\infty, & \text{αν } -2<\lambda\leq 0\\ +\infty, & \text{αν } \lambda<-2 \text{ ή } \lambda>0\end{cases}.$$

14. 27 • Αν $\lambda\neq 3$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1}-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\lambda x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\lambda\right)\right]=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } \lambda<3\\ -\infty, & \text{αν } \lambda>3\end{cases}.$$

- Αν $\lambda=3$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+x+1}-3x\right)\cdot\left(\sqrt{9x^2+x+1}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+x+1}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{9x^2+x+1}+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3\right)}=$$

$$=\frac{1+0}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}\in\mathbb{R}.$$

Επομένως $\lambda = 3$.

14. 28 **α.** Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-5x^2\right)=-\infty$, άρα υπάρχει $\alpha<0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x<\alpha$ να ισχύει $x^3-5x^2<0$. Συνεπώς, είναι $\left|x^3-5x^2\right|=-x^3+5x^2$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left|x^3-5x^2\right|+x}{-x^2+x-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3+5x^2-x}{-x^2+x-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{-x^2}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty.$$

β. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^2+x-4\right)=+\infty$, άρα υπάρχει $\alpha>0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x>\alpha$ να ισχύει $4x^2+x-4>0$. Συνεπώς, είναι $\left|4x^2+x-4\right|=4x^2+x-4$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left|4x^2+x-4\right|}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x-4}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}(4x)=+\infty.$$

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}+2-\sqrt{2}\cdot x}{x+\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+2-\sqrt{2}\cdot x}{x+|x|\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}\underset{\substack{x<0\\|x|=-x}}{\overset{x\to-\infty}{=\!=}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+2-\sqrt{2}\cdot x}{x-x\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\left(-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x}-\sqrt{2}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(1-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)}=$$

$$=\frac{-\sqrt{2}+0-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}.$$

14. 29 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x-1)(2x+3)}{(5x-3)(4x+5)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2+7x-3}{20x^2+13x-15}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2}{20x^2}=\dfrac{3}{10}$.

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2x}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{x-1}-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x+1}=3-2=1$.

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x-1}\cdot\left(\frac{x}{x+1}-\frac{3x}{x-1}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}-\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x-1}\right)=0\cdot(1-3)=0.$$

14. 30 Το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+\alpha x-\alpha x+\beta x-\beta}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1+\alpha)x^2+(2-\alpha+\beta)x-\beta}{x-1}=2.$$

Αν 1 + α ≠ 0, τότε το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(1+\alpha)x^2}{x}=+\infty \quad \text{ή} \quad -\infty \quad \text{που είναι άτοπο.}$$

Άρα α = –1. Τότε, το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(2-\alpha+\beta)x}{x}=2-\alpha+\beta=2\Rightarrow\beta=-1.$$

Οι τιμές των α και β επαληθεύουν την αρχική σχέση, άρα είναι δεκτές.

14. 31 **α.** Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{|x|\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}\overset{x\to+\infty}{\underset{\substack{x>0\\|x|=x}}{=\!=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{x\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

β. Έχουμε $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{|x|\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}\overset{x\to-\infty}{\underset{\substack{x<0\\|x|=-x}}{=\!=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(3-\frac{2}{x}\right)}{-\cancel{x}\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=\frac{3}{-\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}.$

14. 32 **α.** Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-5}-\sqrt{2x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}-|x|\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)\overset{x\to+\infty}{\underset{\substack{x>0\\|x|=x}}{=\!=}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}-x\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)\right]\overset{(+\infty)\cdot\overbrace{(1-\sqrt{2})}^{(-)}}{=\!=}-\infty.$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\cdot\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-3x\right)\overset{x\to+\infty}{\underset{\substack{x>0\\|x|=x}}{=\!=}}\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-3x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-3\right)\right]\overset{(+\infty)\cdot(-1)}{=\!=}-\infty.$$

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-4x}+x\right)}{\sqrt{x^2-4x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x-x^2}{\sqrt{x^2-4x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{\sqrt{x^2-4x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1}=-2.$$

δ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-3x}-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-x+\sqrt{x^2-3x}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}+x}+\frac{-3x}{\sqrt{x^2-3x}+x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1}+\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1}\right)=\frac{2}{2}+\frac{-3}{2}=-\frac{1}{2}.$$

14. 33 **α.** Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2-x)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left[x+1-(x-1)\right]\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2}\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\cancel{2}\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}{\cancel{\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}\right)}{\left(\sqrt{1+0}+1\right)}=\frac{2}{2}=1.$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+e}+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+e}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+e}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+e}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+1-x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+e}-x\right)}{\left(x^2+e-x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1\cdot\left(\sqrt{x^2+e}-x\right)}{e\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{e}{x^2}}-x}{e\cdot\left(|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x\right)} \overset{x\to-\infty}{\underset{\substack{x<0\\|x|=-x}}{=\!=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\cdot\sqrt{1+\frac{e}{x^2}}-x}{e\cdot\left(-x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}\cdot\left(-\sqrt{1+\frac{e}{x^2}}-1\right)}{e\cancel{x}\cdot\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)} = \frac{-2}{-2e} = \frac{1}{e}.$$

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[x^2-\left(x^2+1\right)\right]\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left[x^2-\left(x^2-1\right)\right]\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{1\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\cdot\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = -\frac{1+1}{1+1} = -1.$$

14. 34 α. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-5x+4}-5x+8\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(|x|\cdot\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}-5x+8\right) \overset{x\to+\infty}{\underset{\substack{x>0\\|x|=x}}{=\!=}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}-5x+8\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}-5+\frac{8}{x}\right)\right] \overset{(+\infty)\cdot(3-5+0)}{=\!=} -\infty.$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-5x+4}-3x+8\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\sqrt{9x^2-5x+4}-(3x-8)\right]\cdot\left[\sqrt{9x^2-5x+4}+(3x-8)\right]}{\sqrt{9x^2-5x+4}+(3x-8)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^2-5x+4-(3x-8)^2}{\sqrt{9x^2-5x+4}+3x-8} = \lim_{x\to+\infty} \frac{43x-60}{\sqrt{9x^2-5x+4}+3x-8} =$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\left(43-\dfrac{60}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{9-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}}+3-\dfrac{8}{x}\right)}=\frac{43}{6}.$$

14. 35 **α.** Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta-x^2}{\sqrt{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}{\sqrt{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}{|x|\cdot\sqrt{1-\dfrac{\alpha+\beta}{x}+\dfrac{\alpha\beta}{x^2}}-x}\overset{x\to-\infty}{\underset{\substack{x<0\\|x|=-x}}{=\!=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}{-x\cdot\sqrt{1-\dfrac{\alpha+\beta}{x}+\dfrac{\alpha\beta}{x^2}}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{-x}\left(\alpha+\beta-\dfrac{\alpha\beta}{x}\right)}{\cancel{-x}\cdot\left(\sqrt{1-\dfrac{\alpha+\beta}{x}+\dfrac{\alpha\beta}{x^2}}+1\right)}=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

β. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-5x\right)=+\infty$, άρα κοντά στο $-\infty$ ισχύει $x^2-5x>0\Rightarrow\left|x^2-5x\right|=x^2-5x$,

οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left|x^2-5x\right|+x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

γ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\cdot\sqrt{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{x-2}\overset{x\to+\infty}{\underset{\substack{x>0\\|x|=x}}{=\!=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\cdot\sqrt{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{\cancel{x}\cdot\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=\dfrac{\sqrt{4}}{1}=2.$

δ. Για $x\to+\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-4)=+\infty$, άρα κοντά στο $+\infty$ ισχύει

$x-4>0\Rightarrow|x-4|=x-4$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5-2|x-4|}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-2(x-4)}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{3x^2}=0.$$

ε. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(5-x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-4)=+\infty$, άρα κοντά στο $+\infty$ ισχύει

$5-x<0\Rightarrow|5-x|=-5+x$ και $x-4>0\Rightarrow|x-4|=x-4$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2|5-x|+3}{|x-4|+8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(-5+x)+3}{x-4+8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2.$$

στ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x-1}-\frac{x^2-5x}{2x+4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+1)(2x+4)-(x^2-5x)(2x-1)}{(2x-1)(2x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{15x^2-3x+4}{4x^2+6x-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{15x^2}{4x^2}=\frac{15}{4}.$$

14. 36 **α.** Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\sqrt{x-1}-x\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\sqrt{x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0}{=\!=}}\lim_{u\to0}\frac{\sqrt{1-u}-\sqrt{1+u}}{u\sqrt{1+u}}=\lim_{u\to0}\frac{1-u-1-u}{u\sqrt{1+u}\left(\sqrt{1-u}+\sqrt{1+u}\right)}=$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{-2}{\sqrt{1+u}\left(\sqrt{1-u}+\sqrt{1+u}\right)}=-1.$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x^2-5x+3}-x^2+x-3\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2(x^2-5x+3)-(x^2-x)^2}{x\sqrt{x^2-5x+3}+x^2-x}-3\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^4-5x^3+3x^2-x^4+2x^3-x^2}{x^2\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}+x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}-3\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-3x^3+2x^2}{x^2\left(\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)}-3\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x+2}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}+1-\frac{1}{x}}-3\right)=-\infty.$$

γ. Αν $g(x)=f(x)\cdot\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right),\ x\in D_f\cap[0,+\infty)$, τότε έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-2$ και

- $f(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\dfrac{g(x)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{g(x)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{x+1-x}$ ή

  $f(x)=g(x)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right),$

  Επομένως:

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)\cdot\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\right]\overset{(-2)\cdot(+\infty)\cdot 2}{=\!=}-\infty.$$

14. 37 α. Έστω:

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(\alpha-3)x^3+5\sqrt{x^4+1}-3}{(\alpha+1)x^2+7x-2}.$$

- Αν $\alpha=3$, τότε έχουμε:

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{5\sqrt{x^4+1}-3}{4x^2+7x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}-\frac{3}{x^2}}{4+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{5}{4}.$$

- Αν $\alpha=-1$, τότε έχουμε:

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8x^3+5\sqrt{x^4+1}-3}{7x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(-8+\frac{5}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}-\frac{3}{x^3}\right)}{x\left(7-\frac{2}{x}\right)}\overset{(+\infty)\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)}{=\!=}-\infty.$$

- Αν $\alpha\neq-1$ και 3, τότε έχουμε:

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\cdot\left[2(\alpha-3)+\frac{5}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}-\frac{3}{x^3}\right]}{x^2\cdot\left(\alpha+1+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\overset{(+\infty)\cdot\frac{2(\alpha-3)}{\alpha+1}}{=\!=}\begin{cases}+\infty, & \text{αν } \alpha<-1 \text{ ή } \alpha>3\\ -\infty, & \text{αν } -1<\alpha<3\end{cases}.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$L_1=\begin{cases}\frac{5}{4}\ , & \text{αν } \alpha=3\\ -\infty, & \text{αν } -1\leq\alpha<3\\ +\infty, & \text{αν } -1\leq\alpha<-1 \text{ ή } \alpha>3\end{cases}.$$

β. Έστω:

$$L_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha-1)x^3+2x^2+3}{\alpha x^2-5x+6}.$$

- Αν $\alpha = 1$, τότε έχουμε:

$$L_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

- Αν $\alpha = 0$, τότε έχουμε:

$$L_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3+2x^2+3}{-5x+6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3}{-5x} = +\infty.$$

- Αν $\alpha \neq 0,\ 1$, τότε έχουμε:

$$L_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\alpha-1)x^3+2x^2+3}{\alpha x^2-5x+6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\alpha-1)x^3}{\alpha x^2} \overset{(+\infty)\cdot\frac{\alpha-1}{\alpha}}{=\!=} \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \alpha<0 \text{ ή } \alpha>1 \\ -\infty, & \text{αν } 0<\alpha<1 \end{cases}.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$L_2 = \begin{cases} 2 & , \text{ αν } \alpha=1 \\ +\infty, & \text{αν } \alpha\leq 0 \text{ ή } \alpha>1. \\ -\infty, & \text{αν } 0<\alpha<1 \end{cases}$$

γ. Έστω:

$$L_3 = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-5x+7}+\alpha x\right).$$

- Αν $\alpha \neq 2$, τότε έχουμε:

$$L_3 = \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\cdot\sqrt{4-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}+\alpha x\right) \underset{\substack{x<0\\|x|=-x}}{\overset{x\to-\infty}{=\!=}} \lim_{x\to-\infty}\left(-x\cdot\sqrt{4-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}+\alpha x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x\cdot\left(-\sqrt{4-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}+\alpha\right)\right] \overset{(+\infty)\cdot(\alpha-2)}{=\!=} \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \alpha<2 \\ -\infty, & \text{αν } \alpha>2 \end{cases}.$$

- Αν $\alpha = 2$, τότε έχουμε:

$$L_3 = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-5x+7}+2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-5x+7-4x^2}{\sqrt{4x^2-5x+7}-2x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\left(-5+\frac{7}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(-\sqrt{4-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}-2\right)} = \frac{5}{4}.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$L_3 = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \alpha<2 \\ -\infty, & \text{αν } \alpha>2. \\ \frac{5}{4} & , \text{ αν } \alpha=2 \end{cases}$$

δ. Έστω:

$$L_4=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2-5x+4}-(\alpha-1)x\right].$$

- Αν $\alpha\neq 3$, τότε έχουμε:

$$L_4=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(|x|\cdot\sqrt{4-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}-(\alpha-1)x\right)\right]\overset{x\to+\infty}{\underset{\substack{x>0\\|x|=x}}{=\!=}}\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{4-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}-(\alpha-1)x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt{4-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}-\alpha+1\right)\right]\overset{(+\infty)\cdot(3-\alpha)}{=\!=}\begin{cases}+\infty, & \text{αν } \alpha<3\\ -\infty, & \text{αν } \alpha>3\end{cases}.$$

- Αν $\alpha=3$, τότε έχουμε:

$$L_4=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-5x+4}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+4}{\sqrt{4x^2-5x+4}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5+\frac{4}{x}}{\sqrt{4-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}+2}=-\frac{5}{4}.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$L_4=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } \alpha<3\\ -\infty, & \text{αν } \alpha>3\\ -\frac{5}{4}, & \text{αν } \alpha=3\end{cases}.$$

14. 38 α. Έστω:

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+2}-\alpha x+\beta\right)=0.$$

Το όριο γράφεται:

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-(\alpha x-\beta)(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\alpha)x^2-(2\alpha+\beta)x+2\beta+1}{x+2}.$$

- Αν $\alpha\neq 1$, τότε έχουμε:

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\alpha)x^2}{x}\overset{(+\infty)\cdot(1-\alpha)}{=\!=}\begin{cases}+\infty, & \text{αν } \alpha<1\\ -\infty, & \text{αν } \alpha>1\end{cases}\quad \text{που είναι άτοπο.}$$

- Αν $\alpha=1$, τότε έχουμε:

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{-(\beta+2)x+2\beta-1}{x+2}=-\beta-2,$$

άρα $L_1=0\Rightarrow -\beta-2=0\Rightarrow \beta=-2$.

Επομένως $\alpha = 1$, $\beta = -2$.

β. Έστω:

$$L_2 = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\alpha x^2 + x} - \sqrt{x^2 + \beta x}\right) = 1.$$

- Αν $\alpha < 0$, τότε είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha x^2 + x\right) = -\infty$, άρα $\alpha x^2 + x < 0$ για x κοντά στο $+\infty$, οπότε δεν έχει νόημα η $\sqrt{\alpha x^2 + x}$ που είναι άτοπο.
- Αν $0 < \alpha \neq 1$, τότε έχουμε:

$$L_2 = \lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt{\alpha + \frac{1}{x}} - \sqrt{1 + \frac{\beta}{x}}\right)\right] \overset{(+\infty)\cdot\left(\sqrt{\alpha}-1\right)}{=\!=} \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \alpha > 1 \\ -\infty, & \text{αν } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

που είναι και πάλι άτοπο, διότι $L_2 = 1 \in \mathbb{R}$.

- Αν $\alpha = 1$, τότε έχουμε:

$$L_2 = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + \beta x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\beta)x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + \beta x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\beta}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{\beta}{x}}} = \frac{1-\beta}{2},$$

άρα:

$$L_2 = 1 \Rightarrow \frac{1-\beta}{2} = 1 \Rightarrow \beta = -1.$$

Επομένως $\alpha = 1$, $\beta = -1$.

14. 39 • Αν $2\alpha + \beta - 3 \neq 0$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(2\alpha+\beta-3)x^6}{2x^3} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } 2\alpha+\beta-3 > 0 \\ -\infty, & \text{αν } 2\alpha+\beta-3 < 0 \end{cases} \text{ που είναι άτοπο,}$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4 \in \mathbb{R}$.

- Αν $2\alpha + \beta - 3 = 0$ και $3\alpha - 2\beta - 8 \neq 0$, τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-(3\alpha-2\beta-8)x^5}{2x^3} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } 3\alpha-2\beta-8 < 0 \\ -\infty, & \text{αν } 3\alpha-2\beta-8 > 0 \end{cases}, \text{ που είναι άτοπο.}$$

- Αν $\begin{cases} 2\alpha+\beta-3 = 0 \\ 3\alpha-2\beta-8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}$, τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{8x^3 - x^2 + 21}{2x^3 - x + 2021} = \lim_{x\to+\infty}\frac{8x^3}{2x^3} = 4.$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=4, \text{ όταν } \alpha=2,\ \beta=-1.$$

14. 40 Θέτουμε $u=f(x)$. Τότε για $x\to+\infty$, το $u\to1$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{f^2(x)-3f(x)+2}=\lim_{u\to1}\frac{\sqrt{u}-1}{u^2-3u+2}=\lim_{u\to1}\frac{(\sqrt{u}-1)(\sqrt{u}+1)}{(u-1)(u-2)(\sqrt{u}+1)}=$$

$$=\lim_{u\to1}\frac{\cancel{u-1}}{\cancel{(u-1)}(u-2)(\sqrt{u}+1)}=\lim_{u\to1}\frac{1}{(u-2)(\sqrt{u}+1)}=-\frac{1}{2}.$$

14. 41 **α.** Αν $g(x)=f(x)\cdot(x^2+x+1)$, τότε είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-2$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)\cdot\frac{1}{x^2+x+1}\right)=(-2)\cdot0=0.$$

β. Αν $g(x)=\dfrac{f(x)}{x+1}$, τότε είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)\cdot(x+1)\right]\overset{(-\infty)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty.$$

γ. Αν $g(x)=\dfrac{e^x}{f(x)}$, τότε είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-8$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\frac{1}{g(x)}\right)\overset{(+\infty)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)}{=\!=}-\infty.$$

δ. Έστω $M>0$. Για $x>M$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)+1}$ για την οποία είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ και έχουμε:

$$g(x)=\frac{f(x)}{f(x)+1}\Leftrightarrow g(x)\cdot(f(x)+1)=f(x)\Leftrightarrow f(x)\cdot(g(x)-1)=-g(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{g(x)}{1-g(x)}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-g(x))=-\infty$, οπότε $1-g(x)<0$ για $x>M$. Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{1-g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{g(x)}-1}=\frac{1}{0-1}=-1.$$

14. 42 **α.** Θέτουμε $\omega=\sqrt{x^2+1}-x$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=0.$$

Άρα, όταν x ⟶ +∞, το $\omega=\sqrt{x^2+1}-x\to 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{\omega\to 0}e^{\omega}=e^0=1.$

β. Θέτουμε $\omega=\dfrac{4x^3+x^2+1}{2x^3+7}$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+x^2+1}{2x^3+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{2x^3}=2.$$

Άρα, όταν x ⟶ +∞, το $\omega=\dfrac{4x^3+x^2+1}{2x^3+7}\to 2$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{4x^3+x^2+1}{2x^3+7}}=\lim\limits_{\omega\to 2}e^{\omega}=e^2.$

γ. Θέτουμε $\omega=\sqrt{x^2+1}-x$. Στο ερώτημα (α) βρήκαμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0.$

Άρα, όταν x ⟶ +∞, το ω ⟶ 0 με $\omega=\sqrt{x^2+1}-x>0$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]=\lim_{\omega\to 0^+}\ln\omega=-\infty.$$

δ. Θέτουμε $\omega=\dfrac{x^4+1}{x^2+x+1}$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+1}{x^2+x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty.$$

Άρα, όταν x ⟶ +∞, το ω ⟶ +∞, οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(\frac{x^4+1}{x^2+x+1}\right)\right]=\lim_{\omega\to+\infty}\ln\omega=+\infty.$$

14. 43 **α.** Έστω:

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-1}-2\alpha^{x+1}}{2e^{x+1}+\alpha^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{e}\cdot e^x-2\alpha\cdot\alpha^x}{2e\cdot e^x+\alpha^x}.$$

- Αν 0 < α < e, τότε έχουμε:

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{e}-2\alpha\cdot\left(\frac{\alpha}{e}\right)^x}{2e+\left(\frac{\alpha}{e}\right)^x}=\frac{\frac{1}{e}-2\alpha\cdot 0}{2e+0}=\frac{1}{2e^2},$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha}{e}\right)^x=0,\ \left(\dfrac{\alpha}{e}<1\right).$

- Αν α > e, τότε έχουμε:

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{e}\cdot\left(\frac{e}{\alpha}\right)^x - 2\alpha}{2e\cdot\left(\frac{e}{\alpha}\right)^x + 1} = \frac{\frac{1}{e}\cdot 0 - 2\alpha}{2e\cdot 0 + 1} = -2\alpha,$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{\alpha}\right)^x = 0,\ \left(\frac{e}{\alpha} < 1\right).$

- Αν $\alpha = e$, τότε έχουμε:

$$L_1 = \frac{\frac{1}{e}\cdot e^x - 2e\cdot e^x}{2e\cdot e^x + e^x} = \frac{\frac{1}{e} - 2e}{2e+1} = \frac{1-2e^2}{2e^2+e}.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$L_1 = \begin{cases} \frac{1}{2e^2} &, \text{ αν } 0<\alpha<e \\ -2\alpha &, \text{ αν } \alpha>e \\ \frac{1-2e^2}{2e^2+e} &, \text{ αν } \alpha=e \end{cases}.$$

β. Έστω:

$$L_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\alpha^x + \pi^{x+1}}{\alpha^{x-1} + \pi^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\alpha^x + \pi\cdot\pi^x}{\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha^x + \pi^x}.$$

- Αν $0 < \alpha < \pi$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^x = 0 \quad \text{και} \quad L_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\pi\cdot\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^x}{\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^x} = \frac{2+\pi\cdot 0}{\frac{1}{\alpha}+0} = 2\alpha.$$

- Αν $\alpha > \pi$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^x = 0 \quad \text{και} \quad L_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^x + \pi}{\frac{1}{\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^x + 1} = \frac{2\cdot 0+\pi}{\frac{1}{\alpha}\cdot 0+1} = \pi.$$

- Αν $\alpha = \pi$, τότε έχουμε:

$$L_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\pi^x + \pi\cdot\pi^x}{\frac{1}{\pi}\cdot\pi^x + \pi^x} = \frac{2+\pi}{\frac{1}{\pi}+1} = \frac{2\pi+\pi^2}{1+\pi}.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$L_2=\begin{cases}2\alpha & ,\ \text{αν } 0<\alpha<\pi\\ \pi & ,\ \text{αν } \alpha>\pi\\ \dfrac{2\pi+\pi^2}{1+\pi} & ,\ \text{αν } \alpha=\pi\end{cases}.$$

γ. Έστω:

$$L_3=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x+1}+\alpha^{x-1}+1}{4^x+\alpha^{2x+1}+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot 2^x+\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha^x+1}{4^x+\alpha\cdot\left(\alpha^2\right)^x+2}.$$

- Αν $0<\alpha<2$, τότε είναι:

$$\alpha^2<4 \ \text{ και } \ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha^2}{4}\right)^x=0,$$

άρα:

$$L_3=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\cdot\left[2+\frac{1}{\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]}{4^x\cdot\left[1+\alpha\cdot\left(\frac{\alpha^2}{4}\right)^x+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x\right]}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot\frac{2+\frac{1}{\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x}{1+\alpha\cdot\left(\frac{\alpha^2}{4}\right)^x+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x}\right]=0\cdot\frac{2}{1}=0.$$

- Αν $\alpha>2$, τότε είναι:

$$\alpha^2>4 \ \text{ και } \ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{\alpha^2}\right)^x=0,$$

άρα:

$$L_3=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha^x\cdot\left[2\cdot\left(\frac{2}{\alpha}\right)^x+\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^x\right]}{\left(\alpha^2\right)^x\cdot\left[\left(\frac{4}{\alpha^2}\right)^x+\alpha+2\cdot\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^x\right]}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^x\cdot\frac{2\cdot\left(\frac{2}{\alpha}\right)^x+\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^x}{\left(\frac{4}{\alpha^2}\right)^x+\alpha+2\cdot\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^x}\right]=0\cdot\frac{\frac{1}{\alpha}}{\alpha}=0.$$

- Αν $\alpha = 2$, τότε έχουμε:

$$L_3 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cdot 2^x + \frac{1}{2}\cdot 2^x + 1}{4^x + 2\cdot 4^x + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x\cdot\left[2+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]}{4^x\cdot\left[1+2+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x\right]} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot\frac{2+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^x}{1+2+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x}\right] = 0\cdot\frac{2+\frac{1}{2}}{1+2} = 0.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο για κάθε $\alpha > 0$ είναι $L_3 = 0$.

δ. Έστω:

$$L_4 = \lim_{x\to-\infty}\frac{3^{x+2}-\alpha^x}{9^{x+1}-\alpha^{2x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{9\cdot 3^x - \alpha^x}{9\cdot 9^x - \left(\alpha^2\right)^x}.$$

- Αν $0 < \alpha < 3$, τότε είναι:

$$\alpha^2 < 9 \;\text{ και }\; \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{\alpha}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{9}{\alpha^2}\right)^x = 0,$$

άρα:

$$L_4 = \lim_{x\to-\infty}\frac{\alpha^x\cdot\left[9\cdot\left(\frac{3}{\alpha}\right)^x - 1\right]}{\left(\alpha^2\right)^x\cdot\left[9\cdot\left(\frac{9}{\alpha^2}\right)^x - 1\right]} = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^x\cdot\frac{9\cdot\left(\frac{3}{\alpha}\right)^x - 1}{9\cdot\left(\frac{9}{\alpha^2}\right)^x - 1}\right],$$

Ισχύουν:

- $\alpha > 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} < 1 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^x = +\infty,$
- $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > 1 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^x = 0.$

Άρα:

$$L_4 = \begin{cases} 0 &, \text{ αν } 0<\alpha<1 \\ +\infty, & \text{ αν } 1<\alpha<3 \end{cases}.$$

- Αν $\alpha > 3$, τότε είναι:

$$\alpha^2 > 9 \;\text{ και }\; \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha^2}{9}\right)^x = 0,$$

άρα:

$$L_4 = \lim_{x\to-\infty} \frac{3^x \cdot \left[9-\left(\frac{\alpha}{3}\right)^x\right]}{9^x \cdot \left[9-\left(\frac{\alpha^2}{9}\right)^x\right]} = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \frac{9-\left(\frac{\alpha}{3}\right)^x}{9-\left(\frac{\alpha^2}{9}\right)^x}\right] \overset{(+\infty)\cdot\frac{9}{9}}{=\!=} +\infty.$$

- Αν $\alpha = 3$, τότε έχουμε:

$$L_4 = \lim_{x\to-\infty}\frac{9\cdot 3^x - 3^x}{9\cdot 9^x - 9^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{8\cdot 3^x}{8\cdot 9^x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$L_4 = \begin{cases} 0 \quad, \text{ αν } 0<\alpha<1 \\ +\infty, \text{ αν } \alpha\ge 1 \end{cases}.$$

14. 44 **α.** Θέτουμε $\omega = e^x$.

i. Για $x \to -\infty$, το $\omega = e^x \to 0$, άρα:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2(e^x)^2 - e^x}{(e^x)^2 - e^x + 1} = \lim_{\omega\to 0}\frac{2\omega^2-\omega}{\omega^2-\omega+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

ii. Για $x \to +\infty$, το $\omega = e^x \to +\infty$, άρα:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2(e^x)^2 - e^x}{(e^x)^2 - e^x + 1} = \lim_{\omega\to+\infty}\frac{2\omega^2-\omega}{\omega^2-\omega+1} = \lim_{\omega\to+\infty}\frac{2\omega^2}{\omega^2} = 2.$$

β. Έχουμε $f(x) = \frac{2(e^x)^2 - e^x}{(e^x)^2 - e^x + 1} = \frac{e^x(2e^x-1)}{(e^x)^2 - e^x + 1}$ με $e^x > 0$ και $(e^x)^2 - e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα:

$$f(x) \ge 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow e^x \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \ge \ln\frac{1}{2} = -\ln 2.$$

Το πρόσημο της f παρουσιάζεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

14. 45 **α.** Είναι $\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x+1}{2^x+1} = \frac{0+1}{0+1} = 1$. Άρα, αν $u = \frac{3^x+1}{2^x+1}$, τότε για $x \to -\infty$, το $u \to 1$, οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{3^x+1}{2^x+1} = \lim_{u\to 1}\ln u = \ln 1 = 0.$$

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\left|\eta\mu x\cdot\ln\frac{3^x+1}{2^x+1}\right|=|\eta\mu x|\cdot\left|\ln\frac{3^x+1}{2^x+1}\right|\le\left|\ln\frac{3^x+1}{2^x+1}\right|,$$

άρα:

$$-\left|\ln\frac{3^x+1}{2^x+1}\right|\le\eta\mu x\cdot\ln\frac{3^x+1}{2^x+1}\le\left|\ln\frac{3^x+1}{2^x+1}\right|.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\left|\ln\frac{3^x+1}{2^x+1}\right|\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left|\ln\frac{3^x+1}{2^x+1}\right|=0,$ από το κριτήριο παρεμβολής προκύ–

πτει ότι:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\eta\mu x\cdot\ln\frac{3^x+1}{2^x+1}\right)=0.$$

β. Έστω:

$$L_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{3x^2+4}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2}{3x^2+4}-\frac{x^2}{3x^2+4}\cdot\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right).$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{3x^2+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3},$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{3x^2+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$ και
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\underset{\substack{x\to-\infty\\u\to0}}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=\!=}}\lim\limits_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$L_2=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot1=\frac{1}{3}.$$

γ. Αρχικά βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+5}{x^2}-\frac{x+3}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+5}{x^2}-\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x^2+1}=0-0=0.$$

Για $x<0$ έχουμε:

$$\left|\left(\frac{x+5}{x^2}-\frac{x+3}{x^2+1}\right)\cdot\eta\mu\left(x^2+x+1\right)\right|\le\left|\frac{x+5}{x^2}-\frac{x+3}{x^2+1}\right|,$$

άρα:

$$-\left|\frac{x+5}{x^2}-\frac{x+3}{x^2+1}\right| \le \left(\frac{x+5}{x^2}-\frac{x+3}{x^2+1}\right)\cdot ημ\left(x^2+x+1\right) \le \left|\frac{x+5}{x^2}-\frac{x+3}{x^2+1}\right|.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\left|\frac{x+5}{x^2}-\frac{x+3}{x^2+1}\right|\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left|\frac{x+5}{x^2}-\frac{x+3}{x^2+1}\right|=0,$ από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{x+5}{x^2}-\frac{x+3}{x^2+1}\right)\cdot ημ\left(x^2+x+1\right)\right]=0.$$

δ. Αρχικά βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Για $x>0$ έχουμε $\left|\frac{xημx}{x^2+1}\right|\le\frac{|x|}{x^2+1}$, άρα $-\frac{|x|}{x^2+1}\le\frac{xημx}{x^2+1}\le\frac{|x|}{x^2+1}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{|x|}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x^2+1}=0,$ από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xημx}{x^2+1}=0.$

14. 46 **α.** Αν $L_1=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{2x^2+1}{x-1}}\cdot συνx\right)$, τότε είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+1}{x-1}=-\infty$, άρα:

$$\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{2x^2+1}{x-1}}\overset{u=\frac{2x^2+1}{x-1}}{=\!=}\lim_{u\to-\infty}e^u=0.$$

Επομένως:

$L_1=0$ (μηδενική επί φραγμένη – κριτήριο παρεμβολής).

β. Ομοίως, βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=0.$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x+1}\cdot ημe^x\right)=0$$ (μηδενική επί φραγμένη – κριτήριο παρεμβολής).

γ. Το όριο γράφεται $L_3=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot ημ\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}\cdot\frac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right).$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}+x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}{1}=2,$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\underset{u\to 0}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1.$

Επομένως $L_3=2\cdot 1=2$.

δ. Το όριο γράφεται $L_4=\lim\limits_{\theta\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta-1}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to+\infty}\left[\dfrac{1}{\theta}\cdot(\sigma\upsilon\nu\theta-1)\right]$ με $\lim\limits_{\theta\to+\infty}\dfrac{1}{\theta}=0$ και

$|\sigma\upsilon\nu\theta-1|\leq 2$.

Επομένως:

$$L_4=0\ \text{(μηδενική επί φραγμένη – κριτήριο παρεμβολής).}$$

14. 47 α. Έστω:

$$L_1=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3}\cdot\eta\mu\left(x^{2020}+1\right)\right).$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^3}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]=0\cdot 1=0,$$

- $|\eta\mu(x^{2020}+1)|\leq 1$.

Επομένως:

$$L_1=0\ \text{(μηδενική επί φραγμένη – κριτήριο παρεμβολής).}$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{x^2+2x+2}-x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot\left(x^2+2x+2\right)-x^4}{x\cdot\sqrt{x^2+2x+2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+2x^2}{x\cdot\sqrt{x^2+2x+2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=+\infty.$$

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x+1}^{\,2}+\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}^{\,2}\right)}{\sqrt[3]{x+1}^{\,2}+\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}^{\,2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x+1}^{\,3}-\sqrt[3]{x}^{\,3}}{\sqrt[3]{x+1}^{\,2}+\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}^{\,2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}^{\,2}+\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}^{\,2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}^{\,2}\cdot\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}^{\,2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\cdot\sqrt[3]{1}+1\right)}\overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=}0.$$

14. 48 **α.** Έστω:

$$L_1=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3\cdot\eta\mu\frac{1}{x^2+3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+3}\cdot\frac{\eta\mu\frac{1}{x^2+3}}{\frac{1}{x^2+3}}\right).$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ και

- αν $u=\dfrac{1}{x^2+1}>0$, τότε για $x\to-\infty$, το $u\to0^+$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x^2+3}}{\frac{1}{x^2+3}}=\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $L_1\overset{(-\infty)\cdot1}{=}-\infty$.

β. Έστω:

$$L_2=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^2+2\right)\cdot\eta\mu\frac{2}{x^4}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2\left(x^2+2\right)}{x^4}\cdot\frac{\eta\mu\frac{2}{x^4}}{\frac{2}{x^4}}\right],$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\left(x^2+2\right)}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^4}=0,$

- αν $u=\dfrac{2}{x^4}>0$, τότε για $x\to+\infty$, το $u\to0^+$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{2}{x^4}}{\frac{2}{x^4}}=\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $L_2 = 0\cdot 1 = 0$.

14. 49 Σε όλα τα όρια που ακολουθούν, θέτουμε $u = f(x)$, οπότε για $x \to -\infty$, το $u \to -\infty$.

α. Το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2f^2(x)+f^3(x)\eta\mu\dfrac{8}{f(x)}}{3f^2(x)+4} = \lim_{u\to-\infty}\frac{2u^2+u^3\cdot\eta\mu\dfrac{8}{u}}{3u^2+4} =$$

$$= \lim_{u\to-\infty}\left(\frac{2u^2}{3u^2+4}+\frac{u^2}{3u^2+4}\cdot\frac{\eta\mu\dfrac{8}{u}}{\dfrac{8}{u}}\cdot 8\right).$$

Έχουμε:

- $\displaystyle\lim_{u\to-\infty}\frac{2u^2}{3u^2+4}=\frac{2}{3}$,
- $\displaystyle\lim_{u\to-\infty}\frac{u^2}{3u^2+4}=\frac{1}{3}$,
- $\displaystyle\lim_{u\to-\infty}\frac{\eta\mu\dfrac{8}{u}}{\dfrac{8}{u}} \underset{\alpha\to 0}{\overset{\alpha=\frac{8}{u}}{=\!=}} \lim_{\alpha\to 0}\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha}=1.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $L_1 = \dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot 1\cdot 8 = \dfrac{10}{3}$.

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{16f^2(x)-5f(x)}+2f(x)-5}{4f(x)-3} = \lim_{u\to-\infty}\frac{\sqrt{16u^2-5u}+2u-5}{4u-3} =$$

$$= \lim_{u\to-\infty}\frac{|u|\cdot\sqrt{16-\dfrac{5}{u}}+2u-5}{4u-3} = \lim_{u\to-\infty}\frac{-u\cdot\sqrt{16-\dfrac{5}{u}}+2u-5}{4u-3} =$$

$$= \lim_{u\to-\infty}\frac{-\sqrt{16-\dfrac{5}{u}}+2-\dfrac{5}{u}}{4-\dfrac{3}{u}} = \frac{-\sqrt{16}+2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3f^4(x)+5\sqrt{f^4(x)-1}+7f^3(x)}{9\sqrt{f^6(x)+5f^4(x)}-5f^2(x)+7} = \lim_{u\to-\infty}\frac{3u^4+5\sqrt{u^4-1}+7u^3}{9\sqrt{u^6+5u^4}-5u^2+7} =$$

$$= \lim_{u\to-\infty} \frac{3u^4 + 5u^2\sqrt{1-\frac{1}{u^4}} + 7u^3}{9\left|u^3\right|\cdot\sqrt{1+\frac{5}{u^2}} - 5u^2 + 7} = \lim_{u\to-\infty} \frac{3u^4 + 5u^2\sqrt{1-\frac{1}{u^4}} + 7u^3}{-9u^3\cdot\sqrt{1+\frac{5}{u^2}} - 5u^2 + 7} =$$

$$= \lim_{u\to-\infty} \frac{u^4\cdot\left(3+\frac{1}{u^2}\cdot 5\sqrt{1-\frac{1}{u^4}}+\frac{7}{u}\right)}{u^4\cdot\left(-9\cdot\sqrt{1+\frac{5}{u^2}}-\frac{5}{u}+\frac{7}{u^3}\right)} = \lim_{u\to-\infty}\left(u\cdot\frac{3+\frac{1}{u^2}\cdot 5\sqrt{1-\frac{1}{u^4}}+\frac{7}{u}}{-9\cdot\sqrt{1+\frac{5}{u^2}}-\frac{5}{u}+\frac{7}{u^3}}\right) \overset{(-\infty)\cdot\frac{3}{-9}}{=\!=} +\infty.$$

δ. Έχουμε $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{|1-f(x)|-3|f^2(x)-5f(x)+6|}{2\sqrt{f^2(x)+1}-|f(x)+3|} = \lim_{u\to-\infty}\frac{|1-u|-3|u^2-5u+6|}{2\sqrt{u^2+1}-|u+3|}$.

Είναι:

$$\lim_{u\to-\infty}(1-u)=+\infty,\quad \lim_{u\to-\infty}\left(u^2-5u+6\right)=+\infty,\quad \lim_{u\to-\infty}(u+3)=-\infty,$$

άρα:

$1-u>0,\ u^2-5u+6>0,\ u+3<0$ για u κοντά στο $-\infty$.

Επομένως, έχουμε:

$$\lim_{u\to-\infty}\frac{(1-u)-3\left(u^2-5u+6\right)}{2\sqrt{u^2+1}-(-u-3)} = \lim_{u\to-\infty}\frac{-3u^2+14u-17}{2\sqrt{u^2+1}+u+3} =$$

$$= \lim_{u\to-\infty}\frac{-3u^2+14u-17}{-2u\cdot\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}+u+3} = \lim_{u\to-\infty}\frac{u^2\cdot\left(-3+\frac{14}{u}-\frac{17}{u^2}\right)}{u\cdot\left(-2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}+1+\frac{3}{u}\right)} =$$

$$= \lim_{u\to-\infty}\left(u\cdot\frac{-3+\frac{14}{u}-\frac{17}{u^2}}{-2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}+1+\frac{3}{u}}\right) \overset{(-\infty)\cdot\frac{-3}{-1}}{=\!=} -\infty.$$

14. 50 α. Πρέπει να ισχύουν:

$$\begin{cases} x^2\neq 0 \\ \dfrac{x^2-1}{x^2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x<-1 \ \text{ ή } \ x>1.$$

Άρα $D_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Για κάθε $x>1$ έχουμε:

$$f(x) < \ln(2x-2) \Leftrightarrow \ln\frac{x^2-1}{x^2} < \ln(2x-2) \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} < 2x-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} - 2x + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1+x^2(-2x+2)}{x^2} < 0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -2x^3+3x^2-1<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(x-1)^2(2x+1) < 0 \Leftrightarrow 2x+1>0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

που ισχύει, διότι $x > 1$.

β. Έστω:

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \ln(2x-2)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x^2-1}{x^2} - \ln(2x-2)\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x^2-1}{x^2(2x-2)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x^2-1}{2x^3-2x^2}\right).$$

Για $\omega = \frac{x^2-1}{2x^3-2x^2}$, όταν $x \to +\infty$, το $\omega \to 0$ με $\omega > 0$, άρα $L = \lim\limits_{\omega\to0^+} \ln\omega = -\infty$.

14. 51 Η συνάρτηση γράφεται $f(x) = \frac{(\lambda-1)x^3+2\lambda x^2+4}{x^2+\lambda^3}\cdot ημ\frac{1}{x} = \frac{(\lambda-1)x^3+2\lambda x^2+4}{x^3+\lambda^3 x}\cdot\frac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$.

Έστω:

$$g(x) = \frac{(\lambda-1)x^3+2\lambda x^2+4}{x^3+\lambda^3 x}.$$

Τότε έχουμε:

$$f(x) = g(x)\cdot\frac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow g(x) = \frac{f(x)}{\frac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}$$

και ισχύουν:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \underset{\omega\to0}{\overset{\omega=\frac{1}{x}}{=\!=}} \lim_{\omega\to0}\frac{ημ\omega}{\omega} = 1.$$

Άρα:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{(\lambda-1)x^3+2\lambda x^2+4}{x^3+\lambda^3} = 1, \ (1).$$

- Αν $\lambda \neq 1$, τότε από την (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(\lambda-1)x^3}{x^3}=1\Rightarrow \lambda-1=1\Rightarrow \lambda=2.$$

- Αν $\lambda = 1$, τότε από την (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+4}{x^3+1}=1 \quad ή \quad 0=1 \quad \text{που είναι άτοπο.}$$

Επομένως $\lambda = 2$.

14. 52 Έστω $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ και $G(x)=g(x)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$, $x>0$, $g(x)\neq 0$.

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=3$,
- $f(x)=x\cdot F(x)$ και $g(x)=\dfrac{G(x)}{\sqrt{x^2+3}-x}$.

Άρα:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x\cdot F(x)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)}{G(x)}=\frac{3x\cdot F(x)}{G(x)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}=\frac{3\cdot F(x)}{G(x)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1\right)}.$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot F(x)}{G(x)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=\frac{3\cdot 2}{3\cdot 2}=1.$$

14. 53 **α.** Αν $g(x)=\ln\dfrac{x}{x^2+2018}$, $x>0$, τότε έχουμε:

- $f(x)\leq g(x)$, $x>0$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+2018}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ με $\dfrac{x}{x^2+2018}>0$.

Άρα, για $u=\dfrac{x}{x^2+2018}$, αν $x\to+\infty$, το $u\to 0$ με $u>0$, οπότε είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x}{x^2+2018}\right)=\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty.$$

Επομένως:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\leq g(x),\ x>0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty.$$

β. Αν $h(x)=x^2\cdot \eta\mu\frac{1}{x},\ x>0,$ τότε έχουμε:

- $f(x)\ge h(x),\ x>0$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)\overset{(+\infty)\cdot 1}{=\!=}+\infty,$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\underset{u\to 0}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1.$

Επομένως:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ge h(x),\ x>0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty \end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

14. 54 **α.** Το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln x}{f(x)-1}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\ln x\cdot\dfrac{1}{f(x)-1}\right).$

Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\big(f(x)-1\big)=0$ με $f(x)-1>0$ κοντά στο 2, οπότε $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x)-1}=+\infty.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln x}{f(x)-1}=\lim_{x\to 2}\left(\ln x\cdot\frac{1}{f(x)-1}\right)\overset{\ln 2\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$$

β. Το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{2-f(x)}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2-f(x)}}\right).$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\overset{u=-x}{=\!=}\lim\limits_{u\to+\infty} e^{u}=+\infty,$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(2-f(x)\big)=0$ με $2-f(x)>0,$ οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2-f(x)}}\overset{\left(\frac{1}{0^+}\right)}{=\!=}+\infty.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{2-f(x)}}=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-f(x)}}\right)\overset{(+\infty)\cdot(+\infty)}{=}+\infty.$$

γ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+e^x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\ln x+e^x\right)\cdot\dfrac{1}{f(x)}\right]\overset{(+\infty)\cdot\frac{1}{2}}{=\!=}+\infty.$

δ. Το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\cdot f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|}{\left|\frac{1}{x}\right|}\cdot\left|\frac{1}{x}\right|\cdot f(x)\right).$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|}{\left|\frac{1}{x}\right|}\overset{u=\frac{1}{x}}{=\!=}\lim\limits_{u\to 0}\left|\frac{\eta\mu u}{u}\right|=|1|=1,$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x}\right|=0,$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2.$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\cdot f(x)\right)=1\cdot 0\cdot 2=0.$

15η Ενότητα

Οριζόντια ασύμπτωτη – Πλάγια ασύμπτωτη

Α. Του τύπου Σωστό / Λάθος

15. 1 α. Σωστό β. Σωστό γ. Σωστό δ. Λάθος ε. Λάθος.

15. 2 α. Σωστό β. Σωστό γ. Λάθος δ. Λάθος.

15. 3 α. Λάθος β. Λάθος γ. Λάθος δ. Σωστό.

15. 4 α. Σωστό β. Λάθος γ. Λάθος δ. Σωστό ε. Σωστό στ. Σωστό ζ. Σωστό.

15. 5 α. Λάθος β. Λάθος γ. Λάθος δ. Λάθος ε. Σωστό.

15. 6 α. Σωστό β. Λάθος γ. Σωστό δ. Σωστό ε. Λάθος.

15. 7 α. Σωστό β. Λάθος γ. Σωστό δ. Λάθος ε. Σωστό στ. Σωστό ζ. Σωστό η. Λάθος.

15. 8 α. Σωστό β. Λάθος γ. Σωστό δ. Σωστό ε. Σωστό στ. Λάθος ζ. Λάθος.

Β. Βασικές εφαρμογές – Ασκήσεις εμπέδωσης

15. 9 α. $y = 1$ β. $y = \frac{2}{3}$ γ. $y = -\frac{4}{5}$

δ. $y = 0$ ε. $y = 0$ στ. Δεν έχει.

15. 10 α. $y = 2x - 2$ β. $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{9}$ γ. $y = -1$

δ. $y = x$ ε. $y = 0$ στ. $y = -3$.

15. 11 α. $x = 2,\ y = x + 2$ β. $x = \frac{2}{3},\ y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$ γ. $x = -\frac{3}{2},\ y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

δ. $x = 0,\ y = x$ ε. $x = 1,\ x = -1,\ y = 1$ στ. $x = -2,\ x = 2,\ y = 0$.

15. 12 **α.** $y = x$ στο $-\infty$, $y = 3x$ στο $+\infty$ **β.** $y = -4x$ στο $-\infty$, $y = -2x$ στο $+\infty$

γ. $y = 0$ στο $-\infty$, $y = 2x$ στο $+\infty$ **δ.** $y = -2x$ στο $-\infty$, $y = 0$ στο $+\infty$.

15. 13 **α.** $x = -1$, $y = -1$ στο $-\infty$, $y = 1$ στο $+\infty$ **β.** $y = -2$ στο $-\infty$, $y = 2$ στο $+\infty$

γ. $y = 0$ **δ.** $y = 1$.

Γ. Ασκήσεις για λύση

15. 14 **α.** Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ και ομοίως, βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

Συνεπώς, η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

β. Είναι $D_f = \mathbb{R}$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^2+8x-1}{4x^2+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^2}{4x^2} = \dfrac{7}{4}$ και ομοίως, βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{7}{4}$.

Συνεπώς, η ευθεία $y = \dfrac{7}{4}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

γ. Είναι $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\sqrt[3]{3}\right\} = \left(-\infty, -\sqrt[3]{3}\right) \cup \left(-\sqrt[3]{3}, +\infty\right)$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x|^3-1}{x^3+3} \underset{|x|=x}{\overset{x>0}{=\!=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^3} = 1$.

  Συνεπώς, η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|^3-1}{x^3+3} \underset{|x|=-x}{\overset{x<0}{=\!=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^3}{x^3} = -1$.

  Συνεπώς, η ευθεία $y = -1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

δ. Είναι $D_f = \mathbb{R}$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} - 2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x} = 0$.

  Συνεπώς, η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} - 2x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-x \cdot \sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}} - 2x\right) = +\infty$.

  Συνεπώς, η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

15. 15 • Αναζητούμε οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

Αν $u = e^x$, τότε για $x \to +\infty$ το $u \to +\infty$, άρα έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{u\to+\infty}\left[\ln\left(u^2-u+1\right)-1\right] \overset{\omega=u^2-u+1}{\underset{\omega\to+\infty}{=\!=}} \lim_{\omega\to+\infty}(\ln\omega-1) = +\infty.$$

Συνεπώς, η C_g δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

• Αναζητούμε οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$.

Αν $u = e^x$, τότε για $x \to -\infty$ το $u \to 0$, άρα έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{u\to 0}\left[\ln\left(u^2-u+1\right)-1\right] = \ln 1 - 1 = -1.$$

Συνεπώς, η ευθεία $y = -1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$.

15. 16 **α.** Είναι $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

• Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f στο 1.

Έχουμε $\displaystyle\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left[\left(x^2-x-2\right)\cdot\frac{1}{x-1}\right] \overset{(-2)\cdot(+\infty)}{=\!=} -\infty,$

διότι $\displaystyle\lim_{x\to1^+}(x-1)=0$ με $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, άρα $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1} = +\infty.$

Συνεπώς, η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

• Αναζητούμε οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Έχουμε:

‣ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2-x} = 1 \in \mathbb{R},$

‣ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x-2}{x-1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x-1} = 0.$

Συνεπώς, η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

• Αναζητούμε οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Έχουμε:

‣ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2-x} = 1 \in \mathbb{R},$

‣ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x-1} = 0.$

Συνεπώς, η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

β. Είναι $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$, $x \neq -2$.

- Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f στο 2.

  Έχουμε $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left[\left(x^2-3\right)\cdot\dfrac{1}{x-2}\right] \overset{1\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty,$

  διότι $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0$ με $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$, άρα $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty.$

  Συνεπώς, η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.
- Αναζητούμε οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

  Έχουμε:

  ‣ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3}{x^2-2x}=1,$

  ‣ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3}{x-2}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{x-2}=2.$

  Συνεπώς, η ευθεία $y=x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
- Ομοίως, βρίσκουμε ότι η ευθεία $y=x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

γ. Είναι $f(x)=\sqrt{x^2+x}$, $x\in(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$.

- Αναζητούμε οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

  Έχουμε:

  ‣ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = 1\in\mathbb{R},$

  ‣ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{2}.$

  Συνεπώς, η ευθεία $y=x+\dfrac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
- Αναζητούμε οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

  Έχουμε:

  ‣ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\cancel{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = -1\in\mathbb{R},$

  ‣ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-1)\cdot x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}-x} =$

  $$= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1} = -\dfrac{1}{2}.$$

Συνεπώς, η ευθεία $y=-x-\frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

δ. • Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

• Αναζητούμε οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Έχουμε:

▸ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{e^{2x}+4}-2}{e^{2x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}\cdot\left(\sqrt{e^{2x}+4}+2\right)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+4}+2}\right)=0,$$

▸ $$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-0\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{e^{2x}+4}-2}{e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}\cdot\left(\sqrt{e^{2x}+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+4}+2}=0.$$

Συνεπώς, η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

• Αναζητούμε οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Έχουμε:

▸ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{e^{2x}+4}-2}{e^{2x}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+4}+2}\right)=0,$$

▸ $$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-0\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{e^{2x}+4}-2}{e^{2x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

Συνεπώς, η ευθεία $y=\frac{1}{4}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

15. 17 **α.** Είναι $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{5}{3}\right\}$.

• Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f στο $\frac{5}{3}$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to\frac{5}{3}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{5}{3}^+}\left(\sqrt{2x^2+1}\cdot\frac{1}{3x-5}\right)=+\infty$,

διότι $\lim\limits_{x\to\frac{5}{3}^+}(3x-5)=0$ με $3x-5>0\Leftrightarrow x>\frac{5}{3}$, άρα $\lim\limits_{x\to\frac{5}{3}^+}\frac{1}{3x-5}=+\infty$.

Συνεπώς, η ευθεία $x=\frac{5}{3}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Αναζητούμε οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

  Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

  Συνεπώς, η ευθεία $y=\frac{\sqrt{2}}{3}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Αναζητούμε οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

  Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

  Συνεπώς, η ευθεία $y=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

β. Είναι $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

- Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f στο 1.

  Έχουμε $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\left(x\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{x-1}\right)=+\infty$,

  διότι $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$ με $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$, άρα $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Αναζητούμε οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

  Έχουμε:

  - $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{x^2+1}}{\cancel{x}(x-1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}=1,$$

  - $$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x^2+1}-x^2+x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left[\sqrt{x^2+1}-(x-1)\right]\cdot\left[\sqrt{x^2+1}+(x-1)\right]}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x-1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot 2x}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x-1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1-\frac{1}{x}\right)} = 1.$$

Συνεπώς, η ευθεία $y = x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Αναζητούμε οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

  Έχουμε:

  ‣ $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\cancel{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)} = -1,$

  ‣ $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-1)\cdot x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}+x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x-1\right)}{x-1} =$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\cdot 2x}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{1}{x}\right)} = -1.$$

  Συνεπώς, η ευθεία $y = -x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

15. 18 Η συνάρτηση γράφεται $f(x) = \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}} = \frac{e^{3x}\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)}{e^{3x}\left(e^{3x}+e^{-3x}\right)} = \frac{e^{6x}-1}{e^{6x}+1}.$

- Είναι $D_f = \mathbb{R}$, οπότε η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

- Έχουμε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{6x}-1}{e^{6x}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{e^{6x}}}{1+\frac{1}{e^{6x}}} \underset{\omega\to+\infty}{\overset{\omega=e^{6x}}{=\!=}} \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{\omega}}{1+\frac{1}{\omega}} = 1.$

  Συνεπώς, η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Είναι $\lim_{x\to-\infty} e^{6x} = 0$, άρα $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{6x}-1}{e^{6x}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$

  Συνεπώς, η ευθεία $y = -1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

15. 19 **α.** Η συνάρτηση γράφεται $f(x) = \frac{20x}{x^2+1} - \frac{1}{x} = \frac{19x^2-1}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{19x^2-1}{x^3+x^2},\ x\in\mathbb{R}-\{0\}.$

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{19x^2-1}{x^2+1}\cdot\dfrac{1}{x}\right) \overset{(-1)\cdot\frac{1}{0^+}}{=\!=} -\infty.$

  Συνεπώς, η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{19x^2}{x^3+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{19x^2}{x^3} = 0.$

  Συνεπώς, η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Ομοίως, βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0.$

  Συνεπώς, η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

β. • Είναι $f(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2+7}}$ με $D_f = \mathbb{R}$, άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{|x|\cdot\sqrt{1+\dfrac{7}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{x\cdot\sqrt{1+\dfrac{7}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{\sqrt{1+\dfrac{7}{x^2}}} = -2.$

  Συνεπώς, η ευθεία $y=-2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{|x|\cdot\sqrt{1+\dfrac{7}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{-x\cdot\sqrt{1+\dfrac{7}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{7}{x^2}}} = 2.$

  Συνεπώς, η ευθεία $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

γ. Είναι $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2+1} = \dfrac{x^3+x+4}{x^2+1}$ με $D_f = \mathbb{R}$.

- Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.
- Έχουμε:
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x+4}{x^3+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3} = 1,$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x^2} = 0.$

  Συνεπώς, η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Ομοίως, βρίσκουμε ότι η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

15. 20 Είναι $f(x) = \ln\dfrac{e^x-2}{e^x-1}$. Πρέπει:

$$\begin{cases} e^x-1\neq 0 \\ \dfrac{e^x-2}{e^x-1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ (e^x-2)(e^x-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x<0 \ \text{ ή } \ x>\ln 2 \end{cases}.$$

Άρα $D_f = (-\infty, 0) \cup (\ln 2, +\infty)$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x - 2}{e^x - 1} \overset{u=e^x}{\underset{u\to 1^-}{=\!=}} \lim\limits_{u\to 1^-} \dfrac{u-2}{u-1} = \lim\limits_{u\to 1^-}\left[(u-2)\cdot\dfrac{1}{u-1}\right] \overset{(-1)\cdot\frac{1}{0^-}}{=\!=} +\infty$, άρα:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \overset{\omega=\frac{e^x-2}{e^x-1}}{=\!=} \lim_{\omega\to+\infty} \ln\omega = +\infty.$$

Συνεπώς, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Είναι $\lim\limits_{x\to \ln 2^+} \dfrac{e^x - 2}{e^x - 1} = \dfrac{0}{1} = 0$ με $\dfrac{e^x - 2}{e^x - 1} > 0$ για $x > \ln 2$, άρα:

$$\lim_{x\to \ln 2^+} f(x) \overset{\omega=\frac{e^x-2}{e^x-1}}{=\!=} \lim_{\omega\to 0^+} \ln\omega = -\infty.$$

Συνεπώς, η ευθεία $x = \ln 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - 2}{e^x - 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\dfrac{2}{e^x}}{1-\dfrac{1}{e^x}} = \dfrac{1-0}{1-0} = 1$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{e^x - 2}{e^x - 1} \overset{\omega=\frac{e^x-2}{e^x-1}}{=\!=} \lim\limits_{\omega\to 1}\ln\omega = 0$.

Συνεπώς, η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - 2}{e^x - 1} = \dfrac{0-2}{0-1} = 2$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \overset{\omega=\frac{e^x-2}{e^x-1}}{=\!=} \lim\limits_{\omega\to 2}\ln\omega = \ln 2$.

Συνεπώς, η ευθεία $y = \ln 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

15. 21 **α.** Είναι $f(x) = \dfrac{x\eta\mu x}{(x-1)(x+1)}$ με $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x\eta\mu x}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right) \overset{\frac{\eta\mu 1}{2}\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{x\eta\mu x}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+1}\right) \overset{\frac{-\eta\mu 1}{2}\cdot(-\infty)}{=\!=} +\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Έχουμε $\left|\dfrac{x\eta\mu x}{x^2-1}\right| \le \left|\dfrac{x}{x^2-1}\right| \Leftrightarrow -\left|\dfrac{x}{x^2-1}\right| \le \dfrac{x\eta\mu x}{x^2-1} \le \left|\dfrac{x}{x^2-1}\right|$, (1).

  - Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\dfrac{x}{x^2-1}\right|\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{x}{x^2-1}\right| = 0$.

    Άρα, από το κριτήριο παρεμβολής και την (1) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Συνεπώς, η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\left|\dfrac{x}{x^2-1}\right|\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left|\dfrac{x}{x^2-1}\right|=0.$

Άρα, από το κριτήριο παρεμβολής και την (1) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0.$

Συνεπώς, η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

β. • Είναι $f(x)=\dfrac{3x-2}{\sqrt{4x^2+2}}$ με $D_f=\mathbb{R}$, άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

• Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{|x|\cdot\sqrt{4+\dfrac{2}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{x\cdot\sqrt{4+\dfrac{2}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{2}{x^2}}}=\dfrac{3}{2}.$

Συνεπώς, η ευθεία $y=\dfrac{3}{2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

• Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2}{|x|\cdot\sqrt{4+\dfrac{2}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2}{-x\cdot\sqrt{4+\dfrac{2}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{4+\dfrac{2}{x^2}}}=-\dfrac{3}{2}.$

Συνεπώς, η ευθεία $y=-\dfrac{3}{2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

γ. Είναι $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}+1=\dfrac{1}{1-x^2}$ με $D_f=\mathbb{R}-\{\pm1\}$.

• Έχουμε $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{1}{1+x}\right)\overset{(+\infty)\cdot\frac{1}{2}}{=\!=}+\infty.$

Συνεπώς, η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

• Έχουμε $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{1}{1+x}\right)\overset{\frac{1}{2}\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

Συνεπώς, η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

• Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{-x^2+1}=0.$

Συνεπώς, η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

• Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-x^2+1}=0.$

Συνεπώς, η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

δ. Είναι $f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{4x^3+2x^2+2}=\dfrac{x\cdot(3x+2)}{2(x+1)(2x^2-x+1)}$ με $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$.

- Έχουμε $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left[\frac{x\cdot(3x+2)}{2\cdot(2x^2-x+1)}\cdot\frac{1}{x+1}\right] \overset{\frac{1}{8}\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty.$

  Συνεπώς, η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Έχουμε $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2}{4x^3} = 0.$

  Συνεπώς, η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Έχουμε $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\frac{3x^2}{4x^3} = 0.$

  Συνεπώς, η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ε. Είναι $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2+4}}{x+2}$ με $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$.

- Έχουμε $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+}\left(\sqrt{3x^2+4}\cdot\frac{1}{x+2}\right) \overset{4\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty.$

  Συνεπώς, η ευθεία $x=-2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Έχουμε:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{3x^2+4}}{x+2} = \lim_{x\to +\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{3+\frac{4}{x^2}}}{x+2} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x\cdot\sqrt{3+\frac{4}{x^2}}}{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}} = \sqrt{3}.$$

  Συνεπώς, η ευθεία $y=\sqrt{3}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Έχουμε $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{3+\frac{4}{x^2}}}{x+2} = \lim_{x\to -\infty}\frac{-\cancel{x}\cdot\sqrt{3+\frac{4}{x^2}}}{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)} = -\sqrt{3}.$

  Συνεπώς, η ευθεία $y=-\sqrt{3}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

15. 22 α. Είναι $f(x)=5-\frac{2}{x^3}=\frac{5x^3-2}{x^3}$ με $D_f=\mathbb{R}^*$.

- Έχουμε $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[(5x^3-2)\cdot\frac{1}{x^3}\right] \overset{(-2)\cdot(+\infty)}{=\!=} -\infty.$

  Συνεπώς, η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$.

  Συνεπώς, η ευθεία $y = 5$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

β. Είναι $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x + 4}{x}$ με $D_f = \mathbb{R}^*$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(x^3 + 2x + 4\right)\cdot\dfrac{1}{x}\right] \overset{4\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.
- Ο βαθμός του $x^3 + 2x + 4$ είναι κατά δύο μονάδες μεγαλύτερος του βαθμού του x.

  Συνεπώς, η C_f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

γ. Είναι $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x^2} - 2$ με $D_f = \mathbb{R}^*$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{1}{x} - 2\right) \overset{1\cdot(+\infty)-2}{=} +\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.
- Αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$, άρα έχουμε:
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{1}{x} - 2\right) = 0\cdot 0 - 2 = -2$.

    Συνεπώς, η ευθεία $y = -2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{1}{x} - 2\right) = 0\cdot 0 - 2 = -2$.

    Συνεπώς, η ευθεία $y = -2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

δ. Είναι $f(x) = \dfrac{1}{x} - 2\sqrt{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right) \overset{(+\infty)-0}{=\!=} +\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.
- Έχουμε:
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2\sqrt{x}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1 - 2x\sqrt{x}}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x} - \left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}} - 2\right)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\dfrac{1}{x\sqrt{x}} - 2}{1}\right) \overset{0\cdot(-2)}{=\!=} 0,$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-0\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-2\sqrt{x}\right)=-\infty\notin\mathbb{R}.$

Συνεπώς, η C_f δεν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

15. 23 **α.** Είναι $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-2x=\dfrac{-2x^2+2x+1}{x-1},\ x\in\mathbb{R}-\{1\}$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left[\left(-2x^2+2x+1\right)\cdot\dfrac{1}{x-1}\right]\overset{1\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Έχουμε:

  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2+2x+1}{x^2-x}=-2,$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-2)\cdot x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-1}-2x+2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}=0.$

  Συνεπώς, η ευθεία $y=-2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Ομοίως, βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-2)\cdot x\right]=0$.

  Συνεπώς, η ευθεία $y=-2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

β. Είναι $g(x)=\dfrac{x^2}{x-1},\ x\in\mathbb{R}-\{1\}$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^2\cdot\dfrac{1}{x-1}\right)\overset{1\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g.

- Έχουμε:

  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2-x}=1,$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-1\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1.$

  Συνεπώς, η ευθεία $y=x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

- Ομοίως, βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)-1\cdot x\right)=1$.

  Συνεπώς, η ευθεία $y=x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$.

15. 24 Ισχύουν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\alpha,\ (1)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\alpha x\right)=\beta,\ (2)$.

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2+x}=1,$ άρα από την (1) βρίσκουμε ότι $\alpha=1$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{x+1}=-1,$

  άρα από τη (2) βρίσκουμε ότι $\beta=-1$.

Επομένως $\alpha=1$, $\beta=-1$.

15. 25 Είναι ε: $2y=x+2$ ή $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{1}{2}x\right)=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+\alpha x^2-2}{2x^2+1}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x^3+x}{2x^2+1}\right)=1\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+2\alpha x^2-4-2x^3-x}{2\left(2x^2+1\right)}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\alpha x^2-x-4}{4x^2+2}=1\Leftrightarrow\dfrac{2\alpha}{4}=1\Leftrightarrow\alpha=2.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-\dfrac{1}{2}x\right)=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+\beta x-1}{2x+3}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x^2+3x}{2x+3}\right)=1\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+2\beta x-2-2x^2-3x}{4x+6}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2\beta-3)x-2}{4x+6}=1\Leftrightarrow\dfrac{2\beta-3}{4}=1\Leftrightarrow\beta=\dfrac{7}{2}.$

Επομένως $\alpha=2$, $\beta=\dfrac{7}{2}$.

15. 26 Πρέπει να ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=-5$. Επομένως, έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=-5\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+(\alpha+1)x-2-2x^2+2x}{x-1}=-5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha+3)x-2}{x-1}=-5\Leftrightarrow\alpha+3=-5\Leftrightarrow\alpha=-8.$$

15. 27 **α.** Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\alpha^2x^2+2\alpha x+2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\cdot\sqrt{\alpha^2+\dfrac{2\alpha}{x}\alpha+\dfrac{2}{x^2}}}{x}=$

  $\overset{x>0}{\underset{x\to+\infty}{=\!=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\cdot\sqrt{\alpha^2+\dfrac{2\alpha}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\alpha^2+\dfrac{2\alpha}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|\overset{\alpha>0}{=}\alpha,$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\alpha x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\alpha^2x^2+2\alpha x+2}-\alpha x\right)=$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha^2x^2+2\alpha x+2-\alpha^2x^2}{\sqrt{\alpha^2x^2+2\alpha x+2}+\alpha x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\alpha x+2}{\sqrt{\alpha^2x^2+2\alpha x+2}+\alpha x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\alpha+\frac{2}{x}}{\sqrt{\alpha^2+\frac{2\alpha}{x}+\frac{2}{x^2}}+\alpha} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2}+\alpha} \overset{\alpha>0}{=} \frac{2\alpha}{\alpha+\alpha} = 1.$$

Συνεπώς, η ευθεία $y = \alpha x + 1$, $\alpha > 0$, είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Ομοίως, έχουμε:

- $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\cdot\sqrt{\alpha^2+\frac{2\alpha}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x} = -\alpha,$$

- $$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-\alpha)x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\alpha x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\alpha^2x^2+2\alpha x+2}+\alpha x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2\alpha x+2}{\sqrt{\alpha^2x^2+2\alpha x+2}-\alpha x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\alpha+\frac{2}{x}}{-\sqrt{\alpha^2+\frac{2\alpha}{x}+\frac{2}{x^2}}-\alpha} = \frac{2\alpha}{-2\alpha} = -1.$$

Συνεπώς, η ευθεία $y = -\alpha x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

β. Αρκεί να ισχύουν $f(x) > \alpha x + 1$ και $f(x) > -\alpha x - 1$ ή ισοδύναμα:

$$f(x) > |\alpha x+1| \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2x^2+2\alpha x+2} > |\alpha x+1| \Leftrightarrow \alpha^2x^2+2\alpha x+2 > (\alpha x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\alpha^2x^2} + \cancel{2\alpha x} + 2 > \cancel{\alpha^2x^2} + \cancel{2\alpha x} + 1 \Leftrightarrow 2 > 1$$

που ισχύει.

15. 28 Ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3,\ (1),\quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right) = 4,\ (2)\ \text{ και }\ \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x-4\right) = 0,\ (3).$$

Τότε έχουμε:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)+\alpha x-2}{xf(x)-3x^2+11} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{f(x)}{x}+\alpha-\frac{2}{x}}{f(x)-3x+\frac{11}{x}} \overset{(1)}{\underset{(2)}{=\!=}} \frac{3+\alpha-0}{4+0} \ \text{ ή }\ L = \frac{3+\alpha}{4}.$$

Επομένως:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)+\alpha x-2}{xf(x)-3x^2+11} = 2 \Leftrightarrow \frac{3+\alpha}{4} = 2 \Leftrightarrow \alpha = 5.$$

15. 29 Ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\ (1),\ \ \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big)=3,\ (2)\ \ \text{και}\ \ \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-x-3\big)=0,\ (3).$$

Έστω:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\cdot\sqrt{4x^2+1}+2\mu x^2+3}{x^2 f(x)-x^3+\sqrt{x^4+1}}=4,\ \ (4).$$

Τότε έχουμε:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{f(x)\cdot\sqrt{4x^2+1}+2\mu x^2+3}{x^2}}{\dfrac{x^2 f(x)-x^3+\sqrt{x^4+1}}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x}+2\mu+\dfrac{3}{x^2}}{f(x)-x+\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}}\overset{(1)}{\underset{(2)}{=}}$$

$$=\frac{1\cdot 2+2\mu+0}{3+1}=\frac{2\mu+2}{4}=\frac{\mu+1}{2}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τα όρια:

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{4}=2\ \ \text{και}$$
- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}=\sqrt{1}=1.$$

Επομένως:

$$L=4\Rightarrow\frac{\mu+1}{2}=4\Rightarrow\mu=7.$$

15. 30 Ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3,\ (1)\ \ \text{και}\ \ \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-3x\big)=-2,\ (2).$$

Τότε έχουμε:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{3f(x)-xf(x)+3x^2+x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}}{f^2(x)+2xf(x)-6x^2+2x^3\eta\mu^2\dfrac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{f(x)}{x}+3+\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2+2\cdot\dfrac{f(x)}{x}-6+2x\cdot\eta\mu^2\dfrac{1}{x}}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3\cdot\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}-\frac{f(x)}{x}+3+\frac{1}{x}\cdot\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+2\cdot\frac{f(x)}{x}-6+2\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \underset{\omega\to0}{\overset{\omega=\frac{1}{x}}{=\!=}} \lim\limits_{\omega\to0}\frac{\eta\mu\omega}{\omega}=1$. Επομένως το ζητούμενο όριο είναι:

$$L=\frac{3\cdot3\cdot0-3+3+0\cdot1}{3^2+2\cdot3-6+2\cdot0\cdot1^2}=\frac{0}{9}=0.$$

15. 31 Ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=4 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-4x\right)=2.$$

Τότε έχουμε:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}\cdot\left(\sqrt{f(x)}+2\sqrt{x}\right)}{x\cdot\left[\sqrt{f(x)}^2-\left(2\sqrt{x}\right)^2\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}\cdot\left(\sqrt{f(x)}+2\sqrt{x}\right)}{x\cdot\left(f(x)-4x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{f(x)}+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{f(x)-4x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}}\cdot\left(\sqrt{\frac{f(x)}{x}}+2\right)\cdot\frac{1}{f(x)-4x}\right]=\sqrt{1}\cdot\left(\sqrt{4}+2\right)\cdot\frac{1}{2}=2.$$

15. 32 **α.** Είναι $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^2\cdot\frac{1}{x-1}\right)\overset{1\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty$.

  Συνεπώς, η ευθεία x = 1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.
- Έχουμε:
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-x}=1,$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=1.$

  Συνεπώς, η ευθεία y = x + 1 είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Ομοίως, βρίσκουμε ότι η ευθεία $y = x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

β. • Για $x < 1$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $x+1 > f(x)$. Έχουμε:

$$x+1 > f(x) \Leftrightarrow x+1 > \frac{x^2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)-x^2}{x-1} > 0 \overset{x-1<0}{\Leftrightarrow} x^2-1-x^2 < 0 \Leftrightarrow -1 < 0$$

που ισχύει.

- Για $x > 1$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $x+1 < f(x)$. Έχουμε:

$$x+1 < f(x) \Leftrightarrow x+1 < \frac{x^2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)-x^2}{x-1} < 0 \overset{x-1>0}{\Leftrightarrow} x^2-1-x^2 < 0 \Leftrightarrow -1 < 0$$

που ισχύει.

γ. Έχουμε $D_h = \{x \in D_g \,/\, g(x) \in D_f\} = \{x > 0 \,/\, \ln x \neq 1\} = (0, e) \cup (e, +\infty) \neq \varnothing$.

Άρα, ορίζεται η $h(x) = (f \circ g)(x)$ με πεδίο ορισμού $D_h = (0, e) \cup (e, +\infty)$ και τύπο:

$$h(x) = f(g(x)) = \frac{g^2(x)}{g(x)-1} = \frac{\ln^2 x}{\ln x - 1}.$$

δ. Είναι $D_h = (0, e) \cup (e, +\infty)$.

- Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{\ln x - 1} \underset{\omega\to-\infty}{\overset{\omega=\ln x}{=\!=}} \lim_{\omega\to-\infty} \frac{\omega^2}{\omega-1} = -\infty.$$

Συνεπώς, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_h.

- Έχουμε:

$$\lim_{x\to e^+} h(x) = \lim_{x\to e^+} \frac{\ln^2 x}{\ln x - 1} \underset{\omega\to 1^+}{\overset{\omega=\ln x}{=\!=}} \lim_{\omega\to 1^+} \frac{\omega^2}{\omega-1} = \lim_{\omega\to 1^+} \left(\omega^2 \cdot \frac{1}{\omega-1}\right) \overset{1\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty.$$

Συνεπώς, η ευθεία $x = e$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_h.

15. 33 • Έχουμε:

- $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = 1,$

- $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x(x^2+1)}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0.$

Συνεπώς, η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Ομοίως, βρίσκουμε ότι η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Άρα, η ασύμπτωτη $y = x$ είναι κοινή στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Επιπλέον, έχουμε:

$$f(x)=x \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2+1}=x \Leftrightarrow x^3=x^3+x \Leftrightarrow x=0 \text{ με } f(0)=0.$$

Επομένως, η C_f και η ευθεία $y = x$ τέμνονται στο σημείο (0, 0).

15. 34 α. Είναι $D_f=\mathbb{R}-\{e\}$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to e^+} f(x)=\lim\limits_{x\to e^+}\left[(2x^2-4x)\cdot\frac{1}{x-e}\right]\overset{\left[\overbrace{2e(e-2)}^{(+)}\right]\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

  Συνεπώς, η ευθεία $x = e$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.
- Έχουμε:
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-4x}{x^2-ex}=2,$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-4x-2x(x-e)}{x-e}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2ex-4x}{x-e}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(e-2)x}{x}=2(e-2).$$

  Συνεπώς, η ευθεία $y = 2x + 2(e – 2)$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
- Ομοίως, βρίσκουμε ότι η ευθεία $y = 2x + 2(e – 2)$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

β. Είναι $D_h=\{x\in D_g\ /\ g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ e^x\neq e\}=\mathbb{R}-\{1\}$.

Ο τύπος της συνάρτησης h είναι $h(x)=f(g(x))=\frac{2e^{2x}-4e^x}{e^x-e}$.

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to1^+}h(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{2e^{2x}-4e^x}{e^x-e}\underset{\omega\to e^+}{\overset{\omega=e^x}{=\!=}}\lim_{\omega\to e^+}\frac{2\omega^2-4\omega}{\omega-e}=$$

$$=\lim_{\omega\to e^+}\left[2\omega(\omega-2)\cdot\frac{1}{\omega-e}\right]\overset{\left[\overbrace{2e(e-2)}^{(+)}\right]\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$$

Συνεπώς, η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_h.

15. 35 α. Είναι $f(x)=\frac{8\alpha^3}{x^2+4\alpha^2},\ \alpha>0,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\frac{2x^2}{x^2+2},\ x\in\mathbb{R}$.

- Είναι $f(0)=\frac{8\alpha^3}{4\alpha^2}=2\alpha$, άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x)\le f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

  Έχουμε:

$$f(x) \le f(0) \Leftrightarrow \frac{8\alpha^3}{x^2+4\alpha^2} \le 2\alpha \Leftrightarrow 8\alpha^3 \le 2\alpha(x^2+4\alpha^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\alpha^3 \le 2\alpha x^2 + 8\alpha^3 \Leftrightarrow 2\alpha x^2 \ge 0$$

που ισχύει, διότι $\alpha > 0$ και $x^2 \ge 0$.

Άρα, η f παρουσιάζει μέγιστο στο 0.

- Είναι $g(0) = \frac{2 \cdot 0^2}{0^2+2} = 0$, άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $g(x) \ge g(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

  Έχουμε $g(x) \ge g(0) \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x^2+2} \ge 0 \Leftrightarrow 2x^2 \cdot (x^2+2) \ge 0$ που ισχύει.

  Άρα, η g παρουσιάζει ελάχιστο στο 0.

β. • Είναι $D_f = D_g = \mathbb{R}$.

Άρα, οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8\alpha^3}{x^2+4\alpha^2} = 0$ και ομοίως, βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

  Συνεπώς, η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+2} = 2$ και ομοίως, βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 2$.

  Συνεπώς, η ευθεία $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

15. 36 **α.** Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

- Αν $\alpha = 0$, τότε έχουμε $f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ που είναι άτοπο.
- Αν $\alpha \ne 0$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^\nu}{x^4+1} = \begin{cases} 0 \;, & \text{αν } \nu \le 3 \\ +\infty, & \text{αν } \nu \ge 5 \text{ και } \alpha > 0 \text{ που είναι άτοπο.} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \ge 5 \text{ και } \alpha < 0 \end{cases}$$

Αν $\nu = 4$, τότε έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^4}{x^4+1} = 2 \Rightarrow \alpha = 2$.

Επομένως $\nu = 4$ και $\alpha = 2$.

β. Αν $\alpha = 2$, τότε η συνάρτηση γράφεται $f(x) = \frac{2x^\nu}{x^4+1}$.

Πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^\nu}{x^5+x} = \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

- Αν $\nu < 5$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^{\nu}}{x^5+x}=0$ που είναι άτοπο.

- Αν $\nu > 5$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^{\nu}}{x^5+x}=+\infty$ που είναι άτοπο.

- Αν $\nu = 5$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^{5}}{x^5+x}=2\in\mathbb{R}^*$.

Άρα $\nu = 5$. Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-2x\big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5-2x\left(x^4+1\right)}{x^4+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x^4+1}=0.$$

Συνεπώς, η ευθεία $y=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

15. 37 **α.** Ισχύουν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-3x\big)=-5$.

β. Έστω $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\kappa\cdot f(-x)+x+e^x}{xf(-x)+3x^2+\eta\mu x}=7$.

Αν $\omega=-x$, τότε για $x\to-\infty$ το $\omega\to+\infty$. Άρα $L=\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{\kappa\cdot f(\omega)-\omega+e^{-\omega}}{-\omega\cdot f(\omega)+3\omega^2-\eta\mu\omega}=7$.

Έχουμε:

$$L=\lim_{\omega\to+\infty}\frac{\kappa\cdot\dfrac{f(\omega)}{\omega}-1+\dfrac{1}{\omega}\cdot\dfrac{1}{e^{\omega}}}{-f(\omega)+3\omega-\dfrac{\eta\mu\omega}{\omega}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\kappa\cdot\dfrac{f(x)}{x}-1+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{e^{x}}}{-\big(f(x)-3x\big)-\dfrac{\eta\mu x}{x}}=\frac{\kappa\cdot3-1+0\cdot0}{-(-5)-0}=\frac{3\kappa-1}{5},$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=\ldots=0$.

Επομένως:

$$L=7\Rightarrow\frac{3\kappa-1}{5}=7\Rightarrow\kappa=12.$$

15. 38 **α.** Η συνάρτηση γράφεται

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x}-\alpha x+\beta=\frac{(\alpha+1)x^2+\beta x+1}{x},\ x\neq0.$$

- Αν $\alpha\neq-1$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha+1)x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\big[(\alpha+1)x\big]=\begin{cases}+\infty, & \text{αν}\ \ \alpha>-1,\ \text{άτοπο}\\ -\infty, & \text{αν}\ \ \alpha<-1\end{cases}.$$

- Αν $\alpha=-1$, τότε είναι $f(x)=\dfrac{\beta x+1}{x}$, άρα έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\beta x+1}{x} = 1 \Rightarrow \beta = 1.$$

Επομένως $\alpha = -1$, $\beta = 1$.

β. Για $\alpha = -1$ και $\beta = 1$ η συνάρτηση γράφεται $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} - x + 1 = \dfrac{x+1}{x}$, $x \neq 0$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι:

$$D_h = \left\{x \in D_f \;/\; f(x) \in D_g\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^* \;/\; \frac{x+1}{x} > 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^* \;/\; \frac{1}{x} > 0\right\} = (0, +\infty).$$

Για τον τύπο της h έχουμε:

$$h(x) = g(f(x)) = \ln f(x) + \ln(f(x) - 1) = \ln\frac{x+1}{x} + \ln\left(\frac{x+1}{x} - 1\right) =$$

$$= \ln\frac{x+1}{x} + \ln\frac{1}{x} = \ln(x+1) - \ln x - \ln x = \ln(x+1) - 2\ln x.$$

Επομένως:

$$D_h = (0, +\infty) \quad \text{και} \quad h(x) = \ln(x+1) - 2\ln x = \ln\frac{x+1}{x^2}.$$

γ. Είναι $h(x) = \ln\dfrac{x+1}{x^2}$, $x > 0$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x+1}{x^2} = \lim_{x\to0^+}\left[(x+1)\cdot\frac{1}{x^2}\right] \overset{1\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty.$$

Άρα:

$$\lim_{x\to0^+} h(x) \overset{\omega=\frac{x+1}{x^2}}{=} \lim_{\omega\to+\infty} \ln\omega = +\infty.$$

Συνεπώς, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_h.

9ο

Κριτηριο Αξιολογησης

Θέμα Α

Α1. Θεωρία.

Α2. Θεωρία.

Α3. **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό.

Θέμα Β

Β1. **α.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left|\frac{\eta\mu e^x}{x^2+1}\right| = \frac{|\eta\mu e^x|}{x^2+1} \le \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow -\frac{1}{x^2+1} \le \frac{\eta\mu e^x}{x^2+1} \le \frac{1}{x^2+1}.$$

Ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2+1}\right) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Άρα, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu e^x}{x^2+1} = 0.$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}^{\,2}-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x} \overset{x<0}{=}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\right) =$$

$$= 0\cdot\frac{1}{1+1} = 0.$$

Β2. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$.

- Η f είναι συνεχής στο A, οπότε αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 1. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(x+\frac{1}{x-1}\right) \overset{x-1>0}{=} +\infty.$$

Συνεπώς, η ευθεία x = 1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Αναζητούμε πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2-x}\right) \overset{1+0}{=} 1(=\lambda) \ \text{ και } \ \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1} = 0.$$

Συνεπώς, η ευθεία y = x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Ομοίως, προκύπτει ότι η ευθεία y = x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Θέμα Γ

Γ1. Ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}, \ (1) \ \text{ και } \ \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right) = \frac{3}{4}, \ (2).$$

- Από την (1) έχουμε $\frac{1}{2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^3+\beta x^2-4}{(\beta x^2+x+1)\cdot x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^3}{\beta x^3} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \beta = 2\alpha, \quad (3).$

- Από τη (2) έχουμε:

$$\frac{3}{4} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha x^3+\beta x^2-4}{\beta x^2+x+1}-\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\alpha x^3+2\beta x^2-8-\beta x^3-x^2-x}{2\beta x^2+2x+2} \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(2\beta-1)x^2-x-8}{2\beta x^2+2x+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(2\beta-1)x^2}{2\beta\cdot x^2} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{2\beta-1}{2\beta} = 6\beta = 8\beta-4 \Rightarrow \beta = 2.$$

Τότε από την (3) προκύπτει ότι α = 1.

Άρα, ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x) = \frac{x^3+2x^2-4}{2x^2+x+1}, \ x\in\mathbb{R}$.

Γ2. α. Είναι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2} = -\infty$, οπότε $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)} = 0$.

Αν $\frac{1}{f(x)} = u < 0$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f^2(x)\cdot \eta\mu\frac{1}{f(x)}\right) = \lim_{u\to 0^-}\left(\frac{1}{u^2}\cdot\eta\mu u\right) = \lim_{u\to 0^-}\left(\frac{1}{u}\cdot\frac{\eta\mu u}{u}\right) \overset{(-\infty)\cdot 1}{=\!=} -\infty.$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|3f^3(x)-1|+f^2(x)}{2f^2(x)+1} \underset{u\to-\infty}{\overset{f(x)=u}{=\!=}} \lim_{u\to-\infty}\frac{|3u^3-1|+u^2}{2u^2+1}.$$

Επειδή $3u^3 - 1 < 0$ για $u < 0$, το όριο γράφεται:

$$\lim_{u\to-\infty}\frac{\left|3u^3-1\right|+u^2}{2u^2+1}=\lim_{u\to-\infty}\frac{-3u^3+1+u^2}{2u^2+1}=\lim_{u\to-\infty}\frac{-3u^3}{2u^2}=\lim_{u\to-\infty}\left(-\frac{3}{2}u\right)\overset{-(-\infty)}{=\!=}+\infty.$$

Γ3. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2f(x)-x+2xe^{-x}+x}{2xf(x)-x^2+x\ln x}\overset{x>0}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2f(x)}{2x}-\dfrac{x}{2x}+\dfrac{2xe^{-x}}{2x}+\dfrac{x}{2x}}{\dfrac{2xf(x)}{2x}-\dfrac{x^2}{2x}+\dfrac{x\ln x}{2x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{1}{2}+e^{-x}+\dfrac{1}{2}}{f(x)-\dfrac{x}{2}+\dfrac{\ln x}{2}}=0,$$

διότι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\dfrac{1}{2}\right)=0+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$,
- από την (1) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{1}{2}\right)=0$,
- από τη (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{x}{2}\right)=0$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{2}=+\infty$, θα είναι

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)-\dfrac{x}{2}+\dfrac{\ln x}{2}}=0.$

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2\left(9+\dfrac{1}{x^2}\right)}}\overset{x>0}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x\cdot\sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{2}{\sqrt{9+0}}=\dfrac{2}{3}.$

Συνεπώς, η ευθεία $y=\dfrac{2}{3}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Αντίστοιχα έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(9+\dfrac{1}{x^2}\right)}}\overset{x<0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\cdot\sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}}}=-\frac{2}{3}.$$

Συνεπώς, η ευθεία $y=-\dfrac{2}{3}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Δ2. **α.** Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f(x) < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{9x^2+1}} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{4x^2}{9x^2+1} < \frac{4}{9} \Leftrightarrow 9x^2 < 9x^2+1 \text{ που ισχύει.}$$

Άρα, για κάθε $x > 0$ είναι:

$$f(x) < \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3f(x) - 2 < 0.$$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{2}{3}\right)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)-\frac{2}{3}}=-\infty$.

Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x+\ln x}{3f(x)-2}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(3^x+\ln x\right)\cdot\frac{1}{3f(x)-2}\right]\overset{(+\infty)\cdot(-\infty)}{=\!=}-\infty,$$

διότι είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}3^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

β. Για κάθε $x < 0$ έχουμε:

$$f(x) > -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{9x^2+1}} > -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{-2x}{9x^2+1} < \frac{2}{3} \overset{-x>0}{\Leftrightarrow} \frac{4x^2}{9x^2+1} < \frac{4}{9}$$

που είναι αληθής από το Δ.2α.

Αν $x \geq 0$, τότε ισχύει προφανώς $f(x) > -\frac{2}{3}$. Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > -\frac{2}{3}$.

Επιπλέον, για $x \leq 0$ ισχύει προφανώς $f(x) < \frac{2}{3}$.

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$-\frac{2}{3} < f(x) < \frac{2}{3}, \ (1).$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $\text{συν}x \in \mathbb{R}$, οπότε από την (1), θέτοντας στη θέση του x το συνx, προκύπτει ότι $-\frac{2}{3} < f(\text{συν}x) < \frac{2}{3}$, (2).

Επίσης ισχύουν $-\frac{2}{3} < f(x) \Leftrightarrow 3f(x)+2>0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3f(x)+2\right)=0$, άρα από τη (2) έχουμε:

$$-\frac{2}{3}\left(3f(x)+2\right) < f(\text{συν}x)\cdot\left(3f(x)+2\right) < \frac{2}{3}\left(3f(x)+2\right).$$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(\text{συν}x)\cdot\left(3f(x)+2\right)\right]=0.$$

Δ3. Για $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x)=\dfrac{2x^2}{\sqrt{9x^2+1}}$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(h(x)-\alpha x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2}{\sqrt{9x^2+1}}-\alpha x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-\alpha x\cdot\sqrt{9x^2+1}}{\sqrt{9x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-\alpha x\cdot\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x^2}\right)}}\overset{x<0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+\alpha x^2\cdot\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{-x\cdot\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[(-x)\cdot\frac{2+\alpha\cdot\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}\right].$$

Επομένως, το όριο είναι της μορφής $(+\infty)\cdot\frac{2+3\alpha}{3}$.

- Αν $\frac{2+3\alpha}{3}>0\Leftrightarrow\alpha>-\frac{2}{3}$, τότε το όριο είναι $+\infty$.
- Αν $\frac{2+3\alpha}{3}<0\Leftrightarrow\alpha<-\frac{2}{3}$, τότε το όριο είναι $-\infty$.
- Αν $\frac{2+3\alpha}{3}=0\Leftrightarrow\alpha=-\frac{2}{3}$, τότε το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2}{\sqrt{9x^2+1}}+\frac{2x}{3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{3\sqrt{9x^2+1}}\cdot\left(6x^2+2x\sqrt{9x^2+1}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{3\sqrt{9x^2+1}}\cdot\frac{\left(6x^2\right)^2-\left(2x\sqrt{9x^2+1}\right)^2}{6x^2-2x\sqrt{9x^2+1}}\right]\overset{x<0}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{3\sqrt{9x^2+1}}\cdot\frac{36x^4-4x^2\left(9x^2+1\right)}{6x^2+2x^2\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3\sqrt{9x^2+1}}\cdot\frac{-4}{6+2\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}\right)=0,$$

διότι:

- $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+1}=+\infty$, άρα $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3\sqrt{9x^2+1}}=0$ και
- $\lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{6+2\cdot\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-4}{6+2\cdot\sqrt{9+0}}=-\frac{1}{3}$.

10ο

Κριτηριο Αξιολογησης

Θέμα Α

Α1. Θεωρία.

Α2. Θεωρία.

Α3. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος.

Θέμα Β

Β1. Αν $f(x)=\sqrt{x^2+x+1},\ x\in\mathbb{R}$, τότε το όριο γράφεται ισοδύναμα:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\alpha x-\beta)\right]=0.$$

Δηλαδή η ευθεία $y=\alpha x-\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, οπότε ισχύουν:

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\alpha\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\alpha\overset{x>0}{\Rightarrow}$$

  $$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\alpha\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\alpha\Rightarrow\alpha=1,$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\alpha x\right)=-\beta\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=-\beta\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}^{\,2}-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=-\beta\Rightarrow$$

  $$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=-\beta\overset{x>0}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=-\beta\Rightarrow$$

  $$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=-\beta\Rightarrow\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=-\beta\Rightarrow\beta=-\frac{1}{2}.$$

Β2. • Αν $0<\alpha<e$, τότε $\frac{e}{\alpha}>1$, οπότε $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e}{\alpha}\right)^x=0$. Τότε το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\alpha^x\cdot\left[\left(\frac{e}{\alpha}\right)^x\cdot e+1\right]}{\alpha^x\cdot\left[\left(\frac{e}{\alpha}\right)^x+\alpha^{-1}\right]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{e}{\alpha}\right)^x\cdot e+1}{\left(\frac{e}{\alpha}\right)^x+\frac{1}{\alpha}}=\frac{0+1}{0+\frac{1}{4}}=\alpha.$$

- Αν $e<\alpha$, τότε $\frac{\alpha}{e}>1$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^x=0$. Τότε το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x\cdot\left[e+\left(\frac{\alpha}{e}\right)^x\right]}{e^x\cdot\left[1+\left(\frac{\alpha}{e}\right)^x\cdot\alpha^{-1}\right]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e+\left(\frac{\alpha}{e}\right)^x}{1+\left(\frac{\alpha}{e}\right)^x\cdot\alpha^{-1}}=\frac{e+0}{1+0}=e.$$

- Αν $\alpha=e$, τότε το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x\cdot e+e^x}{e^x+e^x\cdot e^{-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e+1}{1+e^{-1}}=\frac{e+1}{e^{-1}+1}=\frac{e^2+e}{1+e}.$$

Θέμα Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο A ως ρητή συνάρτηση, οπότε αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες στα σημεία $x_0=0$ και $x_1=3$:

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+\frac{2}{x(x-3)}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+\frac{2}{x-3}\cdot\frac{1}{x}\right)\overset{0+\left(\frac{-2}{3}\right)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty,$

- $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\left(x+\frac{2}{x(x-3)}\right)=\lim\limits_{x\to3^+}\left(x+\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x-3}\right)\overset{3+\frac{2}{3}\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

Συνεπώς, οι ευθείες $x=0$ και $x=3$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f.

Γ2. **α.** Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\frac{2}{x(x-3)}\right)\overset{(-\infty)+0}{=}-\infty.$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f^2(x)=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f^2(x)-x\right)=+\infty$ και συνεπώς είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left|f^2(x)-x\right|}=0.$$

Για $x<0$ έχουμε:

$$\left|\frac{\eta\mu f(x)}{f^2(x)-x}\right|=\frac{|\eta\mu f(x)|}{\left|f^2(x)-x\right|}\le\frac{1}{\left|f^2(x)-x\right|}\Rightarrow-\frac{1}{\left|f^2(x)-x\right|}\le\frac{\eta\mu f(x)}{f^2(x)-x}\le\frac{1}{\left|f^2(x)-x\right|}.$$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f^2(x)-x}=0.$$

β. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln|x|=+\infty$. Άρα υπάρχει $M<1$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x<M$ να ισχύει $\ln|x|>\ln1>0$. Τότε για $x<0$ έχουμε:

$$\frac{g(x)}{\ln|x|}<f(x)\Leftrightarrow g(x)<f(x)\cdot\ln|x|,\ (1).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)\cdot\ln|x|\right)\overset{(-\infty)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty$, οπότε από την (1) βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$.

Γ3. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{2x+3\kappa}{\kappa-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x(x^2-3x)+2}{x^2-3x}+\frac{2x+3\kappa}{\kappa-1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\kappa+1)x^3-3x^2-9\kappa x+2(\kappa-1)}{(\kappa-1)x^2-3(\kappa-1)x},\ \kappa\neq1.$$

- Αν $\kappa\neq-1$, τότε το όριο γίνεται $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\kappa+1)x^3}{(\kappa-1)x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1}\cdot x\right)$,

  δηλαδή λαμβάνει τη μορφή $\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1}\cdot(+\infty)$.

  - Για $\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1}>0\Leftrightarrow(\kappa+1)(\kappa-1)>0\Leftrightarrow\kappa^2-1>0\Leftrightarrow|\kappa|>1\Leftrightarrow\{\kappa<-1\ \text{ή}\ \kappa>1\}$,

    το όριο είναι $+\infty$.

  - Για $\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1}<0\Leftrightarrow(\kappa+1)(\kappa-1)<0\Leftrightarrow\kappa^2-1<0\Leftrightarrow|\kappa|<1\Leftrightarrow-1<\kappa<1$,

    το όριο είναι $-\infty$.

- Αν $\kappa=-1$, τότε το όριο γίνεται $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2+9x-4}{-2x^2+6x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2}{-2x^2}=\dfrac{3}{2}$.

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $f(0)=-1$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq f(0)$. Έχουμε:

$$f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{x^2+1}\geq-1\Leftrightarrow x^2-1\geq-x^2-1\Leftrightarrow2x^2\geq0$$

που ισχύει.

Δ2. Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ και ομοίως, βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

Συνεπώς, η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

Δ3. **α.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \le 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \le x^2 + 1 \Leftrightarrow -1 \le 1$ που ισχύει.

Στο Δ1 αποδείξαμε ότι $f(x) \ge -1$. Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \le f(x) \le 1$, οπότε:

$$|f(x)| \le 1 \Leftrightarrow f^2(x) - 1 \le 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f^2(x)-1\right) = 1^2 - 1 = 0$, ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f^2(x)-1} = -\infty$.

Επιπλέον, έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\eta\mu\left(f(x)+1\right)\right] \underset{u\to 2}{\overset{f(x)+1=u}{=\!=}} \lim\limits_{u\to 2}\eta\mu u = \eta\mu 2 > 0$, διότι $0 < 2 < \pi$. Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\left(f(x)+1\right)}{f^2(x)-1} = \lim_{x\to+\infty}\left\{\left[\eta\mu\left(f(x)+1\right)\right]\cdot\frac{1}{f^2(x)-1}\right\} = -\infty.$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{f(x)+x^2-x}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{f(x)+x^2-x}^{\,2}-x^2}{\sqrt{f(x)+x^2-x}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)-x}{\sqrt{x^2\cdot\left(\dfrac{f(x)}{x^2}+1-\dfrac{1}{x}\right)}-x} \overset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(\dfrac{f(x)}{x}-1\right)}{-x\cdot\sqrt{\dfrac{f(x)}{x^2}+1-\dfrac{1}{x}}+1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{f(x)}{x}-1}{\sqrt{\dfrac{f(x)}{x^2}+1-\dfrac{1}{x}}+1} = \frac{0-1}{\sqrt{0+1-0}+1} = -\frac{1}{2},$$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x) = 1$. Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^2} = 0$.

Δ4. Από το Δ3.α έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \le f(x) \le 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\eta\mu x \in \mathbb{R}$. Άρα, θέτοντας όπου x το ημx έχουμε:

$$-1 \le f(\eta\mu x) \le 1 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} \frac{-1}{e^x} \le \frac{f(\eta\mu x)}{e^x} \le \frac{1}{e^x}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{-x}\right) = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x} = 0$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(\eta\mu x)}{e^x} = 0$.

16η Ενότητα
Βασικά θεωρήματα συνέχειας

A. Του τύπου Σωστό / Λάθος

16. 1 **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό.

16. 2 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό.

16. 3 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος.

16. 4 **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό.

16. 5 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό **στ.** Σωστό.

16. 6 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό.

16. 7 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό **στ.** Σωστό.

16. 8 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος **στ.** Σωστό **ζ.** Σωστό.

16. 9 **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό **στ.** Λάθος **ζ.** Λάθος **η.** Σωστό.

16. 10 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό **στ.** Σωστό **ζ.** Λάθος.

B. Αντιστοίχισης

16. 11 $1 \to \varepsilon$, $2 \to \beta$, $3 \to \delta$, $4 \to \zeta$, $5 \to \alpha$, $6 \to \eta$, $7 \to \gamma$, $8 \to \sigma\tau$.

16. 12 $1 \to \gamma$, $2 \to \sigma\tau$, $3 \to \alpha$, $4 \to \zeta$, $5 \to \theta$, $6 \to \delta$, $7 \to \iota$, $8 \to \varepsilon$, $9 \to \beta$, $10 \to \eta$.

Γ. Βασικές εφαρμογές – Ασκήσεις εμπέδωσης

16. 13 Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στα αντίστοιχα κλειστά διαστήματα.

Για το **δ.** πρώτα κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών.

16. 14 **α.** Θεώρημα Bolzano στο [0, 1] ή στο [1, 2].

β. Θεώρημα Bolzano στο [0, 1].

16. 15 **α.** Θεώρημα Bolzano για την $f(x) = x^5 + x - 2$ στο [0, 2] και $f \uparrow [0, 2]$.

β. Θεώρημα Bolzano για την $f(x) = 3x^3 + 9x^2 - 2$ στο [0, 1] και $f \uparrow [0, 1]$.

16. 16 **α.** Θεώρημα Bolzano στα [–1, 0], [0, 1].

β. Θεώρημα Bolzano στα [–2, 0], [0, 2].

16. 17 **α.** Θεώρημα Bolzano σε δύο από τα [–1, 0], [0, 1], [1, 2].

β. Θεώρημα Bolzano στα [–1, 0], [0, 1].

16. 18 **α.** Θεώρημα Bolzano στα [–1, 0], [0, 1] και $\Delta > 0$.

β. Θεώρημα Bolzano στα [–1, 0], [0, 2] και $\Delta > 0$.

16. 19 **α.**

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	−	0	+	

β.

x	$-\infty$		–1		1		3		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	−	0	+	

γ.

x	$-\infty$		–2		0		3		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	−	0	+	

δ.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	+	

16. 20 **α.** [–1, 3] **β.** [–4, 0) **γ.** (0, 10] **δ.** $(e + 1, e^2 + 2)$.

16. 21 **α.** $[1, +\infty]$ **β.** $\left(\frac{1}{e} - 1, 1\right)$ **γ.** (–1, 1] **δ.** $\left[\frac{\sqrt{3} - 3}{3}, \sqrt{3} - 1\right]$.

16. 22 έως και 16. 25.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών και το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής. Για την απόδειξη της μοναδικότητας (όπου ζητείται), χρησιμοποιούμε τη μονοτονία της συνάρτησης.

Δ. Ασκήσεις για λύση

16. 26 **α.** Η $f(x) = 6x^2 - 5x - 6$ είναι συνεχής στο [–1, 0] ως πολυωνυμική.

Έχουμε $f(-1) = 6 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = 5 > 0$ και $f(0) = 6 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$, οπότε ισχύει $f(-1)\cdot f(0)<0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-5x-6=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (–1, 0).

β. Η $f(x)=2x^3-x^2+4x-2$ είναι συνεχής στο [0, 1] ως πολυωνυμική.

Είναι $f(0)=-2$ και $f(1)=3$, οπότε ισχύει $f(0)\cdot f(1)=-2\cdot 3=-6<0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-2=x^2-4x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0, 1).

γ. Η $f(x)=6x+\frac{5}{x}-17$ είναι συνεχής στο [2, 3] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $f(2)=-\frac{5}{2}<0$ και $f(3)=\frac{8}{3}>0$, οπότε ισχύει $f(2)\cdot f(3)<0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow 6x+\frac{5}{x}=17$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (2, 3).

δ. Η $f(x)=\sqrt{x+3}-2+x$ είναι συνεχής στο [0, 1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $f(0)=\sqrt{3}-2<0$ και $f(1)=1>0$, οπότε ισχύει $f(0)\cdot f(1)<0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=2-x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0, 1).

ε. Η $f(x)=\ln^2 x-2+x^2$ είναι συνεχής στο [1, e].

Είναι $f(1)=-1<0$ και $f(e)=e^2-1>0$, οπότε ισχύει $f(1)\cdot f(e)<0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln^2 x=2-x^2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1, e).

στ. Η $f(x) = 3x - 2 - ημx$ είναι συνεχής στο [0, π].

Είναι $f(0)=-2<0$ και $f(π) = 3π - 2 > 0$, οπότε ισχύει $f(0) \cdot f(π) < 0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow 3x-2=ημx$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0, π).

ζ. Η $f(x) = 2x - 3ημ2x$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{π}{8}, \frac{π}{2}\right]$.

Έχουμε $f\left(\frac{π}{8}\right)=\frac{π}{4}-3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{π-6\sqrt{2}}{4}<0$ και $f\left(\frac{π}{2}\right)=2\frac{π}{2}-3ημπ=π>0$,

οπότε ισχύει $f\left(\frac{π}{8}\right)\cdot f\left(\frac{π}{2}\right)<0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x-3ημ2x=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right)$.

η. Η $f(x)=x-ημx-\frac{1}{2}$ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{7\pi}{6}\right]$.

Είναι $f(0)=-\frac{1}{2}<0$ και $f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{7\pi}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right)>0,$ οπότε ισχύει $f(0)\cdot f\left(\frac{7\pi}{6}\right)<0.$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow x-ημx-\frac{1}{2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0, \frac{7\pi}{6}\right)$.

16. 27 α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=4x^3+8x-3,\ x\in\mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Είναι $f(0)=-3$ και $f(1)=9,$ οπότε ισχύει $f(0)\cdot f(1)=-27<0.$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3+8x=3$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)\subseteq\mathbb{R}$.

β. Θεωρούμε η συνάρτηση $f(x)=5x^3+2x^2+10x+4,\ x\in\mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Είναι $f(-1)=-9<0$ και $f(0)=4>0,$ οπότε ισχύει $f(-1)\cdot f(0)<0.$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow 5x^3+2x^2+10x+4=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1, 0)\subseteq\mathbb{R}$.

16. 28 α. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Είναι $f(1)=-1$ και $f(2)=7,$ οπότε ισχύει $f(1)\cdot f(2)=-7<0.$

Άρα, εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano για την f στο [1, 2], δηλαδή $α=1$.

β. Αν $α=-1$, τότε είναι $f(-1)=-1<0$ και $f(0)=1>0,$ οπότε ισχύει $f(-1)\cdot f(0)<0.$

Η f είναι συνεχής στο [–1, 0] ως πολυωνυμική.

Άρα, εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano για την f στο [–1, 0].

γ. Αν $α=1$, τότε είναι $f(1)=-2<0$ και $f(2)=65>0,$ οπότε ισχύει $f(1)\cdot f(2)<0.$

Η f είναι συνεχής στο [1, 2] ως πολυωνυμική.

Άρα, εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano για την f στο [1, 2].

δ. Αν $α=2$, τότε είναι $f(2)=1>0$ και $f(3)=-191<0,$ οπότε ισχύει $f(2)\cdot f(3)<0.$

Η f είναι συνεχής στο [2, 3] ως πολυωνυμική.

Άρα, εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano για την f στο [2, 3].

16. 29 **α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(x^5-5)(x-3)+(e^{2x}-6)(x-2),\ x\in[2, 3]$.

Η f είναι συνεχής στο [2, 3].

Είναι $f(2)=-27<0$ και $f(3)=e^{6x}-6>0$, οπότε ισχύει $f(2)\cdot f(3)<0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(2, 3)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0)=0 \overset{x_0\neq 2,\,3}{\Leftrightarrow} \frac{x_0^5-5}{x_0-2}+\frac{e^{2x_0}-6}{x_0-3}=0.$$

Δηλαδή η εξίσωση $\frac{x^5-5}{x-2}+\frac{e^{2x}-6}{x-3}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (2, 3).

β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x^{2020}+1)(x-1)+(x^{2022}+2)(x+1),\ x\in[-1, 1]$.

Η f είναι συνεχής στο [–1, 1].

Είναι $f(-1)=-4<0$ και $f(1)=6>0$, οπότε ισχύει $f(-1)\cdot f(1)<0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-1, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0)=0 \overset{x_0\neq\pm 1}{\Leftrightarrow} \frac{x_0^{2.020}+1}{x_0+1}+\frac{x_0^{2.022}+2}{x_0-1}=0.$$

Δηλαδή η εξίσωση $\frac{x^{2020}+1}{x+1}+\frac{x^{2022}+2}{x-1}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (–1, 1).

16. 30 **α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(x-1)\cdot g(x)+x\cdot g(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής στο [0, 1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $f(0)=-g(0)<0$ και $f(1)=g(2)>0$, οπότε ισχύει $f(0)\cdot f(1)<0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0)=0 \overset{x_0\neq 0,\,1}{\Leftrightarrow} \frac{g(x_0)}{x_0}+\frac{g(x_0^2+1)}{x_0-1}=0.$$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x\cdot g(\eta\mu x)+(x-1)\cdot \ln(x+2)$.

Η f είναι συνεχής στο [0, 1] ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $f(0)=-\ln 2<0$ και $f(1)=g(\eta\mu 1)>0$, οπότε ισχύει $f(0)\cdot f(1)<0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0)=0 \overset{x_0\neq 0,\,1}{\Leftrightarrow} \frac{g(\eta\mu x_0)}{x_0-1}+\frac{\ln(x_0+2)}{x_0}=0.$$

16. 31 Η δοθείσα εξίσωση γράφεται:

$$\frac{f^2(x)}{x-3}+\frac{f^4(x)}{x-7}=0 \underset{x\neq 7}{\overset{x\neq 3}{\Leftrightarrow}} (x-7)\cdot f^2(x)+(x-3)\cdot f^4(x)=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=(x-7)\cdot f^2(x)+(x-3)\cdot f^4(x),\ x\in[3,7]$.

Η F είναι συνεχής στο [3, 7] ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε:

- $F(3)=(3-7)\cdot f^2(3)+(3-3)\cdot f^4(3)=-4\cdot f^2(3)$.

  Επειδή $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θα είναι $f(3)<0$, οπότε $f^2(3)>0$. Άρα $F(3)<0$.
- $F(7)=(7-7)\cdot f^2(7)+(7-3)\cdot f^4(7)=4\cdot f^4(7)$.

  Ομοίως, είναι $f(7)<0$, οπότε $f^4(7)>0$. Άρα $F(7)>0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(3,7)$ τέτοιο, ώστε:

$$F(x_0)=0\Leftrightarrow (x_0-7)\cdot f^2(x_0)+(x_0-3)\cdot f^4(x_0)=0 \underset{x_0\neq 7}{\overset{x_0\neq 3}{\Leftrightarrow}} \frac{f^2(x_0)}{x_0-3}+\frac{f^4(x_0)}{x_0-7}=0.$$

Άρα το $x_0\in(3,7)$ είναι ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

16. 32 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(x-\alpha)\cdot P(x)+(x-\beta)^3\cdot P(x^2),\ x\in\mathbb{R},\ \alpha<\beta$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, άρα είναι συνεχής και στο $[\alpha,\beta]$.

Έχουμε $f(\alpha)=(\alpha-\beta)^3\cdot P(\alpha^2)$ και $f(\beta)=(\beta-\alpha)\cdot P(\beta)=-(\alpha-\beta)\cdot P(\beta)$, οπότε ισχύει:

$f(\alpha)\cdot f(\beta)=-(\alpha-\beta)^4\cdot P(\alpha^2)\cdot P(\beta)$, (1).

Είναι $-(\alpha-\beta)^4<0$ και το πολυώνυμο P, ως συνεχής συνάρτηση με $P(x)\neq 0,\ x\in\mathbb{R}$, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Άρα τα $P(\alpha^2)$ και $P(\beta)$ είναι ομόσημα και από την (1) προκύπτει ότι $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi)=0 \underset{\xi\neq\beta}{\overset{\xi\neq\alpha}{\Leftrightarrow}} \frac{P(\xi)}{(\xi-\beta)^3}+\frac{P(\xi^2)}{\xi-\alpha}=0.$$

16. 33 Για $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ και $x\neq\alpha,\ x\neq\beta,\ x\neq\gamma,\ x\neq\delta$ έχουμε:

$$\frac{1}{x-\alpha}+\frac{2}{x-\beta}+\frac{3}{x-\gamma}+\frac{4}{x-\delta}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)+2(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)+$$
$$+3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)+4(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$F(x)=(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)+2(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)+$$
$$+3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)+4(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma).$$

- Η F είναι συνεχής στο [α, β] ως πολυωνυμική.

  Έχουμε:

  $F(\alpha) = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta) < 0$, διότι $\alpha - \beta < 0$, $\alpha - \gamma < 0$, $\alpha - \delta < 0$ και

  $F(\beta) = 2(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta) > 0$, διότι $\beta - \alpha > 0$, $\beta - \gamma < 0$, $\beta - \delta < 0$,

  οπότε ισχύει $F(\alpha) \cdot F(\beta) < 0$.

  Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

  $$F(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x_0 - \alpha} + \frac{2}{x_0 - \beta} + \frac{3}{x_0 - \gamma} + \frac{4}{x_0 - \delta} = 0.$$

- Ομοίως, αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια λύση στα (β, γ), (γ, δ).

16. 34 **α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 6x^2 - x - 1$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. Είναι $f(-1) = 6 > 0$, $f(0) = -1 < 0$ και $f(1) = 4 > 0$, οπότε ισχύουν:

$$f(-1) \cdot f(0) < 0 \quad \text{και} \quad f(0) \cdot f(1) < 0.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0)$ και τουλάχιστον ένα $x_2 \in (0, 1)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο (–1, 1).

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 4x^2 - \frac{4}{x+4} - 15$ η οποία είναι συνεχής στο [–2, 3] ως ρητή. Είναι $f(-2) = \frac{5}{3} > 0$, $f(0) = -16 < 0$ και $f(3) = \frac{143}{7} > 0$, οπότε ισχύουν:

$$f(-2) \cdot f(0) < 0 \quad \text{και} \quad f(0) \cdot f(3) < 0.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-2, 0)$ και τουλάχιστον ένα $x_2 \in (0, 3)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - \frac{4}{x+4} - 15 = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο (–2, 3).

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 9x^4 + 17x^2 - 2$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Είναι $f(-1) = 24 > 0$, $f(0) = -2 < 0$ και $f(1) = 24 > 0$, οπότε ισχύουν:

$$f(-1) \cdot f(0) < 0 \quad \text{και} \quad f(0) \cdot f(1) < 0.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano για την f στα διαστήματα [–1, 0] και [0, 1], η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^4 + 17x^2 = 2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (–1, 0) και τουλάχιστον μια ρίζα στο (0, 1). Άρα, η εξίσωση έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο (–1, 1).

δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{ημ2x}{2}-συν3x$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε:

- $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}ημ\left(-\frac{\pi}{2}\right)-συν\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}>0,$
- $f(0)=\frac{ημ0}{2}-συν0=-1<0$ και
- $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=ημ\frac{\pi}{3}-συν\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}>0,$

οπότε ισχύουν:

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot f(0)<0 \quad \text{και} \quad f(0)\cdot f\left(\frac{\pi}{6}\right)<0.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano για την f στα $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ και $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow ημ2x+συν3x=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ και τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$. Άρα, η εξίσωση έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$.

16. 35 α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=18x^3+21x^2-10x-8$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Είναι $f(-2)=-48<0$, $f(-1)=5>0$ και $f(0)=-8<0$, οπότε ισχύουν:

$$f(-2)\cdot f(-1)<0 \quad \text{και} \quad f(-1)\cdot f(0)<0.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano για την f στα διαστήματα [–2, –1] και [–1, 0], η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow 18x^3+21x^2=10x+8$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (–2, –1) και τουλάχιστον μια ρίζα στο (–1, 0). Άρα, η εξίσωση έχει τουλάχιστον δύο πραγματικές ρίζες.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=4x^4+5x^2-4x^3-8x-6=0$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Είναι $f(-1)=15>0$, $f(0)=-6<0$ και $f(2)=30>0$, οπότε ισχύουν:

$$f(-1)\cdot f(0)<0 \quad \text{και} \quad f(0)\cdot f(2)<0.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano για την f στα διαστήματα [–1, 0] και [0, 2], η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow 4x^4+5x^2=4x^3+8x+6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (–1, 0) και τουλάχιστον μια ρίζα στο (0, 2). Άρα, η εξίσωση έχει τουλάχιστον δύο πραγματικές ρίζες.

16. 36 **α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=8x^3+12x^2-2x-1$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. Είναι $f(-2)=-13<0,\ f(-1)=5>0,\ f(0)=-1<0$ και $f(1)=17>0$, οπότε ισχύουν:

$$f(-2)\cdot f(-1)<0,\ f(-1)\cdot f(0)<0 \text{ και } f(0)\cdot f(1)<0.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano η f έχει από μια ρίζα στα διαστήματα (–2, –1), (–1, 0) και (0, 1), άρα έχει 3 ρίζες στο (–2, 1). Επιπλέον, η f είναι πολυωνυμική 3ου βαθμού, άρα δεν έχει άλλες πραγματικές ρίζες. (Η τελευταία πρόταση αποδεικνύεται και με μονοτονία.)

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2-x+2$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Είναι $f(-2)=-16<0,\ f(0)=2>0,\ f(2)=-4<0$ και $f(4)=14>0$, οπότε ισχύουν:

$$f(-2)\cdot f(0)<0,\ f(0)\cdot f(2)<0 \text{ και } f(2)\cdot f(4)<0.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano η f έχει από μια ρίζα στα διαστήματα (–2, 0), (0, 2) και (2, 4), άρα έχει 3 ρίζες στο (–2, 4). Επιπλέον, η f είναι πολυωνυμική 3ου βαθμού, άρα δεν έχει άλλες πραγματικές ρίζες.

16. 37 **α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=4x^3-6x^2-2e^x+3$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f(-2)=-17-\dfrac{2}{e^2},\ f(-1)=\dfrac{5e-2}{e},\ f(0)=3,\ f(1)=1-2e$ και $f(2)=23-2e^2$, οπότε ισχύουν:

$$f(-2)\cdot f(-1)<0,\ f(0)\cdot f(1)<0 \text{ και } f(1)\cdot f(2)<0.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano η f έχει από μια ρίζα στα διαστήματα (–2, –1), (0, 1) και (1, 2).

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^x+2\ln(x+1)-x^3$ η οποία είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\left(e^x+2\ln(x+1)-x^3\right)=-\infty$, άρα υπάρχει α κοντά στο –1 τέτοιο, ώστε $f(\alpha)<0$. Επιπλέον, είναι:

- $f(0)=1>0,\ f(2)=e^2+2\ln 3-8=e^2+\ln 3-8>0,$
- $f(3)=e^3+2\ln 4-27<0,\ f(5)=e^5+2\ln 6-125>0,$

οπότε ισχύουν $f(\alpha)\cdot f(0)<0,\quad f(2)\cdot f(3)<0$ και $f(3)\cdot f(5)<0.$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (α, 0), (2, 3) και (3, 5).

16. 38 Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=f(x)-g(x),\ x\in[\alpha,\beta]$.

Η F είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $F(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha) > 0$ και $F(\beta) = f(\beta) - g(\beta) < 0$, οπότε ισχύει $F(\alpha)\cdot F(\beta) < 0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano για την F στο $[\alpha, \beta]$ υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$F(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = g(\xi).$$

16. 39 Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \kappa(x - 2)(x - 3) + \lambda(x - 1)(x - 3) + \mu(x - 1)(x - 2),\ x\in\mathbb{R},\ \kappa, \lambda, \mu > 0.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, άρα είναι συνεχής και στα διαστήματα $[1, 2]$, $[2, 3]\subseteq\mathbb{R}$.

Είναι $f(1) = 2\kappa > 0$, $f(2) = -\lambda < 0$, $f(3) = 2\mu > 0$, οπότε ισχύουν:

$$f(1)\cdot f(2)<0 \quad \text{και} \quad f(2)\cdot f(3)<0.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano για την f στα $[1, 2]$ και $[2, 3]$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες $\rho_1\in(1, 2)$ και $\rho_2\in(2, 3)$, οι οποίες είναι άνισες.

16. 40 Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = x(x - 2)e^{\alpha} + x(x - 1)\ln\alpha - (x - 1)(x - 2)(\eta\mu\alpha - 2),\ x\in\mathbb{R}\ \text{ με } \alpha > e.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Έχουμε:

- $f(0) = -2\cdot(\eta\mu\alpha - 2) > 0$, διότι $\eta\mu\alpha \le 1 < 2$,
- $f(1) = -e^{\alpha} < 0$, διότι $e^{\alpha} > 0$,
- $f(2) = 2\ln\alpha > 0$, διότι $\alpha > e \Leftrightarrow \ln\alpha > \ln e > 0$.

Οπότε ισχύουν $f(0)\cdot f(1)<0$ και $f(1)\cdot f(2)<0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano στα $[0, 1]$, $[1, 2]$, έχουμε δύο ρίζες στα $(0, 1)$, $(1, 2)$ για την εξίσωση:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{e^{\alpha}}{x-1}+\frac{\ln\alpha}{x-2}-\frac{\eta\mu\alpha-2}{x}=0.$$

Επιπλέον, η f είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού, άρα έχει ακριβώς δύο ρίζες.

16. 41 Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - \alpha x^2 + 2\beta \ \text{ με } \ \beta + 4 < 2\alpha,\ (1)\ \text{ και } \ \beta > 0,\ (2).$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής και στα διαστήματα $[-2, 0], [0, 2]\subseteq\mathbb{R}$.

Έχουμε:

- $f(-2) = (-2)^3 - \alpha\cdot(-2)^2 + 2\beta = -8 - 4\alpha + 2\beta \overset{(1)}{<} -8 - 4\alpha + 2(2\alpha - 4) \Rightarrow$

  $\Rightarrow f(-2)<-8-4\alpha+4\alpha-8$ ή $f(-2)<-16<0$,

- $f(0) = 2\beta > 0$,
- $f(2) = 2^3 - \alpha \cdot 2^2 + 2\beta = 8 - 4\alpha + 2\beta \overset{(1)}{<} 4\alpha - 4\alpha = 0$, δηλαδή $f(2) < 0$.

Οπότε ισχύουν $f(-2)\cdot f(0) < 0$ και $f(0)\cdot f(2) < 0$,

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano για την f στα [–2, 0] και [0, 2] υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-2, 0)$ και τουλάχιστον ένα $x_2 \in (0, 2)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Δηλαδή η $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - \alpha x^2 + 2\beta = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο (–2, 2).

16. 42 Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f\left(\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right) - f\left(3 - \eta\mu\frac{x}{2}\right),\ x \in [0, \pi].$$

Η g είναι συνεχής στο [0, π] ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε:

- $g(0) = f(\sigma\upsilon\nu 0) - f(3 - \eta\mu 0) = f(1) - f(3)$,
- $g(\pi) = f\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right) - f\left(3 - \eta\mu\frac{\pi}{2}\right) = f(0) - f(2)$.

Οπότε ισχύει:

$$g(0) \cdot g(\pi) = (f(1) - f(3))\cdot(f(0) - f(2)) \underset{f(1)=f(2)}{\overset{f(0)=f(3)}{=}} -(f(0) - f(1))^2 \leq 0.$$

- Αν $g(0) = 0$ ή $g(\pi) = 0$, τότε $x = 0$ ή $x = \pi$ η ζητούμενη ρίζα.
- Αν $g(0) \cdot g(\pi) < 0$, τότε από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f\left(\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right) = f\left(3 - \eta\mu\frac{x}{2}\right)$$

  έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0, π).

Συνεπώς, η εξίσωση έχει λύση στο [0, π].

16. 43 Η συνάρτηση $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής με $g([\alpha, \beta]) = [\alpha, \beta]$, άρα:

$$g(\alpha) = \beta \ \text{και}\ g(\beta) = \alpha.$$

Επιπλέον, είναι $f([\alpha, \beta]) = [\alpha, \beta]$, άρα $\alpha \leq f(x) \leq \beta$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = 2g(x) - f(g(x)) - f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Η F είναι συνεχής στο [α, β] ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε:

- $F(\alpha) = 2g(\alpha) - f(g(\alpha)) - f(\alpha) = 2\beta - f(\beta) - f(\alpha) = 2\beta - (f(\beta) + f(\alpha)) \geq 0$,
  διότι $f(\beta) \leq \beta$ και $f(\alpha) \leq \beta$, άρα $f(\alpha) + f(\beta) \leq 2\beta$,
- $F(\beta) = 2g(\beta) - f(g(\beta)) - f(\beta) = 2\alpha - f(\alpha) - f(\beta) = 2\alpha - (f(\alpha) + f(\beta)) \leq 0$,
  διότι $f(\beta) \geq \alpha$ και $f(\alpha) \geq \alpha$, άρα $f(\alpha) + f(\beta) \geq 2\alpha$.

Οπότε ισχύει $F(\alpha) \cdot F(\beta) \leq 0$.

- Αν $F(\alpha) = 0$ ή $F(\beta) = 0$, τότε $x_0 = \alpha$ ή $x_0 = \beta$.
- Αν $F(\alpha) \cdot F(\beta) < 0$, τότε από το θεώρημα Bolzano για την F στο [α, β] υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $F(x_0) = 0$.

Συνεπώς, υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε:

$$F(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2g(x_0) = f(g(x_0)) + f(x_0).$$

16. 44 Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο [1, 2].

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = f(x) - g(x),\ x \in [1, 2]$.

Η F συνάρτηση συνεχής στο [1, 2] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε:

- $F(1) = f(1) - g(1) \leq 0$,
- $F(2) = f(2) - g(2) \geq 0$

Οπότε ισχύει $F(1) \cdot F(2) \leq 0$.

- Αν $F(1) \cdot F(2) = 0$, τότε $x_0 = 1$ ή $x_0 = 2$ είναι ρίζα της F, άρα και λύση για το ζητούμενο.
- Αν $F(1) \cdot F(2) < 0$, τότε από το θεώρημα Bolzano για την F στο [1, 2] υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $F(x_0) = 0$.

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει $x_0 \in [1, 2]$ που είναι ρίζα της F, άρα οι C_f, C_g τέμνονται τουλάχιστον μια φορά σε σημείο με τετμημένη $x_0 \in [1, 2]$.

Επιπλέον, αν $f \uparrow [1, 2]$ και $g \downarrow [1, 2]$, τότε $-g \uparrow [1, 2]$ και συνεπώς η $F(x) = f(x) - g(x)$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$. Άρα, το σημείο τομής των C_f, C_g είναι μοναδικό.

16. 45 Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = f^2(x) + f(x) - x^2 - x$.

Η F είναι συνεχής στο [0, 1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε:

- $F(0) = f^2(0) + f(0) - 0^2 - 0 = f(0) \cdot (f(0) + 1) > 0$, διότι $f(0) > 0$ και
- $F(1) = f^2(1) + f(1) - 1^2 - 1 = f^2(1) + f(1) - 2 = (f(1) + 2) \cdot (f(1) - 1) < 0$,
  διότι $0 < f(1) < 1$, άρα $f(1) + 2 > 0$ και $f(1) - 1 < 0$.

Οπότε ισχύει $F(0) \cdot F(1) < 0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano για την F στο διάστημα [0, 1] υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$F(x_0) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_0) + f(x_0) = x_0^2 + x_0.$$

16. 46 Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^{2020} = 2 \Leftrightarrow x^{2020} - 2 = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση $\rho \in (1, 3)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^{2020} - 2,\ x \in [1, 3]$.

Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική και έχουμε:

- $f(1) = 1^{2020} - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$,
- $f(3) = 3^{2020} - 2 > 0$.

Οπότε ισχύει $f(1) \cdot f(3) < 0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano για την f στο διάστημα [1, 3] υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho^{2020} = 2.$$

Δηλαδή, ρ είναι ρίζα τάξης 2020 του 2.

16. 47 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x \cdot 3^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο [0, 1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και έχουμε:

- $f(0) = -1$,
- $f(1) = 2 \cdot 1 \cdot 3^1 - 1 = 5 > 0$.

Οπότε ισχύει $f(0) \cdot f(1) = -5 < 0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano για την f στο διάστημα [0, 1] υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 \cdot 3^{x_0} = 1.$$

16. 48 Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = x + f(x) - \alpha - \beta,\ x \in [\alpha, \beta]$.

Η F είναι συνεχής στο [α, β] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και έχουμε:

- $F(\alpha) = \alpha + f(\alpha) - \alpha - \beta = \alpha - \beta$,
- $F(\beta) = \beta + f(\beta) - \alpha - \beta = \beta - \alpha = -(\alpha - \beta)$.

Οπότε ισχύει $F(\alpha) \cdot F(\beta) = -(\alpha - \beta)^2 < 0$, διότι $\alpha < \beta$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano για την F στο διάστημα [α, β], υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$F(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 + f(x_0) = \alpha + \beta \Leftrightarrow g(x_0) = \alpha + \beta.$$

16. 49 Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = f(x) + x\ln x - x,\ x \in [1, e]$.

Η F είναι συνεχής στο [1, e] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και έχουμε:

- $F(1) = f(1) + 1 \cdot \ln 1 - 1 = f(1) - 1 < 0$, διότι $0 < f(1) < 1$,
- $F(e) = f(e) + e \cdot \ln e - e = f(e) > 0$, διότι $0 < f(e) < 1$.

Οπότε ισχύει $F(1) \cdot F(e) < 0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano για την F στο [1, e] υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1, e) για την εξίσωση:

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -x \ln x + x.$$

16. 50 Είναι $f:[0, 3] \to (0, 3]$, άρα $0 < f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [0, 3]$.

Είναι $g(x) = f^2(x) - 3f(x) + x$, $x \in [0, 3]$. Η g είναι συνεχής στο [0, 3] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και έχουμε:

- $g(0) = f^2(0) - 3f(0) = f(0) \cdot (f(0) - 3) \leq 0$, διότι $f(0) > 0$ και $f(0) \leq 3$,
- $g(3) = f^2(3) - 3f(3) + 3 > 0$, διότι η $g(3)$ ως τριώνυμο του $f(3)$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και $\Delta = -3 < 0$.

◦ Αν $g(0) = 0$, τότε $x_0 = 0$ είναι η ζητούμενη λύση.

◦ Αν $g(0) \neq 0$, τότε $g(0) \cdot g(3) < 0$. Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano για την g στο [0, 3] υπάρχει $x_0 \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$.

Άρα, υπάρχει $x_0 \in [0, 3)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_0) - 3f(x_0) + x_0 = 0$.

16. 51 Η f είναι συνεχής στο [α, β] και ισχύει:

$$f^2(\alpha) + f(\alpha) \cdot f(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) \cdot f(\beta) = -f^2(\alpha) \leq 0.$$

◦ Αν $f(\alpha) = 0$ ή $f(\beta) = 0$, τότε $\theta = \alpha$ ή $\theta = \beta$ είναι η ζητούμενη λύση.

◦ Αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\theta \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\theta) = 0$.

Άρα, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\theta \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(\theta) = 0$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Έχουμε:

$$f^2(\alpha) + f(\alpha) \cdot f(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) \cdot (f(\alpha) + f(\beta)) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0 \text{ ή } f(\alpha) = -f(\beta).$$

◦ Αν $f(\alpha) = 0$, τότε η λύση είναι προφανώς $\theta = \alpha$.

◦ Αν $f(\alpha) = -f(\beta)$, τότε $f(\beta) \cdot f(\alpha) = -f^2(\beta) \leq 0$, οπότε:

  ▸ αν $f(\beta) = 0$, τότε η λύση είναι προφανής και

  ▸ αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\theta) = 0$.

Άρα, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει $\theta \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(\theta) = 0$.

16. 52 Ισχύει $\alpha \le f(x) \le \beta$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, με $\alpha, \beta > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = f^2(x) + xf(x) - 2x^2$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Η F είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και έχουμε:

- $F(\alpha) = f^2(\alpha) + \alpha f(\alpha) - 2\alpha^2 = (f(\alpha) - \alpha) \cdot (f(\alpha) + 2\alpha) \ge 0$,
  διότι $f(\alpha) \ge \alpha$, άρα $f(\alpha) - \alpha \ge 0$ και $f(\alpha) + 2\alpha \ge 3\alpha > 0$.
- $F(\beta) = f^2(\beta) + \beta f(\beta) - 2\beta^2 = (f(\beta) - \beta) \cdot (f(\beta) + 2\beta) \le 0$,
  διότι $f(\beta) \le \beta \Leftrightarrow f(\beta) - \beta \le 0$ και $0 < \alpha \le f(\beta) \le \beta$, άρα $f(\beta) + 2\beta > 0$.

  ◦ Αν $F(\alpha) = 0$ ή $F(\beta) = 0$, τότε $\theta = \alpha$ ή $\theta = \beta$ η ζητούμενη ρίζα.

  ◦ Αν $F(\alpha) \cdot F(\beta) < 0$, τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $F(\theta) = 0$.

Άρα, υπάρχει $\theta \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $F(\theta) = 0 \Leftrightarrow f^2(\theta) + \theta f(\theta) = 2\theta^2$.

16. 53 **α.** Αν $g(x) = \ln x$, $x \in D_g = (0, +\infty)$, τότε $h(x) = f(g(x))$ και ορίζεται στο:

$$D_h = \{x \in D_g \,/\, g(x) \in D_f\} = \{x > 0 \,/\, \ln x \in [0, 1]\} = \{x > 0 \,/\, 0 \le \ln x \le 1\} =$$
$$= \{x > 0 \,/\, 1 \le x \le e\} = [1, e].$$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = f(\ln x) - \ln x$, $x \in [1, e]$

Η F είναι συνεχής ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και έχουμε:

- $F(1) = f(\ln 1) - \ln 1 = f(0) \ge 0$,
- $F(e) = f(\ln e) - \ln e = f(1) - 1 \le 0$, διότι $0 \le f(0) \le 1$ και $0 \le f(1) \le 1$.

Οπότε ισχύει $F(1) \cdot F(e) \le 0$.

◦ Αν $F(1) = 0$ ή $F(e) = 0$, τότε $\theta = 1$ ή $\theta = e$ η ζητούμενη λύση.

◦ Αν $F(1) \cdot F(e) < 0$, τότε από το θεώρημα Bolzano για την F στο $[1, e]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $F(\theta) = 0$.

Άρα, υπάρχει $\theta \in [1, e]$ τέτοιο, ώστε $F(\theta) = 0 \Leftrightarrow f(\ln\theta) = \ln\theta$.

16. 54 Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής και στο $[1, 2] \subseteq \mathbb{R}$.

Αν ισχύει $h(1) \cdot h(2) < 0$, τότε από το θεώρημα Bolzano για την h στο $[1, 2]$ υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0$.

Τότε έχουμε $f(x_0) = (x_0^2 - 3x_0 + 2) \cdot h(x_0) = 0$ με $x_0 \in (1, 2)$ που είναι άτοπο, διότι το 1 και το 2 είναι διαδοχικές ρίζες της $f(x) = 0$.

Άρα $h(1) \cdot h(2) \ge 0$.

16. 55 Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = x^2 f(x) + (x - 3) f^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Η F είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο διάστημα [0, 3] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και έχουμε:

- $F(0) = -3f^2(0)$,
- $F(3) = 9f(3)$.

Ισχύει $x^2 - 3x + 1 < f(x) < x^3 + x^2 + 3$ για κάθε $x \in (0, 3)$. Άρα, έχουμε:

- ◦ $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2 - 3x + 1) \le \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \le \lim\limits_{x\to 0^+}(x^3 + x^2 + 3) \overset{f:\text{συνεχής}}{\Rightarrow} 1 \le f(0) \le 3 \Rightarrow f(0) > 0$ και
- ◦ $\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2 - 3x + 1) \le \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \le \lim\limits_{x\to 3^-}(x^3 + x^2 + 3) \overset{f:\text{συνεχής}}{\Rightarrow} 1 \le f(3) \le 39 \Rightarrow f(3) > 0$,

Οπότε ισχύει:

$$F(0)\cdot F(3) = -27\cdot f^2(0)\cdot f(3) < 0.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano για την F στο [0, 3] η εξίσωση $F(x) = 0$, άρα και η αρχική εξίσωση, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0, 3).

16. 56 α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} + 1 - \dfrac{1}{x}$, $x > 0$.

Η h είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ με $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x} + 1 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$.

Επομένως, υπάρχει $\kappa > 0$ κοντά στο 0, (άρα και $\kappa < 1$), με $h(\kappa) < 0$.

Επίσης, είναι $h(1) = 1 > 0$.

Οπότε ισχύει $h(\kappa)\cdot h(1) < 0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ρίζα της $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ στο (0, 1).

Επιπλέον, αν $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, τότε έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x_1} + 1 < \sqrt{x_2} + 1 \\ \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \Rightarrow -\dfrac{1}{x_1} < -\dfrac{1}{x_2} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} \sqrt{x_1} + 1 - \dfrac{1}{x_1} < \sqrt{x_2} + 1 - \dfrac{1}{x_2} \Rightarrow h(x_1) < h(x_2).$$

Άρα $h \uparrow (0, +\infty)$, οπότε οι C_f, C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = \ln(x-1) + x^2 - 2$, $x > 1$.

Η h είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ με:

$\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(\ln(x-1) + x^2 - 2) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(\ln(x-1) + x^2 - 2) = +\infty$.

Άρα, υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $h(x_1) < 0$ και $h(x_2) > 0$.

Οπότε ισχύει $h(x_1)\cdot h(x_2) < 0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ρίζα της $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ στο $(x_1,\ x_2)\subseteq(1,\ +\infty)$.

Επιπλέον, αν $x_1,\ x_2 \in (1,\ +\infty)$ με $x_1 < x_2$, τότε έχουμε:

$$1 < x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 - 2 < x_2^2 - 2 \\ \ln(x_1 - 1) < \ln(x_2 - 1) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} \ln(x_1 - 1) + x_1^2 - 2 < \ln(x_2 - 1) + x_2^2 - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x_1) < h(x_2),$$

Άρα $h \uparrow (1,\ +\infty)$, οπότε η ρίζα της h είναι μοναδική.

Επομένως, οι C_f, C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

Παρατήρηση

Αντί του $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$, μπορούσαμε να πάρουμε $h(2) = \ln 2 + 2 > 0$ και να εφαρμόσουμε το θεώρημα Bolzano στο $(x_1,\ 2)\subseteq(1,\ +\infty)$.

16. 57 Η f είναι συνεχής στο $[-1,\ 1]$ ως πολυωνυμική και έχουμε:

- $f(-1) = -\alpha \cdot (-1)^5 + \alpha^2 \cdot (-1)^3 + (-1) = -\alpha^2 + \alpha - 1 = -(\alpha^2 - \alpha + 1) < 0$,
- $f(1) = -\alpha \cdot 1^5 + \alpha^2 \cdot 1^3 + 1 = \alpha^2 - \alpha + 1 > 0$,
  (το τριώνυμο $\alpha^2 - \alpha + 1$ έχει $\Delta = -3 < 0$),

Οπότε ισχύει $f(-1)\cdot f(1) < 0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano για την f στο $[-1,\ 1]$ υπάρχει $x_0 \in (-1,\ 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-1,\ 1)$.

16. 58 Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $[\alpha,\ \beta]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = f(x) - g(x),\ x \in [\alpha,\ \beta]$.

Η F είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και έχουμε:

- $F(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha)$,
- $F(\beta) = f(\beta) - g(\beta)$

όπου $f(\alpha) + f(\beta) = g(\alpha) + g(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) - g(\alpha) = -(f(\beta) - g(\beta))$, οπότε ισχύει:

$$F(\alpha) \cdot F(\beta) = -(f(\alpha) - g(\alpha))^2 \le 0.$$

- Αν $f(\alpha) = g(\alpha)$, τότε θα είναι και $f(\beta) = g(\beta)$, άρα $x_0 = \alpha$ ή $x_0 = \beta$ ρίζα της F.
- Αν $f(\alpha) \neq g(\alpha)$, τότε $F(\alpha) \cdot F(\beta) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano για την F στο $[\alpha,\ \beta]$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\ \beta)$ τέτοιο, ώστε $F(x_0) = 0$.

Άρα, υπάρχει $x_0 \in [\alpha,\ \beta]$ τέτοιο, ώστε $F(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$.

Δηλαδή, οι C_f, C_g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη $x_0 \in [\alpha, \beta]$.

16. 59 Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Για κάθε α, $\beta \in \mathbb{R}$ έχουμε:

- $\sqrt{1+\alpha^2} > 0$,
- $2 - \eta\mu 2\beta > 0$ και
- $\sqrt{1+\alpha^2} \cdot f(1) + (2 - \eta\mu 2\beta) \cdot f(2) = 0 \Leftrightarrow f(1) = -\dfrac{2-\eta\mu 2\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}} \cdot f(2)$.

Οπότε ισχύει $f(1) \cdot f(2) = -\dfrac{2-\eta\mu 2\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}} \cdot f^2(2) \leq 0$.

- Αν $f(1) = 0$ ή $f(2) = 0$, τότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$ ή $x_0 = 1$.
- Αν $f(2) \neq 0$ και $f(1) \neq 0$, τότε $f(1) \cdot f(2) < 0$, άρα από το θεώρημα Bolzano για την f στο [1, 2], υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Άρα, σε κάθε περίπτωση, η C_f τέμνει τον $x'x$ σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, 2]$.

16. 60 **α.** Για τυχαίο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $|f(x) - f(x_0)| \leq \rho \cdot |x - x_0|$, $x \in (\alpha, \beta)$, άρα:

$$\lim_{x \to x_0} (-\rho|x - x_0|) \leq \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) \leq \lim_{x \to x_0} (\rho|x - x_0|),$$

- Είναι $\lim\limits_{x \to x_0} (\rho|x - x_0|) = 0$, οπότε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \text{ δηλαδή η f είναι συνεχής στο } x_0 \in (\alpha, \beta), \ (1).$$

- Ισχύει $\lim\limits_{x \to \alpha^+} (-\rho|x - \alpha|) \leq \lim\limits_{x \to \alpha^+} (f(x) - f(\alpha)) \leq \lim\limits_{x \to \alpha^+} (\rho|x - \alpha|)$ και επειδή $\lim\limits_{x \to \alpha^+} (\rho|x - \alpha|) = 0$, θα είναι $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$, (2).
- Ισχύει $\lim\limits_{x \to \beta^-} (-\rho|x - \beta|) = \lim\limits_{x \to \beta^-} (f(x) - f(\beta)) \leq \lim\limits_{x \to \beta^-} (\rho|x - \beta|)$ και επειδή $\lim\limits_{x \to \beta^-} (\rho|x - \beta|) = 0$, θα είναι $\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$, (3).

Από τις (1), (2), (3), προκύπτει ότι η f είναι συνεχής στο [α, β].

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = f(x) - x$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Η F είναι συνεχής στο [α, β] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων με $f([\alpha, \beta]) \subseteq [\alpha, \beta]$.

Άρα:

$$\alpha \leq f(x) \leq \beta \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

Έχουμε:

- $F(\alpha) = f(\alpha) - \alpha \geq 0$,
- $F(\beta) = f(\beta) - \beta \leq 0$.

Οπότε ισχύει $F(\alpha) \cdot F(\beta) \leq 0$.

- Αν $F(\alpha) = 0$ ή $F(\beta) = 0$, τότε $x_0 = \alpha$ ή $x_0 = \beta$ ρίζα της $F(x) = 0$.
- Αν $F(\alpha) \cdot F(\beta) < 0$, τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $F(x_0) = 0$.

Άρα, υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $F(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.

Δηλαδή, η C_f τέμνει την ευθεία $y = x$ σε σημείο με τετμημένη $x_0 \in [\alpha, \beta]$.

16. 61 Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^3 - 1} - \frac{5}{x} = 0$ έχει μοναδική λύση.

Είναι $D_f = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right)$, $D_g = \mathbb{R}^*$, οπότε $[1, 5] \subseteq D_f \cap D_g$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [1, 5]$.

Η F είναι συνεχής στο [1, 5] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και έχουμε:

- $F(1) = \sqrt{2 \cdot 1^3 - 1} - \frac{5}{1} = 1 - 5 = -4 < 0$,
- $F(5) = \sqrt{2 \cdot 5^3 - 1} - \frac{5}{5} = \sqrt{249} - 1 > 0$.

Οπότε ισχύει $F(1) \cdot F(5) < 0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 5)$ τέτοιο, ώστε $F(x_0) = 0$.

Επιπλέον $f \uparrow [1, 5]$ και $g \downarrow [1, 5]$, οπότε $-g \uparrow [1, 5]$ και συνεπώς $(f - g) \uparrow [1, 5]$.

Επομένως, το x_0 είναι μοναδική ρίζα της $F(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Άρα, οι C_f, C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, 5)$.

16. 62 Είναι $AB \,//\, x'x$, άρα $y_A = y_B \Rightarrow f(4) = f(2)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = f(x+2) - f(x+1)$, $x \in [1, 2]$.

Η F είναι συνεχής στο [1, 2] ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και έχουμε:

- $F(1) = f(3) - f(2)$,
- $F(2) = f(4) - f(3) = f(2) - f(3) = -\big(f(3) - f(2)\big)$.

Οπότε ισχύει $F(1) \cdot F(2) = -\big(f(3) - f(2)\big)^2 \leq 0$.

- Αν $F(1)=0$ ή $F(2)=0$, τότε $\xi=1$ ή $\xi=2$ προφανείς λύσεις.
- Αν $F(1)\cdot F(2)<0$, τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,\,2)$ τέτοιο, ώστε $F(\xi)=0$.

Άρα, υπάρχει $\xi\in[1,\,2]$ τέτοιο, ώστε $F(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi+2)=f(\xi+1)$.

16. 63 Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,\,+\infty)$, άρα έχει σύνολο τιμών το:

$$f\left((0,\,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\ \lim_{x\to0^+}f(x)\right)\Rightarrow(\kappa,\,\lambda)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\ \lim_{x\to0^+}f(x)\right),$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\kappa\ \text{ και }\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lambda>0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^{-3x}-x^3-x+3f(x),\ x\in(0,\,+\infty)$.

Η g είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^{-3x}-x^3-x+3f(x)\right)=1-0-0+3\lambda=1+3\lambda>0$, άρα υπάρχει $x_1>0$ κοντά στο 0 τέτοιο, ώστε $g(x_1)>0$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-3x}-x^3-x+3f(x)\right)\overset{0-\infty-\infty+3\kappa}{=\!=}-\infty$, άρα υπάρχει $x_2>0$ με $x_2>x_1$ τέτοιο, ώστε $g(x_2)<0$.

Οπότε ισχύει $g(x_1)\cdot g(x_2)<0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano για την g στο $[x_1,\,x_2]$ υπάρχει $x_0\in(x_1,\,x_2)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow e^{-3x_0}-x_0^3=x_0-3f(x_0)$.

Επιπλέον, η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1,\,x_2]$ (αποδεικνύεται με τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας)*. Άρα το x_0 είναι μοναδική ρίζα, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_0\in(x_1,\,x_2)\subseteq(0,\,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $e^{-3x_0}-x_0^3=x_0-3f(x_0)$.

....

* Έστω $x_1,\,x_2\in(0,\,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}-3x_1>-3x_2\Rightarrow e^{-3x_1}>e^{-3x_2}\\ -x_1^3>-x_2^3\\ -x_1>-x_2\\ f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow 3f(x_1)>3f(x_2)\end{cases}.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη:

$$e^{-3x_1}-x_1^3-x_1+3f(x_1)>e^{-3x_2}-x_2^3-x_2+3f(x_2)\Rightarrow g(x_1)>g(x_2).$$

Άρα $g\downarrow(0,\,+\infty)$.

16. 64 Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα $x_0\in(1, 3)$.

Ισχύει $\kappa f(1)+\lambda f(3)=0 \overset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} f(3)=-\frac{\kappa}{\lambda}\cdot f(1)$, άρα $f(1)\cdot f(3)=-\frac{\kappa}{\lambda}\cdot f^2(1)\leq 0$.

- Αν $f(1)=0$, τότε $f(3)=0$ που είναι άτοπο, διότι $f\uparrow[1, 3]$.
- Άρα $f(1)\neq 0$, οπότε ισχύει $f(1)\cdot f(3)<0$. Άρα, από το θεώρημα Bolzano για την f στο [1, 3] υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Επιπλέον, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 3]$. Άρα το x_0 είναι μοναδικό.

16. 65 Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επειδή $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$, οπότε τα $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ είναι ομόσημα. Άρα:

$$f(0)+f(1)+f(2)>0 \quad ή \quad f(0)+f(1)+f(2)<0.$$

Σε κάθε περίπτωση αυτό είναι άτοπο, άρα η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

16. 66 Η f είναι συνεχής στο [0, 4), άρα για κάθε $x\in[0, 4)$ ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Επιπλέον:

- $f(x)\neq 0$, $x\in[0, 7]$ και
- η f είναι συνεχής στα διαστήματα [0, 4) και (4, 7).

Συνεπώς, η f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα [0, 4), (4, 7].

Επομένως, για κάθε $x\in[0, 4)$ το $f(x_0)$ είναι ομόσημο του f(0) και συνεπώς ετερόσημο του f(7). Άρα, για κάθε $x_0\in[0, 4)$ ισχύει:

$$f(x_0)\cdot f(7)<0 \Rightarrow \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\cdot f(7)<0.$$

16. 67 **α.** Έχουμε $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=\frac{1}{2}$ ή $x=1$ όπου η f είναι συνεχής, άρα διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, -2)$, $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας.

x	$-\infty$ $\quad -2$	$\frac{1}{2}$		1 $\quad +\infty$
Διάστημα	$(-\infty, -2)$	$\left(-2, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$(1, +\infty)$
x_0	-3	0	$\frac{2}{3}$	2
$f(x_0)$	-28	2	$-\frac{8}{27}$	12
Πρόσημο f	$-$	$+$	$-$	$+$

β. Έχουμε $f(x)=0 \Leftrightarrow (x^2-4)(e^x-1)=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=2$ ή $x=0$ όπου η f είναι συνεχής, άρα διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, +\infty)$. Οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας.

x	$-\infty$ $\quad$ -2	0	2	$+\infty$
Διάστημα	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
x_0	-3	-1	1	3
$f(x_0)$	$5(e^{-3}-1)<0$	$3(1-e^{-1})>0$	$3(1-e)<0$	$5(e^3-1)>0$
Πρόσημο f	$-$	$+$	$-$	$+$

γ. Έχουμε $f(x)=0 \overset{x\in[0,\,2\pi]}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{4}$ ή $x=\frac{5\pi}{4}$ όπου η f είναι συνεχής, άρα διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$.

Οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας.

x	0 $\quad$ $\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	2π
Διάστημα	$\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$
x_0	0	π	2π
$f(x_0)$	$-1<0$	$1>0$	$-1<0$
Πρόσημο f	$-$	$+$	$-$

δ. Έχουμε $f(x)=0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\frac{-\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}, \kappa\in\mathbb{Z}$

διότι $x\in\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας.

x	$\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$
Διάστημα	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$
x_0	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x_0)$	$-3+\sqrt{3}<0$	$\sqrt{3}>0$
Πρόσημο f	$-$	$+$

16. 68 Η $f(x)=\left(2συνx+\sqrt{3}\right)(ημx+1)$ είναι συνεχής στο $[-π, π]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left(2συνx+\sqrt{3}\right)(ημx+1)=0 \Leftrightarrow \left(συνx=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή } ημx=-1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(συνx=συν\frac{5π}{6} \text{ ή } ημx=ημπ\right) \Leftrightarrow \left(x=2κπ\pm\frac{5π}{6} \text{ ή } x=2κπ\pm\frac{3π}{2}\right)$$

και επειδή $x\in[-π, π]$, βρίσκουμε:

$$x=-\frac{5π}{6} \text{ ή } x=\frac{5π}{6} \text{ ή } x=-\frac{π}{2}.$$

Η f είναι συνεχής και μη μηδενική στα διαστήματα:

$$\left[-π, -\frac{5π}{6}\right), \left(-\frac{5π}{6}, -\frac{π}{2}\right), \left(-\frac{π}{2}, \frac{5π}{6}\right), \left(\frac{5π}{6}, π\right],$$

άρα, διατηρεί πρόσημο σε καθένα από αυτά. Έχουμε:

- $-π\in\left[-π, -\frac{5π}{6}\right)$ με $f(-π)=-2+\sqrt{3}<0$, οπότε ισχύει $f(x)<0$, $x\in\left[-π, -\frac{5π}{6}\right)$,
- $-\frac{2π}{3}\in\left(-\frac{5π}{6}, -\frac{π}{2}\right)$ με $f\left(-\frac{2π}{3}\right)=\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2}>0$, οπότε ισχύει

  $f(x)>0$, $x\in\left(-\frac{5π}{6}, -\frac{π}{2}\right)$,
- $0\in\left(-\frac{π}{2}, \frac{5π}{6}\right)$ με $f(0)=2+\sqrt{3}>0$, οπότε ισχύει $f(x)>0$, $x\in\left(-\frac{π}{2}, \frac{5π}{6}\right)$,
- $π\in\left(\frac{5π}{6}, π\right]$ με $f(π)=\sqrt{3}-2<0$, οπότε ισχύει $f(x)<0$, $x\in\left(\frac{5π}{6}, π\right]$.

Άρα:

$$f(x)>0,\ x\in\left(-\frac{5π}{6}, -\frac{π}{2}\right)\cup\left(-\frac{π}{2}, \frac{5π}{6}\right) \text{ και } f(x)<0,\ x\in\left[-π, -\frac{5π}{6}\right)\cup\left(\frac{5π}{6}, π\right].$$

16. 69 **α.** Είναι $f^2(x)-2xf(x)=1-2x^2$, $x\in[-1, 1]$, (1), άρα:

$$f^2(x)-2xf(x)+x^2=1-x^2 \Leftrightarrow \left(f(x)-x\right)^2=1-x^2,\ x\in[-1, 1],\ (2).$$

i. Έχουμε $f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0 \Leftrightarrow \left(f(x)-x\right)^2=0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm1$.

ii. Η g είναι συνεχής στο $(-1, 1)$ και ισχύει $g(x)=f(x)-x\neq0$, $x\in(-1, 1)$, άρα, διατηρεί πρόσημο στο $(-1, 1)$.

iii. Από τη (2) προκύπτει ότι $g(x)=f(x)-x\neq0$, $x\in(-1, 1)$, οπότε $|g(x)|=\sqrt{1-x^2}$.

Άρα, από ερώτημα ii έχουμε:

$$g(x)=+\sqrt{1-x^2} \text{ για κάθε } x\in(-1,1) \text{ ή } g(x)=-\sqrt{1-x^2} \text{ για κάθε } x\in(-1,1).$$

Επιπλέον, ισχύει $g(-1)=g(1)=0$, άρα:

- $g(x)=\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,1]$ ή
- $g(x)=-\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow f(x)=x-\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,1]$.

β. Η δοθείσα $f^2(x)+4f(x)+2x=x^2-3,\ x\in\mathbb{R}$, γράφεται ισοδύναμα:

$$(f(x)+2)^2=(x-1)^2,\ x\in\mathbb{R},\ (3).$$

Αν $g(x)=f(x)+2$, τότε έχουμε $g(x)=0\Leftrightarrow g^2(x)=0\overset{(3)}{\Leftrightarrow}(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$.

Άρα $g(x)\neq 0$ για $x\in(-\infty,1)$ και για $x\in(1,+\infty)$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$, $(1,+\infty)$.

Η (3) γίνεται $g^2(x)=(x-1)^2\Leftrightarrow|g(x)|=|x-1|,\ x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε τις ακόλουθες 4 περιπτώσεις για την $g(x)=f(x)+2$.

- $g(x)=\begin{cases}+|x-1|, & x<1\\ +|x-1|, & x\geq 1\end{cases}=\begin{cases}-x+1, & x<1\\ x-1, & x\geq 1\end{cases}$, άρα $f(x)=\begin{cases}-x-1, & x<1\\ x-3, & x\geq 1\end{cases}$,
- $g(x)=\begin{cases}+|x-1|, & x<1\\ -|x-1|, & x\geq 1\end{cases}=\begin{cases}-x+1, & x<1\\ -x+1, & x\geq 1\end{cases}$, άρα $f(x)=-x-1,\ x\in\mathbb{R}$.
- $g(x)=\begin{cases}-|x-1|, & x<1\\ +|x-1|, & x\geq 1\end{cases}=\begin{cases}x-1, & x<1\\ x-1, & x\geq 1\end{cases}$, άρα $f(x)=x-3,\ x\in\mathbb{R}$.
- $g(x)=\begin{cases}-|x-1|, & x<1\\ -|x-1|, & x\geq 1\end{cases}=\begin{cases}x-1, & x<1\\ -x+1, & x\geq 1\end{cases}$, άρα $f(x)=\begin{cases}x-3, & x<1\\ -x-1, & x\geq 1\end{cases}$.

16. 70 Ισχύει $|f(x)|=g^2(x)-2g(x)+3=(g(x)-1)^2+2>0$, οπότε $f(x)\neq 0,\ x\in\Delta$.

Επειδή η f είναι συνεχής, θα διατηρεί πρόσημο στο Δ. Άρα:

$$f(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\Delta \text{ ή } f(x)<0 \text{ για κάθε } x\in\Delta,$$

οπότε:

$$|f(x)|=f(x) \text{ για κάθε } x\in\Delta \text{ ή } |f(x)|=-f(x) \text{ για κάθε } x\in\Delta.$$

Τότε έχουμε:

$$g^2(x)-2g(x)+3=f(x),\ x\in\Delta \text{ ή } g^2(x)-2g(x)+3=-f(x),\ x\in\Delta.$$

Άρα:

$$f(x)=g^2(x)-2g(x)+3 \text{ για κάθε } x\in\Delta \text{ ή } f(x)=-g^2(x)+2g(x)-3 \text{ για κάθε } x\in\Delta.$$

16. 71 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $2g^2(x)+g(x)+1>0$ (αφού ως τριώνυμο του g(x) έχει διακρίνουσα ίση με $-7<0$).

Συνεπώς $|f(x)| \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή επιπλέον η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα διατηρεί πρόσημο. Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x)=2g^2(x)+g(x)+1 \quad ή \quad f(x)=-\left(2g^2(x)+g(x)+1\right).$$

Δηλαδή, οι πιθανοί τύποι της f είναι:

$$f(x)=2g^2(x)+g(x)+1,\ x \in \mathbb{R} \quad ή \quad f(x)=-2g^2(x)-g(x)-1,\ x \in \mathbb{R}.$$

16. 72 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x)=(x-2)^2 \Leftrightarrow |f(x)|=|x-2|$.

Είναι $|x-2|=0 \Leftrightarrow x=2$, συνεπώς $f(x) \neq 0$ στο $(-\infty, 2)$ και στο $(2, +\infty)$, οπότε διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

Άρα:

- $f(x)=\begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ x-2, & x<2 \end{cases} = x-2,\ x \in \mathbb{R}$ ή
- $f(x)=\begin{cases} x-2 & , x \geq 2 \\ -(x-2), & x<2 \end{cases} = \begin{cases} x-2 & , x \geq 2 \\ -x+2, & x<2 \end{cases}$ ή
- $f(x)=\begin{cases} -(x-2), & x \geq 2 \\ x-2 & , x<2 \end{cases} = \begin{cases} -x+2, & x \geq 2 \\ x-2 & , x<2 \end{cases}$ ή
- $f(x)=\begin{cases} -(x-2), & x \geq 2 \\ -(x-2), & x<2 \end{cases} = -x+2,\ x \in \mathbb{R}.$

16. 73 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$e^{-2x} \cdot f^2(x)-2e^{-x} \cdot f(x)=e^{-2x} \cdot \left(x^2+2\right)-1 \overset{\cdot e^{2x}}{\Leftrightarrow} f^2(x)-2e^x \cdot f(x)=1 \cdot \left(x^2+2\right)-e^{2x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f^2(x)-2e^x \cdot f(x)+e^{2x}=x^2+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(f(x)-e^x\right)^2=x^2+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|f(x)-e^x\right|=\sqrt{x^2+2},\ (1).$$

Αν $g(x)=f(x)-e^x$ συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, τότε:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow g^2(x)=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \sqrt{x^2+2}=0 \text{ που είναι αδύνατη στο } \mathbb{R}.$$

Άρα $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η g διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Είναι $g(0)=f(0)-1=1+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}>0$, συνεπώς $g(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τότε από την (1) έχουμε:

$$g(x)=\sqrt{x^2+2} \Rightarrow f(x)=e^x+\sqrt{x^2+2},\ x\in\mathbb{R}.$$

16. 74 Για κάθε $x>2$ έχουμε:

$$\left(f(x)+1\right)^2=\left(x+1-\frac{2}{x-1}\right)^2=\left(\frac{(x+1)(x-1)-2}{x-1}\right)^2=\left(\frac{x^2-3}{x-1}\right)^2,\ (1).$$

Είναι $x>2\Rightarrow x^2>4\Rightarrow x^2-3>1>0$ και $x>2\Rightarrow x-1>1>0$, άρα:

$$\frac{x^2-3}{x-1}>0 \text{ για κάθε } x\in(2,+\infty).$$

Αν $g(x)=f(x)+1$ συνεχής συνάρτηση, τότε από την (1) προκύπτει ότι:

$$g(x)=f(x)+1\neq 0 \text{ για κάθε } x>2.$$

Άρα η g διατηρεί πρόσημο, δηλαδή:

$$\left(f(x)+1\right)^2=\left(\frac{x^2-3}{x-1}\right)^2 \Leftrightarrow \left|f(x)+1\right|=\left|\frac{x^2-3}{x-1}\right|=\frac{x^2-3}{x-1}>0 \text{ για κάθε } x\in(2,+\infty).$$

Είναι $g(3)=f(3)+1=3>0$, συνεπώς θα ισχύει $g(x)=f(x)+1>0$ για κάθε $x\in(2,+\infty)$.
Άρα:

$$f(x)+1=\frac{x^2-3}{x-1}\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2-3}{x-1}-1 \text{ για κάθε } x>2.$$

16. 75 Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,5]$, άρα λαμβάνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M. Δηλαδή:

$$m\leq f(x)\leq M \text{ για κάθε } x\in[-1,5],\ (1).$$

Από την (1) για $x=-1, 1, 4$ έχουμε διαδοχικά:

$$\left.\begin{array}{l} m\leq f(-1)\leq M\Leftrightarrow 2m\leq 2f(-1)\leq 2M \\ m\leq f(1)\leq M \\ m\leq f(4)\leq M\Leftrightarrow 3m\leq 3f(4)\leq 3M \end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 6m\leq 2f(-1)+f(1)+3f(4)\leq 6M\Rightarrow m\leq\frac{2f(-1)+f(1)+3f(4)}{6}\leq M.$$

Αν $m=M$, τότε η f είναι σταθερή που είναι άτοπο από υπόθεση.
Άρα $m<M$ και $f([-1,5])=[m,M]$.
Συνεπώς, υπάρχει $x_0\in[-1,5]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0)=\frac{2f(-1)+f(1)+3f(4)}{6}\Leftrightarrow 6f(x_0)=2f(-1)+f(1)+3f(4).$$

Επιπλέον, η f είναι γνησίως μονότονη, συνεπώς είναι και 1 – 1. Άρα το x_0 είναι μοναδικό.

16. 76 Η f είναι συνεχής στο [0, 10], άρα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Δηλαδή υπάρχουν m, M τέτοια, ώστε:

$$m \le f(x) \le M \text{ για κάθε } x \in [0, 10], \ (1).$$

Από την (1) για x = 2, 3, 5 έχουμε διαδοχικά:

$$\left.\begin{array}{l} m \le f(2) \le M \Leftrightarrow 2m \le 2f(2) \le 2M \\ m \le f(3) \le M \Leftrightarrow 3m \le 3f(3) \le 3M \\ m \le f(5) \le M \Leftrightarrow 5m \le 5f(5) \le 5M \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 10m \le 2f(2) + 3f(3) + 5f(5) \le 10M \Rightarrow m \le \frac{2f(2)+3f(3)+5f(5)}{10} \le M.,$$

Άρα, υπάρχει $x_0 \in [0, 10]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \dfrac{2f(2)+3f(3)+5f(5)}{10}$.

16. 77 Η f είναι συνεχής στο [α, β], άρα λαμβάνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M. Δηλαδή:

$$m \le f(x) \le M \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta], \ \ (1).$$

Από την (1) για $x = \alpha, \ \dfrac{\alpha+\beta}{2}, \ \beta$ έχουμε διαδοχικά:

$$\left.\begin{array}{l} m \le f(\alpha) \le M \Leftrightarrow \kappa m \le \kappa f(\alpha) \le \kappa M \\ m \le f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \le M \Leftrightarrow \lambda m \le \lambda f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \le \lambda M \\ m \le f(\beta) \le M \Leftrightarrow \nu m \le \nu f(\beta) \le \nu M \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (\kappa+\lambda+\nu) \cdot m = \kappa f(\alpha) + \lambda f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \nu f(\beta) \le (\kappa+\lambda+\nu) \cdot M \ \text{ ή}$$

$$m \le \frac{\kappa f(\alpha) + \lambda f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) + \nu f(\beta)}{\kappa+\lambda+\nu} \le M.$$

- Αν m = M, τότε η f είναι σταθερή, άρα για κάθε $\theta \in [\alpha, \beta]$ ισχύει:

$$f(\theta) = m = M = \frac{\kappa f(\alpha) + \lambda f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) + \nu f(\beta)}{\kappa+\lambda+\nu} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\kappa+\lambda+\nu) \cdot f(\theta) = \kappa f(\alpha) + \lambda f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \nu f(\beta).$$

- Αν m < M, τότε $f([\alpha, \beta]) = [m, M]$, άρα υπάρχει $\theta \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\theta) = m\frac{\kappa f(\alpha) + \lambda f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) + \nu f(\beta)}{\kappa+\lambda+\nu} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\kappa + \lambda + \nu) \cdot f(\theta) = \kappa f(\alpha) + \lambda f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \nu f(\beta).$$

16. 78 Ισχύει:

$$f^2(x) - (\alpha + \beta)f(x) + \alpha\beta = 0 \Leftrightarrow (f(x) - \alpha) \cdot (f(x) - \beta) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \alpha \text{ ή } f(x) = \beta.$$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = xf(x) - \alpha\beta,\ x \in [\alpha, \beta]$, η οποία είναι συνεχής με:

$$g(\alpha) = \alpha f(\alpha) - \alpha\beta = \alpha \cdot (f(\alpha) - \beta) \quad \text{και} \quad g(\beta) = \beta f(\beta) - \alpha\beta = \beta \cdot (f(\beta) - \alpha).$$

Το $f^2(x) - (\alpha + \beta)f(x) + \alpha\beta$ είναι τριώνυμο ως προς $f(x)$ με ρίζες α και β, άρα η ανίσωση της υπόθεσης ισχύει για $\alpha < f(x) < \boldsymbol{\beta}$. Τότε έχουμε:

$$f(\alpha) < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) - \beta < 0 \quad \text{και} \quad f(\beta) > \alpha \Leftrightarrow f(\beta) - \alpha > 0,$$

οπότε:

$$g(\alpha) \cdot g(\beta) = \alpha\beta \cdot (f(\alpha) - \beta) \cdot (f(\beta) - \alpha) < 0,$$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow xf(x) = \alpha\beta$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α, β).

16. 79 Η $f(x) = x^2 + \eta\mu^2\pi x + \sigma\upsilon\nu 3\pi x + 3,\ x \in [-2, 1]$, είναι συνεχής στο $[-2, 1]$ ως πράξεις και συνθέσεις συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε:

- $f(-2) = (-2)^2 + [\eta\mu(-2\pi)]^2 + \sigma\upsilon\nu(-6\pi) + 3 = 4 + 0^2 + 1 + 3 = 8$ και
- $f(1) = 1^2 + \eta\mu^2\pi + \sigma\upsilon\nu 3\pi + 3 = 1 + 0^2 + (-1) + 3 = 3.$

Επειδή $3 < 5 < 8 \Leftrightarrow f(1) < 5 < f(-2)$, από το Θ.Ε.Τ. υπάρχει $x_0 \in (-2, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 5$, δηλαδή η f λαμβάνει την τιμή 5.

16. 80 Η $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - \eta\mu(\pi x) + 3,\ x \in [-2, 2]$, είναι συνεχής ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε:

- $f(-2) = \dfrac{(-2)^3}{4} - \eta\mu(-2\pi) + 3 = -2 - 0 + 3 = 1$ και
- $f(2) = \dfrac{2^3}{4} - \eta\mu 2\pi + 3 = 2 - 0 + 3 = 5.$

Επειδή $1 < \dfrac{7}{3} < 5 \Leftrightarrow f(-2) < \dfrac{7}{3} < f(2)$, από το Θ.Ε.Τ. για την f στο $[-2, 2]$ υπάρχει $x_0 \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \dfrac{7}{3}$, δηλαδή η f λαμβάνει την τιμή $\dfrac{7}{3}$.

16. 81 **α.** Η f είναι συνεχής στο $(1, 2e]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και έστω $x_1, x_2 \in (1, 2e]$, με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \ln(x_1 - 1) < \ln(x_2 - 1) \\ x_1 - 2 < x_2 - 2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \ln(x_1 - 1) + x_1 - 2 < \ln(x_2 - 1) + x_2 - 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

οπότε $f \uparrow (1,\ 2e]$. Συνεπώς:

$$f\left((1,\ 2e]\right) = \left(\lim_{x \to 1^+} f(x),\ f(2e)\right] = \left(-\infty,\ \ln(2e-1) + 2e - 2\right],$$

διότι:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left[\ln(x-1) + x - 2\right] \overset{(-\infty)-1}{=\!=} -\infty \quad \text{και} \quad f(2e) = \ln(2e-1) + 2e - 2.$$

β. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και έστω $x_1,\ x_2 \in \left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$, με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \text{συν}x_1 > \text{συν}x_2 \Rightarrow 2\text{συν}x_1 + 1 > 2\text{συν}x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Επειδή συνx $\downarrow$ [0, π] και $\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right] \subseteq [0,\ \pi]$, θα είναι:

$$f\left(\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]\right) = \left[f\left(\frac{\pi}{3}\right),\ f(0)\right] = [2,\ 3].$$

16. 82 Η $f(x) = 3x^{2019} + 4x^{400} - 5x^{300} + 8x - 7,\ x \in \mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = y_0$. Έστω τυχαίο $y_0 \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = f(x) - y_0,\ x \in \mathbb{R}$.

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(3x^{2019}\right) = -\infty$,

  άρα υπάρχει $x_1 < -M$ για κάποιο $M > 0$ τέτοιο, ώστε $g(x_1) < 0$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(3x^{2019}\right) = +\infty$,

  άρα υπάρχει $x_2 > N$ για κάποιο $N > 0$ τέτοιο, ώστε $g(x_2) > 0$.

Οπότε ισχύει $g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$,

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1,\ x_2) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = y_0.$$

Άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

16. 83 Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x_0 \in \Delta$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = y_0$.

Έστω τυχαίο $y_0 \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = f(x) - y_0$, $x \in \Delta$.

Η g είναι συνεχής στο Δ και έχουμε:

$$\lim_{x\to\alpha^+} g(x) = \lim_{x\to\alpha^+}\left(f(x) - y_0\right) = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) \quad \text{και ομοίως} \quad \lim_{x\to\beta^-} g(x) = \lim_{x\to\beta^-} f(x).$$

- Όταν $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = +\infty$, τότε είναι $\lim\limits_{x\to\alpha^+} g(x) = -\infty$ και

  $\lim\limits_{x\to\beta^-} g(x) = +\infty$, άρα υπάρχουν:

  - x_1 κοντά στο α με $x_1 > \alpha$ τέτοιο, ώστε $g(x_1) < 0$ και
  - x_2 αρκούντως κοντά στο β τέτοιο, ώστε $x_1 < x_2 < \beta$ και $g(x_2) > 0$.

  Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano για την g στο $[x_1, x_2]$ υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq \Delta$ τέτοιο, ώστε:

  $$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = y_0.$$

- Ομοίως εργαζόμαστε, όταν $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = -\infty$.

Άρα, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει $x_0 \in \Delta$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = y_0$ για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}$, οπότε $f(\Delta) = \mathbb{R}$.

16. 84 Είναι $D_f = [-1, 3]$ και $f([-1, 3]) \subseteq [1, 5]$, διότι:

$$1 \le f(x) \le 5 \text{ για κάθε } x \in [-1, 3], \quad (1).$$

Οι κορυφές του τετραγώνου έχουν συντεταγμένες:

$$A(-1, 1),\ B(3, 1),\ \Gamma(3, 5) \text{ και } \Delta(-1, 5).$$

α. Η διαγώνιος ΑΓ έχει εξίσωση:

$$\delta_1:\ y - 1 = \frac{5-1}{3-(-1)} \cdot \left[x - (-1)\right] \text{ ή } \delta_1:\ y = x + 2,\ x \in [-1, 3]$$

και η διαγώνιος ΒΔ έχει εξίσωση:

$$\delta_2:\ y - 5 = \frac{1-5}{3-(-1)} \cdot \left[x - (-1)\right] \text{ ή } \delta_2:\ y = -x + 4,\ x \in [-1, 3].$$

β. Για να αποδείξουμε ότι η C_f τέμνει την ΑΓ, αρκεί να αποδείξουμε ότι η $f(x) = x + 2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο [–1, 3].

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x - 2$, $x \in [-1, 3]$, η οποία είναι συνεχής.

- Από την (1) για $x = -1$ έχουμε $g(-1) = f(-1) - 1 \ge 0$.
- Από την (1) για $x = 3$ έχουμε $g(3) = f(3) - 5 \le 0$.

Οπότε ισχύει $g(-1) \cdot g(3) \le 0$.

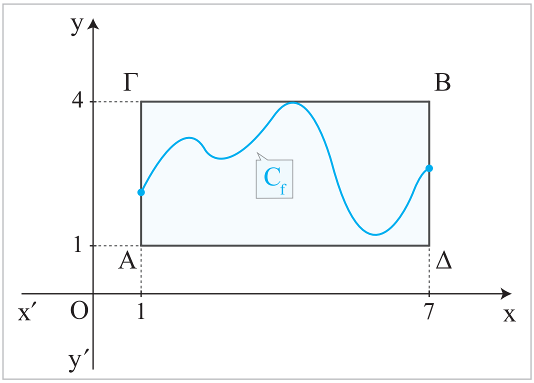
- Αν $g(-1)=0$ και $g(3)=0$, τότε $f(-1)=1$ ή $f(3)=5$.
  Συνεπώς, Α ή Γ είναι το κοινό σημείο των C_f και ΑΓ.
- Αν $g(-1)\cdot g(3)<0$, τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(-1,3)$ τέτοιο, ώστε:
  $$g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0+2,$$
  Συνεπώς, η C_f τέμνει την ΑΓ στο (x_0, x_0+2).

Ομοίως, βρίσκουμε ότι η C_f τέμνει και τη ΒΔ με τη βοήθεια της συνάρτησης
$$h(x)=f(x)-(-x+4)=f(x)+x-4,\ x\in[-1,3].$$

16. 85 **α.** Με τη βοήθεια του σχήματος έχουμε:
$$(MN)=d(x)=f(x)-g(x)=e^x-\sqrt{x-1},\ x\in[1,4].$$

β. Η d είναι συνεχής στο [1, 4] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Άρα, από το Θ.Μ.Ε.Τ. η d έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή, οπότε υπάρχει σημείο της C_f με ελάχιστη και σημείο της C_f με μέγιστη κατακόρυφη απόσταση από την C_g.

16. 86 Από υπόθεση για την f έχουμε $1\le f(x)\le 4$ για κάθε $x\in[1,7]$, (1). Οι κορυφές Γ και Δ του ορθογωνίου έχουν συντεταγμένες Γ(1, 4), Δ(7, 1).



α. Το ορθογώνιο ΑΓΒΔ έχει διαγωνίους (δ_1), (δ_2) με εξισώσεις:
$$AB \text{ ή } \delta_1:\ y-1=\frac{4-1}{7-1}\cdot(x-1) \text{ ή } \delta_1:\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$
$$ΓΔ \text{ ή } \delta_2\ y-4=\frac{1-4}{7-1}\cdot(x-1) \text{ ή } \delta_2:\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}.$$

Για να αποδείξουμε ότι η C_f τέμνει την ΑΒ, αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο [1, 7].

Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ η οποία είναι συνεχής στο [1, 7].

- Από την (1) για x = 1 έχουμε $g(1)=f(1)-1\geq 0$,
- Από την (1) για x = 7 έχουμε $g(7)=f(7)-4\leq 0$.

Οπότε ισχύει $g(1)\cdot g(7)\leq 0$.

- ◦ Αν $g(1)\cdot g(7)=0$, τότε $x=1$ ή $x=7$ ρίζα της g.

  Συνεπώς, το Α(1, 1) ή το Β(7, 4) είναι κοινό σημείο των C_f και ΑΒ.
- ◦ Αν $g(1)\cdot g(7)<0$, τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,\,7)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{2}.$$

  Συνεπώς, το $(x_0,\,f(x_0))$ κοινό σημείο των C_f και ΑΒ.

Άρα, σε κάθε περίπτωση, C_f και ΑΒ έχουν κοινό σημείο.

Ομοίως, βρίσκουμε ότι η C_f τέμνει και τη ΓΔ, με τη βοήθεια της συνάρτησης:

$$h(x)=f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}\right)=f(x)+\frac{1}{2}x-\frac{9}{2},\ \ x\in[1,\,7].$$

β. Για x > 0 έχουμε:

$$\left|\frac{f\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot|\eta\mu x|}{x^2+3x-1}\right|\leq\left|\frac{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^2+3x-1}\right|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -f\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{x^2+3x-1}\leq\frac{f\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot|\eta\mu x|}{x^2+3x-1}\leq f\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{x^2+3x-1}.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(\frac{1}{x^2}\right)\overset{u=\frac{1}{x^2}}{=\!=}\lim\limits_{u\to0}f(u)\overset{f:\,\text{συνεχής}}{=\!=}f(0)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+3x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$,

έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{x^2+3x-1}\right]=f(0)\cdot0=0$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-f\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{x^2+3x-1}\right]=0$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot|\eta\mu x|}{x^2+3x-1}=0.$$

16. 87 Έστω $f(t)$ και $g(t)$ οι αποστάσεις του λεωφορείου από το Ηράκλειο ως προς t, την 1η και τη 2η μέρα αντίστοιχα με $t\in[7,11]$.

Αν α είναι η απόσταση Ηρακλείου - Χανίων, τότε:

$$f(7)=0,\ f(11)=\alpha \ \text{ και } \ g(7)=\alpha,\ \ g(11)=0.$$

Έστω η συνάρτηση $h(t)=f(t)-g(t),\ t\in[7,11]$, η οποία είναι συνεχής. Έχουμε:

- $h(7)=f(7)-g(7)=-\alpha<0,$
- $h(11)=f(11)-g(11)=\alpha>0.$

Οπότε ισχύει $h(7)\cdot h(11)<0.$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει χρονική στιγμή $t_0\in(7,11)$ τέτοια, ώστε:

$$h(t_0)=0\Leftrightarrow f(t_0)-g(t_0).$$

Άρα, υπάρχει σημείο της διαδρομής όπου το λεωφορείο φτάνει την ίδια χρονική στιγμή t_0 και στις δύο διαδρομές.

11ο

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα A

A1. Θεωρία.

A2. **α.** συνεχής, για κάθε $x \in \Delta$, διατηρεί πρόσημο.

β. συνεχής, ελάχιστη, μέγιστη.

γ. συνεχής, γνησίως αύξουσα, $\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x)$.

A3. **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος.

Θέμα B

B1. Η δοθείσα γράφεται ισοδύναμα:

$$f^2(x) + 6x \cdot f(x) + 9x^2 = x^4 - 5x^2 + 4 + 9x^2 \Leftrightarrow (f(x) + 3x)^2 = x^4 + 4x^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow g^2(x) = (x^2 + 2)^2 \Leftrightarrow |g(x)| = |x^2 + 2|, \ (1).$$

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$. Τότε έχουμε:

$$g(x_0) = 0 \Rightarrow |g(x_0)| = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} |x_0^2 + 2| = 0 \Rightarrow x_0^2 = -2$$

που είναι άτοπο. Άρα $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η g διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

B2. Από τη (1) έχουμε:

- $g(x) = x^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f(x) = x^2 - 3x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή
- $g(x) = -(x^2 + 2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f(x) = -x^2 - 3x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B3. **α.** Επειδή $f(1) = -6$, από το Β2 προκύπτει ότι $f(x) = -x^2 - 3x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Για την f ισχύει $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) = 0$ και το πρόσημό της παρουσιάζεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{3x+1}{f(x)}\overset{(-2)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to -1^+}\frac{3x+1}{f(x)}\overset{(-2)\cdot(-\infty)}{=\!=}+\infty.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

Θέμα Γ

Γ1. Το κυλινδρικό δοχείο αποτελείται από δύο κύκλους ακτίνας R, εμβαδού πR^2 και μήκους $2\pi R$ ο καθένας, και ένα ορθογώνιο με διαστάσεις h και $2\pi R$. Άρα, το συνολικό εμβαδόν του δοχείου θα είναι:

$$S = 2\cdot(\pi R^2) + h\cdot 2\pi R.$$

Ο όγκος του του δοχείου είναι:

$$V = 250 \Rightarrow \pi\cdot R^2\cdot h = 250 \Rightarrow h = \frac{250}{\pi\cdot R^2},$$

με:

$$h>10 \Rightarrow \frac{250}{\pi\cdot R^2}>10 \Rightarrow \frac{\pi\cdot R^2}{25}<1 \Rightarrow R^2<\frac{25}{\pi} \Rightarrow R<\frac{5}{\sqrt{\pi}} \quad \text{και} \quad R>0.$$

Άρα:

$$S(R) = 2\pi R^2+\frac{250}{\pi R^2}\cdot 2\pi R \Leftrightarrow S(R)=2\pi R^2+\frac{500}{R}, \text{ με } 0<R<\frac{5}{\sqrt{\pi}}.$$

Γ2. α. Η S είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{5}{\sqrt{\pi}}\right)$ ως ρητή συνάρτηση και από την εκφώνηση προκύπτει ότι είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα, το σύνολο τιμών της είναι:

$$S\left(\left(0, \frac{5}{\sqrt{\pi}}\right)\right)=\left(\lim_{R\to \frac{5}{\sqrt{\pi}}^-}S(R),\ \lim_{R\to 0^+}S(R)\right)=\left(50+100\sqrt{\pi},\ +\infty\right),$$

διότι:

$$\lim_{R\to \frac{5}{\sqrt{\pi}}^-}S(R)=2\cdot\pi\cdot\frac{25}{\pi}+\frac{500}{\frac{5}{\sqrt{\pi}}}=50+100\sqrt{\pi} \quad \text{και}$$

$$\lim_{R\to 0^+}S(R)=\lim_{R\to 0^+}\left(2\pi R^2+\frac{500}{R}\right)=+\infty.$$

β. Αρκεί να ισχύει $450\cdot\sqrt[4]{\pi}>50+100\sqrt{\pi}$. Έχουμε:

$$450\cdot\sqrt[4]{\pi}>50+100\sqrt{\pi} \Leftrightarrow \left(450\cdot\sqrt[4]{\pi}\right)^2>\left(50+100\sqrt{\pi}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 202\cdot 500\sqrt{\pi}>2500+10000\sqrt{\pi}+10000\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2500-102500\sqrt{\pi}+10000\pi<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25-\sqrt{\pi}\left(1025-100\sqrt{\pi}\right)<0 \text{ που αληθεύει.}$$

Άρα, υπάρχει $R_0 \in \left(0, \frac{5}{\sqrt{\pi}}\right)$ τέτοιο, ώστε $S(R_0)=450\sqrt[4]{\pi}$.

Θέμα Δ

Δ1. Έστω $M(x, f(x))$ σημείο της C_f με $x \in (-1, 1)$. Τότε έχουμε:

$$A\hat{M}B=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow AM \perp MB \Leftrightarrow \lambda_{AM} \cdot \lambda_{BM}=-1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x+1} \cdot \frac{f(x)}{x-1}=-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)=1-x^2 \text{ για κάθε } x \in (-1, 1), \ (1).$$

Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$ και η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$.

Άρα, η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-1, 1)$.

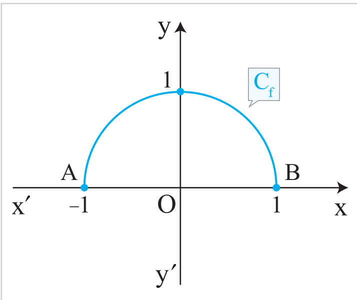
Δ2. Από το Δ1 και την (1) έχουμε:

$$f(x)=\sqrt{1-x^2} \text{ για κάθε } x \in [-1, 1] \ \text{ ή } \ f(x)=-\sqrt{1-x^2} \text{ για κάθε } x \in [-1, 1].$$

Επειδή $f(0)=0$, θα είναι:

$$f(x)=\sqrt{1-x^2} \text{ για κάθε } x \in [-1, 1].$$

Η C_f είναι ημικύκλιο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας $\rho = 1$, στο 1ο και 2ο τεταρτημόριο των αξόνων.



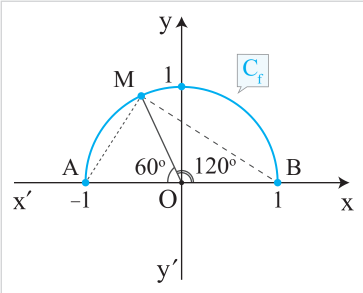
Δ3. Αν $AM = 1$, τότε $AM = \rho$, οπότε το τρίγωνο AOM είναι ισόπλευρο πλευράς $\rho = 1$.

Το εμβαδόν του τριγώνου AOM είναι:

$$(AOM)=\frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ τ.μ.}$$

Επιπλέον, ισχύει:

$$A\hat{O}M=60^{\circ} \Rightarrow M\hat{O}B=120^{\circ}.$$



Άρα, το εμβαδόν του τριγώνου ΜΟΒ είναι:

$$(\text{MOB})=\frac{1}{2}\cdot \text{OB}\cdot \text{OM}\cdot \etaμ120^{o}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\ \text{τ. μ.}$$

Επομένως $(\text{MOB})=(\text{AOM})$.

Δ4. Έστω $M(x, f(x)),\ x\in[-1, 1]$ ένα σημείο της C_f.

Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ορθογώνιο στο Μ, άρα το εμβαδόν του είναι:

$$E(x)=\frac{1}{2}\cdot \text{AM}\cdot \text{BM}=\frac{1}{2}\cdot \sqrt{(x+1)^2+f^2(x)}\cdot \sqrt{(x-1)^2+f^2(x)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot \sqrt{x^2+2x+1+\sqrt{1-x^2}^{\,2}}\cdot \sqrt{x^2-2x+1+\sqrt{1-x^2}^{\,2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot \sqrt{2(x+1)}\cdot \sqrt{2(1-x)}=\frac{1}{2}\cdot \sqrt{4\cdot (1-x)^2}=$$

$$=\sqrt{1-x^2}=f(x).$$

Η f έχει μέγιστη τιμή 1 για $x=0$, διότι η C_f είναι ημικύκλιο.

Άρα, ισχύει $0\le f(x)\le 1$ για κάθε $x\in[-1, 1]$.

Είναι $1<\frac{\sqrt{5}}{2}$, οπότε $E(x)=f(x)\le 1<\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Επομένως, δεν υπάρχει σημείο Μ της C_f τέτοιο, ώστε $E(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

12ο

Κριτηριο Αξιολογησης

Θέμα A

A1. Θεωρία.

A2. **α.** $f(\Delta)$, συνεχούς και μη σταθερής, διάστημα.

β. συνεχούς, διατηρεί, διαστήματα.

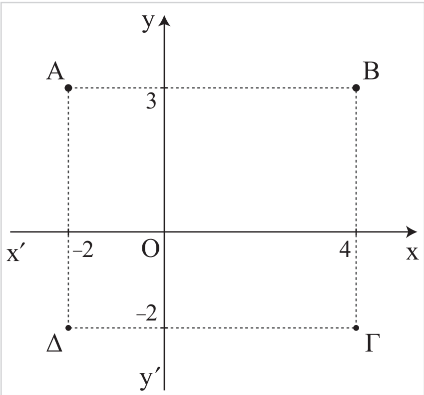
γ. συνεχής, δεν λαμβάνει υποχρεωτικά.

A3. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό.

Θέμα B

B1. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι:

$$-2 \le f(x) \le 3 \text{ για κάθε } x \in [-2, 4], \ (1).$$



Η εξίσωση της ΑΓ είναι:

$$\mathrm{A\Gamma}: y - 3 = \frac{3-(-2)}{-2-4} \cdot [x-(-2)] \Rightarrow \mathrm{A\Gamma}: y = -\frac{5}{6}x + \frac{4}{3}.$$

Η εξίσωση της ΔΒ είναι:

$$\Delta\mathrm{B}: y-(-2) = \frac{3-(-2)}{4-(-2)} \cdot [x-(-2)] \Rightarrow \Delta\mathrm{B}: y = \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}.$$

Β2. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [-2, 4]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \frac{5}{6}x_0 - \frac{1}{3}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}$, $x \in [-2, 4]$.

Η g είναι συνεχής στο [–2, 4] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

- ◦ Από την (1) για $x = -2$ προκύπτει ότι $g(-2) = f(-2) + 2 \geq 0$.
- ◦ Από την (1) για $x = 3$ προκύπτει ότι $g(4) = f(4) - 3 \leq 0$.

Οπότε ισχύει $g(-2) \cdot g(4) \leq 0$.

- Αν $g(-2) = 0$ ή $g(4) = 0$, τότε η λύση είναι προφανής.
- Αν $g(-2) \cdot g(4) < 0$, τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-2, 4)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$.

Άρα, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει $x_0 \in [-2, 4]$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$.

Β3. Η συνάρτηση $h(x) = f(e^x)$ ορίζεται για:

$$x \in A = \{x \in \mathbb{R} / e^x \in [-2, 3]\} \Leftrightarrow x \in A = (-\infty, \ln 3).$$

Θέτοντας όπου x το e^x στην (1) έχουμε:

$$-2 \leq f(e^x) \leq 3 \overset{x<0}{\Rightarrow} \frac{-2}{x} \geq \frac{f(e^x)}{x} \geq \frac{3}{x}.$$

Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{x} = 0$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{x} = 0$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(e^x)}{x} = 0$.

Θέμα Γ

Γ1. Ισχύουν:

- ◦ $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και
- ◦ $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $-|x| \leq \eta\mu x \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τότε έχουμε:

- $\eta\mu\alpha \leq \alpha < 2\alpha \Rightarrow \eta\mu\alpha - 2\alpha < 0 \Rightarrow f(\beta) < 0$,
- $\eta\mu\beta < \beta < 2\beta \Rightarrow 2\beta - \eta\mu\beta > 0 \Rightarrow f(\alpha) > 0$.

Η f είναι γνησίως μονότονη και ισχύει $\alpha < \beta \Rightarrow f(\beta) < 0 < f(\alpha)$.

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Γ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x,\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]\subseteq\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

- Από το Γ1 προκύπτει ότι ημα < 2α < 3α, άρα g(α) = f(α) – α = ημα – 3α < 0.
- Από το Γ1 προκύπτει ότι ημβ < β, άρα g(β) = f(β) – β = –ημβ + β > 0.

Οπότε ισχύει g(α) · g(β) < 0. Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$.

Επιπλέον, αν $x_1,\ x_2\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2$, τότε έχουμε:

$$x_1<x_2\overset{(\Gamma_1)}{\Rightarrow}\begin{cases}f(x_1)>f(x_2)\\ -x_1>-x_2\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}f(x_1)-x_1>f(x_2)-x_2\Rightarrow g(x_1)>g(x_2).$$

Άρα, η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε είναι και $1-1$. Επομένως, το x_0 είναι μοναδικό.

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα, άρα:

$$f\left(\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right),\ f(0)\right],$$

δηλαδή για κάθε $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\le f(x)\le f(0),\ (1)$.

Από την (1) για $x=0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}$ έχουμε διαδοχικά:

$$\left.\begin{array}{l}f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(0)\le f(0)\\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f\left(\frac{\pi}{6}\right)<f(0)\\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f\left(\frac{\pi}{3}\right)<f(0)\end{array}\right\}\Rightarrow 3f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(0)+f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)<3f(0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)<\frac{f(0)+f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3}<f(0).$$

Άρα, υπάρχει $x_0\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0)=\frac{f(0)+f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3}$$

και επειδή $f\downarrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, το x_0 είναι μοναδικό.

Γ4. Έχουμε $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\ln\left|x-\frac{\pi}{3}\right|\right)\underset{u\to 0^+}{\overset{\left|x-\frac{\pi}{3}\right|=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$.

Επίσης, είναι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=0$ και έχουμε:

- $x<\frac{\pi}{3}\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)>0$, οπότε $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^-}\frac{1}{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}=+\infty$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^-}\frac{\ln\left|x-\frac{\pi}{3}\right|}{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}=-\infty$.

- $x>\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)<0$, οπότε $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^+}\frac{1}{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}=-\infty$. Άρα $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^+}\frac{\ln\left|x-\frac{\pi}{3}\right|}{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}=+\infty$.

Συνεπώς, το $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\ln\left|x-\frac{\pi}{3}\right|}{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ δεν υπάρχει.

Θέμα Δ

Δ1. Για $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ η δοθείσα σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$f^2(x)+2\eta\mu 2x=x^2-\eta\mu^2 2x\Leftrightarrow(f(x)+\eta\mu 2x)^2=x^2\Leftrightarrow|g(x)|=|x|,\ (1).$$

Ισχύει:

$$g(x)=0\Leftrightarrow|g(x)|=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}|x|=0\Leftrightarrow x=0.$$

Η g είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, άρα οι πιθανοί τύποι της g είναι:

$$g(x)=x \text{ για κάθε } x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{ή} \quad g(x)=-x \text{ για κάθε } x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{ή}$$

$$g(x)=|x|\Leftrightarrow g(x)=\begin{cases} x \;, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ -x, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right) \end{cases} \quad \text{ή} \quad g(x)=-|x|\Leftrightarrow g(x)=\begin{cases} -x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ x \;, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right) \end{cases}.$$

Δ2. Από το Δ1 έχουμε:

$$f(x) = x - ημ2x \text{ για κάθε } x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{ή} \quad f(x) = -x - ημ2x \text{ για κάθε } x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{ή}$$

$$f(x)=\begin{cases} x-ημ2x \;, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ -x-ημ2x, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right) \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x)=\begin{cases} -x-ημ2x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ x-ημ2x \;, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right) \end{cases}.$$

Ισχύουν:

- $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$, άρα $f(x)<0,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ και
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, άρα $f(x)>0,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Επομένως, ο τύπος της f είναι $f(x) = x - ημ2x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Δ3. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

Έχουμε:

- $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}-ημ\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=-\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}+1\right)=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4-\pi}{4}<0,$
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4}-ημ\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi-4}{4}<0.$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε

$f(x_1)=0$ και τουλάχιστον ένα $x_2\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$.

Δ4. Για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ είναι $-x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ και έχουμε:

$$f(-x) = -x - \eta\mu(-2x) = -x + \eta\mu 2x \Leftrightarrow f(-x) = -(x - \eta\mu 2x) = -f(x).$$

Άρα, η f είναι περιττή, οπότε η C_f είναι συμμετρική ως προς το O(0,0).

Συνεπώς, τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x′x, δηλαδή τα σημεία Γ και Δ είναι συμμετρικά ως προς το O.

Επιπλέον, το O είναι το μέσον του ΓΔ, άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι η AB διέρχεται από το O(0, 0).

Η AB έχει συντελεστή διεύθυνσης:

$$\lambda = \frac{-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}} = 1,$$

οπότε, έχει εξίσωση:

$$\varepsilon:\ y - \frac{\pi}{2} = 1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \varepsilon:\ y = x.$$

Επομένως, η AB διέρχεται από το O(0, 0).

17η Ενότητα

Ερωτήσεις κατανόησης στα όρια και τη συνέχεια (Ενότητες 8η - 16η)

Α. Του τύπου Σωστό / Λάθος

17. 1	**α.** Λάθος	**β.** Λάθος	**γ.** Λάθος	**δ.** Λάθος.	
17. 2	**α.** Σωστό	**β.** Λάθος	**γ.** Λάθος	**δ.** Λάθος	**ε.** Σωστό
	στ. Λάθος.				
17. 3	**α.** Λάθος	**β.** Λάθος	**γ.** Λάθος	**δ.** Σωστό	**ε.** Σωστό
	στ. Λάθος.				
17. 4	**α.** Σωστό	**β.** Λάθος	**γ.** Σωστό	**δ.** Σωστό	**ε.** Λάθος
	στ. Λάθος	**ζ.** Λάθος	**η.** Σωστό.		
17. 5	**α.** Σωστό	**β.** Λάθος	**γ.** Σωστό	**δ.** Σωστό	**ε.** Σωστό
	στ. Λάθος	**ζ.** Σωστό	**η.** Λάθος	**θ.** Λάθος.	
17. 6	**α.** Λάθος	**β.** Σωστό	**γ.** Λάθος.		
17. 7	**α.** Λάθος	**β.** Λάθος	**γ.** Σωστό	**δ.** Σωστό	**ε.** Σωστό
	στ. Λάθος.				
17. 8	**α.** Σωστό	**β.** Λάθος	**γ.** Λάθος	**δ.** Σωστό	**ε.** Σωστό
	στ. Λάθος	**ζ.** Λάθος.			

17. 9 **1ος** **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\begin{cases}1\ , & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$, $x_0=0$.

2ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $x_0=0$.

3ος **α.** Α **β.** Με άτοπο για $g(x)=\left[f(x)+g(x)\right]-f(x)$.

4ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\begin{cases}1\ , & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$, $g(x)=-f(x)$ και $x_0=0$.

5ος **α.** Α **β.** Για $g(x)=\left[f(x)+g(x)\right]-f(x)$.

6ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=0$.

7ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\begin{cases}1\ ,\ x\geq 0\\ -1,\ x<0\end{cases}$, $g(x)=-f(x)$ και $x_0=0$.

17. 10 **1ος** **α.** Α **β.** Θέτουμε $u=2019x$.

2ος **α.** Ψ **β.** Θέτουμε $u=2020x$. Το όριο είναι ίσο με 0.

3ος **α.** Α **β.** Χρησιμοποιούμε τον ορισμό της συνέχειας.

4ος **α.** Α **β.** Θέτουμε $u=\lambda x$.

5ος **α.** Α **β.** Θέτουμε $u=\lambda^2 x$.

6ος **α.** Ψ **β.** Θέτουμε $u=\lambda x$. Το όριο είναι ίσο με 0.

Β. Πολλαπλής επιλογής

17. 11 α.	**17. 12** β.	**17. 13** γ.	**17. 14** γ.	**17. 15** β.
17. 16 α.	**17. 17** γ.	**17. 18** γ.	**17. 19** β.	**17. 20** δ.

Κεφαλαιο 2ο

Διαφορικος Λογισμος

Απαντησεις	Ερωτήσεων
	Βασικών εφαρμογών – Ασκήσεων εμπέδωσης
Λυσεις – Υποδειξεις	Ασκήσεων
Απαντησεις	**Κριτηρίων αξιολόγησης**

18η Ενότητα

Η έννοια της παραγώγου

Α. Του τύπου Σωστό / Λάθος

18. 1 **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό **στ.** Σωστό.

18. 2 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό.

18. 3 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος **στ.** Σωστό.

18. 4 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό.

18. 5 **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό.

18. 6 **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1\ , & x\ge 0\\ -1, & x<0\end{cases}$, $x_0=0$.

Β. Συμπλήρωσης

18. 7 **α.** είναι **β.** 1 **γ.** 45^o **δ.** 1 **ε.** 1 **στ.** 1, 1.

18. 8 **α.** 0 **β.** 0 **γ.** 0 **δ.** 0 **ε.** $<$ **στ.** $>$
ζ. δεν **η.** 0 **θ.** 0 **ι.** 0 **ια.** 0.

Γ. Βασικές εφαρμογές – Ασκήσεις εμπέδωσης

18. 9 **α.** 3 **β.** –2 **γ.** 5 **δ.** –3.

18. 10 **α.** $f'(2)=4,\ y=4x-3$ **β.** $f'(1)=-1,\ y=-x+1$ **γ.** $f'(-1)=3,\ y=3x+2$
δ. $f'(1)=6,\ y=6x-2$ **ε.** $f'(4)=\frac{1}{4},\ y=\frac{1}{4}x+1$ **στ.** $f'(8)=\frac{1}{4},\ y=\frac{1}{6}x+\frac{10}{6}$.

18. 11 Βρίσκουμε πλευρικές παραγώγους.
α. $f'(1)=2$ **β.** $f'(0)=0$.

18. 12 Βρίσκουμε πλευρικά όρια και πλευρικές παραγώγους.

Δ. Ασκήσεις για λύση

18. 13 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left[-(x+1)\right]=-2\in\mathbb{R}$. Άρα $f'(1)=-2$.

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{x^2}+1-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{x^2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-(x+1)}{x^2}=-2\in\mathbb{R}$.

Άρα $f'(1)=-2$.

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]=0\cdot(-1)=0\in\mathbb{R},$$

αφού $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\eta\mu0=0$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\underset{u\to0}{\overset{\frac{\pi}{2}-x=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{-u}=-1$.

Άρα $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

δ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{f(x)-f(9)}{x-9}=\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}^2-3^2}=\lim\limits_{x\to9}\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{1}{\sqrt{9}+3}=\dfrac{1}{6}\in\mathbb{R}$.

Άρα $f'(9)=\dfrac{1}{6}$.

18. 14 **α.** Είναι $f(x)=\begin{cases}x(x-1)\ , & x\geq1\\ -x(x-1), & x<1\end{cases}$.

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=1$ και
- $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=-1$.

Άρα, η f δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 1$, οπότε δεν ορίζεται εφαπτομένη της C_f.

β. Είναι $f(x)=\begin{cases} x+2 & , \ x \geq -2 \\ -(x+2), & x < -2 \end{cases}$.

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x+2}{x+2} = 1$ και
- $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{-(x+2)}{x+2} = -1$.

Άρα, η f δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = -2$, οπότε δεν ορίζεται εφαπτομένη.

γ. Είναι $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & , \ x \in (-\infty, -2] \cup [0, +\infty) \\ -(x^2+2x), & x \in (-2, 0) \end{cases}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 4 \in \mathbb{R}.$$

Άρα $f'(1)=4$ και η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: \ y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \quad \text{ή} \quad \varepsilon: y = 4x - 1.$$

δ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-x+2-2}{x} = \lim_{x\to 0}(x-1) = -1 \in \mathbb{R}.$$

Άρα $f'(0)=-1$ και η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: \ y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \quad \text{ή} \quad \varepsilon: y = -x + 2.$$

18. 15 Ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$.

Είναι $g(\alpha) = 0$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)-f(x)}{x-\alpha} = f(\alpha) \in \mathbb{R}.$$

Άρα, η g είναι παραγωγίσιμη στο α, με $g'(\alpha) = f(\alpha)$.

18. 16 **α.** Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^3+x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = -1$.

Άρα, η f δεν είναι συνεχής και συνεπώς δεν είναι παραγωγίσιμη.

β. Ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$$f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}+2=\sqrt{(x-3)^2}+2=|x-3|+2,\ x\in\mathbb{R}.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $f(x)=\begin{cases} x-1 & ,\ x\geq 3 \\ -x+5, & x<3 \end{cases}.$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-1-2}{x-3}=1$ και
- $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-x+5-2}{x-3}=-1.$

Άρα, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 3.

γ. Είναι $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(x^2+4x-16\right)=5$ και $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=f(3)=5.$

Άρα, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{7-\sqrt{x^2-5}-5}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2^2-\sqrt{x^2-5}^{\,2}}{(x-3)\cdot\left(2+\sqrt{x^2-5}\right)}=$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{-\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}\cdot\left(2+\sqrt{x^2-5}\right)}=\frac{-3}{2},$$

- $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2+4x-16-5}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{(x+7)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=10.$

Άρα, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$.

18. 17 Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι συν(–x) = συνx, άρα $f(x)=4x+x^2-x^3\cdot\text{συν}x,\ x\in\mathbb{R}.$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x+x^2-x^3\cdot\text{συν}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(4+x-x^2\cdot\text{συν}x\right)=4\in\mathbb{R}.$

Άρα $f'(0)=4.$

18. 18 **α.** Από την (1) για h = 0 βρίσκουμε $f(2)=1.$

β. Θέτοντας όπου h το –h, η (1) γράφεται $f(2+h)=1-4h+5h^2-2h^3$. Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-4h+5h^2-2h^3-1}{h}=\lim_{h\to 0}\left(-4+5h-2h^2\right)=-4\in\mathbb{R}.$$

Άρα $f'(2)=-4.$

18. 19 Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, άρα και συνεχής, οπότε ισχύουν:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0).$$

Για x = y = 0 η (1) γράφεται $f(0)=f(0)+f(0)+0 \Rightarrow f(0)=0.$ Επομένως:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \ (2) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = f'(0), \ (3).$$

Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} \overset{(1)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha)+f(h)+15\alpha\cdot h-f(\alpha)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)}{h}+15\alpha\right) \overset{(3)}{=} f'(0)+15\alpha \in \mathbb{R}.$$

Άρα, η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ με $f'(\alpha) = f'(0) + 15\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

18. 20 Έχουμε:

- $\displaystyle \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{2xe^x-\eta\mu x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(2e^x-\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 1$ και
- $\displaystyle \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1.$

Άρα $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 1 \in \mathbb{R}$, οπότε $f'(0)=1.$

Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ με τον άξονα x′x, τότε έχουμε:

$$f'(0) = \varepsilon\varphi\omega \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}.$$

18. 21 Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα ισχύουν:

- $\displaystyle \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\alpha-\beta\sigma\upsilon\nu x}{x} = \alpha-1, \ (1)$ και
- $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\alpha-\beta\cdot\sigma\upsilon\nu x-x(\alpha-1)}{x^2} = f'(0), \ (2).$

Για x κοντά στο 0 είναι $\displaystyle f(x) = \frac{\alpha-\beta\cdot\sigma\upsilon\nu x}{x} \Leftrightarrow x\cdot f(x) = \alpha-\beta\cdot\sigma\upsilon\nu x$

με $\displaystyle \lim_{x\to 0}(x\cdot f(x)) = \lim_{x\to 0}(\alpha-\beta\sigma\upsilon\nu x) \Rightarrow 0\cdot f(0) = \alpha-\beta \Rightarrow \alpha=\beta$, (3).

Τότε για x κοντά στο 0 θέτουμε:

$$g(x)=\frac{\alpha-\beta\cdot\sigma\upsilon\nu x-x\cdot(\alpha-1)}{x^2}\overset{(3)}{\Leftrightarrow} x^2\cdot g(x)=\alpha-\beta\cdot\sigma\upsilon\nu x-x\cdot(\alpha-1)\Leftrightarrow$$

$$\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x\cdot g(x)=\alpha\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-(\alpha-1)$$

με $\lim\limits_{x\to 0}g(x)\overset{(2)}{=}f'(0)$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to 0}\left[\alpha\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-(\alpha-1)\right]\Rightarrow 0=\alpha\cdot 0-(\alpha-1)\Rightarrow\alpha=1$$

και από την (3) προκύπτει ότι β = 1. Οπότε $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

Επίσης, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1^2-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right]=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}.$$

Άρα $f'(0)=\frac{1}{2}$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\ \text{ ή }\ \varepsilon: y=\frac{1}{2}x.$$

18. 22 **α.** Για x = 0 από την (1) βρίσκουμε $0\le f(0)\le 0\Leftrightarrow f(0)=0$.

β. Για x > 0 η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{x^2-x}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{x^3+2x^2-x}{x}\Rightarrow x-1\le\frac{f(x)}{x}\le x^2+2x-1,\ (2).$$

Για $x\in[-1,0)$ η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$x-1\ge\frac{f(x)}{x}\ge x^2+2x-1,\ (3).$$

γ. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2x-1)=-1$.

Από το κριτήριο παρεμβολής και τη (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=-1$.

Από το κριτήριο παρεμβολής και την (3) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=-1\in\mathbb{R}$.

Άρα $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0.$

18. 23 **α.** Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0),\ (2).$

Η (1) γράφεται ισοδύναμα $-x^3+x\etaμx\le f(x)\le\dfrac{-1+συνx^2}{x}+x^3,\ x>0,\ (3).$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0}(-x^3+x\etaμx)=0$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1+συνx^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-1+συνx^2}{x^2}\cdot x\right)=0,$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1+συνx^2}{x^2}\underset{u\to 0}{\overset{x^2=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{-1+συνu}{u}=0.$ Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-1+συνx^2}{x^2}+x^3\right)=0.$

Από το κριτήριο παρεμβολής και την (3) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0\overset{(2)}{\Rightarrow}f(0)=0.$

β. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}.$

Για $x\neq 0$, οπότε $x^2>0$, η (1) γίνεται:

$$\frac{-x^4+x^2\etaμx}{x^2}\le\frac{x\cdot f(x)}{x^2}\le\frac{-1+συνx^2+x^4}{x^2}\Leftrightarrow -x^2+\etaμx\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{-1+συνx^2}{x^2}+x^2.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2+\etaμx)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-1+συνx^2}{x^2}+x^2\right)=0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0\Rightarrow f'(0)=0.$$

18. 24 **α.** Η f είναι συνεχής στο 1, άρα $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1),\ (1).$

Για x κοντά στο 1 θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-7}{x-1}\Leftrightarrow(x-1)\cdot g(x)+7=f(x)$ με

$\lim\limits_{x\to 1}g(x)=2,$ οπότε:

$$\lim_{x\to 1}\left[(x-1)\cdot g(x)+7\right]=\lim_{x\to 1}f(x)\Rightarrow\lim_{x\to 1}f(x)=7\overset{(1)}{\Rightarrow}f(1)=7.$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-7}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\cdot g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}g(x)=2\Leftrightarrow f'(1)=2.$$

18. 25 α. Η f είναι συνεχής στο 1, άρα $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$, (1).

Για x κοντά στο 1 θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)+4}{x^2-1}\Leftrightarrow(x^2-1)\cdot g(x)-4=f(x)$, (2),

με $\lim\limits_{x\to1}g(x)=3$, οπότε:

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left[(x^2-1)\cdot g(x)-4\right]=-4\overset{(1)}{\Rightarrow}f(1)=-4.$$

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{f(x)+4}{x^2-1}\cdot(x+1)\right]=3\cdot2=6\in\mathbb{R}$.

Άρα $f'(1)=6$.

γ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+\eta\mu(x^2-1)+4}{(x-1)\cdot f(x)+x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{f(x)+4}{x-1}+\dfrac{\eta\mu(x^2-1)}{x-1}}{f(x)+(x+1)}=\dfrac{6+2}{-4+2}=-4$,

αφού:

- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+4}{x-1}=f'(1)=6$,
- $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=-4$ και
- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\eta\mu(x^2-1)}{x^2-1}\underset{u\to0}{\overset{x^2-1=u}{=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$.

Άρα:

$$\lim_{x\to1}\frac{\eta\mu(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left[\frac{\eta\mu(x^2-1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\right]=1\cdot2=2.$$

18. 26 α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, άρα $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$, (1).

Έχουμε:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{-2h}\cdot(-2)\right]\underset{u\to0}{\overset{-2h=u}{=\!=}}$$

$$=\lim_{u\to0}\left[\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}\cdot(-2)\right]\overset{(1)}{=}-2f'(x_0).$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-3h\right)-\left(\alpha-1\right)\cdot f\left(x_0\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\alpha\cdot\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}-\frac{f\left(x_0-3h\right)-f\left(x_0\right)}{h}\right]\overset{(1)}{=}$$

$$=\alpha f'\left(x_0\right)+3f'\left(x_0\right)=\left(\alpha+3\right)\cdot f'\left(x_0\right),$$

αφού:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0-3h\right)-f\left(x_0\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f\left(x_0-3h\right)-f\left(x_0\right)}{-3h}\cdot\left(-3\right)\right]\underset{u\to 0}{\overset{-3h=u}{=\!=}}$$

$$=\lim_{u\to 0}\left[\frac{f\left(x_0+u\right)-f\left(x_0\right)}{u}\cdot\left(-3\right)\right]\overset{(1)}{=}-3f'\left(x_0\right).$$

18. 27 Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, άρα και συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}f\left(x\right)=\lim_{x\to 0^+}f\left(x\right)=f\left(0\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}\left[\left(x^2+\alpha\right)\cdot\gamma\cdot\eta\mu x\right]=\lim_{x\to 0^+}\left(x^3\sigma\upsilon\nu x+\alpha x+\beta\right)=f\left(0\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=\beta=f\left(0\right),\ \ (1).$$

Άρα $\beta = 0$ και:

$$f'\left(0\right)=7\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=7\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(x^2+\alpha\right)\cdot\gamma\cdot\eta\mu x-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3\sigma\upsilon\nu x+\alpha x+\beta-\beta}{x}=7\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(0+\alpha)\cdot\gamma\cdot 1=0+\alpha=7\Rightarrow\{\alpha=7,\ \gamma=1\}.$$

Επομένως $\alpha = 7$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$.

18. 28 **α.** Έχουμε:

- $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(2\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2+x-10}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\left(2x+5\right)\cancel{\left(x-2\right)}}{\cancel{x-2}}=9$ και
- $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(2\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{9x-8-10}{x-2}=9.$

Άρα $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f\left(x\right)-f\left(2\right)}{x-2}=9\in\mathbb{R}$, οπότε $f'\left(2\right)=9$.

β. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2$ και
- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\overset{\sqrt{x-1}=u>0}{\underset{u\to 0^+}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty.$

Άρα, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

γ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0\in\mathbb{R}$. Άρα $f'(0)=0$.

18. 29 Η εφαπτομένη της C_f στο $A(2, f(2))$ είναι παράλληλη στην ε: y = –8x + 10, άρα:

$$f'(2)=-8\Leftrightarrow \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-8,\ (1).$$

Επιπλέον, η f είναι συνεχής στο 2:

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)\Rightarrow \lim_{x\to 2^-}(\alpha x^2+\beta)=\lim_{x\to 2^+}(x^3+\gamma x)=f(2).$$

Άρα 4α + β = 8 + 2γ = f(2), (2).

Τότε από την (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\alpha x^2+\beta-(4\alpha+\beta)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3+\gamma x-(8+2\gamma)}{x-2}=-8\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-}\frac{\alpha\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x^2+2x+4+\gamma)}{x-2}=-8\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\alpha=12+\gamma=-8\Rightarrow\{\alpha=-2,\ \gamma=-20\}$$

και από τη (2) προκύπτει ότι β = –24.

Άρα α = –2, β = –24, γ = –20.

18. 30 Η C_f τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$. Αρκεί να υπάρχει το $f'(0)$.

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$ και
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\lambda x^2+2-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(\lambda x)=0.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0\in\mathbb{R}$, οπότε $f'(0)=0$.

Άρα, ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ με εξίσωση:

$$y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Leftrightarrow y-2=0\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=2.$$

18. 31 Έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+3}{x-2}=5,\ (1)$$

και η f συνεχής στο 2 ως παραγωγίσιμη, άρα:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=-3,\ (2).$$

Επομένως $\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-9}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)+3}{x-2}\cdot\frac{f(x)-3}{x-3}\right)\underset{(2)}{\overset{(1)}{=}}5\cdot\frac{-3-3}{2-3}=+30.$

18. 32 Η εφαπτομένη της C_f στο $M(-1, f(-1))$ είναι κάθετη στην ε: $y=-\frac{1}{2}x+1$. Άρα:

$$f'(-1)\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow f'(-1)=2\Leftrightarrow \lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=2,\ (1).$$

Η f είναι συνεχής στο –1, άρα:

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^+}f(x)=f(-1)\Rightarrow \lim_{x\to -1^-}\frac{\gamma}{x}=\lim_{x\to -1^+}\left(\alpha x^2+\beta\right)=f(-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\gamma=\alpha+\beta=f(-1),\ (2).$$

Τότε από την (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{\frac{\gamma}{x}-(-\gamma)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{\alpha x^2+\beta-(\alpha+\beta)}{x+1}=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1^-}\left[\gamma\cdot\frac{x+1}{x(x+1)}\right]=\lim_{x\to -1^+}\frac{\alpha(x-1)(x+1)}{x+1}=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\gamma=-2,\ \alpha=-1\}$$

και από τη (2) προκύπτει ότι β = 3.

18. 33 Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0),\ (2).$$

- Για x > 0 από την (1) έχουμε $3x-5x^3\le f(x)\le 3x+5x^3+2x^5$.

  Είναι $\lim_{x\to 0^+}\left(3x-5x^3\right)=0$ και $\lim_{x\to 0^-}\left(3x+5x^3+2x^5\right)=0$.

  Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x\to 0^+}f(x)=0\overset{(2)}{\Rightarrow}f(0)=0.$

- Για x ≠ 0 είναι $x^2>0$ και από την (1) έχουμε $3-5x^2\le\frac{f(x)}{x}\le 3+5x^2+2x^4$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-5x^2\right)=3$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(3+5x^2+2x^4\right)=3$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0\in\mathbb{R}.$$

Άρα $f'(0)=0$.

18. 34 α. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$, (1).

Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+5h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+5h)-f(x_0)}{5h}\cdot 5\right]\overset{5h=u}{\underset{u\to 0}{=\!=}}$$

$$=5\cdot\lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}\overset{(1)}{=}5f'(x_0).$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0+5h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)-\left(f(x_0+5h)-f(x_0)\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+5h)-f(x_0)}{h}\overset{(\alpha)}{=}$$

$$=-7f'(x_0),$$

αφού:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{-2h}\cdot(-2h)\right]\overset{-2h=u}{\underset{u\to 0}{=\!=}}$$

$$=-2\cdot\lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}\overset{(1)}{=}-2f'(x_0).$$

γ. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, θα είναι και συνεχής στο x_0. Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(x_0-2h)-f^2(x_0+5h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x_0-2h)-f(x_0+5h)}{h}\cdot\left[f(x_0-2h)+f(x_0+5h)\right]\right\}\overset{(\beta)}{=}$$

$$=-7f'(x_0)\cdot\left(f(x_0)+f(x_0)\right)=-14f(x_0)\cdot f'(x_0).$$

18. 35 α. Α΄ τρόπος

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in D_f$, άρα και συνεχής, οπότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),\ (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0),\ (2).$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{xf(x_0)-xf(x)+xf(x)-x_0f(x)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(-x\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x)\right) \underset{(2)}{\overset{(1)}{=}} -x_0f'(x_0)+f(x_0).$$

Β΄ τρόπος

Για x κοντά στο x_0 θέτουμε:

$$g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow f(x) = (x-x_0)\cdot g(x)+f(x_0) \ \text{ με } \lim_{x\to x_0} g(x) = f'(x_0).$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{xf(x_0)-x_0(x-x_0)\cdot g(x)-x_0f(x)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x_0)\cdot(x-x_0)}{x-x_0}+x_0g(x)\right) = f(x_0)-x_0f'(x_0).$$

β. Η (2) γράφεται ισοδύναμα $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

Είναι $\lim_{h\to 0}\left[f(x_0+4h)+f(x_0-h)\right] \overset{(1)}{=} f(x_0)+f(x_0) = 2f(x_0)$.

Οπότε έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+4h)-f(x_0-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+4h)-f(x_0)-\left(f(x_0-h)-f(x_0)\right)}{h} =$$

$$= 4f'(x_0)-\left(-f'(x_0)\right) = 5f(x_0),$$

αφού:

- $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+4h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+4h)-f(x_0)}{4h}\cdot 4\right] \underset{u\to 0}{\overset{4h=u}{=\!=}}$$

$$= 4\cdot\lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u} \overset{(2)}{=} 4f'(x_0) \ \text{ και αντίστοιχα}$$

- $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} = -f'(x_0).$$

Επομένως:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(x_0+4h)-f^2(x_0-h)}{5h}=$$
$$=\frac{1}{5}\cdot\lim_{h\to 0}\left\{\left[f(x_0+4h)+f(x_0-h)\right]\cdot\frac{f(x_0+4h)-f(x_0-h)}{h}\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot f(x_0)\cdot 5f'(x_0)=2f(x_0)\cdot f'(x_0).$$

18. 36 **α.** Για x = 3 από την (1) έχουμε $f^2(3)+g^2(3)=0\Leftrightarrow\{f(3)=0 \text{ και } g(3)=0\}$.

β. Έχουμε:

- $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)\Leftrightarrow\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=f'(3)$ και αντίστοιχα
- $\lim_{x\to 3}\frac{g(x)}{x-3}=g'(3)$.

Για $x\neq 3$ από την (1) έχουμε:

$$\frac{f^2(x)}{(x-3)^2}+\frac{g^2(x)}{(x-3)^2}=\frac{(x^2-9)^2}{(x-3)^2}\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{x-3}\right)^2+\left(\frac{g(x)}{x-3}\right)^2=(x+3)^2.$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 3}\left[\left(\frac{f(x)}{x-3}\right)^2+\left(\frac{g(x)}{x-3}\right)^2\right]=\lim_{x\to 3}(x-3)^2\Rightarrow\left(f'(3)\right)^2+\left(g'(3)\right)^2=36.$$

18. 37 **α.** Για x = y = 0 η (1) γίνεται:

$$f(0)=f(0)+f(0)+0+\beta\Leftrightarrow f(0)=-\beta.$$

β. Αρκεί να ισχύει:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\in\mathbb{R} \text{ για κάθε } x_0\in\mathbb{R}.$$

Για x = x_0 και y = h η (1) γίνεται $f(x_0+h)=f(x_0)+f(h)+\alpha\cdot x_0h+\beta$, (2).

Τότε έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(2)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)+f(h)+\alpha x_0h+\beta-f(x_0)}{h}\overset{(\alpha)}{=}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)-f(0)}{h}+\alpha x_0\right)=f'(0)+\alpha x_0\in\mathbb{R}.$$

Άρα, για οποιοδήποτε $x_0\in\mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$f'(x_0)=f'(0)+\alpha x_0.$$

18. 38 Για x < 0 έχουμε:

$$f(x)=\frac{x+6}{5}\Rightarrow x^4=\frac{x+6}{5}\Rightarrow 5x^4-x-6=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x+1)\left(5x^3-5x^2+5x-6\right)=0\Rightarrow x=-1,$$

αφού για x < 0 ισχύει $5x^3-5x^2+5x-6<0$.

Για $0\le x<6$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{x+6}{5}\Rightarrow 5\sqrt{x}-x-6=0.$$

Θέτουμε $\sqrt{x}=\omega\ge 0$ και η προηγούμενη εξίσωση γράφεται:

$$5\omega-\omega^2-6=0\Leftrightarrow \omega^2-5\omega+6=0\Leftrightarrow \{\omega=2 \text{ ή } \omega=3\}.$$

Επομένως:

$$\left\{\sqrt{x}=2 \text{ ή } \sqrt{x}=3\right\}\Leftrightarrow \{x=4 \text{ ή } x=9\}$$

όπου η x = 9 απορρίπτεται, διότι x < 6. Συνεπώς x = 4.

Άρα, τα σημεία τομής της C_f με την (ε) είναι τα A(–1, 1) και B(4, 2). Οι εφαπτομένες της C_f στα A και B έχουν συντελεστές διεύθυνσης $f'(-1)$ και $f'(4)$ αντίστοιχα.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(-1)\cdot f'(4)=-1$.

Έχουμε:

- $f'(-1)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\left[(x-1)\cdot\left(x^2+1\right)\right]=-4$ και
- $f'(4)=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}^2-2^2}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{1}{4}$.

Άρα $f'(-1)\cdot f'(4)=-1$.

18. 39 Η (1) γράφεται ισοδύναμα $-h^2\le f(x_0+h)-f(x_0)\le h^2$, οπότε για $h\ne 0$ έχουμε:

- $\begin{cases} -h\le \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\le h,\ h>0,\ (2)\\ -h\ge \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ge h,\ h<0,\ (3)\end{cases}$ και
- $\lim\limits_{h\to0}(-h)=0,\ \lim\limits_{h\to0}h=0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής και τις (2), (3) προκύπτουν τα εξής:

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0 \text{ και } \lim_{h\to0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0.$$

Άρα $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0\in\mathbb{R}$, οπότε $f'(x_0)=0$ για οποιοδήποτε $x_0\in\mathbb{R}$.

18. 40 α. Ισχύει:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2),$$

οπότε η f είναι και συνεχής στο $x_0 = 2$, άρα $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$.

Επιπλέον, η εφαπτομένη της C_f στο $A(2,\ f(2))$ έχει εξίσωση $y = 3x – 1$, άρα:

$$f'(2)=3 \quad \text{και} \quad f(2)=3\cdot 2-1\Rightarrow f(2)=5.$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2f(x)+1-4\cdot f(2)-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2f(x)-20}{x-2}$, (1).

Για x κοντά στο 2 θέτουμε:

$$h(x)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\Leftrightarrow h(x)\cdot(x-2)+5=f(x) \text{ με } \lim_{x\to 2}h(x)=f'(2)=3,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{x^2h(x)\cdot(x-2)-x^2\cdot 5-20}{x-2}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\left[x^2h(x)+5(x+2)\right]=4\cdot 3+5\cdot 4=32\in\mathbb{R}.$$

Άρα $g'(2)=32$.

β. Είναι $g(2)=21$. Έχουμε:

$$\varepsilon': y-g(2)=g'(2)\cdot(x-2) \quad \text{ή} \quad \varepsilon': y=32x-43.$$

Επιπλέον, ισχύει:

$$\varepsilon'\perp\varepsilon_0\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon'}\cdot\lambda_{\varepsilon_0}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon_0}=-\frac{1}{32},$$

οπότε:

$$\varepsilon_0:\ y-g(2)=-\frac{1}{32}\cdot(x-2) \quad \text{ή} \quad \varepsilon_0:\ y=-\frac{1}{32}x+\frac{337}{16}.$$

18. 41 Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sigma\upsilon\nu x)-f(1)}{\sigma\upsilon\nu^2x-1}\overset{\sigma\upsilon\nu x=u}{\underset{u\to 1}{=\!=}}\lim_{u\to 1}\frac{f(u)-f(1)}{u^2-1}=\lim_{u\to 1}\left(\frac{f(u)-f(1)}{u-1}\cdot\frac{1}{u+1}\right)=f'(1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{f'(1)}{2}.$$

18. 42 α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, άρα και συνεχής στο $x_0 = 1$.

Ισχύουν:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1).$$

Για x κοντά στο 1, θέτουμε:

$$g(x) = \frac{f(x)-x}{x^2-1} \Leftrightarrow (x^2-1)\cdot g(x) + x = f(x), \ (1), \ \text{με} \ \lim_{x\to 1} g(x) = \frac{1}{2}.$$

Τότε:

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left[(x^2-1)\cdot g(x)+x\right] = 0\cdot\frac{1}{2}+1 = 1 \Rightarrow f(1)=1$ και
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2-1)\cdot g(x)+x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\left[(x+1)\cdot g(x)+1\right] = 2 \in \mathbb{R}.$

Άρα $f'(1) = 2$.

β. i. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(2x-1)-1}{x-1} \underset{u\to 1}{\overset{2x-1=u}{=\!=}} \lim_{u\to 1}\frac{f(u)-1}{\frac{u+1}{2}-1} = \lim_{u\to 1}\left(\frac{f(u)-f(1)}{u-1}\cdot 2\right) \overset{(\alpha)}{=} f'(1)\cdot 2 = 4.$$

ii. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x^3}{x-1} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)\cdot g(x)+x-x^3}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\left[(x+1)\cdot g(x)+x(x+1)\right] = -1.$$

iii. Θέτουμε:

$$1+\frac{1}{x} = u \Rightarrow \frac{1}{x} = u-1 \Rightarrow x = \frac{1}{u-1}$$

και είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$, οπότε $u \to 1$. Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(f\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right)\right] = \lim_{u\to 1}\frac{f(u)-1}{u-1} \overset{(\alpha)}{=} f'(1) = 2.$$

18. 43 Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0), \ (1).$

Για $\alpha = x$ και $\beta = x_0$ η δοθείσα γράφεται:

$$f(x)-f(x_0)\ge(x-x_0)^2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge x-x_0, & x>x_0 \\ \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le x-x_0, & x<x_0 \end{cases}.$$

Τότε έχουμε:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge \lim\limits_{x\to x_0^+}(x-x_0) \\ \lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le \lim\limits_{x\to x_0^-}(x-x_0) \end{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} f'(x_0)\ge 0 \\ f'(x_0)\le 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0)=0.$$

18. 44 Για x = 0 η (1) γράφεται $f^3(0)=1\Leftrightarrow f(0)=1.$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=0.$

Η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$f^3(x)-1+x^2f(x)-x^2=-x^2\Leftrightarrow (f(x)-1)\cdot(f^2(x)+f(x)+1)+x^2(f(x)-1)=-x^2 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-1}{x}\cdot\left(f^2(x)+f(x)+1+x^2\right)=-x.$$

Όμως από την (1) προκύπτει ότι $f(x)\cdot\left(f^2(x)+x^2\right)=1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και αφού $f^2(x)+x^2\ge 0,$ αν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f^2(x_0)+x_0^2=0,$ τότε από την (1) καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Τότε είναι $f^2(x)+f(x)+1+x^2>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα:

$$\frac{1}{f^2(x)+f(x)+1+x^2}<1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Έτσι, για $x\neq 0$ έχουμε:

- $\left|\dfrac{f(x)-1}{x}\right|=\left|\dfrac{-x}{f^2(x)+f(x)+1+x^2}\right|=\dfrac{|x|}{f^2(x)+f(x)+1+x^2}<|x|\Rightarrow -|x|\le\dfrac{f(x)-1}{x}\le|x|$

  και

- $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}|x|=0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=0\Leftrightarrow f'(0)=0.$$

18. 45 Για x = 0 η (1) γράφεται $f^3(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)\Leftrightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},\ (2).$$

Για x ≠ 0 από την (1) έχουμε:

$$\frac{f^3(x)}{x^3}+8\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{f(x)}{x}=\frac{\eta\mu^2 3x}{x^2}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+8\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{f(x)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu 3x}{x}\right)^2\overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\left(f'(0)\right)^3+8f'(0)-9=0,\ (3),$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu 3x}{x}\right)^2=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu 3x}{3x}\cdot 3\right)^2\underset{u\to 0}{\overset{3x=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\left[\left(\frac{\eta\mu u}{u}\right)^2\cdot 9\right]=1^2\cdot 9=9.$

Η (3) γράφεται ισοδύναμα $\left(f'(0)-1\right)\cdot\left[\left(f'(0)\right)^2+f'(0)+9\right]=0\Leftrightarrow f'(0)=1,$

αφού η $\left(f'(0)\right)^2+f'(0)+9=0$ είναι αδύνατη.

18. 46 Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ η (1) γράφεται ισοδύναμα $f(x+y)=(x+y)^3$.

Για x = 1, y = 0 προκύπτει ότι f (1) = 1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-1}{h}=3.$

Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-1}{h}\overset{(1)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h-1)\cdot\left[(1+h)^2+(1+h)\cdot 1+1^2\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[(1+h)^2+h+2\right]=3\in\mathbb{R}.$$

Άρα $f'(1)=3$.

18. 47 **α.** Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0),\ (1)$.

Για x κοντά στο 0 θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)+x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{x^3}\Leftrightarrow x^3\cdot g(x)-x^2\eta\mu\frac{1}{x}=f(x),\ (1),$

με $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$. Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left[x^3\cdot g(x)-x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right]=0\overset{(1)}{\Rightarrow}f(0)=0,$$

αφού για x ≠ 0 είναι:

- $\left|x^2\cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right| = \left|x^2\right|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le x^2 \Rightarrow -x^2 \le x^2\eta\mu\frac{1}{x} \le x^2$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}x^2=0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0.$

Επίσης, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot g(x)-x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot g(x)-x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0\in\mathbb{R}^*,$$

αφού:

- $\left|x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le|x|\Rightarrow -|x|\le x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\le|x|$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|\right)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}|x|=0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0.$

Άρα $f'(0)=0.$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-4x^2+x^5\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{f^2(x)}=\lim_{x\to 0}\left[\left(f(x)-4+x^3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}\right]=-\infty,$$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2=\left(f'(0)\right)^2=0,\ \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2\ge 0,$ άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}=+\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-4+x^3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=f(0)-4+0=-4<0$

  όπου για $x\neq 0$ ισχύουν:

  - $\left|x^3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right|=\left|x^3\right|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right|\le\left|x^3\right|\Rightarrow-\left|x^3\right|\le x^3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\le\left|x^3\right|$ και

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|x^3\right|\right)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}\left|x^3\right|=0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\cdot συν\frac{1}{x}\right)=0.$

18. 48 **α.** Η f είναι συνεχής στο 2, άρα $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2),\ (1).$

Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)}{h}=15\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(2+3h)}{3h}\cdot 3\right)=15\overset{3h=u}{\underset{u\to 0}{\Leftrightarrow}}\lim_{u\to 0}\frac{f(2+u)}{u}=5,\ (2).$$

Για u κοντά στο 0 θέτουμε $g(u)=\frac{f(2+u)}{u}\Leftrightarrow u\cdot g(u)=f(2+u)$ με $\lim\limits_{u\to 0}g(u)=5.$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{u\to 0}\left(u\cdot g(u)\right)=\lim_{u\to 0}f(2+u)\Rightarrow 0=f(2).$$

Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)}{h}\overset{(2)}{=}5\in\mathbb{R}.$ Άρα $f'(2)=5.$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)\Leftrightarrow \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=5,\ (3).$$

Το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2\cdot συν(\pi x)-\left(x^2-4\right)\cdot f(x)}{\left[f(x)-5(x-2)\right]^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2\cdot\left[συν(\pi x)-(x+2)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right]}{(x-2)^2\cdot\left(\frac{f(x)}{x-2}-5\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left\{\left[συν(\pi x)-(x+2)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right]\cdot\frac{1}{\left(\frac{f(x)}{x-2}-5\right)^2}\right\}=-\infty,$$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to 2}\left[συν(\pi x)-(x+2)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right]=1-4\cdot f'(2)=-19<0$ και

- $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f(x)}{x-2}-5\right)^2=\left(f'(2)-5\right)^2=0$ με $\left(\dfrac{f(x)}{x-2}-5\right)^2\ge 0$, άρα θα είναι

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\left(\dfrac{f(x)}{x-2}-5\right)^2}=+\infty.$

18. 49 Η f είναι συνεχής στο $x_0=\alpha$, άρα $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$, (1).

Για h κοντά στο 0 θέτουμε:

$$g(h)=\frac{f(\alpha+h)-2}{h+\eta\mu 2h}\Leftrightarrow (h+\eta\mu 2h)\cdot g(h)+2=f(\alpha+h) \text{ με } \lim_{h\to 0}g(h)=4.$$

Τότε είναι $\lim\limits_{h\to 0}f(\alpha+h)=\lim\limits_{h\to 0}\left[(h+\eta\mu 2h)\cdot g(h)+2\right]\overset{(1)}{\Rightarrow} f(\alpha)=2.$

Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h+\eta\mu 2h)\cdot g(h)+2-f(\alpha)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\left(1+\frac{\eta\mu 2h}{h}\right)\cdot g(h)\right]=(1+2)\cdot 4=12\in\mathbb{R}.$$

Άρα $f'(\alpha)=12$.

Επομένως, η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=\alpha$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon\colon y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha) \text{ ή } \varepsilon\colon y=12x-12\alpha+2.$$

18. 50 **α.** Είναι $f'(0)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, (1).

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{x}\right)=0,$$

αφού για $x\neq 0$ ισχύει:

$$\left|\frac{f(x)}{x}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{x}\right|=\left|\frac{f(x)}{x}\right|\cdot\left|\eta\mu\frac{\pi}{x}\right|\le\left|\frac{f(x)}{x}\right|\Leftrightarrow -\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\frac{f(x)}{x}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{x}\le\left|\frac{f(x)}{x}\right|$$

και συνεπώς από την (1) και το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}\cdot\eta\mu\dfrac{\pi}{x}\right)=0.$

Άρα $g'(0)=0$.

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\cdot ημ\dfrac{π}{x}-ημ7x}{4x-ημ2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{g(x)}{x}-\dfrac{ημ7x}{x}}{4-\dfrac{ημ2x}{x}}=\dfrac{-7}{2}$, αφού:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=g'(0)=0$,
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ7x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ημ7x}{7x}\cdot 7\right)\underset{u\to 0}{\overset{7x=u}{=\!=}}7\cdot\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{ημu}{u}=7\cdot 1=7$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ημ2x}{2x}\cdot 2\right)\underset{u\to 0}{\overset{2x=u}{=\!=}}2\cdot\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{ημu}{u}=2\cdot 1=2.$

18. 51 α. Για x = 0 από την (1) προκύπτει ότι $0\le|f(0)|\le 0\Rightarrow|f(0)|=0\Rightarrow f(0)=0.$

Για $x\neq 0$ η (1) γράφεται $-2x^4+ημ5x\le f(x)\le 2x^4+ημ5x.$

Είναι:

- $-2x^3+\dfrac{ημ5x}{x}\le\dfrac{f(x)}{x}\le 2x^3+\dfrac{ημ5x}{x},\ x>0,\ (2),$
- $-2x^3+\dfrac{ημ5x}{x}\ge\dfrac{f(x)}{x}\ge 2x^3+\dfrac{ημ5x}{x},\ x<0,\ (3)$

και έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημ5x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημ5x}{5x}\cdot 5\right)\underset{u\to 0}{\overset{5x=u}{=\!=}}\lim_{u\to 0}\left(\frac{ημu}{u}\cdot 5\right)=5 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(-2x^3+\frac{ημ5x}{x}\right)=5,\ \lim_{x\to 0}\left(2x^3+\frac{ημ5x}{x}\right)=5.$$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής και τη (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=5$ και

από το κριτήριο παρεμβολής και την (3) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=5.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=5\Leftrightarrow f'(0)=5.$

β. Αν $α\neq 0$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(αx)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(αx)}{αx}\cdot α\right)\underset{u\to 0}{\overset{αx=u}{=\!=}}α\cdot\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=α\cdot f'(0)=5α.$$

Το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(4x)-f(2x)}{f(5x)-f(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(4x)}{x}-\frac{f(2x)}{x}}{\frac{f(5x)}{x}-\frac{f(3x)}{x}}=\frac{4\cdot 5-2\cdot 5}{5\cdot 5-3\cdot 5}=1.$$

18. 52 Είναι:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)\quad\text{και}\quad\lim_{x\to\alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}=g'(\alpha).$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{g(\alpha)\cdot f(x)-f(\alpha)\cdot g(x)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{g(\alpha)\cdot f(x)-g(\alpha)\cdot f(\alpha)+g(\alpha)\cdot f(\alpha)-f(\alpha)\cdot g(x)}{x-\alpha}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\left(g(\alpha)\cdot\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}-f(\alpha)\cdot\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}\right)=$$

$$=g(\alpha)\cdot f'(\alpha)-f(\alpha)\cdot g'(\alpha).$$

18. 53 Πρέπει η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$. Δηλαδή πρέπει:

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=f(2)=\lim_{x\to 2^+}f(x)\Rightarrow\lim_{x\to 2^-}\left(x^3\right)=f(2)=\lim_{x\to 2^+}\left(-x^2+\alpha x+\beta\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8=f(2)=-4+2\alpha+\beta,\quad(1).$$

Έχουμε:

- $$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\left(x^2+2x+4\right)=12\quad\text{και}$$
- $$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+\alpha x+\beta-(-4+2\alpha+\beta)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-2)(x+2)+\alpha(x-2)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\left[-(x+2)+\alpha\right]=-4+\alpha.$$

Πρέπει:

$$12=-4+\alpha\Rightarrow\alpha=16.$$

Τότε από την (1) βρίσκουμε:

$$8=-4+32+\beta\Rightarrow\beta=-20.$$

18. 54 **α.** Είναι:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)\Leftrightarrow\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-\alpha}{x-\alpha}=\alpha,\quad(1).$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f^2(x)-\alpha^2}{x^2-3\alpha x+2\alpha^2}=\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-\alpha}{x-\alpha}\cdot\frac{f(x)+\alpha}{x-2\alpha}\right)\overset{(1)}{=}\alpha\cdot\frac{f(\alpha)+\alpha}{\alpha-2\alpha}=-2\alpha.$$

β. Το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(\alpha+h)-f^2(\alpha-h)}{\eta\mu 2h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha-h)}{h}\cdot\frac{f(\alpha+h)+f(\alpha-h)}{\frac{\eta\mu 2h}{h}}\right].$$

Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}-\frac{f(\alpha-h)-f(\alpha)}{h}\right]=$$

$$=2f'(\alpha)=2\alpha,$$

αφού:

- $$\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha-h)-f(\alpha)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(\alpha-h)-f(\alpha)}{-h}\cdot(-1)\right]\overset{-h=u}{=\!=}$$

  $$=\lim_{u\to 0}\left[\frac{f(\alpha+u)-f(\alpha)}{u}\cdot(-1)\right]=-f'(\alpha),$$

- $$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu 2h}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\eta\mu 2h}{2h}\cdot 2\right)\underset{u\to 0}{\overset{2h=u}{=\!=}}\lim_{u\to 0}\left(\frac{\eta\mu u}{u}\cdot 2\right)=1\cdot 2=2 \quad \text{και}$$

  $$\lim_{h\to 0}\big(f(\alpha+h)+f(\alpha-h)\big)=f(\alpha)+f(\alpha)=2\alpha.$$

Άρα:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(\alpha+h)-f^2(\alpha-h)}{\eta\mu 2h}=2\alpha\cdot\frac{2\alpha}{2}=2\alpha^2.$$

18. 55 Οι εφαπτομένες των C_f, C_g στα σημεία Α, Β αντίστοιχα έχουν εξισώσεις:

ε_1: $y=f'(x_0)\cdot x-f'(x_0)\cdot x_0+f(x_0)$ και ε_2: $y=g'(x_0)\cdot x-g'(x_0)\cdot x_0+g(x_0)$.

Οι (ε_1), (ε_2) τέμνονται στην αρχή των αξόνων, άρα:

- $-f'(x_0)\cdot x_0+f(x_0)=0, \quad (1)$ και
- $-g'(x_0)\cdot x_0+g(x_0)=0\Leftrightarrow x_0=\dfrac{g(x_0)}{g'(x_0)}.$

Τότε από την (1) έχουμε:

$$f'(x_0)\cdot\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}=f(x_0)\Rightarrow\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

18. 56 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0}{=\!=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(u)}{u}\overset{f(0)=0}{=\!=}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(u)-f(0)}{u-0}=f'(0).$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot f\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot f\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\overset{\frac{1}{x}=h}{\underset{h\to0}{=\!=}}\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)}{h}\overset{f(1)=0}{=\!=}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=2.$$

18. 57 Είναι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),\ (1).$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{(1)}{=}f'(x_0).$
- $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)\cdot(x-x_0)+f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=f'(x_0).$

Άρα:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\Leftrightarrow g'(x_0)=f'(x_0).$$

Δηλαδή, οι εφαπτομένες των C_f, C_g στο x_0 είναι μεταξύ τους παράλληλες.

18. 58 **α.** Είναι:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=1,\ (1).$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(f\left(1-\frac{1}{x}\right)-f(1)\right)\right]\overset{-\frac{1}{x}=h}{\underset{h\to0}{=\!=}}\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{-h}\overset{(1)}{=}-1.$$

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(f(1)-f\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right)\right]\overset{\frac{1}{x^2}=h}{\underset{h\to0}{=\!=}}-\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}\overset{(1)}{=}-1.$

Για x > 0 είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot ημ\dfrac{1}{x}\right)\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to 0}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{ημu}{u}=1.$

Επομένως, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^3\cdot ημ\frac{1}{x}\cdot\left(f(1)-f\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left(x\cdot ημ\frac{1}{x}\right)\cdot\left[x^2\cdot\left(f(1)-f\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]\right\}=-1.$$

18. 59 **α.** Είναι:

$$\lim_{x\to α}\frac{f(x)-f(α)}{x-α}=f'(α),\ (1).$$

Οπότε η f είναι συνεχής στο α, δηλαδή ισχύει $\lim\limits_{x\to α}f(x)=f(α),\ (2).$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to α}\frac{f(x)-f(α)}{\sqrt{x}-\sqrt{α}}=\lim_{x\to α}\left[\frac{f(x)-f(α)}{\sqrt{x}^2-\sqrt{α}^2}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{α}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to α}\left[\frac{f(x)-f(α)}{x-α}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{α}\right)\right]\overset{(1)}{=}f'(α)\cdot 2\sqrt{α}.$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to α}\frac{f^2(x)-f^2(α)}{\sqrt{x}-\sqrt{α}}=\lim_{x\to α}\left[\frac{f(x)-f(α)}{\sqrt{x}-\sqrt{α}}\cdot\left(f(x)+f(α)\right)\right]\underset{(2)}{\overset{(α)}{=}}$$

$$=2\sqrt{α}\cdot f'(α)\cdot 2f(α)=4\sqrt{α}\cdot f(α)\cdot f'(α).$$

18. 60 **α.** Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x}=2,\ (1).$$

Οπότε η f είναι συνεχής στο 0, δηλαδή ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0).$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2\cdot f(x)-x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2x\cdot f(x)-1\right)=2\cdot 0\cdot f(0)-1=-1\in\mathbb{R}.$$

Άρα $g'(0)=-1.$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\frac{x}{f(x)}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-3}{x}-\frac{1}{f(x)}\right)\overset{(1)}{=}$$

$$=2-\frac{1}{f(0)}=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}.$$

18. 61 Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1),\ (1)$$

και για x κοντά στο 1 ισχύει $f(x)=\frac{g(x)}{2x}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{g(x)}{2x}-\frac{g(1)}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{g(x)-x\cdot g(1)}{x(x-1)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{g(x)-g(1)-x\cdot g(1)+g(1)}{x(x-1)}\right)=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\left(\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x}-\frac{g(1)}{x}\right)\overset{(1)}{=}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(g'(1)\cdot\frac{1}{1}-\frac{g(1)}{1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(g'(1)-g(1)\right).$$

Άρα:

$$f'(1)=\frac{1}{2}\left(g'(1)-g(1)\right).$$

18. 62 Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=0,\ (1).$$

Το $f'(0)$ γράφεται $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{g^2(x)}{x}\cdot ημ\frac{1}{x^2}\right)$.

Έχουμε $\lim_{x\to 0}\frac{g^2(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\frac{g(x)}{x}\right)=g(0)\cdot 0=0$, αφού η g είναι συνεχής στο 0.

Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$\left|\frac{g^2(x)}{x}\cdot ημ\frac{1}{x^2}\right|=\left|\frac{g^2(x)}{x}\right|\cdot\left|ημ\frac{1}{x^2}\right|\leq\left|\frac{g^2(x)}{x}\right|\Rightarrow-\left|\frac{g^2(x)}{x}\right|\leq\frac{g^2(x)}{x}\cdot ημ\frac{1}{x^2}\leq\left|\frac{g^2(x)}{x}\right|.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|\dfrac{g^2(x)}{x}\right|\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{g^2(x)}{x}\right|=0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{g^2(x)}{x}\cdot ημ\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

Άρα $f'(0)=0.$

19η Ενότητα

Παραγωγίσιμες συναρτήσεις – Παράγωγος συνάρτηση – Κανόνες παραγώγισης

Α. Του τύπου Σωστό / Λάθος

19. 1 **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος **στ.** Λάθος.

19. 2 **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος.

19. 3 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό.

19. 4 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό.

19. 5 **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος.

19. 6 **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό.

19. 7 **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος.

19. 8 **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος.

19. 9 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό **στ.** Σωστό.

19. 10 **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Λάθος.

19. 11 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό.

19. 12 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό.

19. 13 **1ος** **α.** Α **β.** Με άτοπο για $g(x)=\left[f(x)+g(x)\right]-f(x)$.

2ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\begin{cases}1\ , & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$, $g(x)=-f(x)$ και $x_0=0$.

3ος **α.** Α **β.** Είναι $g=(f+g)-f$.

4ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\begin{cases}1\ , & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$, $g(x)=-f(x)$ και $x_0=0$.

19. 14 **1ος** **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=0$.

2ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\begin{cases}1\ ,\ x\geq 0\\ -1,\ x<0\end{cases}$, $g(x)=-f(x)$ και $x_0=0$.

3ος **α.** Ψ **β.** Για παράδειγμα $f(x)=\begin{cases}1\ ,\ x\geq 0\\ -1,\ x<0\end{cases}$, $g(x)=-f(x)$ και $x_0=0$.

4ος **α.** Α **β.** Παραγωγίζουμε κατά μέλη την $f(-x)=f(x)$. Βγαίνει άρτια.

5ος **α.** Ψ **β.** Παραγωγίζουμε κατά μέλη την $f(-x)=-f(x)$. Βγαίνει άρτια.

6ος **α.** Α **β.** Παραγωγίζουμε κατά μέλη την $f(x+T)=f(x)$.

Β. Πολλαπλής επιλογής

19. 15 $Α\rightarrow α$, $Β\rightarrow β$, $Γ\rightarrow β$, $Δ\rightarrow ε$, $Ε\rightarrow δ$, $ΣΤ\rightarrow γ$.

19. 16 $Α\rightarrow β$, $Β\rightarrow γ$, $Γ\rightarrow γ$, $Δ\rightarrow ε$.

19. 17 $Α\rightarrow δ$, $Β\rightarrow δ$, $Γ\rightarrow α$, $Δ\rightarrow ε$.

19. 18 $Α\rightarrow δ$, $Β\rightarrow δ$, $Γ\rightarrow ε$, $Δ\rightarrow δ$.

19. 19 $Α\rightarrow β$, $Β\rightarrow δ$, $Γ\rightarrow γ$, $Δ\rightarrow δ$.

Γ. Βασικές εφαρμογές – Ασκήσεις εμπέδωσης

19. 20 **α.** 0 **β.** 0 **γ.** 0 **δ.** 1

ε. 1 **στ.** 0 **ζ.** 1 **η.** 2020

θ. $\frac{1}{2020}$.

19. 21 **α.** $2x$ **β.** $3x^2$ **γ.** $10x^9$ **δ.** $24x^5$

ε. $\frac{x^4}{2}$ **στ.** $2x^9$.

19. 22 **α.** $3x^2+2x$ **β.** $6x+5$ **γ.** $4x^3-12x^2$ **δ.** $20x^4-20x^3-2$

ε. $6x^3+5x$ **στ.** $x^{2019}-x^{2020}$ **ζ.** $2x^5-2x^3$ **η.** x^4-x.

19. 23 **α.** $3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ **β.** $\frac{3}{x}+2e^x$ **γ.** 2συνx + 3ημx.

19. 24 **α.** $3x^2+10x+6$ **β.** $10x^4+4x^3$

γ. e^x(ημx + συνx) **δ.** $(6x^2+1)\ln x+2x^2+1$

ε. $(2x+2)\etaμx+(x^2+2x)συνx$ **στ.** $συνx\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)-\etaμx\cdot\left(x+\sqrt{x}\right)$.

19. 25 **α.** $-\frac{5}{(3x-2)^2}$ **β.** $\frac{x^2-8x-4}{\left(x^2+x\right)^2}$ **γ.** $\frac{-2x^2+x+5}{e^x}$ **δ.** $\frac{e^x(\etaμx-συνx)}{\etaμ^2x}$

ε. $\frac{συνx-\etaμx}{e^x}$ **στ.** $\frac{2xσυνx-\etaμx}{2x\sqrt{x}}$.

19. 26 **α.** $-\frac{1}{x^2}$ **β.** $-\frac{2}{x^3}$ **γ.** $\frac{6}{x^4}$ **δ.** $-\frac{συνx}{\etaμ^2x}$

ε. $-\frac{1}{x\ln^2x}$ **στ.** $-\frac{1}{e^x}$.

19. 27 **α.** $4(x+1)^3$ **β.** $5(x-2)^4$ **γ.** $-6(3-x)^5$ **δ.** $6(2x+3)^2$

ε. $2g\left(e^x\right)+x(x+4)e^x\cdot g'\left(e^x\right)+x^2e^{2x}\cdot g''\left(e^x\right)$ **στ.** $-4x\left(1-x^2\right)$.

19. 28 **α.** $2\etaμxσυνx=\etaμ2x$ **β.** $-3συν^2x\etaμx=-\frac{3}{2}συνx\cdot\etaμ2x$ **γ.** $\frac{4\ln^3x}{x}$.

19. 29 **α.** $\frac{1}{x}$ **β.** $3e^{3x}$ **γ.** $-5\etaμ5x$ **δ.** $\frac{3}{\sqrt{6x}}$

ε. $-\frac{1}{x\cdot\ln^2 3x}$ **στ.** $-\frac{4}{e^{4x}}$.

19. 30 **α.** $συνx$ **β.** $3συν3x$ **γ.** $3x^2συνx^3$

δ. $3\etaμ^2xσυνx=\frac{3}{2}\etaμx\cdot\etaμ2x$ **ε.** $9\etaμ^23xσυν3x=\frac{9}{2}\etaμ3x\cdot\etaμ6x$

στ. $9x^2\cdot\etaμ^2x^3\cdot συνx^3=\frac{9}{2}x^2\cdot\etaμx^3\cdot\etaμ2x^3$.

19. 31 **α.** 6 **β.** $12e^{2x}-4\etaμ2x$

γ. $-2e^x\etaμx$ **δ.** $4(x+1)συνx-\etaμx(x^2+2x-2)$

ε. $-\frac{2συνx}{e^x}$ **στ.** $\frac{-x^2\cdot συνx+2x\etaμx+συνx}{x^3}$.

Δ. Ασκήσεις για λύση

19.32 **α.** $f'(x)=3\cdot 4x^3+2x=12x^3+2x.$

β. $f'(x)=2\cdot 4x^3-3\cdot 3x^2-5\cdot 2x=8x^3-9x^2-10x.$

γ. $f'(x)=2x+\alpha\cdot 1=2x+\alpha.$

δ. $f'(x)=\dfrac{1}{5}\cdot 5x^4+\dfrac{1}{3}\cdot 3x^2=x^4+x^2.$

ε. $f'(x)=\left(\dfrac{1}{3}x^{12}-\dfrac{1}{3}x^9+\dfrac{5}{3}x^6+x^2-\dfrac{2019}{3}\right)'=\dfrac{1}{3}\cdot 12x^{11}-\dfrac{1}{3}\cdot 9x^8+\dfrac{5}{3}\cdot 6x^5+2x=$

$=4x^{11}-3x^8+10x^5+2x.$

στ. $f'(x)=\dfrac{1}{10}\cdot 5x^4-\dfrac{1}{8}\cdot 4x^3+\dfrac{1}{9}\cdot 3x^2-\dfrac{1}{4}\cdot 2x+1=\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{x}{2}+1.$

ζ. $f'(u)=5u^4+2\cdot 4u^3-\dfrac{1}{3}\cdot 3u^2=5u^4+8u^3-u^2.$

η. $f'(u)=0.$

19.33 **α.** $f'(x)=5x^4+2\cdot\dfrac{1}{x}-0=5x^4+\dfrac{2}{x}.$

β. $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}.$

γ. $f'(x)=2\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+e^x-0=\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+e^x.$

δ. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}+2}{2x}.$

ε. $f'(x)=\sqrt{2}\cdot(-\eta\mu x)-\sigma\upsilon\nu x+0=-\sqrt{2}\,\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x.$

στ. $f'(x)=4x^3-2x^{-3}+0=4x^3-\dfrac{2}{x^3}.$

19.34 **α.** $f'(x)=(3x^2+1)\cdot(x^2+1)+(x^3+x-2)\cdot 2x=5x^4+6x^2-4x+1.$

β. $f'(x)=(4x^3+6x^2)\cdot(3x^2+6x)+(x^4+2x^3)\cdot(6x+6)=18x^5+60x^4+48x^3.$

γ. $f'(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x+3)e^x=(x^2+4x+5)e^x.$

δ. $f'(x)=(3x^2+6x+5)\cdot\ln x+(x^3+3x^2+5x)\cdot\dfrac{1}{x}=(3x^2+6x+5)\ln x+x^2+3x+5.$

ε. $f'(x) = 2x\eta\mu x + x^2\sigma\upsilon\nu x$.

στ. $f'(x) = -14x\sigma\upsilon\nu x + 7x^2\eta\mu x$.

ζ. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{x}\ \eta\mu x = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 2x\eta\mu x}{2\sqrt{x}}$.

η. $f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \varepsilon\varphi x + \ln x \cdot \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \dfrac{\varepsilon\varphi x}{x} + \dfrac{\ln x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

θ. $f'(x) = e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x \cdot (-\eta\mu x) = (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)e^x$.

ι. $f'(x) = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \dfrac{1}{x} = e^x \cdot \left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$.

ια. $f'(x) = \dfrac{1}{2} \cdot 4x^3 - \left(3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \dfrac{1}{x}\right) = 2x^3 - 3x^2\ln x - x^2$.

ιβ. $f'(x) = 4x^3 \cdot \ln x + x^4 \cdot \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{3} \cdot 3x^2 = 4x^3\ln x + x^3 - x^2$.

19.35 **α.** $f'(x) = 3x^2 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + x^3 \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + x^3 \cdot \eta\mu x \cdot (-\eta\mu x) =$

$= 3x^2 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + x^3(\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x) = \dfrac{3}{2}x^2\ \eta\mu 2x + x^3\sigma\upsilon\nu 2x$.

β. $f'(x) = 4x^3 \cdot \sqrt{x} \cdot \ln x + x^4 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + x^4 \cdot \sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{x} =$

$= 4x^3 \cdot \sqrt{x} \cdot \ln x + \dfrac{1}{2}x^3 \cdot \sqrt{x} \cdot \ln x + x^3 \cdot \sqrt{x} =$

$= x^3\sqrt{x} \cdot \left(\dfrac{9\ln x}{2} + 1\right) = \dfrac{x^3\sqrt{x}(9\ln x + 2)}{2}$.

γ. Είναι $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (4x^2 - 1)$, άρα $f'(x) = 2x(4x^2 - 1) + (x^2 - 1) \cdot 8x = 16x^3 - 10x$.

δ. Είναι $f(x) = (x^2 - 4)(2x + 1)(2 - 3x)$, άρα:

$$f'(x) = 2x(2x+1)(2-3x) + (x^2-4) \cdot 2 \cdot (2-3x) + (x^2-4)(2x+1) \cdot (-3) =$$

$$= -24x^3 + 3x^2 + 52x - 4.$$

19.36 **α.** $f'(x) = \dfrac{-(2x+4)}{(x^2+4x)^2} = \dfrac{-2(x+2)}{x^2(x+4)^2}$.

β. $f'(x) = 2 \cdot \dfrac{-(6x-1)}{(3x^2 - x + 4)^2} = \dfrac{-12x + 2}{(3x^2 - x + 4)^2}$.

γ. $f'(x)=\dfrac{(4x-1)(3x^2+1)-(2x^2-x)\cdot 6x}{(3x^2+1)^2}=\dfrac{3x^2+4x-1}{(3x^2+1)^2}$.

δ. $f'(x)=\dfrac{-2x(1+x^2)-(2-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{-6x}{(1+x^2)^2}$.

ε. $f'(x)=\dfrac{(2x+1)(x^2+4)-(x^2+x+1)\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\dfrac{-x^2+6x+4}{(x^2+4)^2}$.

στ. $f'(x)=\dfrac{2x(x^2-2)-(x^2+e)\cdot 2x}{(x^2-2)^2}=\dfrac{-2(e+2)x}{(x^2-2)^2}$.

ζ. $f'(x)=\dfrac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x(x^2-1)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=$

$=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}+\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{8x(x^4+1)}{(x^4-1)^2}$.

η. $f'(t)=\dfrac{\frac{1}{t}\cdot t-\ln t\cdot 1}{t^2}+0=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$.

θ. $f'(\theta)=\dfrac{-14\theta\cdot ημ\theta+7\theta^2\cdot συν\theta}{ημ^2\theta}=-\dfrac{14\theta}{ημ\theta}+\dfrac{7\theta^2 σφ\theta}{ημ\theta}=\dfrac{7\theta\cdot(\theta\cdot σφ\theta-2)}{ημ\theta}$.

ι. $f'(u)=\dfrac{(2u-2)e^u-(u^2-2u)e^u}{(e^u)^2}=\dfrac{-u^2+4u-2}{e^u}$.

19.37 **α.** $f'(x)=\dfrac{-(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}^2}=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.

β. $f'(x)=\dfrac{-\left(1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x-\sqrt{x})^2}=\dfrac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-\sqrt{x})^2}$.

γ. $f'(\theta)=\dfrac{-συν\theta}{ημ^2\theta}+\dfrac{-(-ημ\theta)}{συν^2\theta}-0=\dfrac{-συν\theta}{ημ^2\theta}+\dfrac{ημ\theta}{συν^2\theta}=$

$=\dfrac{ημ^3\theta-συν^3\theta}{ημ^2\theta\cdot συν^2\theta}=\dfrac{ημ^3\theta-συν^3\theta}{(ημ\theta\cdot συν\theta)^2}$.

δ. $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\right)'=\left(x^{-\frac{4}{3}}\right)'=-\dfrac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}=-\dfrac{4}{3x^2\cdot\sqrt[3]{x}}.$

ε. $f'(x)=\dfrac{2xe^x-x^2e^x}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{x(2-x)}{e^x}.$

στ. $f'(x)=\dfrac{3x^2\ln x-x^3\cdot\dfrac{1}{x}}{\ln^2 x}=\dfrac{x^2(3\ln x-1)}{\ln^2 x}.$

ζ. $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\left(x^2+1\right)-\ln x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{x+\dfrac{1}{x}-2x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{x^2(1-2\ln x)+1}{x\left(x^2+1\right)^2}.$

η. $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot e^x-(\ln x-e)e^x}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\ln x+e}{e^x}=\dfrac{x\cdot(e-\ln x)+1}{xe^x}.$

θ. $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln x-\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{x}}{\ln^2 x}=\dfrac{\sqrt{x}\cdot\ln x-2\sqrt{x}}{2x\ln^2 x}.$

ι. $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(x^2+\alpha^2\right)-\sqrt{x}\cdot 2x}{\left(x^2+\alpha^2\right)^2}=\dfrac{-3x^2+\alpha^2}{2\sqrt{x}\left(x^2+\alpha^2\right)^2}.$

ια. $f'(x)=\dfrac{\left(3x^2-2\right)\cdot\sqrt{x}-\left(x^3-2x\right)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2}=\dfrac{3x^2\sqrt{x}-2\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}x^2\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x}=$

$=\dfrac{5}{2}x\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

ιβ. $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\cdot x-\varepsilon\varphi x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1}{x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x}-\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x^2}.$

ιγ. $f'(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x(1+\sigma\upsilon\nu x)-\eta\mu x(-\eta\mu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x+1}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}=\dfrac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}.$

ιδ. $f'(x)=\dfrac{(2\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)(1+\eta\mu x)-(2\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu x)^2}=\dfrac{1+\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu x)^2}.$

19.38 α. $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x\sqrt{x}-\ln x\cdot\dfrac{3}{2}\sqrt{x}}{x^3}=\dfrac{\sqrt{x}\cdot(2-3\ln x)}{2x^3}.$

β. $f'(x)=\dfrac{\left(x^2e^x\sigma\upsilon\nu x\right)'\cdot(x+1)-x^2e^x\sigma\upsilon\nu x\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}=$

$=\dfrac{\left(2xe^x\sigma\upsilon\nu x+x^2e^x\sigma\upsilon\nu x-x^2e^x\eta\mu x\right)\cdot(x+1)-x^2e^x\sigma\upsilon\nu x}{(x+1)^2}=$

$=\dfrac{2x^2e^x\sigma\upsilon\nu x+x^3e^x\sigma\upsilon\nu x-x^3e^x\eta\mu x+2xe^x\sigma\upsilon\nu x+\cancel{x^2e^x\sigma\upsilon\nu x}-x^2e^x\eta\mu x-\cancel{x^2e^x\sigma\upsilon\nu x}}{(x+1)^2}=$

$=\dfrac{e^x\left[\left(x^3+2x^2+2x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x-x^2(x+1)\cdot\eta\mu x\right]}{(x+1)^2}=$

$=\dfrac{e^x\left[\left(x^2+2x+2\right)\cdot x\cdot\sigma\upsilon\nu x-(x+1)\cdot x^2\cdot\eta\mu x\right]}{(x+1)^2}.$

19.39 **α.** $f'(x)=4\cdot(2x+5)^3\cdot(2x+5)'=8(2x+5)^3.$

β. $f'(x)=3(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2\cdot(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)'=3\cdot(1+\eta\mu 2x)(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x).$

γ. $f'(x)=-5\cdot\left(4x^5+5x^4\right)^{-6}\cdot\left(4x^5+5x^4\right)'=\dfrac{-100x^3(x+1)}{\left(4x^5+5x^4\right)^6}.$

δ. $f'(x)=6\left(e^{2x}+3e^x\right)^5\cdot\left(e^{2x}+3e^x\right)'=6\left(2e^{2x}+3e^x\right)\left(e^{2x}+3e^x\right)^5.$

ε. $f'(x)=2\cdot\dfrac{1+x}{1-x}\cdot\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)'=2\cdot\dfrac{1+x}{1-x}\cdot\dfrac{-2x}{(1-x)^2}=\dfrac{-4x(1+x)}{(1-x)^3}.$

στ. $f'(x)=-3\cdot\left(\dfrac{x^2}{2}+x^3\right)^{-4}\cdot\left(\dfrac{x^2}{2}+x^3\right)'=\dfrac{-3\left(x+3x^2\right)}{\left(\dfrac{x^2}{2}+x^3\right)^4}.$

19.40 **α.** $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(1+x^2\right)}\cdot\left(1+x^2\right)'=\dfrac{2x}{\sigma\upsilon\nu^2\left(1+x^2\right)}.$

β. $f'(x)=\dfrac{1}{\dfrac{16}{x^2}+2x}\cdot\left(\dfrac{16}{x^2}+2x\right)'=\dfrac{\dfrac{-32}{x^3}+2}{\dfrac{16}{x^2}+2x}=\dfrac{-32+2x^3}{16x+2x^4}=\dfrac{-16+x^3}{8x+x^4}.$

γ. $f'(x)=3\sigma\upsilon\nu^2\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\left[-\eta\mu\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]\cdot 2=-6\cdot\sigma\upsilon\nu^2\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\eta\mu\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right).$

δ. $f'(x)=\pi^{x+\pi}\cdot\ln\pi\cdot(x+\pi)'=\pi^{x+\pi}\cdot\ln\pi.$

ε. $f'(x)=2\cdot\eta\mu x^2\cdot\sigma\upsilon\nu x^2\cdot 2x+2=2x\cdot\eta\mu 2x^2+2.$

στ. $f'(x)=2\cdot\left(1+e^{x^2+1}\right)\cdot e^{x^2+1}\cdot 2x=4x\cdot e^{x^2+1}\cdot\left(1+e^{x^2+1}\right).$

ζ. $f'(x)=5\cdot 3\eta\mu^2x^2\cdot\sigma\upsilon\nu x^2\cdot 2x-e^{-x}=30x\cdot\eta\mu^2x^2\cdot\sigma\upsilon\nu x^2-e^{-x}.$

η. $f'(x)=2\left(\sqrt{x}+\sigma\upsilon\nu x^2\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\eta\mu x^2\cdot 2x\right)=\left(\sqrt{x}+\sigma\upsilon\nu x^2\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-4x\eta\mu x^2\right).$

19.41 **α.** $f'(x)=1\cdot e^{-x^2}+x\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)=\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}.$

β. $f'(x)=1\cdot 2^{3x-4}+(x-1)\cdot 2^{3x-4}\cdot\ln 2\cdot(3x-4)'=2^{3x-4}\cdot\left[1+3\ln 2\cdot(x-1)\right].$

γ. $f'(x)=e^{x^2+1}\cdot 2x\cdot\left(x^2+1\right)\cdot e^{x^2+1}\cdot 2x=2x\cdot e^{x^2+1}\cdot\left(x^2+2\right).$

δ. $f'(x)=4\cdot\left(4x^3+x+1\right)^3\cdot\left(4x^3+x+1\right)'\cdot\ln x+\left(4x^3+x+1\right)^4\cdot\dfrac{1}{x}=$

$$=4\ln x\cdot\left(12x^2+1\right)\cdot\left(4x^3+x+1\right)^3+\frac{\left(4x^3+x+1\right)^4}{x}.$$

ε. $f'(x)=e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x^2+e^x\cdot(-\eta\mu x^2)\cdot 2x=e^x\cdot(\sigma\upsilon\nu x^2-2x\eta\mu x^2).$

στ. $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\eta\mu x+\sqrt{\ln x}\cdot\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{\eta\mu x}{2x\sqrt{\ln x}}+\sqrt{\ln x}\cdot\sigma\upsilon\nu x.$

ζ. $f'(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)'}{\sqrt{x}+1}\cdot x^2+\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot 2x=\dfrac{x\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}+2x\cdot\ln\left(\sqrt{x}+1\right).$

η. $f'(x)=1\cdot\sqrt{\dfrac{x}{\lambda-x}}+x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{\lambda-x}}}\cdot\left(\dfrac{x}{\lambda-x}\right)'=\sqrt{\dfrac{x}{\lambda-x}}+\dfrac{x}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{\lambda-x}{x}}\cdot\dfrac{\lambda}{(\lambda-x)^2}.$

θ. Είναι $f(x)=\left(x^2-4\right)^3\cdot\left(x^2+1\right)$, άρα:

$$f'(x)=3\left(x^2-4\right)^2\cdot 2x\cdot\left(x^2+1\right)+\left(x^2-4\right)^3\cdot 2x=$$
$$=6x\cdot\left(x^2-4\right)^2\cdot\left(x^2+1\right)+2x\left(x^2-4\right)^3.$$

ι. $f'(x)=4(x+3)^3\cdot(x-1)^5+(x+3)^4\cdot 5(x-1)^4=$

$$=(x+3)^3\cdot(x-1)^4\cdot\left[4(x-1)+5(x+3)\right]=(x+3)^3(x-1)^4\cdot(9x+11).$$

19.42 **α.** $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x^2 \cdot 2x-[2x\cdot\sigma\upsilon\nu x-(x^2-2)\cdot\eta\mu x]=$

$=4x\cdot\sigma\upsilon\nu x^2-2x\sigma\upsilon\nu x+(x^2-2)\eta\mu x.$

β. $f'(x)=-\eta\mu(\pi x)\cdot\pi\cdot e^{\eta\mu(ex)}+\sigma\upsilon\nu(\pi x)\cdot e^{\eta\mu(ex)}\cdot\sigma\upsilon\nu(ex)\cdot e=$

$=-\pi\cdot\eta\mu(\pi x)\cdot e^{\eta\mu(ex)}+e^{\eta\mu(ex)+1}\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)\cdot\sigma\upsilon\nu(ex).$

γ. $f'(x)=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x^3+\eta\mu^2x\cdot 2\sigma\upsilon\nu x^3\cdot(-\eta\mu x^3)\cdot 3x^2=$

$=\eta\mu 2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x^3-\eta\mu^2x\cdot\eta\mu 2x^3\cdot 3x^2=$

$=\eta\mu 2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x^3-3x^2\cdot\eta\mu^2x\cdot\eta\mu 2x^3.$

19.43 **α.** $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}+\dfrac{-\left(\sqrt{t}\right)'}{\sqrt{t}^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}=\dfrac{t-1}{2t\sqrt{t}}.$

β. $f'(x)=\dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{x}\cdot\ln x-x\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\dfrac{\sqrt{x}\cdot(3\ln x-2)}{2\ln^2 x}.$

γ. $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot x-\sqrt{\ln x}\cdot 1}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}-\sqrt{\ln x}}{x^2}=\dfrac{1-2\ln x}{2x^2\cdot\sqrt{\ln x}}.$

δ. $f'(y)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu y\cdot e^{y^2+1}-\eta\mu y\cdot e^{y^2+1}\cdot 2y}{\left(e^{y^2+1}\right)^2}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu y-2y\cdot\eta\mu y}{e^{y^2+1}}.$

19.44 **α.** Είναι $f(x)=x^x=e^{x\ln x}$, άρα:

$$f'(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)'=x^x\cdot(\ln x+1).$$

β. Είναι $f(x)=x^{\ln x}=e^{\ln x\cdot\ln x}=e^{\ln^2 x}$, άρα:

$$f'(x)=\left(e^{\ln^2 x}\right)'=e^{\ln^2 x}\cdot\left(\ln^2 x\right)'=x^{\ln x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=2x^{\ln x-1}\cdot\ln x.$$

γ. Είναι $f(x)=x^{\sigma\upsilon\nu x}=e^{\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln x}$, άρα:

$$f'(x)=e^{\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln x}\cdot(\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln x)'=x^{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\left(-\eta\mu x\cdot\ln x+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right).$$

δ. Είναι $f(x)=(\ln x)^{2x}=e^{2x\cdot\ln(\ln x)}$, άρα:

$$f'(x)=e^{2x\cdot\ln(\ln x)}\cdot\left(2x\cdot\ln(\ln x)\right)'=(\ln x)^{2x}\cdot\left[2\ln(\ln x)+2x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right]=$$

$$=(\ln x)^{2x}\cdot\left[2\ln(\ln x)+\frac{2}{\ln x}\right].$$

19.45 **α.** Είναι $f(x)=\left(x^2+1\right)^{x^2}=e^{x^2\cdot\ln\left(x^2+1\right)}$, άρα:

$$f'(x)=e^{x^2\cdot\ln\left(x^2+1\right)}\cdot\left[x^2\cdot\ln\left(x^2+1\right)\right]'=\left(x^2+1\right)^{x^2}\cdot\left[2x\cdot\ln\left(x^2+1\right)+x^2\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right]=$$

$$=\left(x^2+1\right)^{x^2}\cdot\left[2x\cdot\ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x^3}{x^2+1}\right].$$

β. Είναι $f(x)=\left(2+\sqrt{x}\right)^{2\sqrt{x}}=e^{2\sqrt{x}\cdot\ln\left(2+\sqrt{x}\right)}$, άρα:

$$f'(x)=e^{2\sqrt{x}\cdot\ln\left(2+\sqrt{x}\right)}\cdot\left[2\sqrt{x}\cdot\ln\left(2+\sqrt{x}\right)\right]'=$$

$$=\left(2+\sqrt{x}\right)^{2\sqrt{x}}\cdot\left[\frac{\ln\left(2+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}\cdot\frac{\left(2+\sqrt{x}\right)'}{2+\sqrt{x}}\right]=$$

$$=\left(2+\sqrt{x}\right)^{2\sqrt{x}}\cdot\left[\frac{\ln\left(2+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2+\sqrt{x}}\right].$$

γ. Είναι $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, άρα:

$$f'(x)=e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\cdot\left[x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]'=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]=$$

$$=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right].$$

δ. Είναι $f(x)=(5x)^{\eta\mu x}=e^{\eta\mu x\cdot\ln 5x}$, άρα:

$$f'(x)=e^{\eta\mu x\cdot\ln 5x}\cdot\left(\eta\mu x\cdot\ln 5x\right)'=\left(5x\right)^{\eta\mu x}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln 5x+\eta\mu x\cdot\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\left(5x\right)^{\eta\mu x}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln 5x+\frac{\eta\mu x}{x}\right).$$

19.46 **α.** Έχουμε:

$$f'(x)=\left(x^2\cdot\sqrt{x^3-2}\right)'=2x\sqrt{x^3-2}+x^2\cdot\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-2}}=2x\sqrt{x^3-2}+\frac{3x^4}{2\sqrt{x^3-2}}.$$

Επομένως:

$$f'(x_0)=f'(3)=2\cdot 3\cdot\sqrt{3^3-2}+\frac{3\cdot 3^4}{2\sqrt{3^3-2}}=2\cdot 3\cdot 5+\frac{243}{10}=\frac{543}{10}.$$

β. Είναι $f(x)=x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}$, οπότε έχουμε $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

Επομένως:

$$f'(2)=\frac{1}{3\sqrt[3]{2^2}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}.$$

γ. Έχουμε:

$$f'(x)=\sigma\upsilon\nu^4(2\pi x)+x\cdot 4\sigma\upsilon\nu^3(2\pi x)\cdot(-\eta\mu 2\pi x)\cdot 2\pi=$$
$$=\sigma\upsilon\nu^4(2\pi x)-8\pi x\cdot\sigma\upsilon\nu^3(2\pi x)\cdot\eta\mu(2\pi x).$$

Επομένως:

$$f'\left(\frac{1}{12}\right)=\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\right)^3\cdot\eta\mu\frac{\pi}{6}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4-\frac{2\pi}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=$$
$$=\frac{9}{16}-\frac{\sqrt{3}\pi}{8}=\frac{9-2\sqrt{3}\pi}{16}.$$

δ. Έχουμε $f'(x)=\dfrac{(3x^2+2)(1-4\sqrt{x})-(x^3+2x)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{(1-4\sqrt{x})^2}$.

Επομένως:

$$f'(4)=\frac{(3\cdot 4^2+2)\cdot(1-4\sqrt{4})-(4^3+2\cdot 4)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{4}}\right)}{(1-4\sqrt{4})^2}=$$
$$=\frac{50\cdot(-7)-72\cdot(-1)}{49}=-\frac{278}{49}.$$

19.47 Έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)'=\frac{-(x-1)'}{(x-1)^2}-\frac{(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2}=$$
$$=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}.$$

$$g'(x)=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)'-\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)'=$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+1\right)-\left(\sqrt{x}-1\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}-\frac{\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}.$$

Οι $f'(x)$ και $g'(x)$ γράφονται:

$$f'(x)=-\frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(\sqrt{x}+1\right)^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{-2\sqrt{x}-\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=$$

$$=\frac{-\cancel{2\sqrt{x}}-x+\cancel{2\sqrt{x}}-1}{2\sqrt{x}\left(x-1\right)^2}=\frac{-x-1}{2\sqrt{x}\left(x-1\right)^2}$$

και

$$g'(x)=\frac{-\left(\sqrt{x}+1\right)^2-\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{-x-\cancel{2\sqrt{x}}-1-x+\cancel{2\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}\left(x-1\right)^2}=\frac{2\left(-x-1\right)}{\sqrt{x}\left(x-1\right)^2}.$$

Άρα $f'\neq g'$.

19.48 Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ο παρακάτω τύπος της f:

$$f(x)=\begin{cases}-x-1 & ,\ -2\le x<0\\ 2x-1 & ,\ 0\le x<2\\ 3 & ,\ 2\le x<4\\ -3x+15, & 4\le x<6\\ x-9 & ,\ 6\le x\le 9\end{cases}.$$

Έχουμε:

$$f'(x)=\begin{cases}-1, & -2<x<0\\ 2\ , & 0<x<2\\ 0\ , & 2<x<4\\ -3, & 4<x<6\\ 1\ , & 6<x<9\end{cases}$$

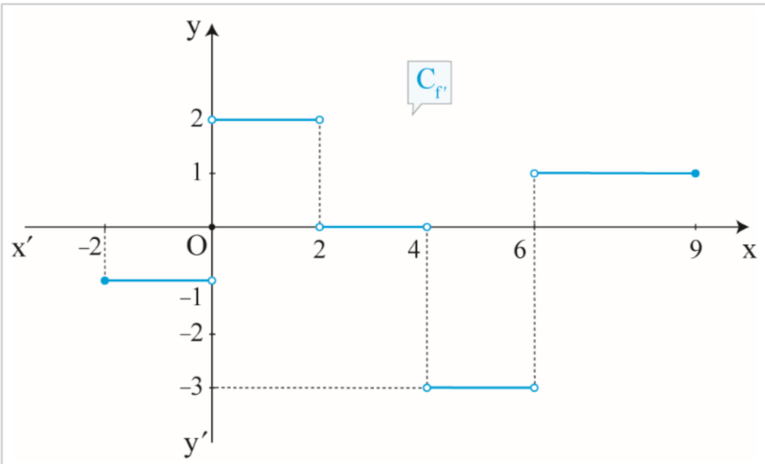
και επιπλέον:

$$f'(-2)=\lim_{x\to -2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=-1,\quad f'(9)=\lim_{x\to 9^-}\frac{f(x)-f(9)}{x-9}=1,$$

ενώ δεν ορίζονται παράγωγες τιμές στα 0, 2, 4, 6 (τα πλευρικά όρια των ορίων του ορισμού διαφέρουν στα σημεία αυτά).

Άρα, τελικά:

$$f'(x)=\begin{cases}-1, & -2\le x<0\\ 2\ , & 0<x<2\\ 0\ , & 2<x<4\\ -3, & 4<x<6\\ 1\ , & 6<x\le 9\end{cases}.$$



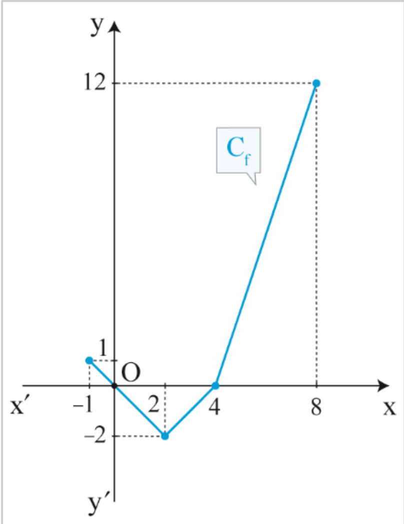
19.49 Είναι:

$$f'(x)=\begin{cases}-1, & \text{αν } -1\le x<2\\ 1\ , & \text{αν } 2<x<4\\ 3\ , & \text{αν } 4<x\le 8\end{cases}.$$

Η C_f αποτελείται από τρία ευθύγραμμα τμήματα με κλίσεις:

- -1 (άρα, είναι παράλληλο στην $y=-x$) για $-1\le x\le 2$,
- 1 (άρα, είναι παράλληλο στην $y=x$) για $2\le x\le 4$,
- 3 (άρα, είναι παράλληλο στην $y=3x$) για $4\le x\le 8$.

Ξεκινώντας από το (–1, 1) και λόγω της συνέχειας στα 2 και 4, προκύπτει η γραφική παράσταση που απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα



19.50 **α.** Για την f πρέπει να ισχύουν:

- $x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x^2\geq 1 \Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 1$ και
- $x+\sqrt{x^2-1}>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}>-x,\ (1).$
  - Για $x\geq 0 \Leftrightarrow -x\leq 0$ η (1) ισχύει.
  - Για $x<0 \Leftrightarrow -x>0$ η (1) γράφεται:

$$\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2>(-x)^2 \Leftrightarrow x^2-1>x^2 \Leftrightarrow -1>0 \text{ που δεν ισχύει.}$$

Συνεπώς $\begin{cases} x\leq -1 \text{ ή } x\geq 1 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 1.$ Άρα $D_f=[1,+\infty).$

Για την g πρέπει να ισχύουν:

- $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ και
- $\dfrac{x+1}{x-1}>0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)>0 \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1.$

Άρα $D_g=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty).$

β. Έχουμε:

$$f'(x)=\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)'=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{x^2-1}+x^2-1}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

και:

$$g'(x)=\left(\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{2\cdot\frac{x+1}{x-1}}=\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{2(x+1)}{x-1}}=\frac{-1}{x^2-1}=-\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2=-f'(x)^2.$$

19.51 Είναι $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1+\eta\mu^2x}$, άρα:

$$f'(x)=\frac{2\sigma\upsilon\nu x\cdot(-\eta\mu x)\cdot\left(1+\eta\mu^2x\right)-\sigma\upsilon\nu^2x\cdot 2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\left(1+\eta\mu^2x\right)^2}=$$

$$=\frac{-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\cdot\left(1+\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x\right)}{\left(1+\eta\mu^2x\right)^2}=\frac{-2\eta\mu 2x}{\left(1+\eta\mu^2x\right)^2}.$$

Έχουμε:

- $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}}{1+\eta\mu^2\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{3}$ και

- $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\dfrac{-2\eta\mu\frac{\pi}{3}}{1+\left(\eta\mu^2\frac{\pi}{6}\right)^2}=\dfrac{-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2}=\dfrac{-\sqrt{3}}{\left(\frac{5}{4}\right)^2}=-\dfrac{16\sqrt{3}}{25}.$

Άρα:

$$3f\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{25}{8\sqrt{3}}\cdot f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\cdot\frac{1}{3}-\frac{25}{8\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{16\sqrt{3}}{25}\right)=1+2=3.$$

19.52 **α.** $g'(x)=\left(f(\eta\mu x)+\ln|f(x)|\right)'=f'(\eta\mu x)\cdot\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{f'(x)}{f(x)}.$

β. $g'(x)=\left[\eta\mu\left(f(x)\right)^2\right]'=\sigma\upsilon\nu\left(f(x)\right)^2\cdot\left[\left(f(x)\right)^2\right]'=\sigma\upsilon\nu\left(f^2(x)\right)\cdot 2f(x)\cdot f'(x).$

γ. $g'(x)=\left(\left[f(\sigma\upsilon\nu x)\right]^2\right)'=2\cdot f(\sigma\upsilon\nu x)\cdot\left[f(\sigma\upsilon\nu x)\right]^2=$

$=2\cdot f(\sigma\upsilon\nu x)\cdot f'(\sigma\upsilon\nu x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'=-2\eta\mu x\cdot f(\sigma\upsilon\nu x)\cdot f'(\sigma\upsilon\nu x).$

19.53 **α.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g'(x)=\left(\frac{f(x)}{x^2+1}+e^{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot(x^2+1)-f(x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}+e^{f(x)}\cdot f'(x)=$$

$$=\frac{f'(x)}{x^2+1}-\frac{2xf(x)}{(x^2+1)^2}+e^{f(x)}\cdot f'(x).$$

β. Για κάθε x > 0 έχουμε:

$$g'(x)=\left(\frac{x^4f(x)}{\ln x}\right)'=\frac{\left(4x^3f(x)+x^4f'(x)\right)\cdot\ln x-x^4f(x)\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=$$

$$=\frac{x^3\left(4f(x)+xf'(x)\right)}{\ln x}-\frac{x^3f(x)}{\ln^2 x}.$$

γ. Για κάθε x > 0 έχουμε:

$$g'(x)=\left(\frac{1+xf(x)}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{\left(f(x)+xf'(x)\right)\cdot\sqrt{x}-\left(1+xf(x)\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{2x\left(f(x)+xf'(x)\right)-\left(1+xf(x)\right)}{2x\sqrt{x}}=\frac{xf(x)+2x^2f'(x)-1}{2x\sqrt{x}}.$$

19.54 **α.** Η $f(x)=\sqrt[4]{(x-1)^3}$ ορίζεται στο $[1,+\infty)$.

Για $x\in(1,+\infty)$ έχουμε:

$$f'(x)=\left[(x-1)^{\frac{3}{4}}\right]'=\frac{3}{4}\cdot(x-1)^{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4\cdot\sqrt[4]{x-1}}.$$

Επιπλέον:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt[4]{(x-1)^3}-0}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt[4]{(x-1)^3}}{\sqrt[4]{(x-1)^4}}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt[4]{x-1}}\overset{\left(\frac{1}{0^+}\right)}{=}+\infty.$$

Συνεπώς, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Άρα:

$$f'(x)=\frac{3}{4\cdot\sqrt[4]{x-1}},\ x>1.$$

β. Η $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^4}$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι:

$$f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^4}=\sqrt[3]{|x-1|^4}=|x-1|^{\frac{4}{3}}=\begin{cases}(x-1)^{\frac{4}{3}}, & x\geq1\\(1-x)^{\frac{4}{3}}, & x<1\end{cases}.$$

- Για x > 1 έχουμε:

$$f'(x)=\left[(x-1)^{\frac{4}{3}}\right]'=\frac{4}{3}\cdot(x-1)^{\frac{1}{3}}\cdot(x-1)'=\frac{4\cdot\sqrt[3]{x-1}}{3}.$$

- Για x < 1 έχουμε:

$$f'(x)=\left[(1-x)^{\frac{4}{3}}\right]'=\frac{4}{3}\cdot(1-x)^{\frac{1}{3}}\cdot(1-x)'=\frac{-4\cdot\sqrt[3]{1-x}}{3}.$$

Επιπλέον:

◦ $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)^{\frac{4}{3}}-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^{\frac{1}{3}}=0$ και

◦ $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(1-x)^{\frac{4}{3}}-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(1-x)\cdot(1-x)^{\frac{1}{3}}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\left[-(1-x)^{\frac{1}{3}}\right]=0.$

Συνεπώς:

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0.$$

Άρα:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{4\cdot\sqrt[3]{x-1}}{3}, & x\geq1\\[2mm] \dfrac{-4\cdot\sqrt[3]{1-x}}{3}, & x<1\end{cases}.$$

γ. Η $f(x)=\sqrt[5]{x^2}+1$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και γράφεται:

$$f(x)=\sqrt[5]{x^2}+1=\sqrt[5]{|x|^2}+1=|x|^{\frac{2}{5}}+1=\begin{cases}x^{\frac{2}{5}}+1, & x\geq0\\ (-x)^{\frac{2}{5}}+1, & x<0\end{cases}.$$

- Για x > 0 έχουμε:

$$f'(x)=\left(x^{\frac{2}{5}}+1\right)'=\frac{2}{5}\cdot x^{-\frac{3}{5}}=\frac{2}{5\cdot\sqrt[5]{x^3}} \quad \text{ή} \quad \frac{2}{5\cdot x^{\frac{3}{5}}}.$$

- Για x < 0 έχουμε:

$$f'(x)=\left[(-x)^{\frac{2}{5}}+1\right]'=\frac{2}{5}\cdot(-x)^{-\frac{3}{5}}\cdot(-x)'=\frac{-2}{5\cdot\sqrt[5]{(-x)^3}} \quad \text{ή} \quad \frac{-2}{5\cdot(-x)^{\frac{3}{5}}}.$$

Επιπλέον:

$$f'(x)=\left[(-x)^{\frac{2}{5}}+1\right]'=\frac{2}{5}\cdot(-x)^{-\frac{3}{5}}\cdot(-x)'=\frac{-2}{5\cdot\sqrt[5]{(-x)^3}}.$$

Συνεπώς, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
Άρα:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{5\cdot x^{\frac{3}{5}}} &, x>0\\[2mm] \dfrac{-2}{5\cdot(-x)^{\frac{3}{5}}} &, x<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2}{5\cdot\sqrt[5]{x^3}} &, x>0\\[2mm] \dfrac{-2}{5\cdot\sqrt[5]{(-x)^3}} &, x<0\end{cases}.$$

δ. Η $f(x)=(x+2)^{\frac{4}{5}}=\sqrt[5]{(x+2)^4}$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και γράφεται:

$$f(x)=(x+2)^{\frac{4}{5}}=|x+2|^{\frac{4}{5}}=\begin{cases}(x+2)^{\frac{4}{5}} &, x\geq -2\\ (-x-2)^{\frac{4}{5}} &, x<-2\end{cases}.$$

Τότε:

- για x > –2 έχουμε:

$$f'(x)=\left[(x+2)^{\frac{4}{5}}\right]'=\frac{4}{5}\cdot(x+2)^{-\frac{1}{5}}\cdot(x+2)'=\frac{4}{5\cdot\sqrt[5]{x+2}},$$

- για x < –2 έχουμε:

$$f'(x)=\left[\left(-(x+2)\right)^{\frac{4}{5}}\right]'=\frac{4}{5}\cdot(-x-2)^{-\frac{1}{5}}\cdot(-x-2)'=\frac{-4}{5\cdot\sqrt[5]{-x-2}}.$$

Επιπλέον:

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{(x+2)^{\frac{4}{5}}-0}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{(x+2)^{\frac{1}{5}}}\overset{\left(\frac{1}{0^+}\right)}{=}+\infty.$$

Συνεπώς, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο –2.
Άρα:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{5\cdot\sqrt[5]{x+2}} &, x>-2\\[2mm] \dfrac{-4}{5\cdot\sqrt[5]{-x-2}} &, x<-2\end{cases}.$$

ε. Η $f(x)=\left(x+\sqrt[3]{x}\right)^4$ ορίζεται στο $[0,+\infty)$.

Για x > 0 έχουμε:

$$f'(x)=\left[\left(x+\sqrt[3]{x}\right)^4\right]=4\cdot\left(x+\sqrt[3]{x}\right)^3\cdot\left(1+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right).$$

Επιπλέον:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(x+\sqrt[3]{x}\right)^4}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^4=\lim_{x\to 0^+}\left(x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{12}}\right)^4=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[12]{x}\right)^4=\sqrt[4]{0^3}+\sqrt[12]{0}=0.$$

Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=0$.

Άρα:

$$f'(x)=\begin{cases}4\left(x+\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}\right), & x>0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}.$$

στ. Η $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{3}}$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$, αφού $1+x^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$f'(x)=-\frac{1}{3}\cdot\left(1+x^2\right)^{-\frac{4}{3}}\cdot\left(1+x^2\right)'=\frac{-2x}{3\cdot\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^4}},\ x\in\mathbb{R}.$$

19.55 **α.** Αν $f(x)=x$, τότε το όριο γράφεται:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h},\ (1).$$

Είναι $f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1,\ x\in\mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)-1}{h}=f'(1)=1.$$

β. Αν $f(x)=x^x$, τότε το όριο γράφεται:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h},\ (2).$$

Για $f(x)=x^x=e^{x\ln x},\ x>0$, έχουμε:

$$f'(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)'=x^x\cdot(\ln x+1).$$

Άρα, η (2) γίνεται:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^{1+h}-1}{h}=f'(1)=1^1\cdot(\ln 1+1)=1.$$

γ. Το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to e}\frac{1-\ln x}{(x-e)\ln x}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{1}{\ln x}-1}{x-e},\ (3).$$

Αν $f(x)=\dfrac{1}{\ln x},\ x\in(0,1)\cup(1,+\infty),$ τότε $f(e)=\dfrac{1}{\ln e}=1$ και έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\ln x}\right)'=\frac{-(\ln x)'}{\ln^2 x}=-\frac{1}{x\cdot\ln^2 x}.$$

Άρα, η (3) γίνεται:

$$\lim_{x\to e}\frac{1-\ln x}{(x-e)\ln x}=\lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)=-\frac{1}{e\cdot\ln^2 e}=-\frac{1}{e}.$$

δ. Αν $f(x)=$ ημx, τότε το όριο γράφεται:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\etaμ(\pi+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\etaμ(\pi+h)-\etaμ\pi}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h},\ (4).$$

Για $f(x)=$ ημx, $x\in\mathbb{R}$, είναι $f'(x)=$ συνx, άρα η (4) γίνεται:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\etaμ(\pi+h)}{h}=f'(\pi)=συν\pi=-1.$$

ε. Αν $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, τότε το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x-\frac{1}{2}},\ (5).$$

Για $f(x)=\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

οπότε $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ και η (5) γίνεται:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

19.56 **α.** Αν $f(x)=$ ημx, τότε το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\etaμx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0},\ (1).$$

Για $f(x)=ημx,\ x\in\mathbb{R},$ είναι $f'(x)=συνx.$ Άρα, η (1) γίνεται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημx}{x}=f'(0)=συν0=1.$$

β. Αν $f(x)=συνx,$ τότε το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{συνx-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0},\ (2).$$

Για $f(x)=συνx,\ x\in\mathbb{R},$ είναι $f'(x)=-ημx.$ Άρα, η (2) γίνεται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{συνx-1}{x}=f'(0)=-ημ0=0.$$

γ. Αν $f(x)=e^x,$ τότε το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0},\ (3).$$

Για $f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R},$ είναι $f'(x)=e^x.$ Άρα, η (3) γίνεται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=f'(0)=e^0=1.$$

δ. Αν $f(x)=\sqrt{x+1},$ τότε το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3},\ (4).$$

Για $f(x)=\sqrt{x+1},\ x\ge -1,$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}},\ x>-1.$ Άρα, η (4) γίνεται:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3+1}}=\frac{1}{4}.$$

ε. Αν $f(x)=\ln(x^2+1),$ τότε το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2+1)-\ln 2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1},\ (5).$$

Για $f(x)=\ln(x^2+1),\ x\in\mathbb{R},$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}=\frac{2x}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}.$$

Άρα, η (5) γίνεται:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2+1)-\ln 2}{x-1}=f'(1)=\frac{2\cdot 1}{1^2+1}=1.$$

στ. Το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\varepsilon\varphi^2 x-1}{4x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{4}\left(\varepsilon\varphi^2 x-1\right)}{\frac{1}{4}\left(4x-\pi\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\varepsilon\varphi^2 x}{4}-\frac{1}{4}}{x-\frac{\pi}{4}},\ (6).$$

Για $f(x)=\frac{\varepsilon\varphi^2 x}{4},\ x\in\mathbb{R}-\left\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right\}$, έχουμε:

$$f'(x)=\frac{1}{4}\cdot 2\varepsilon\varphi x\cdot\left(\varepsilon\varphi x\right)'=\frac{\varepsilon\varphi x}{2}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\varepsilon\varphi x}{2}\cdot\left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right)$$

όπου:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{4}}{4}=\frac{1^2}{4}=\frac{1}{4}.$$

Άρα, η (6) γίνεται:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\varepsilon\varphi^2 x-1}{4x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\varepsilon\varphi^2 x}{4}-\frac{1}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\cdot\left(1+\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

ζ. Αν $f(x)=\alpha^x$, τότε το όριο γράφεται:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha^2\left(\alpha^h-1\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\alpha^{2+h}-\alpha^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h},\ (7).$$

Για $f(x)=\alpha^x,\ x\in\mathbb{R}$, είναι $f'(x)=\alpha^x\cdot\ln\alpha$. Άρα, η (7) γίνεται:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha^2\left(\alpha^h-1\right)}{h}=f'(2)=\alpha^2\cdot\ln\alpha.$$

19.57 **α.** Για $x<0$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{3}+\frac{x}{2}\right)'=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}.$$

Για $x>0$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(2\sqrt{x}+x\right)'=\frac{1}{\sqrt{x}}+1.$$

Επιπλέον:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}+x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)=+\infty\notin\mathbb{R}.$$

Συνεπώς, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Άρα:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}, & x<0\\ \frac{1}{\sqrt{x}}+1, & x>0\end{cases}.$$

β. Για x < 0 έχουμε:

$$f'(x)=2x\eta\mu x+(x^2+7)\sigma\upsilon\nu x.$$

Για x > 0 έχουμε:

$$f'(x)=3x^2\sigma\upsilon\nu x-x^3\eta\mu x+7.$$

Επιπλέον:

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{(x^2+7)\eta\mu x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[(x^2+7)\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right]=7\cdot 1=7$ και
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^3\sigma\upsilon\nu x+7x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2\sigma\upsilon\nu x+7)=0+7=7.$

Συνεπώς:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=7.$$

Άρα:

$$f'(x)=\begin{cases}2x\eta\mu x+(x^2+7)\sigma\upsilon\nu x, & x<0\\ 3x^2\sigma\upsilon\nu x-x^3\eta\mu x+7, & x\geq 0\end{cases}.$$

19.58 **α.** Για x > 0 έχουμε:

$$f'(x)=(4\sqrt{x}+3x)'=\frac{2}{\sqrt{x}}+3.$$

Για x < 0 έχουμε:

$$f'(x)=(x^2+x)'=2x+1.$$

Επιπλέον:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{4\sqrt{x}+3x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{4}{\sqrt{x}}+3\right)=+\infty\notin\mathbb{R}.$$

Συνεπώς, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Άρα:

$$f'(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0\\ \frac{2}{\sqrt{x}}+3, & x>0\end{cases}.$$

β. Για x < 0 έχουμε:

$$f'(x)=\left[(x+1)^2+\eta\mu x\right]'=2(x+1)+\sigma\upsilon\nu x.$$

Για x > 0 έχουμε:

$$f'(x)=(3x+1)'=3.$$

Επιπλέον:

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x+1)^2+\eta\mu x-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x+2+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=3$ και
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3x+1-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}3=3.$

Συνεπώς:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=3.$$

Άρα:

$$f'(x)=\begin{cases}2(x+1)+\sigma\upsilon\nu x, & x<0\\ 3 & , x\geq 0\end{cases}.$$

19.59 • Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(x^3\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)'=3x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}+x^3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=3x^2\eta\mu\frac{1}{x}-x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}.$$

Στο $x_0=0$ αναζητούμε, αν υπάρχει, το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right).$$

Ισχύει $\left|x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\leq\left|x^2\right|=x^2\Leftrightarrow -x^2\leq x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\leq x^2$ με $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0.$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0\Rightarrow f'(0)=0.$

Άρα:

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}-x\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}.$$

- Για $x\neq 0$, η f' είναι συνεχής ως πράξεις και συνθέσεις συνεχών.

Ισχύει $\left|3x^2\eta\mu\frac{1}{x}-x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right|\le 3x^2\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|+|x|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right|\le 3x^2+|x|$, άρα:

$$-\left(3x^2+|x|\right)\le 3x^2\eta\mu\frac{1}{x}-x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\le 3x^2+|x|$$

με $\lim\limits_{x\to 0}\left[-\left(3x^2+|x|\right)\right]=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^2+|x|\right)=0$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\left(3x^2\eta\mu\frac{1}{x}-x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=0 \quad ή \quad \lim_{x\to 0}f'(x)=0=f'(0).$$

Άρα, η f' είναι συνεχής και στο 0, οπότε η f' είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

19.60 Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)'=\frac{1\cdot\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)-x\cdot\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}-x\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=$$

$$=\frac{x\cdot\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)+e^{\frac{1}{x}}}{x\cdot\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}.$$

Στο $x_0=0$ αναζητούμε, αν υπάρχει, το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

Για $x>0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\overset{u=\frac{1}{x}}{\underset{u\to+\infty}{=\!=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{1+e^u}\overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=}0.$$

Για $x<0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\overset{u=\frac{1}{x}}{\underset{u\to-\infty}{=\!=}}\lim_{u\to-\infty}\frac{1}{1+e^u}=\frac{1}{1+0}=1.$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, οπότε το $\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ δεν έχει όριο στο 0, δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Άρα:

$$f'(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \frac{x^2 - e^{\frac{1}{x}}}{x \cdot \left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2},\ x \neq 0.$$

19.61 Είναι $f(x) = συν^2x$, οπότε:

- $f'(x) = [(συνx)^2]' = 2συνx \cdot (συνx)' = -2συνx \cdot ημx = -ημ2x$ και
- $f''(x) = (-ημ2x)' = -2συν2x$.

Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} f''(x) + 3f(x) &= -2συν2x + 3συν^2x = -2(1 - 2ημ^2x) + 3συν^2x = \\ &= 4ημ^2x - 2 + 3συν^2x = 3(ημ^2x + συν^2x) + ημ^2x - 2 = \\ &= 3 \cdot 1 + ημ^2x - 2 = ημ^2x + 1. \end{aligned}$$

19.62 Είναι $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{α} = \dfrac{1}{α} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right)$, οπότε:

- $f'(x) = \dfrac{1}{α} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right)' = \dfrac{1}{α} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right)$ και
- $f''(x) = \dfrac{1}{α} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right)' = \dfrac{1}{α} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right) = f(x)$.

19.63 Για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$. Έχουμε:

- $f'(x) = \left(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}\right)' = e^{\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' + e^{-\sqrt{x}} \cdot \left(-\sqrt{x}\right)' = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ ή

  $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$,

- $f''(x) = \left(\dfrac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{\left(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}\right)' \cdot 2\sqrt{x} - \left(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}\right) \cdot \left(2\sqrt{x}\right)'}{\left(2\sqrt{x}\right)^2} =$

$$= \frac{\dfrac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{\cancel{2}\sqrt{x}} \cdot \cancel{2}\sqrt{x} - \dfrac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}} = \frac{\left(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}\right)\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}}.$$

Άρα:

$$4xf''(x)+2f'(x)=\cancel{4x}\cdot\frac{\left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{\cancel{4x}\sqrt{x}}+\cancel{2}\cdot\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{\cancel{2}\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{\left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)\sqrt{x}-\cancel{e^{\sqrt{x}}}+\cancel{e^{-\sqrt{x}}}+\cancel{e^{\sqrt{x}}}-\cancel{e^{-\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{\left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}=f(x).$$

19.64 **α.** Είναι $f(x)=x^4-3x^3+16x-\ln 2$, οπότε βρίσκουμε $f'(x)=4x^3-9x^2+16$ και $f''(x)=12x^2-18x$.

β. Είναι $f(x)=\dfrac{x+2}{2x-1}$, οπότε έχουμε:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(2x-1)-(x+2)\cdot 2}{(2x-1)^2}=\frac{-5}{(2x-1)^2} \text{ και}$$

$$f''(x)=\left(\frac{-5}{(2x-1)^2}\right)'=\left[-5\cdot(2x-1)^{-2}\right]'=-5\cdot(-2)\cdot(2x-1)^{-3}\cdot(2x-1)'=$$

$$=20\cdot(2x-1)^{-3}=\frac{20}{(2x-1)^3}.$$

γ. Είναι $f(x)=(3x+5)^5$, οπότε έχουμε:

$$f'(x)=5\cdot(3x+5)^4\cdot(3x+5)'=15\cdot(3x+5)^4 \text{ και}$$

$$f''(x)=\left[15\cdot(3x+5)^4\right]'=15\cdot 4(3x+5)^3\cdot(3x+5)'=180\cdot(3x+5)^3.$$

δ. Είναι $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$, οπότε έχουμε:

$$f'(x)=\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}=\frac{2x}{x^2+1} \text{ και}$$

$$f''(x)=\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'=\frac{2\left(x^2+1\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

ε. Είναι $f(x)=e^{2x^2-1}+\eta\mu\left(x^2-\dfrac{\pi}{3}\right)$, οπότε έχουμε:

$$f'(x)=e^{2x^2-1}\cdot 4x+\sigma\upsilon\nu\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2x \text{ και}$$

$$f''(x)=\left[4x\cdot e^{2x^2-1}+2x\sigma\upsilon\nu\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)\right]'=$$

$$=4\cdot e^{2x^2-1}+4x\cdot e^{2x^2-1}\cdot 4x+2\sigma\upsilon\nu\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)+2x\cdot\left[-\eta\mu\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot 2x=$$

$$=4\cdot\left(1+4x^2\right)\cdot e^{2x^2-1}+2\sigma\upsilon\nu\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)-4x^2\cdot\eta\mu\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right).$$

19.65 **α.** Είναι $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, οπότε έχουμε:

- $f'(x)=-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$ και
- $f''(x)=-\frac{2\left(x^2+1\right)^2-2x\cdot 2\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}=-\frac{2\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2+1-4x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=$

$$=\frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^3},\ x\in\mathbb{R}.$$

Άρα:

$$f''(x_0)=0\Leftrightarrow 3x_0^2-1=0\Leftrightarrow x_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

β. Είναι $f(x)=x^2\cdot\ln x,\ x>0$, οπότε έχουμε:

- $f'(x)=2x\ln x+\frac{x^2}{x}=x\cdot(2\ln x+1),\ x>0$ και
- $f''(x)=1\cdot(2\ln x+1)+x\cdot\frac{2}{x}=2\ln x+3,\ x>0.$

Άρα:

$$f''(x_0)=0\Leftrightarrow 2\ln x_0+3=0\Leftrightarrow \ln x_0=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x_0=e^{-\frac{3}{2}}.$$

γ. Είναι $f(x)=\frac{x}{e^{2x}},\ x\in\mathbb{R}$, οπότε έχουμε:

- $f'(x)=\frac{1\cdot e^{2x}-x\cdot 2e^{2x}}{\left(e^{2x}\right)^2}=\frac{1-2x}{e^{2x}}$ και
- $f''(x)=\frac{-2\cdot e^{2x}-(1-2x)\cdot 2e^{2x}}{\left(e^{2x}\right)^2}=\frac{4(x-1)}{e^{2x}}.$

Άρα:

$$f''(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0-1=0 \Leftrightarrow x_0=1.$$

19.66 **α.** Είναι $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$, οπότε έχουμε:

- $f'(x)=\dfrac{g'(x)\cdot x-g(x)}{x^2}$ και

- $f''(x)=\dfrac{\left(xg'(x)-g(x)\right)'\cdot x^2-\left(xg'(x)-g(x)\right)\cdot 2x}{\left(x^2\right)^2}=$

$$=\frac{\left(g'(x)+xg''(x)-g'(x)\right)\cdot x^2-2x^2g'(x)+2xg(x)}{x^4}=$$

$$=\frac{x^3g''(x)-2x^2g'(x)+2xg(x)}{x^4}=\frac{x^2g''(x)-2xg'(x)+2g(x)}{x^3}.$$

β. Είναι $f(x) = g(\varepsilon\varphi x)$, οπότε έχουμε:

- $f'(x) = g'(\varepsilon\varphi x)\cdot(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{g'(\varepsilon\varphi x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ και

- $f''(x)=\dfrac{g''(\varepsilon\varphi x)\cdot(\varepsilon\varphi x)'\cdot\sigma\upsilon\nu^2x-g'(\varepsilon\varphi x)\cdot\left(\sigma\upsilon\nu^2x\right)'}{\left(\sigma\upsilon\nu^2x\right)^2}=$

$$=\frac{g''(\varepsilon\varphi x)+\eta\mu 2x\cdot g'(\varepsilon\varphi x)}{\sigma\upsilon\nu^4x}.$$

γ. Είναι $f(x)=x^2g\left(e^x\right)$, οπότε έχουμε:

- $f'(x)=2xg\left(e^x\right)+x^2\cdot g'\left(e^x\right)\cdot e^x$ και

- $f''(x)=\left[2x\cdot g\left(e^x\right)\right]'+\left[x^2\cdot e^x\cdot g'\left(e^x\right)\right]'=$

$$=2g\left(e^x\right)+2xg'\left(e^x\right)\cdot e^x+2xe^xg'\left(e^x\right)+x^2e^xg'\left(e^x\right)+x^2e^{2x}g''\left(e^x\right)=$$

$$=2g\left(e^x\right)+g'\left(e^x\right)\cdot\left(4x+x^2\right)e^x+x^2e^{2x}g''\left(e^x\right)=$$

$$=2g\left(e^x\right)+x(x+4)e^xg'\left(e^x\right)+x^2e^{2x}g''\left(e^x\right).$$

19.67 Είναι:

$$\left.\frac{d^2\left(xf(x)+xg(x)\right)}{dx^2}\right|_{x=0}=\frac{d}{dx}\cdot\left.\left(\frac{d}{dx}\left(xf(x)+xg(x)\right)\right)\right|_{x=0}.$$

Έχουμε:

$$\left.\frac{d\left(xf(x)+xg(x)\right)}{dx}\right|_{x=0}=\left.\left(\frac{dx}{dx}\cdot f(x)+x\cdot\frac{df(x)}{dx}+\frac{dx}{dx}\cdot g(x)+x\cdot\frac{dg(x)}{dx}\right)\right|_{x=0}=$$

$$=\left.\left(f(x)+x\cdot\frac{df(x)}{dx}+g(x)+x\cdot\frac{dg(x)}{dx}\right)\right|_{x=0}.$$

Επομένως:

$$\left.\frac{d^2\left(xf(x)+xg(x)\right)}{dx^2}\right|_{x=0}=\left.\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{d\left(xf(x)+xg(x)\right)}{dx}\right)\right|_{x=0}=$$

$$=\left.\frac{d}{dx}\cdot\left(f(x)+x\cdot\frac{df(x)}{dx}+g(x)+x\cdot\frac{dg(x)}{dx}\right)\right|_{x=0}=$$

$$=\left.\left(\frac{df(x)}{dx}+\frac{dx}{dx}\cdot\frac{df(x)}{dx}+x\cdot\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\frac{dg(x)}{dx}+\frac{dx}{dx}\cdot\frac{dg(x)}{dx}+x\cdot\frac{d^2g(x)}{dx^2}\right)\right|_{x=0}=$$

$$=\left.\left(2\cdot\frac{df(x)}{dx}+x\cdot\frac{d^2f(x)}{dx^2}+2\cdot\frac{dg(x)}{dx}+x\cdot\frac{d^2g(x)}{dx^2}\right)\right|_{x=0}=$$

$$=2f'(0)+0\cdot f''(0)+2g'(0)+0\cdot g''(0)=$$

$$=2f'(0)+2g'(0)=2\cdot(-1)+2\cdot 6=10.$$

Άρα:

$$\left.\frac{d^2\left(xf(x)+xg(x)\right)}{dx^2}\right|_{x=0}=10.$$

19.68 Έστω το πολυώνυμο $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$.

Έχουμε:

$$f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma,\quad f''(x)=6\alpha x+2\beta \quad \text{και} \quad f^{(3)}(x)=6\alpha.$$

Πρέπει να ισχύουν:

$$\begin{cases} f^3(2)=48 \\ f''(1)=8 \\ f'(0)=0 \\ f(-1)=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha=48 \\ 6\alpha+2\beta=8 \\ \gamma=0 \\ -\alpha+\beta-\gamma+\delta=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=8 \\ \beta=-20 \\ \gamma=0 \\ \delta=21 \end{cases}.$$

Άρα:

$$f(x)=8x^3-20x^2+21,\ x\in\mathbb{R}.$$

19.69 Από υπόθεση προκύπτουν τα εξής:

$$f(1)=1 \text{ και } f'(1)=\frac{1}{3}.$$

Είναι $f(x)=\dfrac{\alpha x+1}{\sqrt{x}+\alpha}$, οπότε έχουμε:

$$f'(x)=\frac{\alpha\left(\sqrt{x}+\alpha\right)-(\alpha x+1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+\alpha\right)^2}=\frac{\alpha\left(\sqrt{x}+\alpha\right)-\dfrac{\alpha x+1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+\alpha\right)^2}.$$

Επομένως:

- $f(1)=1\Rightarrow\dfrac{\alpha\cdot1+1}{\sqrt{1}+\alpha}=1\Rightarrow\dfrac{\alpha+1}{1+\alpha}=1$ που ισχύει και
- $f'(1)=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{\alpha\cdot\left(\sqrt{1}+\alpha\right)-\dfrac{\alpha\cdot1+1}{2\sqrt{1}}}{\left(\sqrt{1}+\alpha\right)^2}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{\alpha\cdot(1+\alpha)-\dfrac{\alpha+1}{2}}{(\alpha+1)^2}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{2\alpha+2\alpha^2-\alpha-1}{2(\alpha+1)^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{2(\alpha+1)^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(\alpha+1)^2=3(2\alpha^2+\alpha-1)\Rightarrow 2\alpha^2+4\alpha+2=6\alpha^2+3\alpha-3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\alpha^2-\alpha-5=0\Rightarrow\alpha=-1 \text{ ή } \alpha=\frac{5}{4}.$$

Επειδή $\alpha>1$, θα είναι $\alpha=\dfrac{5}{4}$.

19.70 Το $f(x)$ είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού με τρεις ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3, άρα γράφεται στη μορφή:

$$f(x)=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)$$

και έχουμε:

$$f'(x)=\alpha(x-\rho_1)'(x-\rho_2)(x-\rho_3)+\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)'(x-\rho_3)+\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)'=$$
$$=\alpha(x-\rho_2)(x-\rho_3)+\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_3)+\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2),$$

οπότε:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\alpha(x-\rho_2)(x-\rho_3)+\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_3)+\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)}{\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\rho_1}+\frac{1}{x-\rho_2}+\frac{1}{x-\rho_3}.$$

19.71 Έστω:

$$P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta,\ \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R},\ \alpha\neq0,$$

το ζητούμενο πολυώνυμο. Τότε έχουμε:

$$P'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma.$$

Ισχύουν $P(0) = 0$, $P(1) = 1$ και $P'(0) = P'(1) = 0$, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(1) = 1 \\ P'(0) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 \\ \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \delta = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}.$$

Άρα:

$$P(x) = -2x^3 + 3x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

19.72 Είναι $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu\lambda x + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu\lambda x$, οπότε έχουμε:

- $f'(x) = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\lambda x \cdot (\lambda x)' - \beta \cdot \eta\mu\lambda x \cdot (\lambda x)' = \alpha\lambda \cdot \sigma\upsilon\nu\lambda x - \beta\lambda \cdot \eta\mu\lambda x$ και
- $f''(x) = \alpha\lambda \cdot (-\eta\mu\lambda x) \cdot (\lambda x)' - \beta\lambda \cdot \sigma\upsilon\nu\lambda x \cdot (\lambda x)' =$

$$= -\alpha\lambda^2 \cdot \eta\mu\lambda x - \beta\lambda^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\lambda x = -\lambda^2 \cdot (\alpha \cdot \eta\mu\lambda x + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu\lambda x) = -\lambda^2 \cdot f(x).$$

19.73 Έστω:

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

ένα πολυώνυμο ν-βαθμού. Τότε το $f^{(4)}(x)$ είναι πολυώνυμο $(\nu - 4)$ βαθμού.

Για $\nu \geq 4 \Leftrightarrow \nu - 4 \geq 0$, το $f^{(4)}(x)$ είναι μη μηδενικό πολυώνυμο. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού είναι $f^{(4)}(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \leq 3$, οπότε:

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Τότε έχουμε:

$$f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma,\ f''(x) = 6\alpha x + 2\beta \text{ και } f^{(3)}(x) = 6\alpha.$$

Επομένως:

- $f'(1) = 5 \Rightarrow 3\alpha + 2\beta + \gamma = 5$, (1),
- $f(2) - 1 = f'(-2) \Rightarrow 8\alpha + 4\beta + 2\gamma + \delta - 1 = 12\alpha - 4\beta + \gamma \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4\alpha - 8\beta - \gamma - \delta + 1 = 0,\ (2),$$

- $f''(-1) = -9 \Rightarrow -6\alpha + 2\beta = -9$, (3) και
- $f'''(e) = 12 \Rightarrow 6\alpha = 12 \Rightarrow \alpha = 2$.

Οπότε βρίσκουμε:

◦ από την (3): $-12 + 2\beta = -9 \Rightarrow \beta = \dfrac{3}{2}$,

- από την (1): $3\cdot 2+2\cdot\frac{3}{2}+\gamma=5\Rightarrow\gamma=-4$ και
- από τη (2): $4\cdot 2-8\cdot\frac{3}{2}-(-4)-\delta+1=0\Rightarrow\delta=1$.

Άρα:

$$f(x)=2x^3+\frac{3}{2}x^2-4x+1,\ x\in\mathbb{R}.$$

19.74 Είναι $f(x)=x^3e^x,\ x\in\mathbb{R}$, οπότε έχουμε:

- $f'(x)=\left(x^3e^x\right)'=\left(3x^2+x^3\right)e^x,\ x\in\mathbb{R}$ και
- $f''(x)=\left(6x+3x^2\right)e^x+\left(3x^2+x^3\right)e^x=\left(x^3+6x^2+6x\right)e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

Η δοθείσα γράφεται:

$$\kappa f(x)+\lambda f'(x)+\mu f''(x)=12xe^x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa x^3e^x+\lambda(3x^2+x^3)e^x+\mu(x^3+6x^2+6x)=12xe^x\overset{e^x\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \kappa x^3+3\lambda x^2+\lambda x^3+\mu x^3+6\mu x^2+6\mu x=12x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\kappa+\lambda+\mu)x^3+(3\lambda+6\mu)x^2+6\mu x=12x$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όταν:

$$\begin{cases}\kappa+\lambda+\mu=0\\ 3\lambda+6\mu=0\\ 6\mu=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=2\\ \lambda=-4.\\ \mu=2\end{cases}$$

19.75 Η f είναι παραγωγίσιμη στο α, άρα υπάρχει το όριο $\ell=\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)\in\mathbb{R}$.

α. Έχουμε:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{x^2f(x)-\alpha^2f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{x^2f(x)-x^2f(\alpha)+x^2f(\alpha)-\alpha^2f(\alpha)}{x-\alpha}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\left[x^2\cdot\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+f(\alpha)\cdot\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\left[x^2\cdot\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+f(\alpha)\cdot(x+\alpha)\right]=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}x^2\cdot\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+f(\alpha)\cdot\lim_{x\to\alpha}(x+\alpha)=$$

$$=\alpha^2\cdot f'(\alpha)+f(\alpha)\cdot 2\alpha=2\alpha\cdot f(\alpha)+\alpha^2\cdot f'(\alpha).$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{e^x f(x)-e^\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{e^x f(x)-e^x f(\alpha)+e^x f(\alpha)-e^\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\left[e^x\cdot\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+f(\alpha)\cdot\frac{e^x-e^\alpha}{x-\alpha}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}e^x\cdot\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+f(\alpha)\cdot\lim_{x\to\alpha}\frac{e^x-e^\alpha}{x-\alpha}=$$

$$=e^\alpha\cdot f'(\alpha)+f(\alpha)\cdot e^\alpha=e^\alpha\cdot(f'(\alpha)+f(\alpha))$$

όπου:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{e^x-e^\alpha}{x-\alpha}\overset{\varphi(x)=e^x}{=\!=}\varphi'(\alpha)\overset{\varphi'(x)=e^x}{=\!=}e^\alpha.$$

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\eta\mu x\cdot f(x)-\eta\mu\alpha\cdot f(\alpha)}{x^2-\alpha^2}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{\eta\mu x\cdot f(x)-\eta\mu x\cdot f(\alpha)+\eta\mu x\cdot f(\alpha)-\eta\mu\alpha\cdot f(\alpha)}{(x-\alpha)(x+\alpha)}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\left[\eta\mu x\cdot\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\cdot\frac{1}{x+\alpha}+f(\alpha)\cdot\frac{\eta\mu x-\eta\mu\alpha}{x-\alpha}\cdot\frac{1}{x+\alpha}\right]=$$

$$=\eta\mu\alpha\cdot f'(\alpha)\cdot\frac{1}{2\alpha}+f(\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\frac{1}{2\alpha}=$$

$$=\varepsilon\varphi\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot f'(\alpha)\cdot\frac{1}{2\alpha}+f(\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\frac{1}{2\alpha}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\alpha}\cdot(\varepsilon\varphi\alpha\cdot f'(\alpha)+f(\alpha))$$

όπου:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\eta\mu x-\eta\mu\alpha}{x-\alpha}\overset{\varphi(x)=\eta\mu x}{=\!=}\varphi'(\alpha)\overset{\varphi'(x)=\sigma\upsilon\nu x}{=\!=}\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

19.76 Η f είναι συνεχής στο 0, άρα:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)\Leftrightarrow\alpha=\beta,\quad(1).$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, άρα:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\lim_{x\to0^-}\frac{\alpha e^{2x}-\alpha}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu2x+\beta\sigma\upsilon\nu3x-\beta}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha\cdot\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\eta\mu2x}{x}+\frac{\beta\cdot(\sigma\upsilon\nu3x-1)}{x}\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow2\alpha=2\Leftrightarrow\alpha=1,$$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}\underset{\substack{x\to 0\\ u\to 0}}{\overset{u=2x}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^{u}-1}{\frac{u}{2}}=\lim\limits_{u\to 0}\left(2\cdot\dfrac{e^{u}-1}{u}\right)=2\cdot 1=2,$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{x}\underset{\substack{x\to 0\\ \omega\to 0}}{\overset{\omega=2x}{=\!=}}\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{\eta\mu\omega}{\frac{\omega}{2}}=2\cdot\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{\eta\mu\omega}{\omega}=2\cdot 1=2$ και

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3x-1}{x}\underset{\substack{x\to 0\\ u\to 0}}{\overset{u=3x}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu u-1}{\frac{u}{3}}=3\cdot\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}=3\cdot 0=0.$

Επομένως:

$$\begin{cases}\alpha=\beta\\ \alpha=1\end{cases}\Leftrightarrow \alpha=\beta=1.$$

19.77 **α.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, τότε είναι και συνεχής στο 1, άρα:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Rightarrow\sqrt[3]{\kappa+\lambda}=1\Rightarrow \kappa+\lambda=1.$$

Τότε έχουμε:

$$f(1)=\sqrt[3]{\kappa\cdot 1+\lambda}=\sqrt[3]{\kappa+\lambda}=\sqrt[3]{1}=1 \quad \text{και} \quad \lambda=1-\kappa.$$

Επιπλέον, υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\ell\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-1}{x-1}=\ell\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt[3]{\kappa x+\lambda}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=\ell\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt[3]{\kappa x+\lambda}-1}{x-1}=1=\ell\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt[3]{\kappa x+1-\kappa}-1}{x-1}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt[3]{\kappa x+1-\kappa}\right)^3-1^3}{(x-1)\cdot\left(\sqrt[3]{\kappa x+1-\kappa}^{\,2}+\sqrt[3]{\kappa x+1-\kappa}+1\right)}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^-}\frac{\kappa\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cdot\left(\sqrt[3]{\kappa x+1-\kappa}^{\,2}+\sqrt[3]{\kappa x+1-\kappa}+1\right)}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\kappa}{3}=1\Leftrightarrow\kappa=3,$$

οπότε προκύπτει $\lambda=1-3=-2$.

Άρα $\kappa=3$, $\lambda=-2$.

β. Για $\kappa=3$, $\lambda=-2$ είναι:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{3x-2}\,, & \alpha\le x\le 1\\ x\,, & x>1\end{cases}.$$

Για x ≤ 1 πρέπει:

$$3x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{2}{3}.$$

Άρα, για $\alpha=\frac{2}{3}$ το ευρύτερο πεδίο ορισμού της f είναι το:

$$D_f=\left[\frac{2}{3},\,1\right]\cup(1,\,+\infty)=\left[\frac{2}{3},\,+\infty\right).$$

γ. Είναι $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{3x-2}\,, & \frac{2}{3}\le x\le 1\\ x\,, & x>1\end{cases}.$

Για x > 1 έχουμε:

$$f'(x)=(x)'=1.$$

Για $\frac{2}{3}<x<1$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)'=\left[(3x-2)^{\frac{1}{3}}\right]'=\frac{1}{3}\cdot(3x-2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(3x-2)'=(3x-2)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(3x-2)^2}}.$$

Στο ερώτημα (α) βρήκαμε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1\Rightarrow f'(1)=1.$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}^+}\frac{f(x)-f\left(\frac{2}{3}\right)}{x-\frac{2}{3}}=\lim_{x\to\frac{2}{3}^+}\frac{\sqrt[3]{3x-2}-0}{x-\frac{2}{3}}=\lim_{x\to\frac{2}{3}^+}\left(3\cdot\frac{\sqrt[3]{3x-2}}{3x-2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{2}{3}^+}\frac{3}{\sqrt[3]{(3x-2)^2}}\overset{\left(\frac{3}{0^+}\right)}{=}+\infty\notin\mathbb{R}.$$

Συνεπώς, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\frac{2}{3}$.

Άρα:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x-2)^2}}\,, & \frac{2}{3}<x<1\\ 1\,, & x\ge 1\end{cases}.$$

19.78 Έστω f (x) ένα πολυώνυμο ν βαθμού. Τότε:

- το πολυώνυμο $f'(x)$ θα είναι (ν – 1) βαθμού και
- το πολυώνυμο $\left(f'(x)\right)^2$ θα είναι 2(ν – 1) βαθμού.

Από τη σχέση $\left(f'(x)\right)^2 = f(x)$ προκύπτει ότι $2(\nu - 1) = \nu \Leftrightarrow \nu = 2$.

Άρα:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0.$$

Έχουμε:

- $f(1) = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{9}{4},\ (1)$ και
- $\left(f'(x)\right)^2 = f(x)$ ή $(2\alpha x + \beta)^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow 4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $\begin{cases} 4\alpha^2 = \alpha \\ 4\alpha\beta = \beta \\ \beta^2 = \gamma \end{cases} \overset{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta^2 = \gamma \end{cases}.$

Από την (1) έχουμε $\frac{1}{4} + \beta + \gamma = \frac{9}{4} \Rightarrow \beta + \gamma = 2$, άρα:

$$\beta + \beta^2 = 2 \Leftrightarrow \beta^2 + \beta - 2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1 \text{ ή } \beta = -2.$$

Για $\beta = 1 \Rightarrow \gamma = 1^2 = 1$, ενώ για $\beta = -2 \Rightarrow \gamma = (-2)^2 = 4$. Άρα:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1 \quad \text{ή} \quad f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$$

οι οποίες ικανοποιούν τις αρχικές υποθέσεις, άρα είναι δεκτές.

19.79 **α.** Η f είναι παραγωγίσιμη και άρτια, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow \left[f(-x)\right]' = \left[f(x)\right]' \Rightarrow f'(-x)\cdot(-x)' = f'(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(-x)\cdot(-1) = f'(x) \Rightarrow f'(-x) = -f'(x).$$

Άρα, η f' είναι περιττή.

β. Η f είναι παραγωγίσιμη και περιττή, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow \left[f(-x)\right]' = \left[-f(x)\right]' \Rightarrow f'(-x)\cdot(-x)' = -f'(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(-x)\cdot(-1) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x).$$

Άρα, η f' είναι άρτια.

19.80 Η f είναι παραγωγίσιμη και άρτια, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow \left[f(-x)\right]' = \left[f(x)\right]' \Rightarrow f'(-x)\cdot(-x)' = f'(x) \Rightarrow f'(-x) = -f'(x).$$

Άρα, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(-x_0) = -f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) = -f'(x_0).$$

Δηλαδή, η κλίση $f'(x_0)$ της f στο x_0 είναι αντίθετη της κλίσης $f'(-x_0)$ της f στο $-x_0$.

19.81 Η f είναι παραγωγίσιμη και περιττή στο $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow [f(-x)]' = [-f(x)]' \Rightarrow -f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x).$$

Από υπόθεση ισχύει:

$$f'(2) = -\frac{2}{3} \Rightarrow f'(-2) = f'(2) = -\frac{2}{3}.$$

Δηλαδή, η κλίση της f στο -2 είναι $-\frac{2}{3}$.

19.82 Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-2}{x} = 5 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 5.$

Άρα, η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $g'(0) = 5.$

Επίσης, η f είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών και παραγωγίσιμη στο 0.

Αν $h(x) = x^2 + 3x + 4,$ τότε $f(x) = h(x) \cdot g(x)$ και έχουμε:

$$h'(x) = 2x + 3 \quad \text{και} \quad f'(0) = h'(0) \cdot g(0) + h(0) \cdot g'(0) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 26.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon:\ y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y - 8 = 26 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = 26x + 8.$$

19.83 Από υπόθεση ισχύουν:

$$g(1) = 2,\ f(1) = 1,\ f'(1) = 4,\ f'(2) = 8,\ g'(1) = 3.$$

Έχουμε:

- $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0),$ οπότε:

$$(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1) = f'(2) \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24,$$

- $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0),$ οπότε:

$$(g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1) = g'(1) \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12.$$

Άρα:

$$(f \circ g)'(1) = 24 \quad \text{και} \quad (g \circ f)'(1) = 12.$$

19.84 Ισχύει $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-f(x)}{x}\in\mathbb{R}$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\in\mathbb{R}$.

Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=-\ell$.

Έστω τυχαίο $x\in\mathbb{R}$. Τότε έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot f(h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(f(x)\cdot\frac{f(h)-1}{h}\right)=$$

$$=f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=f(x)\cdot f'(0)\in\mathbb{R}.$$

Άρα, η f είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο $x\in\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=f'(0)\cdot f(x)\quad \text{ή}\quad f'(x)=-\ell\cdot f(x)\in\mathbb{R}.$$

19.85 **α.** Αν $y=f(x)$, τότε $f(x)=5x+1+\dfrac{2}{x}$, $x\in\mathbb{R}^*$.

Έχουμε:

$$x\cdot\frac{dy}{dx}+y=x\cdot f'(x)+f(x)=x\cdot\left(5-\frac{2}{x^2}\right)+5x+1+\frac{2}{x}=$$

$$=5x-\frac{2}{x}+5x+1+\frac{2}{x}=10x+1.$$

β. Αν $g(x)=\dfrac{f'(x)-\sqrt{2+x}}{x}$, τότε:

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\ell\in\mathbb{R}\ \text{ και }\ g(x)=\frac{f'(x)-\sqrt{2+x}}{x}\Leftrightarrow f'(x)=x\cdot g(x)+\sqrt{2+x}.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(xg(x)+\sqrt{2+x}\right)=0\cdot\ell+\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

και αφού η f' είναι συνεχής, θα ισχύει $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\sqrt{2}$.

Αναζητούμε, αν υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f'(x)-\sqrt{2+x}}{x}+\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[g(x)+\frac{x}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2}\right)}\right]=$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[g(x) + \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}\right] =$$

$$= \ell + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \ell + \frac{\sqrt{2}}{4} \in \mathbb{R}.$$

Άρα, υπάρχει το $f''(0)$ και είναι:

$$f''(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \ell + \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

19.86 Η f είναι $1-1$, οπότε έχουμε $f(3) = 3 \Leftrightarrow f^{-1}(3) = 3$.

Επίσης:

$$f'(3) = 4 \neq 0 \quad \text{και η } f' \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 3.$$

Επομένως:

$$\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(3)\right)} = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{4}.$$

Άρα, η κλίση της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0 = 3$ είναι ίση με:

$$\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{4}.$$

19.87 **α.** Θέτουμε:

$$g(x) = \frac{f(x) - 2}{x - 1}, \; x \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

Τότε ισχύουν:

$$\lim_{x\to 1} g(x) = 2 \quad \text{και} \quad f(x) = (x-1)g(x) + 2$$

και έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left[(x-1)g(x) + 2\right] = 0\cdot 2 + 2 \overset{f:\,\text{συνεχής}}{\Rightarrow} f(1) = 2.$$

Το δοθέν όριο γράφεται τότε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x) - 2}{x - 1} = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2.$$

Άρα, η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 2$.

β. Έχουμε:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(e^x+1\right)\cdot f\left(\frac{e^x+3}{e^x+1}\right)-2\left(e^x+1\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(e^x+1\right)\cdot f\left(1+\frac{2}{e^x+1}\right)-2\left(e^x+1\right)\right]\overset{u=e^x+1}{\underset{u\to+\infty}{==}}$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\left[u\cdot f\left(1+\frac{2}{u}\right)-2u\right]=\lim_{u\to+\infty}\left\{u\cdot\left[f\left(1+\frac{2}{u}\right)-2\right]\right\}\overset{\omega=1+\frac{2}{u}}{\underset{\omega\to1}{==}}$$

$$=\lim_{\omega\to1}\left[\frac{2}{\omega-1}\cdot\left(f\left(\omega\right)-2\right)\right]=\lim_{\omega\to1}\left[2\cdot\frac{f\left(\omega\right)-2}{\omega-1}\right]=2\cdot f'\left(1\right)=2\cdot2=4.$$

γ. Είναι $f\left(1\right)=2\Leftrightarrow f^{-1}\left(2\right)=1$ και $f'\left(1\right)=2\neq0$, οπότε έχουμε:

$$\left(f^{-1}\right)'\left(2\right)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(2\right)\right)}=\frac{1}{f'\left(1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Η εφαπτομένη (ε) της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0 = 2$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon:\ y-f^{-1}\left(2\right)=\left(f^{-1}\right)'\left(2\right)\cdot\left(x-2\right)\ \text{ ή }\ \varepsilon:\ y-2=\frac{1}{2}\left(x-2\right)\ \text{ ή }\ \varepsilon:\ y=\frac{1}{2}x+1.$$

19.88 **α.** Η δοθείσα σχέση:

$$f^3\left(x\right)-2f^2\left(x\right)+x^2f\left(x\right)=2,\ \left(1\right),$$

για $x = 1$ γράφεται:

$$f^3\left(1\right)-2f^2\left(1\right)+1^2\cdot f\left(1\right)=2\Leftrightarrow f^3\left(1\right)-2f^2\left(1\right)+f\left(1\right)-2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(f^2\left(1\right)+1\right)\cdot\left(f\left(1\right)-2\right)=0\Leftrightarrow f\left(1\right)=2,$$

αφού $f^2\left(1\right)+1\neq0.$

Παραγωγίζοντας την (1) κατά μέλη έχουμε:

$$3f^2\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)-4f\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)+2xf\left(x\right)+x^2f'\left(x\right)=0$$

η οποία για $x = 1$ γράφεται:

$$3f^2\left(1\right)\cdot f'\left(1\right)-4f\left(1\right)\cdot f'\left(1\right)+2\cdot1\cdot f\left(1\right)+1^2\cdot f'\left(1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow3\cdot2^2\cdot f'\left(1\right)-4\cdot2\cdot f'\left(1\right)+2\cdot2+f'\left(1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'\left(1\right)=-\frac{4}{5}.$$

β. Έχουμε:

$$L=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(x^2+1\right)\cdot\frac{f\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2+1}\right)-2}{3x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{f\left(1+\frac{3x}{x^2+1}\right)-2}{\frac{3x}{x^2+1}}\right]\underset{\omega\to0}{\overset{\omega=\frac{3x}{x^2+1}}{=\!=}}$$

$$=\lim_{\omega\to0}\frac{f(1+\omega)-f(1)}{\omega}=f'(1)=-\frac{4}{5}.$$

γ. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της (1, 2) έχει εξίσωση:

$$\varepsilon:\ y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\ \ \text{ή}\ \ \varepsilon:\ y-2=-\frac{4}{5}(x-1)\ \ \text{ή}\ \ \varepsilon:\ y=-\frac{4}{5}x+\frac{14}{5}.$$

19.89 **α.** Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

β. Έχουμε:

$$g'(x)=\left[\left(\frac{x^3}{3}+x^2+2\right)\cdot f(x)-7x\right]'=\left(x^2+2x\right)f(x)+\left(\frac{x^3}{3}+x^2+2\right)\cdot f'(x)-7,$$

οπότε $g'(0)=0\cdot f(0)+2f'(0)-7=2f'(0)-7.$

Η f είναι παραγωγίσιμη και άρτια, άρα η f' είναι περιττή (βλ. άσκηση 19.79), δηλαδή:

- για $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(-x)=-f'(x)$ και
- για x = 0 έχουμε $f'(-0)=-f'(0)\Leftrightarrow f'(0)=-f'(0)\Leftrightarrow f'(0)=0.$

Άρα:

$$g'(0)=2f'(0)-7=2\cdot0-7\ \ \text{ή}\ \ g'(0)=-7.$$

19.90 Αν $y=f(x)$, τότε $f(x)=\frac{1}{4}\,\varepsilon\varphi x+\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4\sigma\upsilon\nu^2x}-\frac{2}{x^3}.$

Έχουμε:

$$\frac{dy}{dx}=1-\frac{2}{x^3}\Leftrightarrow f'(x)=1-\frac{2}{x^3}\Leftrightarrow\frac{1}{4\sigma\upsilon\nu^2x}-\frac{2}{x^3}=1-\frac{2}{x^3}\Leftrightarrow\frac{1}{4\sigma\upsilon\nu^2x}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2x=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\ \ \text{ή}\ \ \sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3}\ \ \text{ή}\ \ x=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Επιπλέον $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, άρα:

$$x=\frac{\pi}{3}\ \text{(από τον 1ο τύπο για κ = 0)}\ \ \text{ή}\ \ x=\frac{2\pi}{3}\ \text{(από τον 2ο τύπο για κ = 0).}$$

19.91 Η $f(x)=x^3+x^2,\ x\in[0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Πράγματι, αν $x_1,\ x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, τότε:

$$\left.\begin{array}{l}x_1^3<x_2^3\\ x_1^2<x_2^2\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}x_1^3+x_1^2<x_2^3+x_2^2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι $1-1$ και συνεπώς αντιστρέψιμη.

Ισχύει $f(1)=1^3+1^2$ ή $f(1)=2\Leftrightarrow f^{-1}(2)=1\neq 0.$ Επομένως:

$$\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{5},$$

αφού $f'(x)=3x^2+2x,$ οπότε $f'(1)=5.$

Επίσης, ισχύουν:

$$f(0)=0\Leftrightarrow f^{-1}(0)=0\quad \text{και}\quad f'(0)=3\cdot 0^2+2\cdot 0=0.$$

Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ ως προς x βρίσκουμε:

$$f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)=1.$$

Αν ορίζεται το $\left(f^{-1}\right)'(0),$ τότε για $x=0$ η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$f'\left(f^{-1}(0)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(0)=1\ \text{ ή }\ f'(0)\cdot\left(f^{-1}\right)'(0)=1\ \text{ ή }\ 0\cdot\left(f^{-1}\right)'(0)=1,\ \text{άτοπο.}$$

Άρα, δεν ορίζεται το $\left(f^{-1}\right)'(0).$

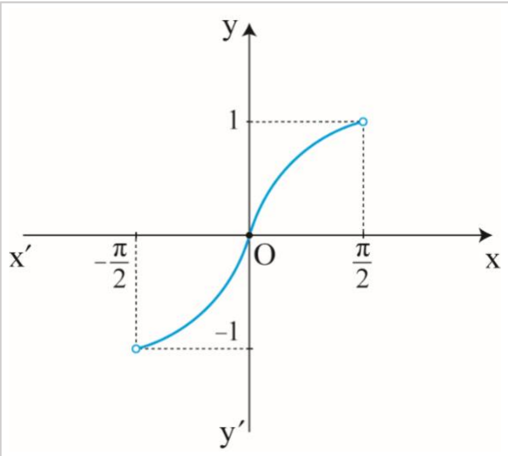
19.92 Από τη γραφική παράσταση της

$f(x)=ημx,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

βρίσκουμε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $(-1,\ 1)$. Δηλαδή:

$$f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(1,1)$$

με $f(x)=ημx.$



Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και η f^{-1} παραγωγίσιμη.

Για κάθε $y\in(-1,1)$ ισχύει:

$$f\left(f^{-1}(y)\right)=y\Leftrightarrow ημf^{-1}(y)=y$$

και παραγωγίζοντας κατά μέλη ως προς y έχουμε:

$$\text{συν}f^{-1}(y)\cdot\left(f^{-1}\right)'(y)=1\Leftrightarrow\sqrt{1-\text{ημ}^2\left(f^{-1}(y)\right)}\cdot\left(f^{-1}\right)'(y)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1-\left(\text{ημ}\left(f^{-1}(y)\right)\right)^2}\cdot\left(f^{-1}\right)'(y)=1\Leftrightarrow\sqrt{1-\left(f\left(f^{-1}(y)\right)\right)^2}\cdot\left(f^{-1}\right)'(y)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1-y^2}\cdot\left(f^{-1}\right)'(y)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ y\in(-1,1).$$

Άρα:

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1).$$

19.93 **α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-9},\ x\neq 9.$

Τότε ισχύουν:

$$\lim_{x\to 9}g(x)=4\quad\text{και}\quad f(x)=(x-9)\cdot g(x)+1.$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 9}f(x)=\lim_{x\to 9}\left[(x-9)g(x)+1\right]=0\cdot 4+1=1$$

και αφού η f είναι συνεχής, θα ισχύει $f(9)=\lim\limits_{x\to 9}f(x)=1$.

Επιπλέον:

$$\lim_{x\to 9}\frac{f(x)-1}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{f(x)-f(9)}{x-9}=4\in\mathbb{R}.$$

Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=9$ με $f'(9)=4$.

Άρα:

$$f(9)=1\quad\text{και}\quad f'(9)=4.$$

β. Ισχύει:

$$f'(3)=12\Leftrightarrow\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=12.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 9}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)-f(3)}{x-9}\underset{\omega\to 3}{\overset{\omega=\sqrt{x}}{=\!=}}\lim_{\omega\to 3}\frac{f(\omega)-f(3)}{\omega^2-9}=\lim_{\omega\to 3}\left(\frac{f(\omega)-f(3)}{\omega-3}\cdot\frac{1}{\omega+3}\right)=12\cdot\frac{1}{6}=2.$$

γ. Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι:

$$\lim_{x\to 9}\frac{f(x)-1}{x-9}=4>0.$$

Επομένως, για x κοντά στο 9 με x > 9 ισχύει:

$$\frac{f(x)-1}{x-9}>0 \overset{x>9}{\Rightarrow} f(x)>1 \quad ή \quad f(x)>f(9).$$

Αν η f ήταν γνησίως φθίνουσα, τότε για x > 9 θα έπρεπε να ισχύει $f(x)<f(9)$, άτοπο.

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, θα πρέπει να είναι γνησίως αύξουσα.

δ. Η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι $1-1$ και συνεπώς αντιστρέψιμη.

Η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0 = 1$ έχει εξίσωση:

$$ε: \ y-f^{-1}(1)=\left(f^{-1}\right)'(1)\cdot(x-1).$$

Ισχύουν:

$$f(9)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=9\neq 0 \quad και \quad \left(f^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)}=\frac{1}{f'(9)}=\frac{1}{4}.$$

Άρα:

$$ε: \ y-9=\frac{1}{4}(x-1) \quad ή \quad ε: \ y=\frac{1}{4}x+\frac{35}{4}.$$

13ο

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα Α

Α1. Θεωρία.

Α2. Θεωρία.

Α3. **α.** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $f'(x_0)$

β. $(0,+\infty)$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

γ. παραγωγίσιμη στο x_0, $f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$

δ. C_f, $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

ε. παραγωγίσιμη, στιγμιαία ταχύτητα, $\upsilon(t_0)=S'(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{S(x)-S(t_0)}{t-t_0}$

Θέμα Β

Β1. **α.** Η C_Γ είναι ευθεία με εξίσωση της μορφής $y=\lambda x+\kappa$, η C_B είναι παραβολή με εξίσωση της μορφής $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και η C_A είναι η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης 3ου βαθμού.

Άρα, η C_Γ αντιστοιχεί στην $f''(x)$, η C_B αντιστοιχεί στην $f'(x)$ και η C_A αντιστοιχεί στην $f(x)$.

β. Έστω ότι η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $\alpha\neq 0$. Είναι:

$$f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma \;\text{ και }\; f''(x)=6\alpha x+2\beta.$$

Έχουμε:

- $f'(0)=14\Rightarrow\gamma=14$,
- $f''(1)=-8\Rightarrow 6\alpha+2\beta=-8\Rightarrow 3\alpha+\beta=-4$, (1),
- $f'(1)=0\Rightarrow 3\alpha+2\beta+14=0\overset{(1)}{\Rightarrow} 3\alpha+2(-4-3\alpha)+14=0\Rightarrow -3\alpha+6=0\Rightarrow\alpha=2$.

Τότε από την (1) προκύπτει ότι $\beta=-10$.

Επιπλέον, έχουμε $f(1)=3 \Rightarrow 2-10+14+\delta=3 \Rightarrow \delta=-3$.

Άρα η συνάρτηση f έχει τύπο:

$$f(x)=2x^3-10x^2+14x-3,\ x\in\mathbb{R}.$$

Β2. Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0)-f(x_0-\beta h)}{h}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\alpha\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha h}+\beta\frac{f(x_0-\beta h)-f(x_0)}{-\beta h}\right)=$$

$$=\alpha f'(x_0)+\beta f'(x_0)=(\alpha+\beta)f'(x_0)$$

Θέμα Γ

Γ1. α. Έχουμε:

- $f'(x)=(x^2)'\cdot \eta\mu x+x^2\cdot(\eta\mu x)'+(2x)'\cdot(\sigma\upsilon\nu x)+2x\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'=$

  $=2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x+2\sigma\upsilon\nu x-2x\eta\mu x=$

  $=x^2\sigma\upsilon\nu x+2\sigma\upsilon\nu x,\quad x\in[0,2\pi]$.

- $f''(x)=(x^2)'\cdot\sigma\upsilon\nu x+x^2\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'+2(\sigma\upsilon\nu x)'=2x\sigma\upsilon\nu x-x^2\eta\mu x-2\eta\mu x=$

  $=2x\sigma\upsilon\nu x+x^2\eta\mu x-2x^2\eta\mu x-2\eta\mu x$.

  Η $f''(x)$ γράφεται ισοδύναμα:

  $f''(x)+2x^2\eta\mu x+2\eta\mu x=f(x)\Leftrightarrow f''(x)+2\eta\mu x(x^2+1)=f(x),\ x\in[0,2\pi]$.

β. Είναι $f(0)=0$ και $f'(0)=2$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0,f(0))$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon:\ y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow \varepsilon:\ y=2x.$$

γ. Η κλίση της C_f είναι αρνητική, αν:

$$f'(x)<0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(x^2+2)<0,$$

Είναι $x^2+2>0$ για κάθε $x\in[0,2\pi]$ και $\sigma\upsilon\nu x<0$, αν $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

Άρα:

$$f'(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right).$$

Γ2. Έχουμε:

- $N(1,2)\in C_f\Leftrightarrow f(1)=2$ και

- $f'(1)=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=1,\ (1).$

Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, θα είναι και συνεχής, άρα:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=2,\ (2).$$

Το ζητούμενο όριο υπολογίζεται ως εξής:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-2f(x)+x^2-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)\big(f(x)-2\big)+x^2-1}{\sqrt{x+2}^2-\sqrt{3}^2}\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\left(f(x)\cdot\frac{f(x)-2}{x-1}+\frac{x^2-1}{x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\left(f(x)\cdot\frac{f(x)-2}{x-1}+x+1\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3}\right)\right]=$$

$$\underset{(2)}{\overset{(1)}{=}}(2-1+2)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)=8\sqrt{3}.$$

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε:

- $$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

Άρα $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ x\in\mathbb{R}.$

- $$f''(x)=-\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\sqrt{x^2+1}^2}=-\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Leftrightarrow f''(x)=-\frac{x}{x^2+1}\cdot f'(x),\ x\in\mathbb{R},\ (1).$$

- $$e^{f(x)}-x=e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}-x=x+\sqrt{x^2+1}-x=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow e^{f(x)}-x=\frac{1}{f'(x)},\ x\in\mathbb{R},\ (2).$$

Επομένως:

$$\left(e^{f(x)}-x\right)f''(x)\underset{(2)}{\overset{(1)}{=}}\frac{1}{f'(x)}\cdot\frac{-x}{x^2+1}\cdot f'(x)=\frac{-x}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}.$$

Δ2. α. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

β. Έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln\left(h+\sqrt{h^2+1}\right)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}=f'(0)=1$.

Δ3. Είναι $f^{-1}\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=f^{-1}\left(f(1)\right)=1$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$.

Παραγωγίζοντας κατά μέλη έχουμε:

$$f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)=1,\ x\in\mathbb{R}.$$

Για $x=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ η σχέση γράφεται:

$$f'\left(f^{-1}\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1)\cdot\left(f^{-1}\right)'\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=1\overset{(\Delta.2\alpha)}{\Rightarrow}\left(f^{-1}\right)'\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=\sqrt{2}.$$

Η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο με τετμημένη $x_0=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon:\ y-f^{-1}\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=\left(f^{-1}\right)'\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\ \text{ή}$$

$$\varepsilon:\ y=\sqrt{2}\cdot x-\sqrt{2}\cdot\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+1.$$

20ή Ενότητα

Κανόνες de L' Hospital

A. Του τύπου Σωστό / Λάθος

20. 1 **α.** Σωστό

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Σωστό

ε. Σωστό

στ. Λάθος

ζ. Λάθος.

B. Βασικές εφαρμογές – Ασκήσεις εμπέδωσης

20. 2 **α.** $\frac{3}{5}$ **β.** $\frac{8}{9}$ **γ.** $-\frac{2020}{2019}$.

20. 3 **α.** $\frac{5}{4}$ **β.** $-\infty$ **γ.** 1 **δ.** $\frac{9}{2}$ **ε.** 1 **στ.** $\frac{1}{3}$.

20. 4 **α.** $+\infty$ **β.** $+\infty$ **γ.** $+\infty$ **δ.** 0 **ε.** 0 **στ.** 0 **ζ.** 0 **η.** 1.

20. 5 **α.** 0 **β.** 0 **γ.** 0.

20. 6 **α.** $+\infty$ **β.** $+\infty$ **γ.** $-\infty$ **δ.** $-\infty$ **ε.** $+\infty$ **στ.** $-\infty$.

20. 7 **α.** 1 **β.** 1 **γ.** 1.

Γ. Ασκήσεις για λύση

20. 8 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sigma\upsilon\nu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2\right)'}{\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\frac{\eta\mu x}{x}}=2.$

> **Παρατήρηση**
> Στο εξής, το βήμα που συμβολίζει την παράγωγο του αριθμητή και του παρονομαστή θα παραλείπεται για λόγους οικονομίας και μόνο.

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x-1}{\eta\mu 5x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\eta\mu 2x}{5\sigma\upsilon\nu 5x}=\dfrac{0}{5}=0.$

γ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\eta\mu x-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{\sigma\upsilon\nu x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{-\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6}{-\frac{\eta\mu x}{x}}=-6.$

δ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-2\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(-2\eta\mu x\right)=-2.$

20. 9 Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, άρα και συνεχής, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}f\left(x\right)=f\left(0\right)\Leftrightarrow\lim_{x\to 0^-}f\left(x\right)=\lim_{x\to 0^+}f\left(x\right)=f\left(0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-\eta\mu x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^3+\alpha x+\beta\right)=f\left(0\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1=\beta=f\left(0\right).$$

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\frac{\eta\mu x}{x}+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\eta\mu x+x}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\sigma\upsilon\nu x+1}{2x}=0$ και
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3+\alpha x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+\alpha\right)=\alpha.$

Άρα, πρέπει $\alpha = 0$.

20. 10 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(3x-5\right)}{e^x-e^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{3}{3x-5}}{e^x}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3}{e^x}\cdot\dfrac{1}{3x-5}\right)=\dfrac{3}{e^2}.$

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{2x^2-17x-9}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{4x-17}=\dfrac{\frac{1}{6}}{19}=\dfrac{1}{114}$.

20. 11 α. Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, οι f και f' θα είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$. Επιπλέον, ισχύει:

$$f''(0)=1\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=1\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=1,\ (1).$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(x)}{\sigma\upsilon\nu x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+f'(x)}{-\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\frac{f'(x)}{x}}{-\frac{\eta\mu x}{x}}\overset{(1)}{=}\dfrac{3}{-1}=-3$.

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2+f(x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+xf'(x)+\eta\mu x}{2x+f'(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}+\frac{f'(x)}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}}{2+\frac{f'(x)}{x}}=\frac{f'(0)+f'(0)+1}{2+f''(0)}=\frac{1}{3}.$$

20. 12 α. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα οι συναρτήσεις f και f' είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+\alpha h)-f'(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(x+\alpha h)-f'(x)}{\alpha h}\cdot\alpha\right)\underset{u\to 0}{\overset{\alpha h=u}{=\!=}}$$

$$=\lim_{u\to 0}\left(\frac{f'(x+u)-f'(x)}{u}\cdot\alpha\right)=\alpha\cdot f''(x).$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)}{h^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)\cdot 2+f'(x-2h)\cdot(-2)}{2h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f(x)-\left(f'(x-2h)-f(x)\right)}{h}=2f''(x)-(-2)\cdot f''(x)=4f''(x),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το (α) για α = 2 και α = –2.

20. 13 **α.** Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(\ln x-1)+1}{(x-1)\ln x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-1+x\cdot\frac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x-\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu x}{x}+\sigma\upsilon\nu x}{\frac{\eta\mu x}{x}}=\frac{1+1}{1}=2.$$

γ. Έχουμε $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\varepsilon\varphi x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=\frac{1}{1}=1.$

δ. Έχουμε $\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}-\frac{4}{x-4}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=\frac{1}{4}.$

20. 14 **α.** Έχουμε $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-x}{e^x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{e^x}=\frac{0}{1}=0.$

β. Έχουμε $\lim_{x\to 1}\frac{x-\ln x-1}{e^{x-1}-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{e^{x-1}-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{x-1}}=1.$

20. 15 **α.** Ισχύει $\lim_{x\to 1}f(x)=f(0).$

Έχουμε:

- $f(0)=\alpha$ και
- $\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{1}=\lim_{x\to 1}(\ln x)=0.$

Άρα $\alpha=0.$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{2(x-1)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}.$$

20. 16 **α.** Θέτουμε $e^{-x}=u \Leftrightarrow -x=\ln u$ με $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$, άρα το $u \to +\infty$.

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(2+e^{-x}\right)}{3x}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln(2+u)}{-3\ln u}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim_{u\to+\infty}\frac{\frac{1}{2+u}}{\frac{-3}{u}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{-6-3u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{-3u}=\frac{-1}{3}.$$

β. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$, άρα ισχύουν:

$$\lim_{x\to-\infty}\ln\left(3+e^{-x}\right)\underset{u\to+\infty}{\overset{3+e^{-x}=u}{=\!=}}\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}\ln(2-x)\underset{u\to+\infty}{\overset{2-x=u}{=\!=}}\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty.$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(3+e^{-x}\right)}{\ln(2-x)}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-e^{-x}}{3+e^{-x}}}{\frac{-1}{2-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2-x)\cdot e^{-x}}{3+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{3e^{x}+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{1}\right)}{=}+\infty.$$

20. 17 **α.** Έστω $M>0$. Για κάθε $x>M$ έχουμε:

- $\eta\mu x\ge -1 \Leftrightarrow \eta\mu x+2\ge 1>0 \Leftrightarrow x(\eta\mu x+2)\ge x \Leftrightarrow f(x)\ge x$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.

Άρα, τα ζητούμενα όρια είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty.$$

β. Το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(2+\eta\mu x)}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot(2+\eta\mu x)\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right].$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{1+0}=1,$
- για $x>0$ είναι $\left|\dfrac{1}{x}\cdot(2+\eta\mu x)\right|=\left|\dfrac{1}{x}\right|\cdot|2+\eta\mu x|\le\dfrac{3}{x}\Leftrightarrow -\dfrac{3}{x}\le\dfrac{1}{x}\cdot(2+\eta\mu x)\le\dfrac{3}{x},$

  αφού $|2+\eta\mu x|\le|2|+|\eta\mu x|\le 2+1=3$.

  Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0$. Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot(2+\eta\mu x)\right]=0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0\cdot 1=0.$

γ. Το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{e^x}\cdot(2+\eta\mu x)\right].$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0.$

Για x > 0 ισχύει $\left|\dfrac{x}{e^x}\cdot(2+\eta\mu x)\right|=\dfrac{x}{e^x}\cdot|2+\eta\mu x|\le\dfrac{x}{e^x}\cdot 3\Rightarrow\dfrac{-3x}{e^x}\le\dfrac{x}{e^x}(2+\eta\mu x)\le\dfrac{3x}{e^x}.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{e^x}\cdot(2+\eta\mu x)\right]=0.$

20. 18 α. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{2}=+\infty.$

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(x^4+1\right)}{x^2}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{4x^3}{x^4+1}}{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x^4+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^2}=0.$

γ. Είναι $\lim\limits_{x\to1^+}\ln(x-1)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right)\overset{2\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

Άρα:

$$\lim_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x^2-1}}\underset{u\to+\infty}{\overset{\frac{1}{x^2-1}=u}{=\!=}}\lim_{u\to+\infty}e^u=+\infty.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(x-1)}{e^{\frac{1}{x^2-1}}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x-1}}{e^{\frac{1}{x^2-1}}\cdot\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}}=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{(x+1)^2\cdot(x-1)}{-2x}\cdot\frac{1}{e^{\frac{1}{x^2-1}}}\right)=0,$$

αφού $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x+1)^2\cdot(x-1)}{-2x}=\dfrac{4\cdot0}{-2}=0$ και $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x^2-1}}}=0.$

δ. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty.$

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x^3-2x+e^x\right)=+\infty.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-2x+e^x}{x^2+x+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{6x-2+e^x}{2x+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{6+e^x}{2}=+\infty.$$

20. 19 Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{e^{2x}}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{2e^{2x}}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{4e^{2x}}=0.$

Άρα, η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

20. 20 **α.** Έχουμε:

- $f(0)=0$ και
- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\eta\mu x\cdot\ln x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot x\ln x\right)=0,$ αφού:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x}{x}=1 \text{ και } \lim_{x\to0^+}(x\ln x)\overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0.$$

Άρα, η f είναι συνεχής στο 0.

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x\cdot\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\ln x\right)=-\infty.$

Άρα, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

20. 21 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)\overset{(+\infty)-(+\infty)}{=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\cdot\left(1-\frac{x}{e^x}\right)\right]=+\infty,$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}\overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=}0,$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{e^x}\right)=1-0=1>0.$

β. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2x+3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty,$ οπότε το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x-x^2+2x-3\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln x-\left(x^2-2x+3\right)\right]\overset{(+\infty)-(+\infty)}{=\!=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(\frac{\ln x}{x^2}-1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)\right].$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$,

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2} - 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = -1 < 0.$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x - x^2 + 2x - 3\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2 \cdot \left(\frac{\ln x}{x^2} - 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)\right] \overset{(+\infty)\cdot(-1)}{=\!=} -\infty.$

γ. Το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 - \ln x - 3^x\right) \overset{(+\infty)-(+\infty)-(+\infty)}{=\!=} \lim_{x\to+\infty}\left[3^x \cdot \left(\frac{x^2}{3^x} - \frac{\ln x}{3^x} - 1\right)\right].$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x = +\infty$,

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{3^x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3^x \cdot \ln 3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x \cdot 3^x \cdot \ln 3} \overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=} 0$ και

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3^x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{3^x \cdot \ln 3} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{3^x \cdot \ln^2 3} \overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=} 0.$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{3^x} - \frac{\ln x}{3^x} - 1\right) = -1 < 0.$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 - \ln x - 3^x\right) \overset{(+\infty)\cdot(-1)}{=\!=} -\infty.$

δ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x} + e^x - x\right) \overset{(+\infty)-(+\infty)}{=\!=} \lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{2x} \cdot \left(1 + \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x}\right)\right] = +\infty,$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1 > 0,$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ και

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty.$

20. 22 **α.** Το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\cdot\ln x\right)\overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)$.

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\cdot\ln x\right)=0.$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\right)\overset{(+\infty)\cdot 0}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\frac{1}{x}+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{0+1}=1.$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)\right)\underset{u\to 1}{\overset{\frac{1}{x}+1=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{\ln u}{u-1}=\left.\dfrac{d(\ln u)}{du}\right|_{x=1}=\dfrac{1}{1}=1.$

γ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\underset{u\to 0}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\left(e^u-1\right)=0.$ Άρα, το ζητούμενο όριο υπολογίζεται ως εξής:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]\overset{(+\infty)\cdot 0}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\underset{u\to 0}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=\!=}}\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{u\to 0}\frac{e^u}{1}=1.$$

δ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}\underset{u\to+\infty}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty.$ Άρα, το ζητούμενο όριο υπολογίζεται ως εξής:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{e^{\frac{1}{x}}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\left[(-x)\cdot\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}\right]=0\cdot 0=0.$$

20. 23 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(2+x)-3x^2\right)\overset{(+\infty)-(+\infty)}{=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(\dfrac{\ln(2+x)}{x^2}-3\right)\right]=-\infty,$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+x)}{x^2}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{2+x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2+4x}=0,$

  άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(2+x)}{x^2}-3\right)=-3<0.$

β. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x^2+e^x\right)\underset{u\to+\infty}{\overset{x^2+e^x=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ και το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-\ln\left(x^2+e^x\right)\right)\overset{(+\infty)-(+\infty)}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(1-\frac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{x^2}\right)\right].$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{x^2}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2x+e^x}{x^2+e^x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+e^x}{2x^3+2xe^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+e^x}{6x^2+(2x+2)e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{12x+(2x+4)e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{12+(2x+6)e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(2x+8)e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x+8}=0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\ln\left(x^2+e^x\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(1-\dfrac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{x^2}\right)\right]\overset{(+\infty)\cdot(1-0)}{=\!=}+\infty.$

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\eta\mu x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x}{x\,\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x\cdot\sigma\upsilon\nu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}=\frac{0}{2-0}=0.$$

δ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{(1+x)^2}}{2}=\dfrac{1}{2}.$

20. 24 **α.** Για x > 0 είναι $x^{\eta\mu x} = e^{\eta\mu x \cdot \ln x}$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x \cdot \ln x) \overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot x \cdot \ln x\right) = 1\cdot 0 = 0,$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x) \overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0.$

Αν $u = \eta\mu x \cdot \ln x$, τότε το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\eta\mu x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\eta\mu x \cdot \ln x} = \lim_{u\to 0} e^u = e^0 = 1.$$

β. Για x > 0 είναι $\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)^x = e^{x\cdot \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[x\cdot \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right] \overset{0\cdot(+\infty)}{=\!=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\frac{1}{x}+x} \overset{\left(\frac{2}{+\infty}\right)}{=} 0.$$

Αν $u = x\cdot \ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)$, τότε το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = \lim_{u\to 0} e^u = e^0 = 1.$$

γ. Για x κοντά στο 1 με $x \neq 1$ είναι $x^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{x-1}\cdot \ln x}$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$

Αν $u = \dfrac{\ln x}{x-1}$, τότε το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{\ln x}{x-1}} = \lim\limits_{u\to 1} e^u = e^1 = e.$

δ. Για $x < \dfrac{\pi}{2}$ είναι $(\varepsilon\varphi x)^{\sigma\upsilon\nu x} = e^{\sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(\varepsilon\varphi x)}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot \ln(\varepsilon\varphi x)\right) \overset{0\cdot(+\infty)}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\varepsilon\varphi x)}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\varepsilon\varphi x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{-\varepsilon\varphi x}{\eta\mu x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{-1}{\sigma\upsilon\nu x} \overset{\left(\frac{-1}{0^+}\right)}{=} -\infty.$$

Αν $u = \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(\varepsilon\varphi x)$, τότε το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\varepsilon\varphi x)^{\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{u\to-\infty} e^u = 0.$$

20. 25 α. Το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{2x} - \ln x + x^2 + \eta\mu x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[e^{2x}\cdot\left(x - \frac{\ln x}{e^{2x}} + \frac{x^2}{e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}}\cdot\eta\mu x\right)\right].$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{2x}} = 0.$
- ▸ Για $x > 0$ είναι $\left|\dfrac{1}{e^{2x}}\cdot\eta\mu x\right| = \dfrac{1}{e^{2x}}\cdot|\eta\mu x| \le \dfrac{1}{e^{2x}} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{e^{2x}} \le \dfrac{\eta\mu x}{e^{2x}} \le \dfrac{1}{e^{2x}}.$

  Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^{2x}}\cdot\eta\mu x\right) = 0.$

▸ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^{2x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2xe^{2x}} \overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=} 0.$$

▸ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{2x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2e^{2x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}} \overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=} 0.$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \dfrac{\ln x}{e^{2x}} + \dfrac{x^2}{e^{2x}} + \dfrac{1}{e^{2x}}\cdot\eta\mu x\right) = +\infty.$

Άρα, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[e^{2x}\cdot\left(x - \frac{\ln x}{e^{2x}} + \frac{x^2}{e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}}\cdot\eta\mu x\right)\right] = +\infty.$$

β. Για $x > 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to0}\left(xe^{-x} - \frac{1}{x} + \ln x\right) = \lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(x^2e^{-x} - 1 + x\cdot\ln x\right)\right] = -\infty,$$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty,$
- $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2e^{-x} - 1\right) = -1 < 0$ και
- $\lim\limits_{x\to0^+}(x\cdot\ln x) \overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=} \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0^+}(-x) = 0.$

γ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sigma\varphi x-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x\cdot\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-x\cdot\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x\cdot\sigma\upsilon\nu x}=$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x\cdot\eta\mu x}{\eta\mu x+x\cdot\sigma\upsilon\nu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\eta\mu x-x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{2\sigma\upsilon\nu x-x\cdot\eta\mu x}=\frac{0}{2}=0.$$

δ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)\overset{(+\infty)+(-\infty)}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{x}\cdot\left(1+x\cdot\ln x\right)\right]=+\infty,$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln x\right)\overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x\right)=0.$

20. 26 α. Είναι $\lim\limits_{x\to \pi^+}\left(\sigma\upsilon\nu x+1\right)=0$ και $\sigma\upsilon\nu x>-1\Leftrightarrow$ συνx + 1 > 0, κοντά στο π για x > π.

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to\pi^+}\ln\left(\sigma\upsilon\nu x+1\right)\underset{u\to 0^+}{\overset{u=\sigma\upsilon\nu x+1}{=\!=}}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty.$$

Το ζητούμενο όριο υπολογίζεται ως εξής:

$$\lim_{x\to\pi^+}\left(\eta\mu x\cdot\ln\left(\sigma\upsilon\nu x+1\right)\right)\overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=}\lim_{x\to\pi^+}\frac{\ln\left(\sigma\upsilon\nu x+1\right)}{\frac{1}{\eta\mu x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim_{x\to\pi^+}\frac{\frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+1}}{\frac{-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\pi^+}\frac{3\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{-2\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x-\eta\mu x}=$$

$$=\lim_{x\to\pi^+}\frac{3\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{-2\sigma\upsilon\nu x-1}=\frac{0}{+1}=0.$$

β. Για x > 0 κοντά στο 0 είναι ημx > 0 και $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x=0$, οπότε βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\eta\mu x\right)\underset{u\to 0^+}{\overset{\eta\mu x=u}{=\!=}}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty.$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(e^x-1\right)\cdot\ln\eta\mu x\right]\overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)\cdot\left(x\cdot\ln\eta\mu x\right)\right]\overset{1\cdot(-\infty)}{=\!=}-\infty,$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=\left.\dfrac{d\left(e^x\right)}{dx}\right|_{x=0}=e^0=1$ και

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln ημx\right)\overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln ημx}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{συνx}{ημx}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-συνx\cdot\dfrac{1}{\frac{ημx}{x}}\cdot\dfrac{1}{x}\right)\overset{(-1)\cdot(+\infty)}{=\!=}-\infty.$

γ. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}ημ\dfrac{1}{x}\underset{u\to 0}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}ημu=0.$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\ln x\right)\cdot ημ\frac{1}{x}\right]\underset{u\to 0^+}{\overset{\frac{1}{x}=u>0}{=\!=}}\lim_{u\to 0^+}\left[\left(1+\ln\frac{1}{u}\right)\cdot ημu\right]\overset{(+\infty)\cdot 0}{=\!=}\lim_{u\to 0^+}\left[\left(u-u\cdot\ln u\right)\cdot\frac{ημu}{u}\right]=0,$$

αφού:

- $\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{ημu}{u}=1$ και

- $\lim\limits_{u\to 0^+}\left(u\cdot\ln u\right)\overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\ln u}{\frac{1}{u}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}=\lim\limits_{u\to 0^+}\left(-u\right)=0,$ άρα $\lim\limits_{u\to 0^+}\left(u-u\cdot\ln u\right)=0.$

δ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\ln x}{e^{\frac{1}{x}}}\underset{u\to+\infty}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1+\ln u}{e^u}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{u}}{e^u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u\cdot e^u}=0.$

20. 27 **α.** Για x κοντά στο 0 με $x\neq 0$ είναι $\left(1+ημx\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln(1+ημx)}{x}}$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+ημx\right)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{συνx}{1+ημx}}{1}=\dfrac{1}{1+0}=1.$

Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+ημx\right)}{x}=u,$ τότε το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+ημx\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to 1}e^u=e.$

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\overset{(+\infty)-(+\infty)}{=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}^{\,2}-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}\overset{x>0}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\right)=0.$

γ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln\left(x^2+1\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(1-\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}\right)\right]=+\infty,$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{x}{x^2+1}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

δ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}+\ln x\right)\overset{(+\infty)+(-\infty)}{=\!=}\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{1}{x^2}\cdot\left(1+x^2\cdot\ln x\right)\right]=+\infty,$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2\ln x\right)\overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x^2}{2}=0.$

20. 28 α. Για $x>0$ ισχύει:

$$\eta\mu2x\geq-1\Leftrightarrow\eta\mu2x+2\geq1\Leftrightarrow\frac{e^x}{x^2+1}\cdot\left(\eta\mu2x+2\right)\geq\frac{e^x}{x^2+1}.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{x^2+1}\cdot\left(\eta\mu2x+2\right)\right]=+\infty.$$

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x-x+\eta\mu2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\cdot\eta\mu2x\right)=0,$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0,$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$ και
- για $x>0$ ισχύει $\left|\dfrac{1}{x^2}\cdot\eta\mu2x\right|=\dfrac{1}{x^2}\cdot\left|\eta\mu2x\right|\leq\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow-\dfrac{1}{x^2}\leq\dfrac{1}{x^2}\cdot\eta\mu2x\leq\dfrac{1}{x^2}.$

  Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\cdot\eta\mu2x\right)=0.$

γ. Το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{\ln x}\cdot\left(x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)\right].$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot ημ\frac{1}{x}\right)\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0}{=\!=}}\lim\limits_{u\to0}\frac{ημu}{u}=1$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty.$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2ημ\frac{1}{x}}{\ln x}=+\infty.$

20. 29 **α.** Το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to0}\left[\left(συνx-e^x\right)\ln x\right]\overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=}\lim_{x\to0}\left[\frac{συνx-e^x}{x}\cdot\left(x\cdot\ln x\right)\right],\ (1).$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to0}\frac{συνx-e^x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{-ημx-e^x}{1}=1$ και
- $\lim\limits_{x\to0}\left(x\cdot\ln x\right)\overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(-x\right)=0.$

Άρα $\lim\limits_{x\to0}\left[\left(συνx-e^x\right)\cdot\ln x\right]\overset{(1)}{=}\left(-1\right)\cdot0=0.$

β. Το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+x^3\right)}{ημ^2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^2}\cdot\left(\frac{1}{\frac{ημ^2x}{x^2}}\right)\right],\ (1).$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{3x^2}{1+x^3}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{2\left(1+x^3\right)}=0$ και
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{ημ^2x}{x^2}=1^2=1.$

Άρα $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+x^3\right)}{ημ^2x}\overset{(1)}{=}0\cdot1=0.$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Δοκιμάστε de L' Hospital απευθείας στο όριο.

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu(\lambda x)-\sigma\upsilon\nu x}{x\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\lambda\cdot\eta\mu(\lambda x)+\eta\mu x}{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\lambda^2\cdot\sigma\upsilon\nu(\lambda x)+\sigma\upsilon\nu x}{2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x}=\frac{-\lambda^2+1}{2}.$$

δ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2\ln(1+x)}{x\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-\frac{2}{1+x}}{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+\frac{2}{(1+x)^2}}{2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x}=\frac{1-1+2}{2-0}=1.$$

20. 30 α. Είναι $\left(\frac{x+\alpha}{x}\right)^x=e^{x\cdot\ln\frac{x+\alpha}{x}}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\ln\left(\frac{x+\alpha}{x}\right)\right]\overset{(+\infty)\cdot 0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\frac{1}{x+\alpha}}{x}\cdot\frac{-\alpha}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\alpha\cdot\frac{1}{1+\frac{\alpha}{x}}\right)=\alpha\cdot\frac{1}{1+0}=\alpha.$$

Αν $u=x\cdot\ln\frac{x+\alpha}{x}$, τότε έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\alpha}{x}\right)^x=\lim\limits_{u\to\alpha}e^u=e^\alpha$ και επειδή δίνεται ότι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\alpha}{x}\right)^x=2$, θα είναι $e^\alpha=2\Leftrightarrow\alpha=\ln 2$.

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{\ln(1+\alpha^2x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha\cdot e^{\alpha x}+\alpha\cdot e^{-\alpha x}}{\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2x}}=\frac{2\alpha}{\alpha^2}=\frac{2}{\alpha}$.

Άρα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{\ln(1+\alpha^2x)}=1\Leftrightarrow\frac{2}{\alpha}=1\Leftrightarrow\alpha=2.$$

20. 31 **α.** Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2\eta\mu x+4x\sigma\upsilon\nu x-x^2\eta\mu x}=$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{6\sigma\upsilon\nu x-6x\eta\mu x-x^2\sigma\upsilon\nu x}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\ln(1+x)}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x-\frac{1}{1+x}}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{(1+x)^2}}{2}=\frac{1}{2}.$$

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\eta\mu\alpha x)}{\ln(\eta\mu\beta x)}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha x}{\eta\mu\alpha x}}{\frac{\beta\sigma\upsilon\nu\beta x}{\eta\mu\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha x\cdot\eta\mu\beta x}{\eta\mu\alpha x\cdot\sigma\upsilon\nu\beta x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha x}{\sigma\upsilon\nu\beta x}\cdot\left(\frac{\frac{\eta\mu\beta x}{\beta x}}{\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}}\right)\right]=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}=1,$$

αφού:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu\beta x}{\beta x}\underset{u\to 0}{\overset{\beta x=u}{=\!=}}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1\quad\text{και}\quad\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}\underset{u\to 0}{\overset{\alpha x=u}{=\!=}}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1.$$

δ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{\ln\left(x^{2\mu}+1\right)}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mu\cdot x^{\mu-1}}{\frac{2\mu\cdot x^{2\mu-1}}{x^{2\mu}+1}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{2\mu}+1}{x^\mu}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}x^\mu=+\infty.$

20. 32 Για x κοντά στο 0 θέτουμε:

$$f(x)=\frac{x(1-\kappa\sigma\upsilon\nu x)+\lambda\eta\mu x}{x^3}\Leftrightarrow x^2f(x)=1-\kappa\cdot\sigma\upsilon\nu x+\lambda\cdot\frac{\eta\mu x}{x},\ \text{με}\ \lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{3}.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot f(x)\right)=\lim_{x\to 0}\left(1-\kappa\cdot \sigma\upsilon\nu x+\lambda\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)\Rightarrow 0=1-\kappa+\lambda \Rightarrow \kappa=1+\lambda,\ (1),$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 0}f(x)\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x\left[1-(1+\lambda)\sigma\upsilon\nu x\right]+\lambda\eta\mu x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+\lambda)x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\lambda\eta\mu x}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+\lambda)\sigma\upsilon\nu x+(1+\lambda)x\cdot\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1+\lambda)\eta\mu x+(1+\lambda)x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\lambda\eta\mu x}{6x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3(1+\lambda)\sigma\upsilon\nu x-(1+\lambda)x\cdot\eta\mu x-\lambda\sigma\upsilon\nu x}{6}=$$

$$=\frac{3(1+\lambda)-\lambda}{6}=\frac{3+2\lambda}{6}.$$

Επειδή $\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{3}$, θα πρέπει $\frac{3+2\lambda}{6}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$ και από την (1) βρίσκουμε $\kappa=\frac{1}{2}$.

Οι τιμές των κ, λ επαληθεύουν το αρχικό όριο, άρα είναι δεκτές.

20. 33 **α.** Η $f(x)=1+\frac{x}{2}+e^{-x}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Άρα, η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Αναζητούμε πλάγια / οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Έχουμε:

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{x}{2}+e^{-x}}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}-e^{-x}}{1}=\frac{1}{2}=\lambda$ και
- $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+e^{-x}\right)=1=\beta.$

Άρα, η ευθεία με εξίσωση ε: $y=\frac{1}{2}x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Αναζητούμε πλάγια / οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Είναι $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{x}{2}+e^{-x}}{x}$.

Έχουμε $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{2}+e^{-x}\right)\overset{(-\infty)+(+\infty)}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\left[e^{-x}\cdot\left(e^{x}+\frac{x}{2e^{-x}}+1\right)\right]=+\infty,$

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2e^{-x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-2e^{-x}}=0.$

Συνεπώς:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{2}-e^{-x}}{1}=-\infty.$$

Άρα, η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$.

β. Η $f(x)=1-x+e^{1+\frac{x}{3}}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Άρα, η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Αναζητούμε πλάγια / οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-1+\frac{e^{1+\frac{x}{3}}}{x}\right)=+\infty,$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{1+\frac{x}{3}}}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{1+\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{2}}{1}=+\infty.$

Άρα, η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$.

Αναζητούμε πλάγια / οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-1+\frac{1}{x}\cdot e^{1+\frac{x}{3}}\right)=-1=\lambda$ και
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-1)\cdot x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1+e^{1+\frac{x}{3}}\right)=-1=\beta.$

Άρα, η ευθεία με εξίσωση ε: $y=-x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

20. 34 α. Η $f(x)=\ln\left(e^x+1\right)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Άρα, η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Αναζητούμε πλάγια / οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{e^x+1}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=1=\lambda,$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x+1\right)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^x+1}{e^x}\right)=$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1}\right) = \ln\left(\frac{1+0}{1}\right) = 0 = \beta.$$

Άρα, η y = x είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Αναζητούμε πλάγια / οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(e^x+1\right) \underset{u\to1}{\overset{e^x+1=u}{=\!=}} \lim_{u\to1} \ln u = 0.$$

Άρα, η y = 0 είναι (οριζόντια) ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

β. Η $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, οπότε αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0. Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\ln x \cdot \frac{1}{x^2}\right) \overset{(-\infty)\cdot(+\infty)}{=\!=} -\infty.$$

Άρα, η x = 0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Αναζητούμε πλάγια / οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Έχουμε:

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^3} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3x^3} = 0 = \lambda \text{ και}$$
- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

Άρα, η y = 0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

20. 35 α. Η f είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0. Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{-\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 0.$$

Άρα, η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

β. Η $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Άρα, η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Αναζητούμε πλάγια / οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to-\infty}\left(x\cdot\frac{1}{e^x}\right) \overset{(-\infty)\cdot(+\infty)}{=} -\infty.$$

Άρα, η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Αναζητούμε πλάγια / οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Άρα, η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

γ. Η $f(x) = \dfrac{xe^x}{x-1}$ είναι συνεχής στο $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 1. Έχουμε:

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(xe^x \cdot \frac{1}{x-1}\right) \overset{e\cdot(+\infty)}{=} +\infty.$$

Άρα, η $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Αναζητούμε πλάγια / κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $-\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-1} \cdot e^x\right) = 1 \cdot 0.$$

Άρα, η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Αναζητούμε πλάγια / οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x-1} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Άρα, δεν υπάρχουν ασύμπτωτες στο $+\infty$.

20. 36 Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) \geq \varphi > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot e^x \geq \varphi \cdot e^x > 0, \ (1).$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\varphi \cdot e^x\right) = +\infty$, άρα από την (1) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) \cdot e^x\right) = +\infty$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)\cdot e^x}{e^x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)\cdot e^x + f(x)\cdot e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(f'(x) + f(x)\right) = \ell \ \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(f'(x) + f(x)\right) - f(x)\right] = \ell - \ell = 0.$$

20. 37 α. Το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to0}\left[\left(e^{x^2} - 1\right) \cdot \ln x\right] \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{e^{x^2}-1}{x} \cdot (x\ln x)\right]$.

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x\cdot e^{x^2}}{1} = 0 \cdot 1 = 0$ και

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\ln x\right) \overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0.$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(e^{x^2}-1\right)\ln x\right] = 0\cdot 0 = 0.$$

β. Το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x \eta\mu\dfrac{1}{x}\right) \overset{(+\infty)\cdot 0}{=\!=} \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{e^x}{x}\cdot\left(x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)\right].$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1} = +\infty$ και

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right) \underset{u\to 0}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=\!=}} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u} = 1 > 0.$

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

γ. Το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x\left(e^x-1\right)\eta\mu x} \overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to 0}\left[\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^3}\cdot\left(\frac{1}{\dfrac{x\left(e^x-1\right)\eta\mu x}{x^3}}\right)\right],$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\eta\mu x}{3x} = -\dfrac{1}{3}$ και

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^x-1\right)\eta\mu x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}\right) = 1\cdot 1 = 1,$

  αφού $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = \left.\dfrac{d\left(e^x\right)}{dx}\right|_{x=0} = e^0 = 1.$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x\left(e^x-1\right)\eta\mu x} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1} = -\frac{1}{3}.$$

δ. Το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln^3(1+x)}{(\text{συν}x-1)^4}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\ln^3(1+x)}{x^4}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{(\text{συν}x-1)^4}{x^4}}\right)$.

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln^3(1+x)}{x^4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^3=1^3=1>0$,

  αφού $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$ και

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\text{συν}x-1)^4}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\text{συν}x-1}{x}\right)^4=0$ και $\left(\dfrac{\text{συν}x-1}{x}\right)^4>0$ κοντά στο 0,

  οπότε θα είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\left(\dfrac{\text{συν}x-1}{x}\right)^4}=+\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln^3(1+x)}{(\text{συν}x-1)^4}=+\infty$.

20. 38 α. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{e^x}=0$.

Για x > 0 ισχύει:

$$\left|\frac{x^3}{e^x}\cdot\text{συν}x\right|=\frac{x^3}{e^x}\cdot|\text{συν}x|\le\frac{x^3}{e^x}\Rightarrow-\frac{x^3}{e^x}\le\frac{x^3\cdot\text{συν}x}{e^x}\le\frac{x^3}{e^x}.$$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3\cdot\text{συν}x}{e^x}\right)=0$.

β. Το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,\text{ημ}x+x\ln(1+x)}{\text{ημ}^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\text{ημ}x+\ln(1+x))}{\text{ημ}^2x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\frac{\text{ημ}x}{x}}\cdot\left(1+\frac{\ln(1+x)}{\text{ημ}x}\right)\right]$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ημ}x}{x}=1$ και

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\eta\mu x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{\sigma\upsilon\nu x}=1.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\eta\mu x + x\ln(1+x)}{\eta\mu^2 x}=\dfrac{1}{1}\cdot(1+1)=2.$

γ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\cdot\ln x\right) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-2\sqrt{x}\right)=0.$

Για x > 0 ισχύει:

$$\left|\sqrt{x}\cdot\ln x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right|=\left|\sqrt{x}\cdot\ln x\right|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right|\le\left|\sqrt{x}\cdot\ln x\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left|\sqrt{x}\cdot\ln x\right|\le\sqrt{x}\cdot\ln x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\le\left|\sqrt{x}\cdot\ln x\right|.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left|\sqrt{x}\cdot\ln x\right|=|0|=0$ και ομοίως $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|\sqrt{x}\cdot\ln x\right|\right)=0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\cdot\ln x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=0.$

δ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{1-\sigma\upsilon\nu x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\eta\mu x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{1-1}{1}=0.$

20. 39 α. Έχουμε $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\varepsilon\varphi x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(\eta\mu x\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)\overset{1\cdot(-\infty)}{=}-\infty,$

οπότε $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}e^{\varepsilon\varphi x}\underset{u\to-\infty}{\overset{\varepsilon\varphi x=u}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0.$

Άρα $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left[(\eta\mu x-1)\cdot e^{\varepsilon\varphi x}\right]=0\cdot 0=0.$

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\eta\mu x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{6x}=\dfrac{1}{6}\cdot 1=\dfrac{1}{6}.$

γ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2e^x}{\eta\mu^2 3x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\frac{\eta\mu^2 3x}{x^2}}\cdot e^x\right)=\dfrac{1}{9},$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to 0}e^x=e^0=1$ και

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}\cdot 3\right)^2 \underset{u\to 0}{\overset{3x=u}{=\!=}} \lim\limits_{u\to 0}\left(3\cdot\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)^2=9.$

Διαφορετική αντιμετώπιση
Δοκιμάστε με de L' Hospital.

δ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-xe^x}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-e^x-xe^x}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}-2e^x-xe^x}{2}=$$

$$=\frac{-1-2-0}{2}=-\frac{3}{2}.$$

20. 40 α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\alpha$, άρα και συνεχής, οπότε ισχύουν:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha),\ (1)\quad \text{και}\quad \lim_{h\to 0}f(\alpha+h)=f(\alpha),\ (2).$$

Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)-\big(f(\alpha-h)-f(\alpha)\big)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}+\frac{f(\alpha-h)-f(\alpha)}{-h}\right)\overset{(1)}{=}2f'(\alpha),$$

διότι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha-h)-f(\alpha)}{-h}\underset{u\to 0}{\overset{-h=u}{=\!=}}\lim_{u\to 0}\frac{f(\alpha+u)-f(\alpha)}{u}\overset{(1)}{=}f'(\alpha).$$

β. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο α, άρα οι συναρτήσεις f και f' είναι συνεχείς στο α. Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)+f(\alpha-h)-2f(\alpha)}{h^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f'(\alpha+h)-f'(\alpha-h)}{2h}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(\alpha+h)-f'(\alpha)}{h}+\frac{f'(\alpha-h)-f'(\alpha)}{-h}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2f''(\alpha)=f''(\alpha),$$

αφού:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(\alpha+h)-f'(\alpha)}{h}=f''(\alpha)\quad \text{και}\quad \lim_{h\to 0}\frac{f'(\alpha-h)-f'(\alpha)}{-h}\underset{u\to 0}{\overset{-h=u}{=\!=}}f''(\alpha).$$

20. 41 **α.** Έχουμε:

- $f(0) = \alpha$ και
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\eta\mu x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x - x}{x^2\eta\mu x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{2x\eta\mu x + x^2\sigma\upsilon\nu x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu x}{2\eta\mu x + 4x\sigma\upsilon\nu x - x^2\eta\mu x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sigma\upsilon\nu x}{6\sigma\upsilon\nu x - 6x\eta\mu x - x^2\sigma\upsilon\nu x} = \frac{-1}{6}.$$

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αν:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{6}.$$

β. Έχουμε:

- $f(0) = \beta - 1$ και
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \ln(x+1)}{x\ln(x+1)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\ln(x+1) + x\cdot\frac{1}{x+1}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{2}{x+1} - \frac{x}{(x+1)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αν:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \beta - 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{2}.$$

20. 42 **α.** Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^\nu - 1}{x^\mu - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 1}\frac{\nu\cdot x^{\nu-1}}{\mu\cdot x^{\mu-1}} = \frac{\nu}{\mu}.$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x - x}{x - \eta\mu x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1}{x - \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 + \varepsilon\varphi^2 x - 1}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\varepsilon\varphi x\cdot\left(1 + \varepsilon\varphi^2 x\right)}{\eta\mu x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[2\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\left(1 + \varepsilon\varphi^2 x\right)\right] = 2\cdot\frac{1}{1}\cdot(1 + 0) = 2.$$

γ. Για x κοντά στο 0 είναι $\sigma\upsilon\nu x > 0$ και $(\sigma\upsilon\nu x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln\sigma\upsilon\nu x}{x^2}}$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{2x} = -\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{1} = -\frac{1}{2}.$

δ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha^{\frac{1}{x}}-\beta^{\frac{1}{x}}}{\ln\frac{x}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha^{\frac{1}{x}}-\beta^{\frac{1}{x}}}{\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)-\beta^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\frac{1}{\frac{x}{x-1}}\cdot\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-x}{x^2}\cdot\left(\alpha^{\frac{1}{x}}-\beta^{\frac{1}{x}}\right)\right]=0\cdot(1-1)=0,$$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to0}\alpha^u=1$ και ομοίως $\lim\limits_{x\to+\infty}\beta^{\frac{1}{x}}=1.$

20. 43 α. Έχουμε:

- $f(0)=0$ και
- $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}e^{-\frac{1}{x^2}}\underset{u\to-\infty}{\overset{-\frac{1}{x^2}=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0.$

Άρα $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0),$ οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β. Για $x\neq0$ έχουμε:

- $f'(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)'=e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}$ και
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[(-x)\cdot\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-1}{x^2}\right)\right],$

  όμως:
  - $\lim\limits_{x\to0}(-x)=0$ και
  - $\lim\limits_{x\to0}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-1}{x^2}\right)\underset{u\to-\infty}{\overset{-\frac{1}{x^2}=u}{=\!=}}\lim\limits_{u\to-\infty}\left(u\cdot e^u\right)\overset{(-\infty)\cdot0}{=\!=}\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{u}{e^{-u}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{1}{-e^{-u}}=\lim\limits_{u\to-\infty}\left(-e^u\right)=0.$

  Συνεπώς $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0\cdot0=0\in\mathbb{R}.$

Άρα $f'(0)=0.$

20. 44 α. Το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+\eta\mu 2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}+\frac{1}{x+1}\cdot\eta\mu 2x\right)$.

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x+1}=0$,
- για x < 0 ισχύει:

$$\left|\frac{1}{x+1}\cdot\eta\mu 2x\right|=\frac{1}{|x+1|}\cdot|\eta\mu 2x|\le\frac{1}{|x+1|}\Rightarrow-\frac{1}{|x+1|}\le\frac{1}{x+1}\cdot\eta\mu 2x\le\frac{1}{|x+1|}$$

και είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{|x+1|}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{|x+1|}=0$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\eta\mu 2x\right)=0$.

Άρα:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\eta\mu 2x}{x+1}=-\infty.$$

β. Το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\eta\mu x-e^x}{3x+\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}\eta\mu x-\frac{e^x}{x}}{3+\frac{1}{x}\eta\mu x}$.

Έχουμε:

- για x > 0 ισχύει $\left|\frac{1}{x}\cdot\eta\mu x\right|=\frac{1}{x}\cdot|\eta\mu x|\le\frac{1}{x}\Rightarrow-\frac{1}{x}\le\frac{1}{x}\cdot\eta\mu x\le\frac{1}{x}$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\eta\mu x\right)=0$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-e^x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=-\infty$.

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\eta\mu x-e^x}{3x+\eta\mu x}\overset{\frac{2-0+(-\infty)}{3+0}}{=\!=}-\infty.$$

γ. Το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(2+\eta\mu 2x)}{x^2+1-\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2+1-\ln x}\cdot(2+\eta\mu 2x)\right]$.

Ισχύει:

$$|2+\eta\mu 2x|\le|2|+|\eta\mu 2x|\le 2+1=3$$

και για x > 0 έχουμε:

$$\left|\frac{x}{x^2+1-\ln x}\cdot(2+\eta\mu 2x)\right| = \left|\frac{x}{x^2+1-\ln x}\right|\cdot|2+\eta\mu 2x| =$$

$$= \left|\frac{x}{x^2+1-\ln x}\cdot(2+\eta\mu 2x)\right| =$$

$$= \left|\frac{x}{x^2+1-\ln x}\right|\cdot|2+\eta\mu 2x| \le \left|\frac{x}{x^2+1-\ln x}\right|\cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\left|\frac{x}{x^2+1-\ln x}\right| \le \frac{x}{x^2+1-\ln x}\cdot(2+\eta\mu 2x) \le 3\left|\frac{x}{x^2+1-\ln x}\right|.$$

με:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1-\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}}\right) = 0,$$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0,$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2} = 0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2+1-\ln x}\cdot(2+\eta\mu 2x)\right] = 0.$$

20. 45 Η f για να είναι παραγωγίσιμη, πρέπει να είναι και συνεχής στο $x_0 = 1$. Δηλαδή:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x\to1^-}(\alpha x+\beta)e^x = \lim_{x\to1^+}\frac{e\ln x}{x} = f(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)\cdot e = 0 = f(1) \Rightarrow \alpha = -\beta,\ \ (1).$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}\frac{(\alpha x+\beta)e^x-(\alpha+\beta)e}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to1^-}\frac{\alpha e^x+(\alpha x+\beta)e^x}{1} =$

  $= \alpha e + (\alpha + \beta)e = (2\alpha + \beta)e$ και

- $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{e\ln x}{x}-0}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\frac{e\ln x}{x^2-x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to1^+}\frac{e\cdot\frac{1}{x}}{2x-1} = e.$

Συνεπώς, ισχύει:

$$(2\alpha+\beta)e = e \overset{(1)}{\Rightarrow} -\beta = 1 \Rightarrow \beta = -1.$$

Άρα α = 1.

20. 46 Η f για να είναι παραγωγίσιμη, πρέπει να είναι και συνεχής στο $x_0 = 1$.
Δηλαδή:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+\beta x-\beta\right) = \lim_{x\to 1^+}(\ln x+\alpha-1) = f(1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 = \alpha - 1 = f(1) \Rightarrow \alpha = 2.$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x-1}+\beta x-\beta-1}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x-1}+\beta}{1} = 1+\beta$ και
- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x+\alpha-1-(\alpha-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$

Συνεπώς, ισχύει:

$$1+\beta = 1 \Rightarrow \beta = 0.$$

20. 47 Η ε: y = 3x – 1 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, άρα ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 3 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right) = -1.$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\cdot\ln\left(1+e^x\right)}{x^2f(x)-3x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\cdot\ln\left(1+e^x\right)}{x^2\left(f(x)-3x\right)} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}\cdot\frac{1}{\left(f(x)-3x\right)}\right] =$$
$$= 3\cdot 1\cdot\frac{1}{-1} = -3,$$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^x\right) = +\infty$ και
- αν $u = 1 + e^x$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^x\right) = \lim\limits_{u\to+\infty}\ln u = +\infty.$

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{-x}+1} = \frac{1}{0+1} = 1.$$

20. 48 α. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 0$, οπότε ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, (1).

Για x κοντά στο 0 θέτουμε:

$$g(x) = \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x} \Leftrightarrow g(x)\cdot \eta\mu 2x - 1 + e^{2x} = f(x),\ (2),\ \ \text{με } \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot \eta\mu 2x - 1 + e^{2x}\right) = 0\cdot 0 - 1 + 1 = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f(0) = 0.$$

β. Έχουμε $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} \overset{(2)}{=} \lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\frac{\eta\mu 2x}{x} + \frac{e^{2x}-1}{x}\right) = 0\cdot 2 + 2 = 2 \in \mathbb{R}$.

Άρα $f'(0) = 2$, αφού $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\sigma\upsilon\nu 2x}{1} = 2$ και $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1} = 2$.

γ. Η $h(x) = e^{-x} f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$h'(x) = -e^{-x}\cdot f(x) + e^{-x}\cdot f'(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

Τότε έχουμε:

$$h'(0) = -1\cdot f(0) + 1\cdot f'(0) = 2 \Rightarrow h'(0) = f'(0) = 2.$$

Άρα, οι εφαπτομένες των C_f, C_h στο $x_0 = 0$ είναι μεταξύ τους παράλληλες.

20. 49 α. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και στο (0, 1) ως πολυωνυμική συνάρτηση, ενώ στο $[1, +\infty)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Αρκεί να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και στο $x_1 = 1$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0 \ \text{ και } \ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(\alpha x + \beta) = \beta.$$

Άρα, πρέπει $\beta = 0$.

Επίσης, έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(1 + x\ln x) = 1 \ \text{ και } \ \lim_{x\to 1^-}(\alpha x + \beta) = \alpha + \beta = \alpha.$$

Άρα, πρέπει $\alpha = 1$.

β. Για $\alpha = 1$, $\beta = 0$ ο τύπος της f γίνεται $f(x) = \begin{cases} -x^2 &, x\le 0 \\ x &, 0 < x < 1 \\ 1 + x\ln x, & x \ge 1\end{cases}$.

i. Έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1 + x\ln x}{x^2} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x + 1}{2x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2} = 0$.

ii. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-1}{x-1}=1$ και
- $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x\ln x}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\ln x+1}{1}=0+1=1.$

20. 50 Για x κοντά στο 0 θέτουμε:

$$g(x)=\frac{(\alpha+1)e^x-(\beta+1)\sigma\upsilon\nu x+\alpha e^{-x}-2x}{x\eta\mu x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot\eta\mu x\cdot g(x)=(\alpha+1)e^x-(\beta+1)\sigma\upsilon\nu x+\alpha e^{-x}-2x$$

με $\lim\limits_{x\to0}g(x)=2,$ οπότε:

$$\lim_{x\to0}\left[x\cdot\eta\mu x\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to0}\left[(\alpha+1)e^x-(\beta+1)\sigma\upsilon\nu x+\alpha e^{-x}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow0\cdot0\cdot2=\alpha+1-\beta-1+\alpha\Rightarrow\beta=2\alpha,\quad(1).$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to0}g(x)\overset{(1)}{=}\lim_{x\to0}\frac{(\alpha+1)e^x-(2\alpha+1)\sigma\upsilon\nu x+\alpha e^{-x}-2x}{x\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\alpha+1)e^x+(2\alpha+1)\eta\mu x+\alpha e^{-x}-2}{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\alpha+1)e^x+(2\alpha+1)\sigma\upsilon\nu x+\alpha e^{-x}}{2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x}=\frac{4\alpha+2}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow2=2\alpha+1\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}.$$

Από την (1) προκύπτει ότι β = 1.

20. 51 **α.** Η $f(x)=\ln x-e^x$ είναι συνεχής στο $A=(0,+\infty)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0. Έχουμε:

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\ln x-e^x\right)=-\infty.$$

Άρα, η x = 0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Αναζητούμε πλάγια / οριζόντια ασύμπτωτη στο +∞. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x-e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{x}\cdot\left(\frac{\ln x}{e^x}-1\right)\right]=-\infty,$$

διότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x}=0.$$

Άρα, η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

β. Η $f(x)=\sqrt{\dfrac{\ln x}{x^2-1}}$ είναι συνεχής στο $A=(0,1)\cup(1,+\infty)$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, αφού:

$$\frac{\ln x}{x^2-1}\ge 0 \Leftrightarrow \ln x\cdot\left(x^2-1\right)\ge 0 \Leftrightarrow x\in(0,1)\cup(1,+\infty).$$

Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0. Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^2-1}=\lim_{x\to0^+}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x^2-1}\right)\overset{(-\infty)\cdot(-1)}{=\!=}+\infty.$$

Αν $u=\dfrac{\ln x}{x^2-1}$, τότε $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}\sqrt{u}=+\infty.$

Άρα, η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 1. Έχουμε:

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x^2-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\frac{1}{2}.$$

Αν $u=\dfrac{\ln x}{x^2-1}$, τότε:

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{u\to\frac{1}{2}}\sqrt{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Αναζητούμε πλάγια / οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\ln x}{x^2-1}}=\lim_{u\to0}\sqrt{u}=0,$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0.$

Άρα, η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

γ. Η f ορίζεται, αν:

$$\frac{x+1}{x+2}>0\Leftrightarrow(x+1)(x+2)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty).$$

Η f είναι συνεχής στο $A=(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Για $x\in A$ είναι $f(x)=e^{x\cdot\ln\frac{x+1}{x+2}}$.

Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο –2 και στο –1.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^-}\left[(x+1)\cdot\dfrac{1}{x+2}\right]\overset{(-3)\cdot(-\infty)}{=\!=}+\infty$ και αν $u=\dfrac{x+1}{x+2}$, τότε βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to-2^-}\left(\ln\dfrac{x+1}{x+2}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$. Επομένως $\lim\limits_{x\to-2^-}\left(x\cdot\ln\dfrac{x+1}{x+2}\right)=-\infty$.

  Επομένως:

$$\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{u\to-\infty}e^u=0.$$

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x+1}{x+2}=0$ και αν $u=\dfrac{x+1}{x+2}>0$, τότε βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to-1^+}\ln\dfrac{x+1}{x+2}=\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$. Επομένως $\lim\limits_{x\to-1^+}\left(x\cdot\ln\dfrac{x+1}{x+2}\right)\overset{(-1)\cdot(-\infty)}{=\!=}+\infty$.

  Αν $u=x\cdot\ln\dfrac{x+1}{x+2}$, τότε βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty$.

Άρα, η $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.
Αναζητούμε πλάγια / οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x+2}=1$, άρα:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{x+1}{x+2}=\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$ και

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\cdot\ln\dfrac{x+1}{x+2}\right)\overset{(-\infty)\cdot0}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\dfrac{x+1}{x+2}}{\dfrac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\frac{x+1}{x+2}}\cdot\dfrac{1}{(x+2)^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{u\to-1}e^u=e^{-1}.$$

Άρα, η $y=\dfrac{1}{e}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Αναζητούμε πλάγια / οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x+2}=1$, άρα:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x+1}{x+2}=\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$ και

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\ln\frac{x+1}{x+2}\right)\overset{(+\infty)\cdot 0}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x+2}}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{(x+1)(x+2)}=-1,$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=e^{-1}.$$

Άρα, η $y=\frac{1}{e}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη και στο $+\infty$.

20. 52 Για $x>x_0$ έχουμε:

- $$\lim_{x\to x_0}\ln(x-x_0)\underset{u\to 0^+}{\overset{x-x_0=u>0}{=\!=}}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty \quad \text{και}$$
- $$\lim_{x\to x_0}\ln\left(e^x-e^{x_0}\right)\underset{u\to 0^+}{\overset{e^x-e^{x_0}=u>0}{=\!=}}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty.$$

Τότε το δοθέν όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\ln(x-x_0)}{\ln\left(e^x-e^{x_0}\right)}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{x-x_0}}{\frac{e^x}{e^x-e^{x_0}}}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}\cdot\frac{1}{e^x}\right)=e^{x_0}\cdot\frac{1}{e^{x_0}}=1,$$

αφού $\lim_{x\to x_0}\frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{e^x}{1}=e^{x_0}$.

20. 53 Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο Α, άρα οι f και f' είναι συνεχείς, όπως επίσης και η f'' είναι συνεχής στο Α. Έχουμε:

$$\lim_{x\to\gamma}\left(\frac{1}{f(x)-f(\gamma)}-\frac{1}{(x-\gamma)f'(\gamma)}\right)=\lim_{x\to\gamma}\frac{(x-\gamma)f'(\gamma)-\left(f(x)-f(\gamma)\right)}{(x-\gamma)\cdot\left(f(x)-f(\gamma)\right)\cdot f'(\gamma)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to\gamma}\frac{f'(\gamma)-f'(x)}{\left(f(x)-f(\gamma)\right)\cdot f'(\gamma)+(x-\gamma)\cdot f'(x)\cdot f'(\gamma)}=$$

$$=\frac{-1}{f'(\gamma)}\cdot\lim_{x\to\gamma}\left(\frac{f'(x)-f'(\gamma)}{x-\gamma}\cdot\frac{1}{\frac{f(x)-f(\gamma)}{x-\gamma}+f'(x)}\right)=$$

$$=\frac{-1}{f'(\gamma)}\cdot f''(\gamma)\cdot\frac{1}{2f'(\gamma)}=\frac{-f''(\gamma)}{2\left(f'(\gamma)\right)^2}.$$

20. 54 Η f είναι συνεχής στο (α, β) ως παραγωγίσιμη και η f' είναι συνεχής.

Η συνάρτηση $g(x)=x^{f(x)}$ ορίζεται για x > 0 και $x\in$(α, β), άρα $x\in$(0, β).

Η g γράφεται $g(x)=e^{f(x)\cdot\ln x}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)\cdot\ln x\right)\overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{f(x)}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{f'(x)}{f(x)}}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{f'(x)}\right)\overset{f'(x)\neq 0}{=\!=}$$

$$=f'(0)\cdot\frac{1}{f'(0)}=1.$$

Αφού, για $x>0\overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$ και $f(0)=0,$ προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty.$

Επιπλέον, έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)}{1}=f'(0).$

Αν $f(x)\cdot\ln x=u,$ τότε βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{u\to 1}e^{u}=e.$$

20. 55 **α.** Η f είναι συνεχής στο x_0 = 1, άρα $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1).$

Είναι f (1) = α και έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{1-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+1}{-1}=-1.$

Άρα α = –1.

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x\ln x}{1-x}+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{-(x-1)^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+\cancel{1}-\cancel{1}}{-2(x-1)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{-2}=-\frac{1}{2}.$$

20. 56 **α.** Η g είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα οι g, g' και g'' είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{g(x)}{x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{(x-1)^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{g'(x)}{2(x-1)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{g''(x)}{2}=\frac{g''(1)}{2}=\frac{4}{2}=2\in\mathbb{R}.$$

Άρα:

$$f'(1)=2.$$

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{\frac{1}{x}}=\dfrac{f'(1)}{1}=0.$

20. 57 **α.** Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell\in\mathbb{R}^*$, άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot e^x\right)=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } \lambda>0\\ -\infty, & \text{αν } \lambda<0\end{cases}.$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\cdot f(x)}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^xf(x)+e^xf'(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+f'(x)\right)=2.$

Άρα, η $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β. Έστω $M>0$. Για κάθε $x>M$ θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)+f'(x)\Leftrightarrow f'(x)=g(x)-f(x) \text{ με } \lim_{x\to+\infty}g(x)=2.$$

Τότε έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-f(x)\right)=2-2=0.$

Άρα, η $y=0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$, είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_{f'}$ στο $+\infty$.

21η Ενότητα

Εφαπτομένη

A. Του τύπου Σωστό / Λάθος

21. 1 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος **στ.** Σωστό.

21. 2 **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό **στ.** Λάθος.

21. 3 **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό **στ.** Σωστό.

21. 4 **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος **στ.** Σωστό.

B. Βασικές εφαρμογές – Ασκήσεις εμπέδωσης

21. 5 **α.** ε: $y=2x$, η: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ **β.** ε: $y=x-2$, η: $y=-x+2$

γ. ε: $y=-4$, η: $x=2$ **δ.** ε: $y=2$, η: $x=-1$

ε. ε: $y=x+1$, η: $y=-x+1$ **στ.** ε: $y=x-1$, η: $y=-x+1$

ζ. ε: $y=x$, η: $y=-x$ **η.** ε: $y=\frac{1}{2}x+\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$, η: $y=-2x+\frac{3\sqrt{3}+4\pi}{6}$

θ. ε: $y=-1$, η: $x=\pi$ **ι.** ε: $y=x$, η: $y=-x$.

21. 6 **α.** $y=x$ **β.** $y=4e^2x-3e^2$

γ. $y=2x-e$ **δ.** $y=ex-e$

ε. $y=x$ **στ.** $y=-e^{\pi}x+(\pi-1)e^{\pi}$

ζ. $y=-1$ **η.** $y=x-1$

θ. $y=-5x+21$ **ι.** $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$.

21. 7 **α.** $y=2x+2$ **β.** $y=-x-6$

γ. $y=-3x-6$ **δ.** $y=ex+2$

ε. $y=-1$ **στ.** $y=x$.

21. 8 **α.** $y=2x+2$ **β.** $y=4x-1$

γ. $y=2\sqrt{3}x$ ή $y=-2\sqrt{3}x$ **δ.** $y=6x-6$

ε. $y=-2x+2$.

21. 9 **α.** $y=2x-8$ **β.** $y=-2x$

γ. $y=-2x$ ή $y=2x-8$ **δ.** $y=-3$

ε. $y=4x-15$.

21. 10 Σε κάθε περίπτωση ισχύει $\lambda=f'(x_0)$.

α. $(1,-1)$ **β.** $(2, 7)$

γ. $(0, 1)$ **δ.** $(1, 3)$

ε. $(1, e)$ **στ.** (e, e)

ζ. $(2, 2)$ **η.** $(\pi, 1)$.

21. 11 **α.** $y=x$ ή $y=3x-12$ **β.** $y=3x-5$ ή $y=7x-17$

γ. $y=2x-2$ **δ.** $y=5x+1$ ή $y=-3x+1$.

Γ. Ασκήσεις για λύση

21. 12 Η εξίσωση της (ε) γράφεται $y=\frac{5}{2}x-2$. Τότε πρέπει:

$$\lambda=f'(1)\Rightarrow f'(1)=\frac{5}{2}.$$

Το σημείο Μ ανήκει στην (ε), άρα έχουμε $f(1)=\frac{5}{2}\cdot 1-2\Rightarrow f(1)=\frac{1}{2}$.

21. 13 Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν $f(-x)=-f(x)$, (1) και $f(-1)=2$.

Για x = 1 από την (1) έχουμε $f(-1)=-f(1)\Rightarrow f(1)=-2$.

Επίσης ισχύει $f'(1)=3$.

Παραγωγίζοντας την (1) ως προς x έχουμε:

$$-f'(-x)=-f'(x)\Leftrightarrow f'(-x)=f'(x)$$

η οποία για x = 1 γράφεται $f'(-1)=f'(1)\Rightarrow f'(1)=3$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Β έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\ \text{ ή }\ \varepsilon: y=3x-5.$$

21. 14 **α.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0=2$.

Τότε έχουμε:

- $$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\Rightarrow \lim_{x\to 2^-}(\alpha x^3)=\lim_{x\to 2^+}(x^2+\beta)=f(2)\Rightarrow$$
  $$\Rightarrow 8\alpha=4+\beta=f(2)\quad (1).$$
- $$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\Rightarrow \lim_{x\to 2^-}\frac{\alpha x^3-8\alpha}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+\beta-(4+\beta)}{x-2}\Rightarrow$$
  $$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-}\frac{\alpha(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\Rightarrow \alpha\cdot 12=4\Rightarrow \alpha=\frac{1}{3}.$$

Από την (1) βρίσκουμε $\beta=-\frac{4}{3}$.

β. Για $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=-\frac{4}{3}$ η συνάρτηση γράφεται $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3} & ,\ x\le 2\\ x^2-\frac{4}{3}, & x>2\end{cases}$ με $f(2)=\frac{8}{3}$.

Έχουμε $f'(2)\overset{(\alpha)}{=}\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=4$.

Άρα, η εφαπτομένη της C_f στο 2 έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y - f(2) = f'(2)(x-2) \quad ή \quad \varepsilon: y = 4x - \frac{16}{3}.$$

21. 15 Είναι $f(-1) = 2$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{h} = 9x^2+3x-1 \underset{u\to 0}{\overset{3h=u}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{u\to 0}\left(\frac{f(x+u)-f(x)}{u}\cdot 3\right) = 9x^2+3x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3f'(x) = 9x^2+3x-1.$$

Για $x=-1$ βρίσκουμε $3f'(-1) = 9-3-1 \Rightarrow f'(-1) = \dfrac{5}{3}.$

Η εφαπτομένη της C_f στο M έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y - f(-1) = f'(-1)(x-(-1)) \quad ή \quad \varepsilon: y = \frac{5}{3}x + \frac{11}{3}.$$

21. 16 Για $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 8x+11$ και $g'(x) = 3x^2.$

Αρκεί να ισχύει $f'(x) < g'(x).$ Έχουμε:

$$f'(x) < g'(x) \Rightarrow 8x+11 < 3x^2 \Rightarrow 3x^2-8x-11 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{11}{3}, +\infty\right).$$

21. 17 Ο τύπος της f θα είναι της μορφής $f(x) = \begin{cases} \lambda_1 x & , \ x<0 \\ \alpha x^2 & , \ 0 \le x \le 2 \\ \lambda_2 x + \beta, & 2 < x \le 4 \end{cases}.$

Από τη δοθείσα γραφική παράσταση έχουμε τα εξής:

- η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 4]$,
- $f(-1) = 2 \Rightarrow \lambda_1 \cdot (-1) = 2 \Rightarrow \lambda_1 = -2,$
- $f(2) = 2 \Rightarrow \alpha \cdot 4 = 2 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{2},$
- $f(4) = 0 \Rightarrow \lambda_2 \cdot 4 + \beta = 0, \ (1).$

Είναι $\lambda_2 = \dfrac{2-0}{2-4} = -1,$ οπότε από την (1) βρίσκουμε $\beta = 4.$

Άρα, η συνάρτηση γράφεται $f(x)=\begin{cases} -2x & , x<0 \\ \dfrac{x^2}{2} & , 0\le x\le 2 \\ -x+4, & 2<x\le 4 \end{cases}$.

Επιπλέον, έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2x}{x}=-2,$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x}=0.$

Συνεπώς, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Επίσης, έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\frac{x^2}{2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)}=-2,$
- $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x+4}{x-2}\overset{2\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

Συνεπώς, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_1=2$.

21. 18 **α.** Είναι $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2},\ x\neq 0$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=2$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(2)=f'(2)(x-2) \quad \text{ή} \quad \varepsilon: y=-\frac{1}{4}x+1.$$

β. Είναι $f'(x)=3x^2,\ x\in\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=-1$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(-1)=f'(-1)(x-(-1)) \quad \text{ή} \quad \varepsilon: y=3x+3.$$

γ. Είναι $f'(x)=2x+1,\ x\in\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0) \quad \text{ή} \quad \varepsilon: y=x-1.$$

δ. Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}},\ x>2$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=11$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(11)=f'(11)(x-11) \quad \text{ή} \quad \varepsilon: y=\frac{1}{6}x+\frac{7}{6}.$$

ε. Είναι $f'(x)=-\dfrac{2}{(2x-1)^2},\ x\neq\dfrac{1}{2}$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1) \quad \text{ή} \quad \varepsilon: y=-2x+3.$$

21. 19 Είναι $f'(x)=-x^2,\ x\in\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha) \ \text{ ή } \ \varepsilon: y=-\alpha^2x+\frac{2\alpha^3}{3}.$$

Τα κοινά σημεία των C_f και (ε) έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x)=-\alpha^2x+\frac{2\alpha^3}{3} \overset{x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} -\frac{x^3}{3}=-\alpha^2x+\frac{2\alpha^3}{3} \Leftrightarrow x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)\left(x^2+\alpha x-2\alpha^2\right)=0 \Leftrightarrow (x-\alpha)^2(x+2\alpha)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\, x=\alpha \ \text{ ή } \ x=-2\alpha \}.$$

Άρα, το άλλο κοινό σημείο των C_f και (ε) είναι το $N(-2\alpha,\ f(-2\alpha))$ στο οποίο η κλίση της C_f είναι $f'(-2\alpha)=-(-2\alpha)^2=-4\alpha^2=4f'(\alpha)$.

Συνεπώς, η κλίση της C_f στο Ν είναι τετραπλάσια αυτής στο Μ.

21. 20 **α.** Είναι $f'(x)=\frac{1}{x^2},\ x\neq 0$. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha) \ \text{ ή } \ \varepsilon: y=\frac{1}{\alpha^2}x-\frac{2}{\alpha}.$$

Η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x′x και y′y στα σημεία $A\left(0,-\frac{2}{\alpha}\right)$ και $B(2\alpha,\ 0)$ αντίστοιχα. Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες:

$$x=\frac{0+2\alpha}{2}=\alpha,\quad y=\frac{-\frac{2}{\alpha}+0}{2}=-\frac{1}{\alpha}.$$

Συνεπώς, το σημείο αυτό είναι το $M\left(\alpha,-\frac{1}{\alpha}\right)$.

β. Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AOB}$ είναι ορθογώνιο στο Ο και έχει εμβαδόν:

$$(AOB)=\frac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OB)=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{-2}{\alpha}\right|\cdot|2\alpha|=2 \ \text{τ. μ.}$$

21. 21 Είναι $f'(x)=2x^2,\ x\in\mathbb{R}$ και $g'(x)=-\frac{1}{2x^3},\ x\neq 0$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(1)\cdot g'(1)=-1$.

Πράγματι, έχουμε:

$$f'(1)\cdot g'(1)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1.$$

21. 22 Α΄ τρόπος

Αν η ευθεία (ε) είναι η εφαπτομένη της C_f στο Α, τότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(\xi)=\lambda_{AB}$. Είναι $f'(\xi)=\dfrac{-1}{2\sqrt{\xi+1}}$ και έχουμε:

$$\lambda_{AB}=\frac{\dfrac{-1}{\sqrt{\xi+1}}+\sqrt{\xi+1}}{-\xi-\xi}=\frac{-1+\xi+1}{-2\xi\sqrt{\xi+1}}=\frac{-1}{2\sqrt{\xi+1}}.$$

Συνεπώς, ισχύει $f'(\xi)=\lambda_{AB}$.

Β΄ τρόπος

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο Α διέρχεται από το Β.

Είναι $f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}},\ x>-1.$

Η εφαπτομένη της C_f στο Α έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)\Leftrightarrow y-\sqrt{\xi+1}=-\frac{1}{2\sqrt{\xi+1}}(x-\xi)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2\sqrt{\xi+1}}x-\frac{\xi+2}{2\sqrt{\xi+1}}.$$

Για $x=-\xi$ έχουμε $y=\dfrac{\xi}{2\sqrt{\xi+1}}-\dfrac{\xi+2}{2\sqrt{\xi+1}}=-\dfrac{1}{\sqrt{\xi+1}}.$

Άρα η (ε) διέρχεται από το Β.

21. 23 Έστω ότι υπάρχουν σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ με $x_1\neq x_2$ στα οποία οι εφαπτομένες (ε_1), (ε_2) της C_f είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Τότε ισχύει $f'(x_1)=f'(x_2)$, (1).

Επειδή $f'(x)=4x^3,\ x\in\mathbb{R}$, από την (1) έχουμε $4x_1^3=4x_2^3\Leftrightarrow x_1=x_2$ που είναι άτοπο.

Συνεπώς, δεν υπάρχουν εφαπτομένες της C_f που να είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Για τη συνάρτηση $f(x)=x^3+1,\ x\in\mathbb{R}$, είναι $f'(x)=3x^2,\ x\in\mathbb{R}$.

Για $x_1=-1\neq 1=x_2$ είναι $f'(-1)=f'(1)=3$.

Συνεπώς, οι εφαπτομένες της C_f στα x_1, x_2 είναι μεταξύ τους παράλληλες.

21. 24 Είναι $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x,\ x\in[0, 2\pi]$. Αρκεί να βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x,\quad (1).$$

Αν συνx = 0, τότε από την (1) προκύπτει ότι ημx = 0. Ωστόσο, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $ημ^2x + συν^2x = 1$, οπότε προκύπτει ότι 0 = 1 που είναι άτοπο. Άρα συνx ≠ 0.

Από την (1) βρίσκουμε $εφx = 1 \Leftrightarrow x = kπ + \frac{π}{4},\ k \in \mathbb{Z}$.

Τότε έχουμε $0 \le x \le 2π \Rightarrow 0 \le kπ + \frac{π}{4} \le 2π \Rightarrow -\frac{1}{4} \le k \le \frac{7}{4} \overset{k\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} \{k = 0$ ή $k = 1\}$.

Συνεπώς, προκύπτουν οι τιμές $x = \frac{π}{4}$ ή $x = \frac{5π}{4}$ που είναι δεκτές.

21. 25 Έστω η συνάρτηση $f(x) = αx^3 + βx^2 + γx + δ,\ α \ne 0,\ x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) = 3αx^2 + 2βx + γ$. Έχουμε:

- $f(1) = 2 \Rightarrow α + β + γ + δ = 2$ (1),
- $f(-1) = 2 \Rightarrow -α + β - γ + δ = 2$ (2),
- $f'(1) = 2 \Rightarrow 3α + 2β + γ = 2$ (3),
- $f'(-1) = -2 \Rightarrow 3α - 2β + γ = -2$ (4),

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $2(β + δ) = 4 \Rightarrow β + δ = 2$.

Από τις (3), (4) προκύπτει ότι $6α + 2γ = 4 \Rightarrow γ = -3α$.

Τότε η (1) γράφεται $α - 3α = 0 \Rightarrow α = 0$ που είναι άτοπο.

Επομένως, το ζητούμενο πολυώνυμο δεν υπάρχει.

21. 26 **α.** Είναι $f'(x) = 2x + \frac{16}{x^2} = \frac{2(x^3+8)}{x^2},\ x \ne 0$. Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2.$$

Συνεπώς, η εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στον άξονα x′x έχει εξίσωση:

$$ε: y = f(-2) \text{ ή } ε: y = 12.$$

β. Είναι $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3},\ x > 0$. Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}.$$

Συνεπώς, η ζητούμενη εφαπτομένη της C_f έχει εξίσωση:

$$ε: y = f\left(\sqrt{e}\right) \text{ ή } ε: y = \frac{1}{2e}.$$

γ. Για την $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $x\neq 0$ είναι $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$, $x\neq 0$. Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow \{x=-1 \text{ ή } x=1\}.$$

Συνεπώς, οι ζητούμενες εφαπτομένες της C_f έχουν εξισώσεις:

$$\varepsilon_1: y=f(-1)\Leftrightarrow y=-2 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y=f(1)\Leftrightarrow y=2.$$

21. 27 Είναι $f'(x)=-3x^2+4x$, $x\in\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=-1$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(-1)=f'(-1)(x-(-1))\Leftrightarrow y=-7x-3.$$

Η (ε) τέμνει και πάλι τη C_f, αν:

$$f(x)=-7x-3\Leftrightarrow x^3-2x^2-7x-4=0\Leftrightarrow (x+1)(x^2-3x-4)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2(x-4)=0\Leftrightarrow \{x=-1 \text{ ή } x=4\}.$$

Συνεπώς, η (ε) τέμνει τη C_f και στο σημείο $N(4, f(4))$.

21. 28 Για x > 0 έχουμε:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(2-\frac{1}{x}\right)=\frac{2x-1}{2x\sqrt{x}}.$$

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Συνεπώς, το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει τετμημένη $x_0=\frac{1}{2}$.

21. 29 Έχουμε $f(4)=6\Rightarrow 2\alpha+\frac{\beta}{2}=6\Rightarrow 4\alpha+\beta=12$, (1).

Για x > 0 είναι $f'(x)=\frac{\alpha}{2\sqrt{x}}-\frac{\beta}{2x\sqrt{x}}$.

Η ευθεία η: 4x + y = 22 είναι κάθετη στην εφαπτομένη της C_f στο N, οπότε έχουμε:

$$f'(4)\cdot\lambda_\eta=-1\Rightarrow\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\beta}{16}\right)\cdot(-4)=-1\Rightarrow \alpha-\frac{\beta}{4}=1\Rightarrow 4\alpha-\beta=4, \ (2).$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι α = 2 και β =4.

21. 30 Είναι $f'(x)=3\alpha x^2+\beta$, $x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε:

- $f(-1)=2 \Rightarrow -\alpha-\beta+\gamma=2$ (1),
- $f(1)=4 \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=4$ (2),
- $f'(1)=\lambda_\eta \Rightarrow 3\alpha+\beta=-1$ (3).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\gamma=3$.

Από τις (1), (3) προκύπτει ότι $\alpha=-1$, οπότε από την (1) βρίσκουμε ότι $\beta=2$.

Άρα $f(x)=-x^3+2x+3,\ x\in\mathbb{R}$.

21. 31 Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{2}{x}=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^3-2x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x^2+1)-2(x^2+1)=0 \Leftrightarrow (x^2+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=2,$$

οπότε $f(2)=1=g(2)$. Άρα, το κοινό σημείο των C_f, C_g είναι το $N(2,1)$.

Επιπλέον, ισχύουν $f'(x)=-\frac{2}{x^2},\ x\neq 0$ και $g'(x)=2(x-1),\ x\in\mathbb{R}$.

Οι εφαπτομένες των C_f και C_g στο Ν έχουν συντελεστές διεύθυνσης $f'(2)=-\frac{1}{2}$ και $g'(2)=2$ αντίστοιχα.

Άρα $f'(2)\cdot g'(2)=-1$, δηλαδή οι εφαπτομένες των C_f, C_g στο κοινό τους σημείο Ν είναι μεταξύ τους κάθετες.

21. 32 Για $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)=3x+2 \Leftrightarrow x^3-3x-2=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-2)=0 \Leftrightarrow \{x=-1 \text{ ή } x=2\}.$$

Επιπλέον, είναι $f'(x)=3x,\ x\in\mathbb{R}$, οπότε βρίσκουμε $f'(2)=12$, $f'(-1)=3=\lambda_\varepsilon$.

Συνεπώς, η (ε) εφάπτεται της C_f στο σημείο $N(-1,-1)$.

21. 33 Είναι $f'(x)=2\alpha x+\beta,\ x\in\mathbb{R}$ και $g'(x)=\frac{1}{x^2},\ x\neq 0$.

Οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0=-1$, οπότε έχουμε:

- $f(-1)=g(-1) \Rightarrow \alpha-\beta-3=1 \Rightarrow \alpha-\beta=4$, (1),
- $f'(-1)=g'(-1) \Rightarrow -2\alpha+\beta=1 \overset{(1)}{\Rightarrow} -2(\beta+4)+\beta=1 \Rightarrow \beta=-9$.

Από την (1) βρίσκουμε $\alpha=13$.

21. 34 Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{x},\ x>0$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,\ 0)$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1) \quad \text{ή} \quad \varepsilon: y=x-1.$$

Η (ε) θα εφάπτεται στη C_g, αν υπάρχει σημείο $M(x_0,\ g(x_0))$ τέτοιο, ώστε το Μ να ανήκει στην (ε). Τότε έχουμε:

$$g(x_0)=x_0-1 \Leftrightarrow 2x_0^2+x_0+\frac{1}{8}=0,\ \ (1)$$

Είναι $g'(x)=4x+2,\ x\in\mathbb{R}$ και έχουμε $g'(x_0)=\lambda_\varepsilon \Rightarrow 4x_0+2=1 \Leftrightarrow x_0=-\dfrac{1}{4}$, το οποίο επαληθεύει την (1). Άρα, το σημείο επαφής των (ε) και C_g είναι το $M\left(-\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{5}{4}\right)$.

21. 35 Έχουμε:

$$f'(x) = -4\sigma\upsilon\nu x \cdot (-\eta\mu x) + \sigma\upsilon\nu 2x \cdot 2 = 2(2\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu 2x) =$$
$$= 2(\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x),\quad x\in[0,\ 2\pi].$$

Οι εφαπτομένες της C_f που είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$ είναι στα σημεία με τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $f'(x)=0,\quad x\in[0,\ 2\pi]$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x = -\sigma\upsilon\nu 2x$, (1).

Αν $\sigma\upsilon\nu 2x = 0$, τότε λόγω της $\eta\mu^2 2x + \sigma\upsilon\nu^2 2x = 1$ προκύπτει ότι $\eta\mu 2x = 1$ ή $\eta\mu 2x = -1$ που είναι άτοπο από την (1). Άρα $\sigma\upsilon\nu 2x \neq 0$, οπότε η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\varepsilon\varphi 2x = -1 \Leftrightarrow \left(2x=k\pi+\frac{3\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left(x=k\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8},\ k\in\mathbb{Z}\right).$$

Τότε έχουμε:

$$0\le x\le 2\pi \Leftrightarrow 0\le k\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{3}{8}\le\frac{k}{2}\le 2-\frac{3}{8} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le k\le\frac{13}{4} \overset{k\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} k=0,1,2,3.$$

Επομένως οι τετμημένες των σημείων είναι:

$$x=\frac{3\pi}{8} \text{ ή } x=\frac{7\pi}{8} \text{ ή } x=\frac{11\pi}{8} \text{ ή } x=\frac{15\pi}{8}.$$

21. 36 ***α.*** Για $x\neq 0$ είναι $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2(x^3-1)}{x^2}$.

Η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ στο σημείο της C_f που έχει τετμημένη τη λύση της εξίσωσης $f'(x)=0,\ x\neq 0$. Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-1=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Συνεπώς, η ζητούμενη εφαπτομένη της C_f έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y = f(1) \quad \text{ή} \quad \varepsilon: y = 3.$$

β. Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \dfrac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = e^x \dfrac{x-2}{x^3}$. Ομοίως, έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Συνεπώς, η ζητούμενη εφαπτομένη της C_f έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y = f(2) \quad \text{ή} \quad \varepsilon: y = \frac{e^2}{4}.$$

γ. Για $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 9x^2 - 9x + 2$. Ομοίως, έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left\{x = \frac{2}{3} \ \text{ή} \ x = \frac{1}{2}\right\}.$$

Συνεπώς, προκύπτουν δύο εφαπτομένες της C_f με εξισώσεις:

$$\varepsilon_1: y = f\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow y = \frac{11}{9} \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y = f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow y = \frac{23}{18}.$$

21. 37 **α.** Η ευθεία δ_1: $y = 16x - 4$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 16$.

Για $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 3x^2 + 4$. Έστω ένα σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της C_f.

Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι παράλληλη στην ευθεία (δ_1), αν:

$$f'(x_0) = \lambda_1 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 4 = 16 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2.$$

Συνεπώς, προκύπτουν τα σημεία $M(2, 13)$ ή $M'(-2, -19)$.

β. Η ευθεία δ_2: $8y = -x + 1$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = -\dfrac{1}{8}$.

Έστω ένα σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της C_f.

Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι κάθετη στην ευθεία (δ_2), αν:

$$f'(x_0) \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow (3x_0^2 + 4)\left(-\frac{1}{8}\right) = -1 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Συνεπώς, προκύπτουν τα σημεία $M\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{32 - 9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)$ ή $M'\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{-32 - 9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)$.

21. 38 Για $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 2x$.

Έστω ένα σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της C_f. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $A\left(1, \frac{3}{4}\right)$, αν:

$$\frac{3}{4}-x_0^2=2x_0\left(1-x_0\right)\Leftrightarrow x_0^2-2x_0+\frac{3}{4}=0\Leftrightarrow\left\{x_0=\frac{1}{2}\ \text{ή}\ x_0=\frac{3}{2}\right\}.$$

Επομένως:

- αν $M\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, τότε η εξίσωση εφαπτομένης είναι $\varepsilon: y=x-\frac{1}{4}$,
- αν $M\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$, τότε η εξίσωση εφαπτομένης είναι $\varepsilon: y=3x-\frac{9}{4}$.

21. 39 Για $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=2\alpha x-10$ και για $x\neq\beta$ είναι $g'(x)=-\frac{1}{(x-\beta)^2}$.

Αρκεί να ισχύουν:

- $f(1)=g(1)\Leftrightarrow\alpha-1=\frac{1}{1-\beta}$, (1),
- $f'(1)=g'(1)\Leftrightarrow 2\alpha-10=-\frac{1}{(1-\beta)^2}$, (2).

Από τη (2) λόγω της (1) έχουμε $2\alpha-10=-(\alpha-1)^2\Rightarrow\alpha^2=9\Rightarrow\alpha=\pm3$.

Από την (1) για α = 3 βρίσκουμε $\beta=\frac{1}{2}$ και για α = −3 βρίσκουμε $\beta=\frac{5}{4}$.

21. 40 **α.** Η ευθεία (ε_1) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 5$.

Για $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=2x^2-5$. Έστω ένα σημείο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ της C_f.

Αν η ευθεία (ε) είναι η εφαπτομένη της C_f στο Μ, τότε έχουμε:

$$\varepsilon\ //\ \varepsilon_1\Leftrightarrow f'\left(x_0\right)=\lambda_1\Leftrightarrow 2x_0-5=5\Leftrightarrow x_0=5.$$

Συνεπώς, προκύπτει το σημείο $M(5, 4)$ και η εξίσωση της (ε) είναι ε: $y=5x-21$.

β. Η ευθεία (ε_2) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2=\frac{1}{7}$.

Έστω ένα σημείο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ της C_f.

Αν η ευθεία (ε) είναι η εφαπτομένη της C_f στο Μ, τότε έχουμε:

$$\varepsilon\perp\varepsilon_2\Leftrightarrow f'\left(x_0\right)\cdot\lambda_2=-1\Leftrightarrow\left(2x_0-5\right)\frac{1}{7}=-1\Leftrightarrow 2x_0=-2\Leftrightarrow x_0=-1.$$

Συνεπώς, προκύπτει το σημείο $M(-1, 10)$ και η εξίσωση της (ε) είναι ε: $y=-7x+3$.

γ. Έστω ένα σημείο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ της C_f.

Αν η ευθεία (ε) είναι η εφαπτομένη της C_f στο Μ, τότε έχουμε:

$$f'\left(x_0\right) = εφ\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 2x_0 - 5 = -1 \Leftrightarrow x_0 = 2.$$

Συνεπώς, προκύπτει το σημείο $M\left(2, -2\right)$ και η εξίσωση της (ε) είναι ε: $y = -x$.

21. 41 Για $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'\left(x\right) = 2x - 4$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(3, f\left(3\right)\right)$ έχει εξίσωση:

$$ε: y - f\left(3\right) = f'\left(3\right)\left(x - 3\right) \quad ή \quad ε: y = 2x - 4.$$

Για $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'\left(x\right) = 2x + 2$.

Η (ε) θα εφάπτεται της C_g, αν υπάρχει σημείο $M\left(x_0, g\left(x_0\right)\right)$ τέτοιο, ώστε:

- $g'\left(x_0\right) = \lambda_ε, \Leftrightarrow 2x_0 + 2 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 0,$ (1) και
- $g\left(x_0\right) = 2x_0 - 4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} g\left(x_0\right) = -4.$

Συνεπώς, προκύπτει το σημείο $M\left(0, -4\right)$.

21. 42 Για $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'\left(x\right) = 2x - 1$. Έστω ένα σημείο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ της C_f.

Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση:

$$ε: y - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right).$$

Η (ε) διέρχεται από το σημείο $A\left(-2, 2\right)$, αν:

$$\begin{aligned} 2 - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(2 - x_0\right) &\Rightarrow 2 - x_0^2 + x_0 = \left(2x_0 - 1\right)\left(2 - x_0\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 - x_0^2 + x_0 = 5x_0 - 2 - 2x_0^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 \Rightarrow x_0 = 2. \end{aligned}$$

Συνεπώς, προκύπτει το σημείο $M\left(2, 2\right)$, διότι $f\left(2\right) = 2$ και η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $ε: y - 2 = 3\left(x - 2\right)$ ή $ε: y = 3x + 8$.

21. 43 **α.** Για $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$f\left(x\right) = g\left(x\right) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - 1\right)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

οπότε $f\left(1\right) = 1$. Άρα, το κοινό σημείο των C_f, C_g είναι το $M\left(1, 1\right)$.

Για $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 2x - 3$ και για $x \neq 0$ είναι $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

- Αναζητούμε κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g στο M.

  Επειδή $f'(1) = g'(1) = -1$, οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με εξίσωση:

  $$\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x-1) \ \text{ ή } \ \varepsilon: y = -x + 2.$$

- Αναζητούμε κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g σε μη κοινό τους σημείο.

  Έστω τα σημεία $N(x_1, f(x_1))$ και $K(x_2, f(x_2))$, $x_2 \neq 0$.

  Οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα N και K αντίστοιχα έχουν εξισώσεις:

  $$\varepsilon_1: y = f'(x_1)x - x_1 f'(x_1) + f(x_1) \ \text{ και } \ \varepsilon_2: y = g'(x_2)x - x_2 g'(x_2) + g(x_2).$$

  Αν οι ευθείες (ε_1), (ε_2) ταυτίζονται, τότε έχουμε:

  $$f'(x_1) = g'(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 - 3 = -\frac{1}{x_2^2} \Leftrightarrow x_1 = \left(3 - \frac{1}{x_2^2}\right)\frac{1}{2}, \ (1)$$

  και:

  $$-x_1 f'(x_1) + f(x_1) = -x_2 g'(x_2) + g(x_2) \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow -x_1(2x_1 - 3) + x_1^2 - 3x_1 + 3 = -x_2 \frac{-1}{x_2^2} + \frac{1}{x_2} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow -x_1^2 + 3 = \frac{2}{x_2} \overset{(1)}{\Rightarrow} -\left(3 - \frac{1}{x_2^2}\right)^2 \frac{1}{4} + 3 = \frac{2}{x_2} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow -\frac{9}{4} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{4x_2^4} + 3 = \frac{2}{x_2}, \ (2).$$

  Έστω $\frac{1}{x_2} = w \neq 0.$ Τότε από τη (2) έχουμε:

  $$-\frac{9}{4} + \frac{3}{2}w^2 - \frac{w^4}{4} + 3 = 2w \Rightarrow -9 + 6w^2 - w^4 + 12 = 8w \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow w^4 - 6w^2 + 8w - 3 = 0 \Rightarrow (w-1)(w^3 + w^2 - 5w + 3) = 0 \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow (w-1)^2(w^2 + 2w - 3) = 0 \Rightarrow (w-1)^3(w+3) = 0 \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \{w = 1 \text{ ή } w = -3\}.$$

  - Αν $w = 1 \Rightarrow \frac{1}{x_2} = 1 \Rightarrow x_2 = 1$ και από την (1) προκύπτει $x_1 = 1$, τότε η (ε) είναι κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο M.
  - Αν $w = -3 \Rightarrow \frac{1}{x_2} = -3 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3}$ και από την (1) προκύπτει $x_1 = -3$, τότε

έχουμε τα σημεία $N(-3,\ 21)$ και $K\left(-\frac{1}{3},\ -3\right)$.

Η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$\varepsilon_1: y-(-3)=-9\left(x-\left(-\frac{1}{3}\right)\right) \quad ή \quad \varepsilon_1: y=-9x-6.$$

β. Για $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=2x-3$ και $g'(x)=2x-7$.

- Αναζητούμε κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g σε κοινό τους σημείο.

  Για $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

  $$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-3x+4=x^2-7x+16\Leftrightarrow x=3.$$

  Είναι $f'(3)=3\neq g'(3)=-1$.

  Συνεπώς, δεν υπάρχει κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.
- Αναζητούμε κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g σε μη κοινό τους σημείο.

  Έστω τα σημεία $M(x_1,\ f(x_1))$ και $N(x_2,\ f(x_2))$.

  Οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα Μ και Ν αντίστοιχα έχουν εξισώσεις:

  $$\varepsilon_1: y=f'(x_1)x-f'(x_1)x_1+f(x_1) \quad και \quad \varepsilon_2: y=g'(x_2)x-g'(x_2)x_2+g(x_2).$$

  Αν οι ευθείες (ε_1), (ε_2) ταυτίζονται, τότε έχουμε:

  $$f'(x_1)=g'(x_2)\Leftrightarrow 2x_1-3=2x_2-7\Leftrightarrow x_2=x_1+2,\quad (1)$$

  και:

  $$-f'(x_1)x_1+f(x_1)=-g'(x_2)x_2+g(x_2)\Rightarrow$$
  $$\Rightarrow -(2x_1-3)x_1+x_1^2-3x_1+4=-(2x_2-7)x_2+x_2^2-7x_2+16\Rightarrow$$
  $$\Rightarrow -x_1^2+4=-x_2^2+16\overset{(1)}{\Rightarrow}-x_1^2=-(x_1+2)^2+12\Rightarrow$$
  $$\Rightarrow -4x_1-4+12=0\Rightarrow x_1=2.$$

  Από την (1) βρίσκουμε $x_2=4$, οπότε προκύπτουν τα σημεία $M(2,\ 2)$ και $N(4,\ 4)$. Συνεπώς, η κοινή τους εφαπτομένη έχει εξίσωση:

  $$\varepsilon: y=1\cdot x-1\cdot 2+2 \quad ή \quad \varepsilon: y=x.$$

21. 44 Για $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=-24x^2+24x-3$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $N(1,\ 2)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(1)=-3$.

Αν (ε) η ζητούμενη εφαπτομένη στο $M(x_0,\ f(x_0))$, τότε πρέπει:

$$f'(x_0)=f'(1)\Rightarrow -24x_0(x_0-1)=0\Rightarrow\{x_0=0 \text{ ή } x_0=1\}.$$

- Αν $x_0 = 1$, τότε το Μ ταυτίζεται με το Ν.
- Αν $x_0 = 0$, τότε προκύπτει το σημείο $M(0, f(0))$ και είναι:

$$f(1) = 2 \Rightarrow \alpha = 1 \text{ και } f(0) = \alpha = 1.$$

Συνεπώς, η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x - 0) \text{ ή } \varepsilon: y = -3x + 1.$$

21. 45 **α.** Για $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Βρίσκουμε $f'(1) = -3$ και $f(1) = -2$, οπότε η ευθεία (η) διέρχεται από το σημείο $M(1, -2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{3}$.

Συνεπώς, η ζητούμενη κάθετη στην εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$\eta: y - (-2) = \frac{1}{3}(x - 1) \text{ ή } \eta: y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}.$$

β. Αν $N(x_0, f(x_0))$ ένα ζητούμενο σημείο της C_f, τότε αρκεί να ισχύει $f'(x) = \lambda$.

Η σχέση αυτή γράφεται ισοδύναμα:

$$3x_0^2 - 6x_0 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 9x_0^2 - 18x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Επομένως, οι ζητούμενες τετμημένες των σημείων είναι:

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{10}}{3} \text{ ή } x_0 = 1 + \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

21. 46 Έστω οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 1 - x^2,\ -1 \le x \le 1 \text{ και } g(x) = 4 - (x - 4)^2 = -x^2 + 8x - 12,\ 2 \le x \le 6.$$

Το δοκάρι είναι η κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g σε μη κοινό τους σημείο. Έστω τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ των C_f και C_g αντίστοιχα. Οι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) των C_f και C_g στα σημεία αυτά έχουν εξισώσεις:

$$\varepsilon_1: y = f'(x_1)x - x_1 f'(x_1) + f(x_1) \text{ με } f'(x) = -2x,\ -1 \le x \le 1 \text{ και}$$

$$\varepsilon_2: y = g'(x_2)x - x_2 g'(x_2) + g(x_2) \text{ με } g'(x) = -2x + 8,\ 2 \le x \le 6.$$

Επειδή οι (ε_1) και (ε_2) ταυτίζονται, έχουμε:

- $f'(x_1) = g'(x_2) \Rightarrow -2x_1 = -2x_2 + 8 \Rightarrow x_1 = x_2 - 4$, (1)

  όπου $x_1 \in [-1, 1]$ και $x_2 \in [2, 6]$.
- $-x_1 f'(x_1) + f(x_1) = -x_2 g'(x_2) + g(x_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow -x_1(-2x_1)+1-x_1^2=-x_2(-2x_2+8)-x_2^2+8x_2-12\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2=x_2^2-13\overset{(1)}{\Rightarrow}(x_2-4)^2=x_2^2-13\Rightarrow -8x_2=-29\Rightarrow x_2=\frac{29}{8}.$$

Επομένως, η ζητούμενη εφαπτομένη είναι $εφω=g'(x_2)\Rightarrow εφω=\frac{3}{4}.$

21. 47 Είναι $g(0)=f(-1)+1.$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και είναι $g'(x)=f'(συνx+x^2+x-2)\cdot(-ημx+2x+1)$ με $g'(0)=f'(-1)\cdot 1=1.$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α έχει εξίσωση:

$$ε: y-f(-1)=f'(-1)(x-(-1)) \quad ή \quad ε: y=x+f(-1)+1.$$

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο Β έχει εξίσωση:

$$ε': y-g(0)=g'(0)(x-0) \quad ή \quad ε': y=x+f(-1)+1.$$

Επομένως, οι εφαπτομένες (ε) και (ε′) ταυτίζονται.

21. 48 Για $x\neq 0$ έχουμε $f'(x)=\left(\frac{3x^2+x+1}{x}\right)'=\left(3x+1+\frac{1}{x}\right)'=3-\frac{1}{x^2}$ και για $x\in\mathbb{R}$ είναι

$g'(x)=4x+α.$ Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το κοινό σημείο των C_f και C_g στο οποίο η κοινή τους εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 2. Τότε έχουμε:

$$f(x_0)=g(x_0)\Rightarrow\frac{3x_0^2+x_0+1}{x_0}=2x_0^2+αx_0+β,\ x\neq 0,\ (1)$$

και:

$$f'(x_0)=g'(x_0)=2\Rightarrow\begin{cases}3-\dfrac{1}{x_0^2}=2\Leftrightarrow 1=\dfrac{1}{x_0^2}\Leftrightarrow x_0=\pm 1\\ 4x_0+α=2\end{cases}.$$

Αν $x_0=1,$ τότε $α=-2$ και από την (1) έχουμε $\frac{3+1+1}{1}=2+(-2)+β\Rightarrow β=5.$

Αν $x_0=-1,$ τότε $α=6$ και από την (1) έχουμε $\frac{3-1+1}{-1}=2-6+β\Rightarrow β=1.$

21. 49 **α.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(ημx)=e^x\cdot συνx$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R},$ οπότε παραγωγίζοντας έχουμε:

$$f'(ημx)\cdot συνx=e^x\cdot συνx-e^x\cdot ημx,\ x\in\mathbb{R}.$$

Για $x=0$ είναι $f'(0)\cdot 1=1\cdot 1-1\cdot 0\Rightarrow f'(0)=1$.

β. Για $x=0$ από τη δοθείσα βρίσκουμε ότι $f(0)=1$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0) \text{ ή } \varepsilon: y=x+1.$$

Η (ε) τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(0,1)$ και $B(-1,0)$, οπότε είναι $(OA)=1$ και $(OB)=|-1|=1$. Επομένως το τρίγωνο $\overset{\triangle}{OAB}$ είναι ισοσκελές.

21. 50 Έστω $f(x)=\frac{\alpha}{x}$, $x\neq 0$, οπότε είναι $f'(x)=-\frac{\alpha}{x^2}$, $x\neq 0$ και $\alpha\neq 0$. Αν $M(x_0, f(x_0))$ είναι ένα σημείο της C_f, τότε η εφαπτομένη της C_f στο M έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Rightarrow \varepsilon: y=\frac{-\alpha}{x_0^2}x+\frac{2\alpha}{x_0},\ x_0\neq 0.$$

Αν η (ε) έχει κοινό σημείο με τη C_f, εκτός του M, τότε αυτό θα έχει τετμημένη μια λύση της εξίσωσης:

$$f(x)=\frac{-\alpha}{x_0^2}x+\frac{2\alpha}{x_0},\ x\neq x_0,\ (1).$$

Από την (1) έχουμε:

$$\frac{\alpha}{x}=\frac{-\alpha}{x_0^2}x+\frac{2\alpha}{x_0}\Leftrightarrow \frac{\alpha}{x_0^2}x^2-\frac{2\alpha}{x_0}x+\alpha=0\Leftrightarrow \alpha\left(\frac{x}{x_0}-1\right)^2=0\Leftrightarrow \frac{x}{x_0}-1=0\Leftrightarrow x=x_0$$

που είναι άτοπο.

Άρα, η (ε) τέμνει τη C_f μόνο στο σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$ για οποιοδήποτε $x_0\in\mathbb{R}^*$.

21. 51 Για $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=\eta\mu x$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \text{ ή } \varepsilon: y=x-\frac{\pi}{2}.$$

Η (ε) τέμνει τους άξονες στα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και $B\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Τότε ισχύουν $(OA)=\frac{\pi}{2}$, $(OB)=\left|-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}$ και $\widehat{AOB}=\frac{\pi}{2}$, οπότε έχουμε:

$$(OAB)=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{\pi^2}{8} \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

Επιπλέον, αν $f(x)=x-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \text{συν}x=x-\frac{\pi}{2}$, τότε θέτοντας όπου $x-\frac{\pi}{2}=\omega \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\omega$

έχουμε $\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)=\omega \Leftrightarrow -\text{ημ}\omega=\omega$ που αληθεύει μόνο για $\omega=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$.

Άρα, η (ε) τέμνει τη C_f μόνο στο σημείο Α.

21. 52 • Για $x<0$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{x+6}{5} \Leftrightarrow x^4=\frac{x+6}{5} \Leftrightarrow 5x^4-x-6=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1)\left(5x^3-5x^2+5x-6\right)=0 \Leftrightarrow x=-1,$$

διότι για $x<0$ είναι $5x^3-5x^2+5x-6<0$.

Επίσης, είναι $f'(x)=4x^3$, οπότε $f'(-1)=4$.

• Για $0\le x<6$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{x+6}{5} \Leftrightarrow 5\sqrt{x}=x+6 \overset{\sqrt{x}=\omega\ge 0}{\Leftrightarrow} \omega^2-5\omega+6=0 \Rightarrow \{\omega=2 \text{ ή } \omega=3\}.$$

Αν $\omega=2$, τότε $\sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$ και αν $\omega=3$, τότε $\sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9$ που απορρίπτεται.

Για $0<x<6$ είναι $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, οπότε $f'(4)=\frac{1}{4}$.

Αν (ε_1) και (ε_2) είναι οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία $x_0=-1$ και $x_1=4$, τότε ισχύει:

$$f'(1)\cdot f'(4)=-1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2.$$

21. 53 Έστω $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ ένα σημείο της C_f. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

Η (ε) διέρχεται από το σημείο Ρ(α, β), αν:

$$\beta=f'(x_0)(\alpha-x_0)+f(x_0) \Leftrightarrow \beta=2x_0(\alpha-x_0)+x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2-2\alpha x_0+\beta=0, \quad (1).$$

Το τριώνυμο στην εξίσωση (1) έχει $\Delta=(-2\alpha)^2-4\cdot 1\cdot \beta=4(\alpha-\beta)^2>0$.

Συνεπώς, η (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, έστω x_1 και x_2.

Δηλαδή υπάρχουν δύο σημεία επαφής $M_1\left(x_1, f(x_1)\right)$ και $M_2\left(x_2, f(x_2)\right)$, άρα υπάρχουν δύο εφαπτομένες που διέρχονται από το σημείο Ρ.

Αν το Ρ ανήκει στην ευθεία κ: $y=-\frac{1}{4}$, τότε το σημείο είναι το $P\left(\alpha, -\frac{1}{4}\right)$ και η (1) γίνεται $x_0^2-2\alpha x_0-\frac{1}{4}=0$. Τότε το γινόμενο των ριζών (από τους τύπου Vieta) γράφεται:

$$x_1\cdot x_2=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4x_1\cdot x_2=-1\Leftrightarrow (2x_1)\cdot(2x_2)=-1\Leftrightarrow f'(x_1)\cdot f'(x_2)=-1.$$

Δηλαδή οι εφαπτομένες της C_f στα x_1 και x_2 είναι κάθετες μεταξύ τους.

21. 54 **α.** Για $x\neq 0$ είναι $f'(x)=\frac{-2}{x^3}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha>0$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0) \text{ ή } \varepsilon: y=\frac{-2}{\alpha^3}x+\frac{3}{\alpha^2}.$$

β. Η (ε) τέμνει τους άξονες στα σημεία $A\left(0, \frac{3}{\alpha^2}\right)$ και $B\left(\frac{3\alpha}{2}, 0\right)$.

Για τις αποστάσεις των σημείων Α, Β από το σημείο Μ έχουμε:

$$(AM)=\sqrt{(\alpha-0)^2+\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{3}{\alpha^2}\right)^2}=\sqrt{\alpha^2+\frac{4}{\alpha^4}} \text{ και}$$

$$(MB)=\sqrt{\left(\frac{3\alpha}{2}-\alpha\right)^2+\left(0-\frac{1}{\alpha^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{1}{\alpha^4}}=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\frac{4}{\alpha^4}},$$

οπότε προκύπτει ότι $(AM)=2(MB)$.

Επειδή $AOB=90^o$, έχουμε:

$$(OAB)=\frac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OB)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\alpha^2}\cdot\frac{3\alpha}{2}=\frac{9}{4\alpha} \text{ τ. μ.}$$

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $E(\alpha)=\frac{9}{4\alpha}$, $\alpha>0$.

Τότε είναι $E'(\alpha)=-\frac{9}{4\alpha^2}$ και για α = 2 προκύπτει ότι $E'(2)=-\frac{9}{16}$.

21. 55 **α.** Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases} e^{x_1}<e^{x_2} \\ x_1+1<x_2+1\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_2),$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι 1 – 1 και συνεπώς αντιστρέφεται.

Επιπλέον, έχουμε $f(x)=2\Leftrightarrow f(x)=f(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=0$.

β. Από το α έχουμε $f^{-1}(2)=f^{-1}(f(0))=0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=e^x+1$.

Για κάθε $x\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ είναι $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ και παραγωγίζοντας βρίσκουμε:

$$f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)=1$$

από την οποία για x = 2 έχουμε:

$$f'\left(f^{-1}(2)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(2)=1\Rightarrow f'(0)\cdot\left(f^{-1}\right)'(2)=1\Rightarrow 2\left(f^{-1}\right)'(2)=1\Rightarrow\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{2}.$$

Επομένως, η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=2$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f^{-1}(2)=\left(f^{-1}\right)'(2)(x-2)\quad ή\quad \varepsilon: y=\frac{1}{2}x-1.$$

γ. Η (ε) τέμνει τους άξονες στα σημεία $M(2,\,0)$ και $A(0,\,-1)$.

Είναι $\widehat{AOM}=90^{\circ}$, οπότε έχουμε:

$$(AOM)=\frac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OM)=\frac{1}{2}\cdot|-1|\cdot|2|=1\ \text{τ. μ.}$$

21. 56 Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ έχει εξίσωση $\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=\ell\in\mathbb{R}$. Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}\Leftrightarrow(x-1)g(x)+1=f(x)$ για x κοντά στο 1 με $\lim\limits_{x\to1}g(x)=\ell\in\mathbb{R}$. Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left[(x-1)g(x)+1\right]=0\cdot\ell+1=1.$$

Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, άρα θα είναι $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow f(1)=1$.

Επιπλέον, έχουμε:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1+2h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)-\left[f(1+2h)-f(1)\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\left[\frac{f(1-h)-f(1)}{h}-\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}\right]=-f'(1)-2f'(1)=-3f'(1).$$

Επειδή:

- $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\left[\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}\cdot(-1)\right]\underset{u\to0}{\overset{-h=u}{=\!=}}-\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(1+u)-f(1)}{u}=-f'(1)$ και

- $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\left[\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot2\right]\underset{u\to0}{\overset{2h=u}{=\!=}}2\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(1+u)-f(1)}{u}=2f'(1)$,

έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1+2h)}{h}=-3f'(1)\Rightarrow -3=-3f'(1)\Rightarrow f'(1)=1.$$

Επομένως, η εφαπτομένη της C_f στο M έχει εξίσωση $\varepsilon: y=x-2$.

21. 57 **α.** Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h+1)-\sqrt{h+4}}{h}\overset{h+1=x}{\underset{x\to 1}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\sqrt{x+3}}{x-1}=3.$$

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-\sqrt{x+3}}{x-1}\Leftrightarrow (x-1)g(x)+\sqrt{x+3}=f(x)$, (1),

για x κοντά στο 1 με $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=3$. Από την (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left[(x-1)g(x)+\sqrt{x+3}\right]=0\cdot 3+\sqrt{4}=2$$

και η f είναι συνεχής, άρα $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)\Rightarrow f(1)=2$.

Επιπλέον, έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)g(x)+\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[g(x)+\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[g(x)+\frac{\sqrt{x+3}^{\,2}-2^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\right]=\lim_{x\to 1}\left[g(x)+\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right]=$$

$$=3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}\in\mathbb{R}.$$

Άρα $f'(1)=\dfrac{13}{4}$.

β. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\quad \text{ή}\quad \varepsilon: y=\frac{13}{4}x-\frac{5}{4}.$$

γ. Η (ε) τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο $A\left(\dfrac{5}{13}, 0\right)$.

Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{OAM}$ έχει εμβαδόν:

$$(OAM)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{OA}, \vec{OM}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\frac{5}{13} & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|2\cdot\frac{5}{13}-1\cdot 0\right|=\frac{5}{13}\ \text{τ. μ.}$$

21. 58 **α.** Για $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=2x\left(x^2-1\right)+x^2\cdot 2x=4x^3-2x$.

Οι εφαπτομένες στα ζητούμενα σημεία έχουν εξισώσεις:

$$\varepsilon_1: y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y = 28x - 44 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_2: y - f(-2) = f'(-2)(x-(-2)) \Leftrightarrow y = -28x - 44.$$

β. Το σημείο τομής των (ε_1), (ε_2) υπολογίζεται από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = 28x - 44 \\ y = -28x - 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -44 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Άρα, το σημείο τομής είναι το $\Gamma(0, -44)$.

Οι πλευρές του τριγώνου που ορίζεται από τα σημεία $A(2, 12)$, $B(-2, 12)$ και $\Gamma(0, -44)$ έχουν μήκη:

$$(A\Gamma) = \sqrt{(0-2)^2 + (-44-12)^2} = \sqrt{3140},\ (AB) = \sqrt{(2-(-2))^2 + (12-12)^2} = 4,$$

$$(B\Gamma) = \sqrt{(0-(-2))^2 + (-44-12)^2} = \sqrt{3140}.$$

Είναι $(A\Gamma) = (B\Gamma)$ και ισχύει $(AB)^2 < (A\Gamma)^2 + (B\Gamma)^2 \Leftrightarrow \hat{\Gamma} < 90^{o}$.

Άρα, το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι οξυγώνιο και ισοσκελές.

21. 59 Για $x \in (-\alpha, 0) \cup (0, \alpha)$ είναι $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$.

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f με $x \in (-\alpha, 0) \cup (0, \alpha)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο M έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(x_0)$. Η κάθετη στην εφαπτομένη στο M έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda' = -\dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{\sqrt{\alpha^2 - x_0^2}}{x_0}$ και έχει εξίσωση:

$$\eta: y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{\alpha^2 - x_0^2}}{x_0}x$$

η οποία διέρχεται από το $O(0, 0)$ για κάθε $x \in (-\alpha, 0) \cup (0, \alpha)$.

21. 60 **α.** Για $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 2x + \kappa$. Έχουμε:

$$f'(\kappa) = \lambda_\eta \Leftrightarrow 2\kappa^2 + \kappa = 3 \Leftrightarrow \kappa = 1 \ \text{ή}\ \kappa = -\frac{3}{2}$$

και επειδή το M ανήκει στην (η), ισχύει $\mu^2 = 3\kappa^2$, (1).

Αν $\kappa = -\dfrac{3}{2}$, τότε από την (1) προκύπτει ότι $\mu = \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Αν κ = 1, τότε από την (1) προκύπτει ότι $\mu = \pm\sqrt{3}$.

β. Αν κ = 1, τότε από το α είναι $\mu^2 = 3$ και ο τύπος της συνάρτησης γράφεται $f(x) = x^2 + x + 1$ με $f'(x) = 2x + 1$. Έστω $N(0,\ y_0)$ ένα σημείο του άξονα y′y.

Οι εφαπτομένες στα σημεία $M_1(x_1,\ f(x_1))$ και $M_2(x_2,\ f(x_2))$ της C_f έχουν αντίστοιχα εξισώσεις:

$$\varepsilon_1 : y = f'(x_1)x - x_1 f'(x_1) + f(x_1) \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : y = f'(x_2)x - x_2 f'(x_2) + f(x_2)$$

με $x_1 \neq x_2$. Οι ευθείες αυτές διέρχονται από το $N(0,\ y_0)$, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} y_0 = -x_1 f'(x_1) + f(x_1) \\ y_0 = -x_2 f'(x_2) + f(x_2) \end{cases} \Rightarrow -x_1 f'(x_1) + f(x_1) = -x_2 f'(x_2) + f(x_2), \quad (1).$$

Επειδή οι ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους, έχουμε:

$$f'(x_1)\cdot f'(x_2) = -1 \Leftrightarrow (2x_1 + 1)(2x_2 + 1) = -1 \Leftrightarrow 4x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 = -2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x_1x_2 + x_1 + x_2 = -1, \quad (2).$$

Η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$-x_1(2x_1 + 1) + x_1^2 + x_1 + 1 = -x_2(2x_2 + 1) + x_2^2 + x_2 + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x_1^2 + 1 = -x_2^2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = -x_2,$$

διότι $x_1 \neq x_2$. Τότε από τη (2) βρίσκουμε $-2x_2^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = \dfrac{1}{2}$ και το y_0 είναι:

$$y_0 = -x_2 f'(x_2) + f(x_2) = -x_2^2 + 1 = \frac{1}{2}.$$

Επομένως, το ζητούμενο σημείο είναι το $N\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$.

21. 61 α. Για $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$.

Αρκεί να υπάρχει σημείο $M(x_0,\ f(x_0))$ τέτοιο, ώστε:

- $f(x_0) = -x_0 \Leftrightarrow x_0^3 - 6x_0^2 + 8x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0(x_0^2 - 6x_0 + 9) = 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \{x_0 = 0 \ \text{ή} \ x_0 = 3\}$,
- $f'(x_0) = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 8 = -1 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow \{x_0 = 1 \ \text{ή} \ x_0 = 3\}$.

Επομένως, το σημείο επαφής είναι το $M(3,\ f(3))$.

β. Έχουμε $f(x) = -x \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \{x = 0 \ \text{ή} \ x = 3\}$.

Άρα, η (ε) τέμνει τη C_f και στο σημείο $O(0, 0)$, διότι $f(0)=0$.

Είναι $f'(0)=8$ και $f'(3)=-1$. Επομένως $|f'(0)|=8|f'(3)|$.

21. 62 Για $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=2x-1$.

Έχουμε $f(x)=0\Leftrightarrow x(x-1)=0\Leftrightarrow\{x=0 \text{ ή } x=1\}$.

Άρα, προκύπτει το σημείο $A(1, 0)$, διότι το A είναι διαφορετικό από το O.

Η εφαπτομένη της C_f στο A έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1) \quad \text{ή} \quad \varepsilon: y=x-1.$$

Είναι $OA=OB=1$ και $\hat{O}=90^o$, οπότε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AOB}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Άρα $OBA=45^o$.

21. 63 Για $x>0$ είναι $f'(x)=-\dfrac{\alpha^2}{2x^2}$, $\alpha\neq 0$.

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Η εφαπτομένη της C_f στο M έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \quad \text{ή} \quad \varepsilon: y=-\frac{\alpha^2}{2x_0^2}x+\frac{\alpha^2}{x_0}$$

και τέμνει τους άξονες στα σημεία $A\left(0, \dfrac{\alpha^2}{x_0}\right)$ και $B(2x_0, 0)$.

Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{OAB}$ είναι ορθογώνιο στο O, οπότε για οποιοδήποτε $x_0>0$ το εμβαδόν του είναι:

$$(OAB)=\frac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OB)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{x_0}\cdot 2x_0=\alpha^2 \text{ τ. μ.}$$

22n	Ερωτήσεις κατανόησης στις παραγώγους (Ενότητες 18n - 21n)
Ενότητα	

Α. Του τύπου Σωστό / Λάθος

22. 1	**α.** Σωστό	**β.** Λάθος	**γ.** Σωστό	**δ.** Λάθος
	ε. Λάθος	**στ.** Σωστό.		
22. 2	**α.** Λάθος	**β.** Σωστό	**γ.** Σωστό	**δ.** Λάθος
	ε. Σωστό.			
22. 3	**α.** Λάθος	**β.** Λάθος	**γ.** Λάθος	**δ.** Λάθος
	ε. Λάθος.			
22. 4	**α.** Λάθος	**β.** Σωστό	**γ.** Σωστό	**δ.** Σωστό
	ε. Λάθος	**στ.** Λάθος.		
22. 5	**α.** Λάθος	**β.** Σωστό	**γ.** Λάθος	**δ.** Σωστό.

22. 6 **1ος** **α.** Ψ **β.** Το δεύτερο όριο είναι ίσο με $-f'(x_0)$.

2ος **α.** Α **β.** Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$, (παράγωγος της $f(x)=e^x$ στο 0).

3ος **α.** Ψ **β.** Δεν ισχύει το αντίστροφο.

4ος **α.** Α **β.** Είναι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

14ο

Κριτηριο Αξιολογησης

Θέμα Α

Α1. Θεωρία.

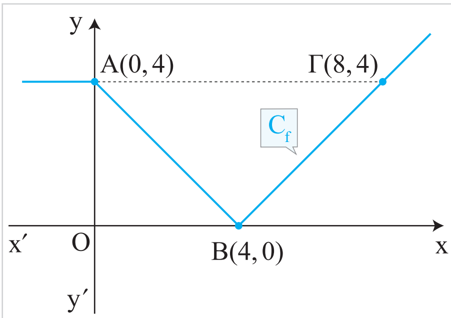
Α2. Θεωρία.

Α3. **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος.

Α4. Θεωρία.

Θέμα Β

Β1. Οι εξισώσεις των ΑΒ και ΒΓ είναι:



$$\text{AB: } y-4=\frac{0-4}{4-0}\cdot(x-0) \text{ ή AB: } y=-x+4,$$

$$\text{ΒΓ: } y-0=\frac{4-0}{8-4}\cdot(x-4) \text{ ή ΒΓ: } y=\frac{1}{2}x-2.$$

Από το διάγραμμα που δίνεται προκύπτουν τα εξής:

- $f(x)=4$ για $x\in(-\infty,0]$,
- $f(x)=-x+4$ για $0<x\leq 4$ και
- $f(x)=\frac{1}{2}x-2$ για $x>4$.

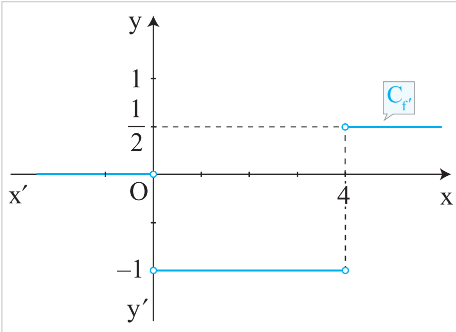
Επομένως, ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x)=\begin{cases}4 & , x\leq 0\\ -x+4 & , 0<x\leq 4.\\ \frac{1}{2}x-2 & , x>4\end{cases}$

Β2. Έχουμε:

- για $x<0$ είναι $f'(x)=0$,
- για $0<x<4$ είναι $f'(x)=-1$,

- για $x>4$ είναι $f'(x)=\frac{1}{2}$.

Β3. Η γραφική παράσταση της f' απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα. Έχουμε:



- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{4-4}{x}=0,$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x+4-4}{x}=-1.$

Άρα το $f'(0)$ δεν ορίζεται.

Επίσης, έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{-x+4}{x-4}=-1,$
- $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{\frac{1}{2}x-2}{x-4}=\frac{1}{2}.$

Άρα το $f'(4)$ δεν υπάρχει.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Στα σημεία Α και Β δεν άγεται εφαπτομένη της C_f, άρα η f δεν παραγωγίζεται σε αυτά.

Θέμα Γ

Γ1. α. Έστω $M(x_0, y_0)$ κοινό σημείο των C_f και C_g. Τότε έχουμε:

$$y_0=f(x_0)=g(x_0)\Leftrightarrow -3x_0^2=e^{2x_0},\ \text{άτοπο},$$

διότι $e^{2x_0}>0$ και $-3x_0^2\le 0$.

Άρα, δεν υπάρχει κοινό σημείο των C_f, C_g.

β. Έστω $N(x_1, f(x_1))$, $\Theta(x_2, g(x_2))$ σημεία των C_f, C_g στα οποία οι εφαπτομένες έχουν εξισώσεις αντίστοιχα:

- ε_1: $y-f(x_1)=f'(x_1)\cdot(x-x_1)$ ή ε_1: $y=f'(x_1)\cdot x-x_1\cdot f'(x_1)+f(x_1)$,
- ε_2: $y-g(x_2)=g'(x_2)\cdot(x-x_2)$ ή ε_2: $y=g'(x_2)\cdot x-x_2\cdot g'(x_2)+g(x_2)$.

Αν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) ταυτίζονται, τότε ισχύουν:

- $f'(x_1)=g'(x_2)\Leftrightarrow -6x_1=2e^{2x_2}\Leftrightarrow -3x_1=e^{2x_2},\ (1),$
- $-x_1\cdot f'(x_1)+f(x_1)=-x_2\cdot g'(x_2)+g(x_2)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x_1 \cdot (-6x_1) + (-3x_1^2) = -x_2 \cdot 2 \cdot e^{2x_2} + e^{2x_2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x_1^2 = (-2x_2 + 1) \cdot e^{2x_2}, \ (2).$$

Από την (1) προκύπτει ότι $x_1 < 0$, οπότε η (2) γίνεται:

$$3x_1^2 = (-2x_2 + 1) \cdot (-3x_1) \Rightarrow x_1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow x_1 + 1 = 2x_2, \ (3).$$

Η (1) λόγω της (3) γράφεται $-3x_1 = e^{x_1+1} \Rightarrow e^{x_1+1} + 3x_1 = 0$.

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = e^{x+1} + 3x, \ x \in (-\infty, 0]$.

Είναι $h'(x) = e^{x+1} + 3 > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$, άρα $h \uparrow (-\infty, 0]$.

Ακόμη, ισχύουν $h(0) = e > 0$ και $h(-1) = -2 < 0$, οπότε $h(-1) \cdot h(0) < 0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε:

- $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow e^{x_1+1} + 3x_1 = 0$ και
- x_1 μοναδικό, αφού $h \uparrow (-\infty, 0]$.

Τότε από τη (2) προκύπτει $x_2 = \dfrac{x_1 + 1}{2}$.

Επομένως, στα σημεία Ν, Θ άγεται κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g.

Διαφορετική αντιμετώπιση για την ύπαρξη του x_1

Το σύνολο τιμών της h είναι:

$$h((-\infty, 0]) = \left(\lim_{x \to -\infty} h(x), h(0)\right] = (-\infty, e],$$

διότι $h(0) = e$ και $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(e^{x+1} + 3x\right) \overset{0+(-\infty)}{=} -\infty$.

Άρα $0 \in h((-\infty, 0])$, οπότε υπάρχει $x_1 \in (-\infty, 0)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(x_1) = 0 \Leftrightarrow e^{x_1+1} + 3x_1 = 0.$$

Γ2. Για κάθε $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι:

$$f(\eta\mu x) = \sigma\upsilon\nu^2 x + x - 1, \quad (1).$$

Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 1 + 0 - 1 = 0$.

Παραγωγίζουμε κατά μέλη την (1) ως προς x:

$$f'(\eta\mu x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = 2\sigma\upsilon\nu x \cdot (-\eta\mu x) + 1, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Για $x = 0$ έχουμε $f'(0) \cdot 1 = 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \Rightarrow f'(0) = 1$.

Άρα, η εφαπτομένη της C_f στο $N(0, f(0))$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon:\ y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=x.$$

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

Για x κοντά στο 1, θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=\dfrac{f(x)-3}{x^2-3x+2}$ και έχουμε:

$$K(x)=\frac{f(x)-3}{x^2-3x+2}\Leftrightarrow K(x)\cdot\left(x^2-3x+2\right)+3=f(x)\ \text{ με } \lim_{x\to 1}K(x)=5.$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left[K(x)\cdot\left(x^2-3x+2\right)+3\right]=5\cdot 0+3\Rightarrow f(1)=3.$$

Επίσης:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{K(x)\cdot\left(x^2-3x+2\right)+3-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{K(x)\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\left[K(x)\cdot(x-2)\right]=5\cdot(-1)=-5,$$

οπότε $f'(1)=-5$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 με:

$$g'(1)=\left.\frac{d\left(x^2+x\right)}{dx}\right|_{x=1}\cdot f(1)+\left(1^2+1\right)\cdot f'(1)=(2\cdot 1+1)\cdot 3+2\cdot(-5)\Rightarrow g'(1)=-1.$$

Διαφορετική αντιμετώπιση (χωρίς να βρούμε το f′(1))

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+x\right)\cdot f(x)-6}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+x\right)\cdot\left[K(x)\cdot\left(x^2-3x+2\right)+3\right]-6}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+x\right)\cdot K(x)\cdot\left(x^2-3x+2\right)+3\left(x^2+x-2\right)}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+x\right)\cdot K(x)\cdot(x-1)\cdot(x-2)+3(x-1)\cdot(x+2)}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\left[\left(x^2+x\right)\cdot K(x)\cdot(x-2)+3(x+2)\right]=$$
$$=2\cdot 5\cdot(-1)+3\cdot 3=-10+9=-1.$$

Θέμα Δ

Δ1. α. Έστω $N(0, y_N)$ το ζητούμενο σημείο και $\Lambda\left(x_1, x_1^2\right)$, $M\left(x_2, x_2^2\right)$ σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτομένες της C_f τέμνονται κάθετα στο N. Είναι $f'(x)=2x,\ x\in\mathbb{R}$.

Οι εφαπτομένες της C_f στα Λ, Μ αντίστοιχα έχουν εξισώσεις:

- $\varepsilon_1:\ y-x_1^2=2x_1\left(x-x_1\right)\Leftrightarrow y=2x_1\cdot x-x_1^2,$

- ε_2: $y - x_2^2 = 2x_2(x - x_2) \Leftrightarrow y = 2x_2 \cdot x - x_2^2$.

Επειδή $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$, έχουμε $2x_1 \cdot 2x_2 = -1 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{4}$, (1).

Οι (ε_1), (ε_2) διέρχονται από το Ν, άρα $y_N = -x_1^2$ και $y_N = -x_2^2$, επομένως $y_N < 0$ και $x_1 = x_2$.

Τότε, η από την (1) προκύπτει ότι $x_1^2 = +\frac{1}{4}$ και x_1, x_2 ετερόσημα.

Άρα $y_N = -\frac{1}{4}$, οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $N\left(0, -\frac{1}{4}\right)$.

β. Από το (Δ1α) έχουμε $x_1^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$ και $x_2 = \frac{1}{2}$, οπότε τα σημεία Λ και Μ έχουν συντεταγμένες $\Lambda\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ και $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Άρα, η απόσταση ΜΛ είναι $(M\Lambda) = 2 \cdot x_2 = 1$.

Δ2. α. Έχουμε:

- $f'(0) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\eta\mu^2 t}{e^t - t - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{t\to 0}\frac{2\eta\mu t \cdot \sigma\upsilon\nu t}{e^t - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{t\to 0}\frac{2\sigma\upsilon\nu^2 t - 2\eta\mu^2 t}{e^t} = \frac{2\cdot 1 - 0}{1} = 2$ και
- $f(0) = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t + 1}{e^t \cdot \ln t} = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1 + e^{-t}}{\ln t} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left[\left(1 + e^{-t}\right)\cdot\frac{1}{\ln t}\right] \overset{1\cdot 0}{=} 0.$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(0, f(0))$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon:\ y - f(0) = f'(0)\cdot(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x.$$

β. Έχουμε:

$$f'(0) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 2,\ (2).$$

Το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)\cdot\eta\mu 3x}{1 - e^{x^2}} \overset{x\neq 0}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{\eta\mu 3x}{x}}{\frac{1 - e^{x^2}}{x^2}} \overset{(2)}{=} \frac{2\cdot 3}{-1} = -6,$

διότι:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu 3x}{3\cdot x}\cdot 3\right) \underset{u\to 0}{\overset{3x=u}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\frac{\eta\mu u}{u}\right) = 3\cdot 1 = 3$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - e^{x^2}}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{-2x\cdot e^{x^2}}{2x} = -\lim\limits_{x\to 0} e^{x^2} = -1.$

15ο

Κριτηριο Αξιολογησης

Θέμα Α

Α1. Θεωρία.

Α2. Θεωρία.

Α3. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος.

Α4. **α.** $f'(3) = εφ(180^o - 135^o) = εφ45^o = 1$

β. $ε\colon\ y - f(3) = f'(3)\cdot(x-3) \Leftrightarrow y = x - 1$

γ. $N(-1, -2)$.

Θέμα Β

Β1. Είναι $f(-1) = 12$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με:

$$f'(x) = 2(x-1)\cdot(x^2-2x) + (x-1)^2\cdot(2x-2) \Leftrightarrow f'(x) = 2(x-1)\cdot(2x^2-4x+1),$$

από την οποία βρίσκουμε $f'(-1) = -28$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(-1, f(-1))$ έχει εξίσωση:

$$ε_1\colon\ y - f(-1) = f'(-1)\cdot[x-(-1)] \text{ ή } ε_1\colon\ y - 12 = -28(x+1) \text{ ή } ε_1\colon\ y = -28x - 16.$$

Β2. Για το σημείο τομής της $(ε_1)$ με τη $x = 1$, θέτουμε στην εξίσωση της $(ε_1)$ όπου $x = 1$ και βρίσκουμε $y = -28 - 16 = -44$. Δηλαδή το σημείο τομής είναι το $A(1, -44)$.

Έστω $N(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το Α.

Η $(ε_2)$ έχει εξίσωση $ε_2\colon\ y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ και επειδή το Α ανήκει στην $(ε_2)$, έχουμε:

$$-44 - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(1 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -44 - (x_0-1)^2\cdot(x_0^2 - 2x_0) = 2\cdot(x_0-1)\cdot(2x_0^2 - 4x_0 + 1)\cdot(1-x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x_0^4 + 12x_0^3 - 17x_0^2 + 10x_0 + 42 = 0,\ \ (1).$$

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner για $ρ = -1$, $ρ = 3$ καταλήγουμε διαδοχικά:

$$(x_0+1)\cdot(x_0-3)\cdot(-3x_0^2+6x_0-14)=0 \Leftrightarrow x_0=-1 \text{ ή } x_0=3,$$

αφού $-3x_0^2+6x_0-14\neq 0$, $(\Delta<0)$.

Άρα, το σημείο επαφής είναι το $N(3, f(3))$ με $f(3)=12$ και $f'(3)=28$.

Επομένως, η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$\varepsilon_2:\ y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3) \text{ ή } \varepsilon_2:\ y-12=28(x-3) \text{ ή } \varepsilon_2:\ y=28x-72.$$

Β3. Το τρίγωνο ορίζεται από τα σημεία $M(-1, 12)$, $N(3, 12)$ και $A(1, -44)$.

Το μέσον Ε του ΜΝ είναι το Ε(1, 12) και $MN \parallel x'x$, διότι $y_M=y_N=12$.

Επίσης $AE\perp x'x$, διότι $x_E=x_A$.

Αρα $AE\perp MN$. Δηλαδή, η διάμεσος ΑΕ του $N\hat{A}M$ είναι και ύψος, άρα το $N\hat{A}M$ είναι ισοσκελές με ΑΜ = ΑΝ.

Θέμα Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, οπότε αναζητούμε πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

Έχουμε:

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+6}}{x}\overset{x>0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}}=\sqrt{1-0+0}=1.$$

- $$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-1\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+6}-x\right)\overset{(+\infty)\cdot(+\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+6}^{\,2}-x^2}{\sqrt{x^2-4x+6}+x}=$$

$$\overset{x>0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(-4+\frac{6}{x}\right)}{x\cdot\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4+\frac{6}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}}+1}=$$

$$=\frac{-4+0}{\sqrt{1-0+0}+1}=-2.$$

Άρα, η ε_1: $y=x-2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Επίσης, έχουμε:

- $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+6}}{x}\overset{x<0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\cdot\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}}\right)=-1,$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-1)\cdot x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+6}+x\right)\overset{(+\infty)\cdot(-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4x+6}^{\,2}-x^2}{\sqrt{x^2-4x+6}-x}=$

$$\overset{x<0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(-4+\frac{6}{x}\right)}{-x\cdot\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{-4+\frac{6}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}}+1}\right)=$$

$$=-\frac{-4+0}{\sqrt{1-0+0}+1}=2.$$

Άρα, η ε_2: $y=-x+2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Γ2. **α.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$x^2-4x+6>(x-2)^2\Leftrightarrow x^2-4x+6>x^2-4x+4\Leftrightarrow 2>0,\ \text{αληθής.}$$

Άρα:

$$x^2-4x+6>(x-2)^2\geq 0,\ (1).$$

β. Από την (1) έχουμε $\sqrt{x^2-4x+6}>|x-2|\Rightarrow f(x)>|x-2|$.

- Για $x>2$ είναι $f(x)>x-2$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την ασύμπτωτη της (ε_1) στο $+\infty$.
- Για $x<2$ είναι $f(x)>-x+2$, άρα η C_f βρίσκεται κάτω από την ασύμπτωτη της (ε_2) στο $-\infty$.

Γ3. Στο ερώτημα (Γ2.β.) βρήκαμε ότι για $x>2$ είναι $f(x)>x-2$. Θέτουμε όπου x το e^x+x και επειδή $x^3+x>0$, προκύπτει:

$$f\left(e^x+x\right)>e^x+x-2\Rightarrow\frac{f\left(e^x+x\right)}{x^3+x}>\frac{e^x+x-2}{x^3+x},\ (2).$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x-2}{x^3+x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x+x-2\right)'}{\left(x^3+x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{3x^2+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x+1\right)'}{\left(3x^2+1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}=$$

$$\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{(6x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty.$$

Άρα, από τη (2) βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(e^x+x\right)}{x^3+x}=+\infty.$$

Θέμα Δ

Δ1. Τα κοινά σημεία των C_f, C_g, αν υπάρχουν, έχουν τετμημένες λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x)=g(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

Έχουμε:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3-2x=\frac{x^2}{2}+2\Leftrightarrow 2x^3-4x=x^2+4\Leftrightarrow 2x^3-x^2-4x-4=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left(2x^2+3x+2\right)=0\Leftrightarrow x=2,$$

αφού η $2x^2+3x+2=0$ είναι αδύνατη.

Άρα, το κοινό τους σημείο είναι το Α(2, 4).

Επιπλέον, ισχύουν:

$$f'(x)=3x^2-2,\ x\in\mathbb{R}\quad \text{και}\quad g'(x)=x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Οι C_f, C_g θα έχουν κοινή εφαπτομένη στο Α, αν:

$$f'(2)=g'(2)\Leftrightarrow 10=2,\ \text{άτοπο}.$$

Άρα, δεν υπάρχει κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο.

Δ2. Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $M(-2, g(-2))$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon:\ y-g(-2)=g'(-2)\cdot[x-(-2)]\ \text{ή}\ \varepsilon:\ y=-2x.$$

Έστω $N(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f. Η εφαπτομένη της C_f στο Ν έχει εξίσωση:

$$\eta:\ y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)\ \text{ή}\ \eta:\ y=f'(x_0)\cdot x-x_0\cdot f'(x_0)+f(x_0).$$

Η (η) θα ταυτίζεται με την (ε), αν:

- $f'(x_0)=\lambda_\varepsilon\Leftrightarrow 3x_0^2-2=-2\Leftrightarrow x_0=0$ και
- $-x_0\cdot f'(x_0)+f(x_0)=0$, που αληθεύει για $x_0=0$.

Άρα, η (ε) εφάπτεται στην C_f στο σημείο Ο(0, 0).

Δ3. Αρκεί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει $g(x)\geq -2x$. Έχουμε:

$$g(x)\geq -2x\Leftrightarrow \frac{x^2}{2}+2\geq -2x\Leftrightarrow x^2+4\geq -4x\Leftrightarrow (x+2)^2\geq 0\ \text{που ισχύει,}$$

ενώ ως ισότητα ισχύει μόνο για $x=-2$, που είναι το σημείο επαφής.

Δ4. Από το ερώτημα (Δ3) ισχύει $g(x)\geq -2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θέτουμε όπου x το $-e^{x^2}-\ln x$, οπότε προκύπτει $g\left(-e^{x^2}-\ln x\right)\geq 2\left(e^{x^2}+\ln x\right)$ και επειδή για $x>1$ είναι $\sqrt{x^2+1}+x\geq 1\Rightarrow \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)>0$, έχουμε:

$$\frac{g\left(-e^{x^2}-\ln x\right)}{\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} \geq \frac{2\left(e^{x^2}+\ln x\right)}{\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}, \ (1),$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=+\infty$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(e^{x^2}+\ln x\right)}{\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(e^{x^2}+\ln x\right)'}{\left[\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right]'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(2xe^{x^2}+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[2\cdot\left(2xe^{x^2}+\frac{1}{x}\right)\cdot\sqrt{x^2+1}\right] \overset{2\cdot(+\infty+0)\cdot(+\infty)}{=} +\infty.$$

Άρα, από την (1) προκύπτει τελικά:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g\left(-e^{x^2}-\ln x\right)}{\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = +\infty.$$

23η Ενότητα

Εφαρμογές παραγώγων Ι

Α. Του τύπου Σωστό / Λάθος

23.1 α. Σωστό β. Σωστό γ. Λάθος δ. Σωστό.

23.2 α. Λάθος β. Λάθος γ. Σωστό δ. Λάθος.

23.3 α. Λάθος β. Λάθος γ. Λάθος δ. Σωστό.

23.4 α. Σωστό β. Σωστό γ. Σωστό δ. Λάθος.

23.5 α. Σωστό β. Λάθος γ. Σωστό.

23.6 1ος α. Ψ β. Για παράδειγμα $f(x)=\frac{1}{x}$.

2ος α. Ψ β. Για παράδειγμα $f(x)=x^2$ με $f'(0)=0$.

Β. Βασικές εφαρμογές – Ασκήσεις εμπέδωσης

23.7 α. $f\uparrow\mathbb{R}$ β. $f\downarrow\mathbb{R}$ γ. $f\uparrow\mathbb{R}$ δ. $f\downarrow\mathbb{R}$

ε. $f\downarrow(-\infty,-1)$, $f\uparrow[1,+\infty)$ στ. $f\downarrow(-\infty,-1]$, $f\uparrow[-1,+\infty)$

ζ. $f\uparrow(-\infty,1]$, $f\downarrow[1,+\infty)$ η. $f\uparrow(-\infty,2]$, $f\downarrow[2,+\infty)$

θ. $f\downarrow\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]$, $f\uparrow\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$ ι. $f\uparrow\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$, $f\downarrow\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$.

23.8 α. $f\downarrow(-\infty,0)$, $f\downarrow(0,+\infty)$ β. $f\uparrow(-\infty,0)$, $f\uparrow(0,+\infty)$

γ. Αν α > 1, τότε $f\downarrow(-\infty,0)$ και $f\downarrow(0,+\infty)$, ενώ αν α < 1, τότε $f\uparrow(-\infty,0)$ και $f\uparrow(0,+\infty)$

δ. $f\uparrow(-\infty,0)$, $f\downarrow(0,+\infty)$ ε. $f\uparrow(-\infty,-1)$, $f\uparrow(-1,+\infty)$

στ. $f\downarrow(-\infty,2)$, $f\downarrow(2,+\infty)$ ζ. $f\uparrow(-\infty,3)$, $f\uparrow(3,+\infty)$

η. $f\downarrow\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$, $f\downarrow\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ **θ.** $f\uparrow(-\infty, -2\alpha)$, $f\uparrow(-2\alpha, +\infty)$

ι. $f\uparrow(-\infty, \eta\mu\alpha)$, $f\uparrow(\eta\mu\alpha, +\infty)$.

23. 9 **α.** $f\uparrow\mathbb{R}$ **β.** $f\uparrow\mathbb{R}$ **γ.** $f\downarrow\mathbb{R}$ **δ.** $f\downarrow\mathbb{R}$

ε. $f\uparrow(0, +\infty)$ **στ.** $f\uparrow(1, +\infty)$ **ζ.** $f\downarrow(e, +\infty)$ **η.** $f\downarrow(0, e)$

θ. $f\uparrow[0, +\infty)$ **ι.** $f\uparrow\left(0, e^2\right]$, $f\downarrow\left[e^2, +\infty\right)$.

23. 10 **α.** $f\uparrow\mathbb{R}$ **β.** $f\uparrow\mathbb{R}$ **γ.** $f\uparrow(-\infty, 1]$, $[2, +\infty)$, $f\downarrow[1, 2]$

δ. $f\uparrow(-\infty, -2]$, $[1, +\infty)$, $f\uparrow[-2, 1]$ **ε.** $f\uparrow\mathbb{R}$ **στ.** $f\uparrow\mathbb{R}$

ζ. $f\uparrow\mathbb{R}$ **η.** $f\downarrow\mathbb{R}$ **θ.** $f\downarrow(-\infty, -1]$, $f\downarrow[-1, +\infty)$

ι. $f\downarrow(-\infty, 1]$, $f\uparrow[1, +\infty)$.

23. 11 **α.** $f\uparrow\mathbb{R}$ **β.** $f\downarrow\mathbb{R}$ **γ.** $f\uparrow\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ **δ.** $f\uparrow\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

ε. $f\uparrow\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ **στ.** $f\uparrow\left[\frac{13\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}\right]$.

23. 12 **α.** $\mathbb{R}-\{-1\}$ **β.** $\frac{3}{2}$ **γ.** $\frac{2}{(x+1)^2}$

δ. $f\uparrow(-\infty, -1)$, $f\uparrow(-1, +\infty)$.

23. 13 Είναι $f'(x) = -\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2} < 0$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.

23. 14 $f\downarrow(-\infty, -1]$, $f\uparrow[-1, +\infty)$.

23. 15 $f\uparrow(-\infty, 2]$, $f\downarrow[2, +\infty)$.

23. 16 $f\uparrow(-\infty, 1]$, $[3, +\infty)$, $f\downarrow[1, 3]$.

23. 17 **α.** $\mathbb{R}$ **β.** Είναι $f'(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$, οπότε $f\downarrow\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ και $f\uparrow\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Γ. Ασκήσεις για λύση

23. 18 **α.** Από τη C_f προκύπτει ότι $D_f = (0, 2]$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 2]$.

β. Από τη C_f προκύπτει ότι $D_f = \mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 2]$.

γ. Από τη C_f προκύπτει ότι $D_f = \mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -4]$, $[-3, -2]$, $[-1, 0]$, $[1, 2]$, $[3, 4]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-4, -3]$, $[-2, -1]$, $[0, 1]$, $[2, 3]$, $[4, +\infty)$.

δ. Από τη C_f προκύπτει ότι $D_f = \mathbb{R}$ και η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

23. 19 **α.** Από το σχήμα προκύπτει ότι $D_f = (0, 4)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(0, 1]$, $[2, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[1, 2]$, $[3, 4)$.

β. Από το σχήμα προκύπτει ότι $D_f = (0, +\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

γ. Από το σχήμα προκύπτει ότι $D_f = (-1, 1)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο D_f.

δ. Από το σχήμα προκύπτει ότι $D_f = (-5, 5)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-5, 4]$, $[0, 2]$, $[3, 5)$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-4, 0]$, $[2, 3]$.

23. 20 **α.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3).$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow \{x = 0 \text{ ή } x = 3\}.$$

Ισχύει $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 3$.

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
f′(x)		−	0	−	0	+	
f		↘				↗	

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=6x^2+6x-72=6(x^2+x-12).$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6(x^2+x-12)=0 \Leftrightarrow \{x=-4 \text{ ή } x=3\}.$$

Το πρόσημο της f' προκύπτει από το πρόσημο του τριωνύμου.

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -4]$, $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-4, 3)$.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=1\cdot(x-4)^2+x\cdot 2\cdot(x-4)=(x-4)\cdot(3x-4).$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-4)\cdot(3x-4)=0 \Leftrightarrow \left\{x=4 \text{ ή } x=\frac{4}{3}\right\}.$$

Το πρόσημο της f' προκύπτει από το πρόσημο του τριωνύμου.

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right]$, $[4, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{4}{3}, 4\right]$.

x	$-\infty$		$4/3$		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	

δ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=3x^2-4x-7.$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x-7=0 \Leftrightarrow \left\{x=-1 \text{ ή } x=\frac{7}{3}\right\}.$$

Το πρόσημο της f' προκύπτει από το πρόσημο του τριωνύμου.

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1]$, $\left[\frac{7}{3}, +\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[-1, \frac{7}{3}\right]$.

x	$-\infty$		-1		$7/3$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	

23. 21 **α.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=\frac{1\cdot e^x-x\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{1-x}{e^x}.$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-x}{e^x}=0\Leftrightarrow x=1\quad\text{και}\quad f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-x}{e^x}>0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}1-x>0\Leftrightarrow x<1.$$

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
f		↗		↘	

β. Είναι συνx > 0 $\Leftrightarrow x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$, οπότε:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ,\ x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\\ 2\sigma\upsilon\nu x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\end{cases}.$$

Η f είναι σταθερή στο $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$. Η f ως βασική συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$.

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A=(0,+\infty)$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{1-2\ln x}{x^3}.$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-2\ln x}{x^3}=0\Leftrightarrow\ln x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{1/2}\quad\text{και}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-2\ln x}{x^3}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}1-2\ln x>0\Leftrightarrow\ln x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow x<\sqrt{e}.$$

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\sqrt{e}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\sqrt{e},+\infty\right)$.

x	$-\infty$	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		‖	+	0	−	
f		‖	↗		↘	

δ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1,$$

διότι $\left(x^2+1\right)^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Το πρόσημο της f' προκύπτει από το πρόσημο του τριωνύμου $1-x^2$.

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,-1]$, $[1,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

23. 22 α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A=(0,+\infty)$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=16x-\frac{1}{x}=\frac{16x^2-1}{x}=\frac{(4x+1)(4x-1)}{x}.$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{(4x+1)(4x-1)}{x}=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=\frac{1}{4}$$

και επειδή είναι $\dfrac{4x+1}{x}>0$ για κάθε $x\in A$, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας.

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{1}{4}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$.

x	$-\infty$		0		$1/4$		$+\infty$
$f'(x)$		//////		$-$	0	$+$	
f		//////		↘		↗	

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A=(0,+\infty)$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=10x^4+9x^2+1>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=-12x^5-24x^3=-12x^3\left(x^2+2\right).$$

Είναι $x^2+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0 \quad\text{και}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow-12x^3\left(x^2+2\right)>0\Leftrightarrow-x^3>0\Leftrightarrow x<0.$$

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f′(x)		+	0	−	
f		↗		↘	

δ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 3)$ και συνεχής στο $A=(-\infty, 3]$ με:

$$f'(x)=\frac{4}{3}\cdot 1\cdot\sqrt{3-x}+\frac{4}{3}\cdot x\cdot\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}=\frac{2}{3\sqrt{3-x}}\cdot\left(2\sqrt{3-x}^{\,2}-x\right)=\frac{2(2-x)}{\sqrt{3-x}}.$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2(2-x)}{\sqrt{3-x}}=0\Leftrightarrow x=2 \quad \text{και}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{2(2-x)}{\sqrt{3-x}}>0\Leftrightarrow x<2.$$

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, 3]$.

x	$-\infty$		2		3	$+\infty$
f′(x)		+	0	−	‖	
f		↗		↘		

23. 23 α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+3\right)-(x+1)\cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{-x^2-2x+3}{\left(x^2+3\right)^2}.$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-x^2-2x+3}{\left(x^2+3\right)^2}=0\Leftrightarrow\{x=-3 \text{ ή } x=1\},$$

διότι $\left(x^2+3\right)^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Το πρόσημο της f' προκύπτει από το πρόσημο του τριωνύμου.

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -3]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-3, 1]$.

x	$-\infty$		−3		1		$+\infty$
f′(x)		−	0	+	0	−	
f		↘		↗		↘	

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A=\mathbb{R}-\{-2\}$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\left(x^3+8\right)-x^2\cdot 3x^2}{\left(x^3+8\right)^2}=\frac{-x^4+16x}{\left(x^3+8\right)^2}=\frac{-x\left(x^3-16\right)}{\left(x^3+8\right)^2}.$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-x\left(x^3-16\right)}{\left(x^3+8\right)^2}=0 \Leftrightarrow \{x=0 \text{ ή } x=2\sqrt{2}\}.$$

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -2)$, $(-2, 0]$, $\left[2\sqrt{2}, +\infty\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[-3, 2\sqrt{2}\right]$.

x	$-\infty$	-2		0		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x$	+	‖	+	0	−		−	
x^3-16	−	‖	−		−	0	+	
$f'(x)$	−	‖	−	0	+	0	−	
f	↘	‖	↘		↗		↘	

γ. Είναι $2+x^2>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $D_f=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=\frac{2x}{2+x^2}.$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x}{2+x^2}=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ και } f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2x}{2+x^2}>0 \Leftrightarrow x>0.$$

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
f		↘		↗	

δ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=-2\frac{e^x-e^{-x}}{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}=-2\frac{e^{2x}-1}{e^x\left(e^x-e^{-x}\right)^2}.$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x}-1=0 \Leftrightarrow x=0 \quad \text{και} \quad f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{2x}-1<0 \Leftrightarrow x<0.$$

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
f		↗		↘	

23. 24 α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2\pi]$ άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=4\sigma\upsilon\nu x\cdot(-\eta\mu x)=-4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x.$$

Για $x\in[0, 2\pi]$ έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow \{\eta\mu x=0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x=0\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{x=0 \text{ ή } x=\pi \text{ ή } x=2\pi \text{ ή } x=\frac{\pi}{2} \text{ ή } x=\frac{3\pi}{2}\}.$$

Τα πρόσημα των ημx, συνx στο $[0, 2\pi]$ είναι γνωστά, οπότε προκύπτει ο διπλανός πίνακας.

x	0		π/2		π		3π/2		2π
–4ημx	0	–		–	0	+		+	0
συνx		+	0	–		–	0	+	
f′(x)	0	–	0	+	0	–	0	+	0
f		↘		↗		↘		↗	

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2\pi]$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x(2-\sigma\upsilon\nu x)-\eta\mu x(-\eta\mu x)}{(2-\sigma\upsilon\nu x)^2}=\frac{2\sigma\upsilon\nu x-1}{(2-\sigma\upsilon\nu x)^2}.$$

Για $x\in[0, 2\pi]$ έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\sigma\upsilon\nu x-1}{(2-\sigma\upsilon\nu x)^2}=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left\{x=\frac{\pi}{3} \text{ ή } x=\frac{5\pi}{3}\right\}.$$

- Είναι $\sigma\upsilon\nu x \downarrow [0, \pi]$, οπότε έχουμε:
  - $0\le x<\frac{\pi}{3} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x>\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x>\frac{1}{2} \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu x-1>0$, άρα $f'(x)>0$,
  - $\frac{\pi}{3}<x\le\pi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}>\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu x-1<0$, άρα $f'(x)<0$.
- Είναι $\sigma\upsilon\nu x \uparrow [\pi, 2\pi]$, οπότε έχουμε:
  - $\pi\le x<\frac{5\pi}{3} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x<\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{3} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x<\frac{1}{2} \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu x-1<0$, άρα $f'(x)<0$,
  - $\frac{5\pi}{3}<x\le 2\pi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{3}<\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu x-1>0$, άρα $f'(x)>0$.

Συνοψίζοντας, έχουμε τον διπλανό πίνακα από τον οποίο προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

x	0		π/3		5π/3		2π
f′(x)		+	0	–	0	+	
f		↗		↘		↗	

γ. Είναι $x^2-5x+8>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, διότι $\Delta=-7<0$ και $\alpha=3>0$. Άρα $D_f=\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2-5x+8\right)-(x-1)(2x-5)}{\left(x^2-5x+8\right)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{\left(x^2-5x+8\right)^2}.$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-x^2+2x+3}{\left(x^2-5x+8\right)^2}=0\Leftrightarrow -x^2+2x+3=0\Leftrightarrow \{x=3 \text{ ή } x=-1\}.$$

Επειδή $x^2-5x+8>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το πρόσημο της f' προκύπτει από το τριώνυμο $-x^2+2x+3$.

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$, $[3,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,3]$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

δ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=2e^{x^2}+2x\cdot e^{x^2}\cdot 2x=2e^{x^2}\left(1+2x^2\right)>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

23. 25 α. Για $x<1$ είναι $f'(x)=-4x$ από την οποία έχουμε $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Για $x>1$ είναι $f'(x)=2>0$, άρα $f\uparrow(1,+\infty)$.

Ισχύουν $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)=1$ και $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2x-1)=1$.

Άρα, η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$, $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	
f		↗		↘		↗	

β. Για $0<x<1$ έχουμε $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}<0$.

Για $x>1$ έχουμε $f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$ και είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$, διότι $3x+2>0$ για κάθε $x>1$.

Ισχύουν $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)=1$ και $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^3-2x^2-4x+6\right)=1$.

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
f			↘			↗	

γ. Έχουμε $x^2-4>0 \Leftrightarrow |x|>2 \Leftrightarrow \{x<-2$ ή $x>2\}$, οπότε ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 \ , & x<-2 \text{ ή } x>2 \\ -x^2+4, & -2\le x\le 2 \end{cases}$$

και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών.

Για $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ είναι $f'(x)=2x\neq 0$.

Για $x\in(-2, 2)$ είναι $f'(x)=-2x$ και έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$, $[0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2, 0]$, $[2, +\infty)$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$		$+$	
f		↘		↗		↘		↗	

23. 26 Για $x\in(0,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-2)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2-2)^2}=\frac{-(x^2+2x+2)}{(x^2-2)^2}=-\frac{(x+1)^2+1}{(x^2-2)^2}<0.$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{2}^-}\left(\frac{x+1}{x+\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{x-\sqrt{2}}\right)=-\infty.$$

Άρα, η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=\sqrt{2}$. Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(0,\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},+\infty)$.

23. 27 Έχουμε:

$$x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow \{x=0 \text{ ή } x=4\},$$

οπότε προκύπτει ο διπλανός πίνακας.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x^2-4x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Είναι:

$$|x^2-4x|=x^2-4x,\ x\in(-\infty,0]\cup[4,+\infty) \text{ και } |x^2-4x|=-x^2+4x,\ x\in[0,4].$$

Τότε ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x\ , & x\in(-\infty,\,0]\cup[4,\,+\infty) \\ 3x^2-4x, & x\in[0,\,4] \end{cases}$$

και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Για $x\in(0,\,4)$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=6x-4$, οπότε $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ που είναι δεκτή τιμή.

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,\,-2]$, $\left[0,\,\frac{2}{3}\right]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2,\,0]$, $\left[\frac{2}{3},\,+\infty\right)$.

x	$-\infty$		-2		0		$2/3$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$		$+$	
f		↘		↗		↘		↗		↗	

23. 28 α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με $f'(x)=2e^{x-1}-2x$, από την οποία προκύπτει ότι $f'(1)=0$. Επιπλέον, είναι $f''(x)=2e^{x-1}-2,\ x\in\mathbb{R}$, οπότε:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 2e^{x-1}-2=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1.$$

Τότε έχουμε:

$$f''(x)>0\Leftrightarrow 2\left(e^{x-1}-1\right)>0\Leftrightarrow e^{x-1}>1\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$$

και ομοίως, βρίσκουμε $f''(x)<0\Leftrightarrow x<1$.

Άρα:

$$f'\uparrow[1,\,+\infty),\ \text{οπότε}\ x>1\Leftrightarrow f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>0\ \text{και}$$

$$f'\downarrow(-\infty,\,1],\ \text{οπότε}\ x<1\Leftrightarrow f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>0.$$

Συνεπώς, είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,\,1)\cup(1,\,+\infty)$, οπότε $f\uparrow\mathbb{R}$.

β. Πρέπει:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)\ln(x+1)\neq 0\Leftrightarrow\{x\neq -1\ \text{ή}\ x\neq 0\}\ \text{και}\ \ x+1>0\Leftrightarrow x>-1.$$

Άρα x > 1 έχουμε $D_f=A=(-1,\,0)\cup(0,\,+\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=\frac{(x+1)\ln(x+1)-x\left(\ln(x+1)+1\right)}{\left((x+1)\ln(x+1)\right)^2}=\frac{\ln(x+1)-x}{(x+1)^2\ln^2(x+1)}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln(x+1)-x$ με $x>-1$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,\ +\infty)$, άρα είναι και συνεχής με $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=-\dfrac{x}{x+1}$.

Είναι $g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ και έχουμε:

$$g'(x)>0\Leftrightarrow -\frac{x}{x+1}>0\Leftrightarrow -1<x<0,\ \text{ άρα } g\uparrow(-1,\ 0] \ \text{ και}$$

$$g'(x)<0\Leftrightarrow -\frac{x}{x+1}<0\Leftrightarrow -x>0,\ \text{ άρα } g\downarrow[0,\ +\infty).$$

Επιπλέον, ισχύει $g(0)=0$. Τότε έχουμε:

$$-1<x<0\Rightarrow g(x)<g(0)\Rightarrow g(x)<0,\ \text{ οπότε είναι } f'(x)<0 \ \text{ και}$$

$$x>0\Rightarrow g(x)<0,\ \text{ οπότε είναι } x>1\Leftrightarrow x-1>0$$

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-1,\ 0)$ και $(0,\ +\infty)$.

γ. Για $x>-2$ είναι $f(x)=e^{(x+1)\ln(x+2)}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A=(-2,\ +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=e^{(x+1)\ln(x+2)}\cdot\left[1\cdot\ln(x+2)+(x+1)\frac{1}{x+2}\right]=(x+2)^{x+1}\cdot\left[\ln(x+2)+1-\frac{1}{x+2}\right].$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln(x+2)+1-\dfrac{1}{x+2}$, $x\in A$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο A, άρα είναι και συνεχής με $g'(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}>0$ για κάθε $x\in A$.

Συνεπώς $g\uparrow A$ και επειδή $x<1\Leftrightarrow x-1<0$ έχουμε:

$$x>-1\Leftrightarrow g(x)>g(-1)\Leftrightarrow g(x)>0,\ \text{ οπότε είναι } f'(x)>0 \ \text{ και}$$

$$-2<x<-1\Rightarrow g(x)<g(-1)\Rightarrow g(x)<0,\ \text{ οπότε είναι } f'(x)<0.$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,\ +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-2,\ -1]$.

23. 29 α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\ 2\pi]$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x) = 2ημxσυνx + συνx = συνx(2ημx + 1).$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0\Leftrightarrow συνx(2ημx + 1) = 0\Leftrightarrow\left\{συνx=0 \ \text{ ή } \ ημx=-\frac{1}{2}\right\}\overset{0\le x\le 2\pi}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\left\{x=\frac{\pi}{2}\ \text{ ή }\ x=\frac{3\pi}{2}\ \text{ ή }\ x=\frac{7\pi}{6}\ \text{ ή }\ x=\frac{11\pi}{6}\right\}..$$

Το πρόσημο του συνx είναι γνωστό και από τη γραφική παράσταση του ημx στο $[0, 2\pi]$ προκύπτει ο διπλανός πίνακας.

x	0		π/2		7π/6		3π/2		11π/6		2π
συνx		+	0	−		−	0	+		+	
2ημx+1		+		+	0	−		−	0	+	
f′(x)		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗		↘		↗	

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right]$.

β. Για $x>0$ είναι $f(x)=e^{x\ln x}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=e^{x\ln x}\cdot\left(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^x(\ln x+1).$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^x(\ln x+1)=0\Leftrightarrow x=e^{-1}\quad \text{και}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow x^x(\ln x+1)>0\Leftrightarrow \ln x>-1\Leftrightarrow x>e^{-1}.$$

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, e^{-1}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[e^{-1}, +\infty\right)$.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
f′(x)		−	0	+	
f		↘		↗	

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2+1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει ως ισότητα μόνο για x = 0, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=-2x^{-3}+4x^{-2}=2x^{-2}\left(-\frac{1}{x}+2\right)=2x^{-2}\frac{2x-1}{x}.$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x^{-2}\frac{2x-1}{x}=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=\frac{1}{2}\quad \text{και}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^{-2}\frac{2x-1}{x} > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x > \frac{1}{2}.$$

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

x	0		1/2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

23. 30 Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με $f'(x) = 3x^2 - 4\alpha x + \alpha^2 + \frac{3}{4}$.

Αρκεί να είναι $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το ίσον να ισχύει για πεπερασμένο πλήθος σημείων. Αυτό συμβαίνει, όταν:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (-4\alpha)^2 - 4\cdot 3\cdot\left(\alpha^2 + \frac{3}{4}\right) \leq 0 \Leftrightarrow 16\alpha^2 - 12\alpha^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow |\alpha| \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}.$$

23. 31 Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με $f'(x) = 9x^2 + 2x + \lambda^2$.

Εξετάζουμε το πρόσημο της f'. Είναι $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 9 \cdot \lambda^2 = 4(1 - 9\lambda^2)$.

- Αν $\Delta \leq 0$, τότε έχουμε:

$$4(1 - 9\lambda^2) \leq 0 \Leftrightarrow |\lambda| \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left\{\lambda \leq -\frac{1}{3} \text{ ή } \lambda \geq \frac{1}{3}\right\}.$$

Επειδή $\alpha = 9 > 0$, είναι $f'(x) \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x = -\frac{1}{9}$, αν $\lambda = \pm\frac{1}{3}$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Αν $\Delta > 0$, τότε $-\frac{1}{3} < \lambda < \frac{1}{3}$ και έχουμε:

$$4(1 - 9\lambda^2) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left\{x_1 = -\frac{1}{9} - \frac{\sqrt{1-9\lambda^2}}{9} \text{ ή } x_2 = -\frac{1}{9} + \frac{\sqrt{1-9\lambda^2}}{9}\right\}.$$

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, x_1]$, $[x_2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

23. 32 Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με $f'(x)=3x^2-3\lambda$.

Αρκεί να είναι $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το ίσον να ισχύει για πεπερασμένο πλήθος σημείων. Έχουμε $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 3x^2-3\lambda\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq\lambda,\ (1)$.

- Αν $\lambda\leq 0$, τότε η (1) ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- Αν $\lambda>0$, τότε η (1) γίνεται ισοδύναμα $|x|\geq\sqrt{\lambda}\Leftrightarrow\left\{x<-\sqrt{\lambda}\ \text{ ή }\ x>\sqrt{\lambda}\right\}$.

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αν $\lambda\leq 0$.

23. 33 **α.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με $f'(x)=\alpha^x\cdot\ln\alpha-1$.

Είναι $0<\alpha<1\Rightarrow\ln\alpha<0$, οπότε $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Έχουμε:

$$\alpha^{\lambda^2-4}-\alpha^{\lambda-2}=\left(\lambda^2-4\right)-\lambda+2\overset{+1}{\Leftrightarrow}\alpha^{\lambda^2-4}-\left(\lambda^2-4\right)+1=\alpha^{\lambda-2}-(\lambda-2)+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda^2-4\right)=f(\lambda-2),\ (1).$$

Η (1) ορίζεται για $\lambda\in\mathbb{R}$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι και 1 – 1, οπότε η (1) γίνεται:

$$\lambda^2-4=\lambda-2\Leftrightarrow\lambda^2-\lambda-6=0\Leftrightarrow\{\lambda=3\ \text{ ή }\ \lambda=-2\}.$$

23. 34 • Αν $\lambda=0$, τότε η $f(x)=x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με $f'(x)=2x$. Έχουμε $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$ και είναι:

$$f'(x)>0\Leftrightarrow x>0\quad\text{και}\quad f'(x)<0\Leftrightarrow x<0.$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

• Αν $\lambda\neq 0$, τότε $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\lambda x+1}$ ορίζεται στο $A=\left(-\infty,-\dfrac{1}{\lambda}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{\lambda},+\infty\right)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x)=\frac{2x(\lambda x+1)-\left(x^2-1\right)\lambda}{(\lambda x+1)^2}=\frac{\lambda x^2+2x+\lambda}{(\lambda x+1)^2}.$$

Έχουμε:

$$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{\lambda x^2+2x+\lambda}{(\lambda x+1)^2}\geq 0\Leftrightarrow\lambda x^2+2x+\lambda\geq 0$$

με $\Delta=2^2-4\cdot\lambda\cdot\lambda=4(1-\lambda^2)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $\left(-\infty, -\frac{1}{\lambda}\right)$, $\left(-\frac{1}{\lambda}, +\infty\right)$, αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$. Αυτό ισχύει, αν $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda^2 \leq 0 \Leftrightarrow |\lambda| \geq 1 \Leftrightarrow \{\lambda \leq -1 \text{ ή } \lambda \geq 1\}$.

23. 35 Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής με:

$$f'(x) = -6x^2 + 6\alpha x - 6 = 6\left(-x^2 + \alpha x - 1\right).$$

Αρκεί να είναι $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το ίσον να ισχύει για πεπερασμένο πλήθος σημείων. Επειδή α = −1 < 0, αρκεί να ισχύει:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow |\alpha| \leq 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow -2 \leq \alpha \leq 2.$$

23. 36 **α.** Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$2^x + 3^x + 4^x = 9^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x - 1 = 0, \ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x - 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με:

$$f'(x) = \left(\frac{2}{9}\right)^x \ln\frac{2}{9} + \left(\frac{1}{3}\right)^x \ln\frac{1}{3} + \left(\frac{4}{9}\right)^x \ln\frac{4}{9}.$$

Είναι $\frac{2}{9} < 1$, $\frac{1}{3} < 1$, $\frac{4}{9} < 1$, άρα $\ln\frac{2}{9} < 0$, $\ln\frac{1}{3} < 0$, $\ln\frac{4}{9} < 0$.

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) < 0$, οπότε η f είναι 1− 1.

Επειδή $f(1) = 0$, η x = 1 είναι η μοναδική ρίζα της f, άρα και της (1).

β. Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$e^{|x|} - e^2 = 2 - |x| \Leftrightarrow e^{|x|} + |x| = e^2 + 2, \ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής με $f'(x) = e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1 − 1. Τότε η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$f(|x|) = f(2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

γ. Για $x > 0$ έχουμε:

$$x^2 + x + \ln x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x + \ln x - 2 = 0, \ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + \ln x - 2$, $x \in A = (0, +\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α, άρα και συνεχής με $f'(x)=2x+1+\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α, άρα και 1 − 1.
Τότε η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$f(x)=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=1.$$

23. 37 **α.** Για $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ έχουμε:

$$2\text{συν}x=-\text{ημ}2x+\frac{3\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 2\text{συν}x+\text{ημ}2x-\frac{3\sqrt{3}}{2}=0,\ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2\text{συν}x+\text{ημ}2x-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με $f'(x)=-2\text{ημ}x+2\text{συν}2x$. Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\text{ημ}x=\text{συν}2x\Leftrightarrow\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\text{συν}2x\Leftrightarrow 2x=2k\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

- Αν $2x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-x\Leftrightarrow x=\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}$ με $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, τότε $x=\dfrac{\pi}{6}$.
- Αν $2x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}+x\Leftrightarrow x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ με $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, τότε οι λύσεις απορρίπτονται.

Επιπλέον, έχουμε:

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\ \text{συν}2x>\text{ημ}x\,\text{συν}2x>\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\underset{[0,\,\pi/2]}{\overset{\text{συν}x\downarrow}{=\!=}}2x<\frac{\pi}{2}-x\Leftrightarrow 0\le x<\frac{\pi}{6}.$$

Είναι $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=0$ και σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα μονοτονίας της f..

x	0	π/6	π/2
f′(x)	+	0	−
f	↗		↘

Έχουμε:

- $0\le x<\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow f(0)\le f(x)<f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow 2-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\le f(x)<0$ και
- $\dfrac{\pi}{6}<x\le\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)>f(x)\ge f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow 0>f(x)\ge-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Άρα, η $x=\dfrac{\pi}{6}$ είναι η μοναδική ρίζα της f, άρα και της (1).

β. Για $x\ge 2e$ έχουμε:

$$x=\frac{e^{x^2/8}}{2}\Leftrightarrow\frac{x}{e^{x^2/8}}-\frac{1}{2}=0,\ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{e^{x^2/8}}-\frac{1}{2},\ x\geq 2e.$

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με:

$$f'(x)=\frac{1\cdot e^{x^2/8}-x\cdot e^{x^2/8}\cdot\frac{x}{4}}{\left(e^{x^2/8}\right)^2}=\frac{4-x^2}{4e^{x^2/8}},\ x\geq 2e.$$

Έχουμε $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2+x}{4e^{x^2/8}}\cdot(2-x)=0\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow}x=2$ η οποία απορρίπτεται.

Επίσης, για κάθε $x\geq 2e$ έχουμε $\frac{2+x}{4e^{x^2/8}}>0$, οπότε $f'(x)<0\Leftrightarrow x>2$.

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2e,+\infty)$ και ισχύει:

$$x\geq 2e\Leftrightarrow f(x)\geq f(2e)\Leftrightarrow f(x)\geq\frac{4e-e^{e^2/2}}{2e^{e^2/2}}<0.$$

Επομένως, για κάθε $x\in[2e,+\infty)$ είναι $f(x)<0$, οπότε η (1) είναι αδύνατη.

γ. Για $x\geq 0$ έχουμε:

$$x^{-2}\cdot\ln x=\frac{1}{2e}\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{2e}=0,\ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{2e},\ x\geq 0.$ Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$. Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-2\ln x}{x^3}=0\Leftrightarrow\ln x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{1/2}\quad\text{και}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-2\ln x}{x^3}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<x<e^{1/2}.$$

Είναι $f\left(e^{1/2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{e}-\frac{1}{2e}=0$ και σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα μονοτονίας της f..

x	0		$e^{1/2}$		$+\infty$
f′(x)		+	0	−	
f		↗		↘	

Έχουμε:

- $0<x<e^{1/2}\Leftrightarrow f(x)<f\left(e^{1/2}\right)\Leftrightarrow f(x)<0$ και
- $x>e^{1/2}\Leftrightarrow f(x)<f\left(e^{1/2}\right)\Leftrightarrow f(x)<0.$

Άρα, η $x = e^{1/2} = \sqrt{e}$ είναι η μοναδική ρίζα της f, άρα και της (1).

23. 38 α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = ημx - x,\ x \geq 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με $f'(x) = συνx - 1 \leq 0$ για κάθε $x \geq 0$ και η ισότητα ισχύει για πεπερασμένο πλήθος σημείων.

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε για $x > 0$ έχουμε:

$$x > 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow ημx - x < 0 \Leftrightarrow ημx < x.$$

β. Ομοίως, βρίσκουμε $f'(x) = συνx - 1 \leq 0$ για κάθε $x \leq 0$ και η ισότητα ισχύει για πεπερασμένο πλήθος σημείων. Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, οπότε για $x < 0$ έχουμε:

$$x < 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow ημx > x.$$

γ. Με $λ \geq 1$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = ημx - λx,\ x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με $g'(x) = συνx - λ \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ισχύει ως ισότητα, μόνο αν $λ = 1$ και για πεπερασμένο πλήθος σημείων.

Άρα, η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι $g(0) = 0$, οπότε η $x = 0$ είναι η μοναδική λύση της $g(x) = 0$, άρα και της ζητούμενης.

23. 39 α. Για $x \in \mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με:

$$f'(x) = 5x^4 + 9x^2 = x^2(5x^2 + 9) > 0 \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επιπλέον, η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$g'(x) = -2\frac{1}{\sqrt{x}} - 7x^6 < 0 \text{ για κάθε } x < 0.$$

Άρα, η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x),\ x \geq 0$. Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, η $-g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα η h θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και $h(1) = 0$.

Άρα, η $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της $h(x) = 0$, δηλαδή οι C_f, C_g τέμνονται μόνο στο σημείο $M(1, 1)$.

23. 40 **α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = ημx - xσυνx,\ x \in [0, π]$. Η g είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με:

$$g'(x) = συνx - 1 \cdot συνx - x(-ημx) = xημx > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, π).$$

Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο [0, π].

Είναι $g(0) = 0$, οπότε η $x = 0$ είναι η μοναδική λύση της $g(x) = 0$, άρα και της ζητούμενης.

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, π], άρα και συνεχής με:

$$f'(x) = \frac{συνx \cdot x - ημx \cdot 1}{x^2} \overset{(α)}{=} \frac{-g(x)}{x^2}.$$

Έχουμε:

$$0 < x \le π \overset{(α)}{\Rightarrow} g(0) < g(x) \le g(π) \Rightarrow 0 < g(x) \le π \Rightarrow 0 < g(x) \le π \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 > -g(x) \ge -π \overset{x^2>0}{\Rightarrow} f'(x) < 0.$$

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, π].

23. 41 **α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = εφ^2x - 2συνx + 2,\ x \in \left[0, \frac{π}{2}\right)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με:

$$g'(x) = 2εφx \cdot \frac{1}{συν^2x} + 2ημx > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{π}{2}\right).$$

Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{π}{2}\right)$. Για $0 < x < \frac{π}{2}$ έχουμε:

$$0 < x < \frac{π}{2} \Rightarrow g(0) < g(x) \Rightarrow 0 < εφ^2x - 2συνx + 2 \Rightarrow εφ^2x > 2συνx - 1.$$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x + εφx - 2ημx,\ x \in \left[0, \frac{π}{2}\right)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με:

$$f'(x) = 3 + \frac{1}{συν^2x} - 2συνx = 1 + 2(1 - συνx) + \frac{1}{συν^2x}.$$

Επειδή $1 - συνx > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$ και $1 + \frac{1}{συν^2x} > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$, θα είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$.

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{π}{2}\right)$. Για $0 \le x < \frac{π}{2}$ έχουμε:

$$0 \le x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(0) \le f(x) \Rightarrow 0 \le 3x + εφx - 2ημx + 2 \Rightarrow εφx \ge 2ημx - 3x.$$

23. 42 **α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3ημx + 2x \cdot συνx - 5x,\ x \in [0, \pi)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με:

$$f'(x) = 3συνx + 2συνx + 2x(-ημx) - 5 = 5(συνx - 1) - 2xημx.$$

Επειδή $συνx - 1 < 0$ και $xημx > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$, θα είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$. Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi)$. Για $0 < x < \pi$ έχουμε:

$$0 < x < \pi \Rightarrow f(0) > f(x) \Rightarrow 0 > 3ημx + 2xσυνx - 5x \Rightarrow 2xσυνx < 5x - 3ημx.$$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = εφx + 2x - ημx,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με:

$$g'(x) = \frac{1}{συν^2 x} + 2 - συνx.$$

Επειδή $συνx \le 1 < 2 \Rightarrow 2 - συνx > 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\frac{1}{συν^2 x} > 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, θα είναι $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Για $0 < x < \frac{\pi}{2}$ έχουμε:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(0) < f(x) \Rightarrow 0 < εφx + 2x - ημx \Rightarrow εφx + 2x > ημx.$$

23. 43 **α.** Η f ορίζεται, αν $\frac{1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι το $A = (-1, +\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A, άρα και συνεχής με:

$$f'(x) = \left(-\ln(x+1) - 1 - \frac{1}{x+1}\right)' = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2}.$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{(x+1)^2} > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0 \text{ και ομοίως}$$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0.$

Σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα μονοτονίας της f..

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	↗		↘

Είναι $f(0)=-2,$ οπότε έχουμε:

$x>0 \Rightarrow f(x)<f(0) \Rightarrow f(x)<-2$ και

$-1<x<0 \Rightarrow f(x)<f(0) \Rightarrow f(x)<-2.$

Άρα $f(x)<0$ για κάθε $x \in A.$

β. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $A=(-1,+\infty),$ άρα και συνεχής με:

$$g'(x)=\ln\frac{1}{x+1}-(x+1)\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+1}\overset{(\alpha)}{=}f(x).$$

Άρα, από το (α.) προκύπτει ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

23. 44 α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R},$ άρα και συνεχής με:

$$f'(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x\cdot\ln\frac{3}{4}+\left(\frac{2}{5}\right)^x\cdot\ln\frac{2}{5}.$$

Είναι $\frac{3}{4}<1 \Leftrightarrow \ln\frac{3}{4}<0$ και ομοίως $\ln\frac{2}{5}<0.$

Επίσης $\left(\frac{3}{4}\right)^x>0$ και $\left(\frac{2}{5}\right)^x>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}.$

Άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x \in \mathbb{R},$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}.$

β. Για συνάρτηση $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left(15^{2(e^x+x)}+8^{2(e^x+x)}\right)20^{e^x+1}<\left(15^{e^x+1}+8^{e^x+1}\right)20^{2(e^x+x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(3\cdot5)^{2(e^x+x)}+(2\cdot4)^{2(e^x+x)}}{(4\cdot5)^{2(e^x+x)}}<\frac{(3\cdot5)^{e^x+1}+(2\cdot4)^{e^x+1}}{(4\cdot5)^{e^x+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^{2(e^x+x)}+\left(\frac{2}{5}\right)^{2(e^x+x)}<\left(\frac{3}{4}\right)^{e^x+1}+\left(\frac{2}{5}\right)^{e^x+1}\overset{-1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f\left(2e^x+2x\right)<f\left(e^x+1\right)\overset{f:\downarrow}{\Leftrightarrow}2e^x+2x>e^x+1 \Leftrightarrow e^x+2x-1>0,\ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x+2x-1,\ x \in \mathbb{R}.$ Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R},$ άρα και συνεχής με $g'(x)=e^x+2>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}.$ Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}.$ Από την (1) έχουμε ισοδύναμα $g(x)>g(0) \Leftrightarrow x>0.$

23. 45 **α.** Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $x\ln x+1\geq x \Leftrightarrow x\ln x+1-x\geq 0.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x\ln x+1-x,\ x>0.$ Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με:

$$f'(x)=1\cdot \ln x+x\cdot \frac{1}{x}-1=\ln x.$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ και } f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x>0 \Leftrightarrow x>1,$$

οπότε σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα μονοτονίας της f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

Ισχύουν:

- $0<x<1 \Leftrightarrow f(x)>f(1) \Rightarrow f(x)>0,$
- $x>1 \Leftrightarrow f(x)>f(1) \Rightarrow f(x)>0.$

Επειδή $f(1)=0,$ θα είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ που είναι το ζητούμενο.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu 3x-3\eta\mu 2x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right).$

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με:

$$f'(x)=2\cdot \sigma\upsilon\nu 3x\cdot 3-3\cdot \sigma\upsilon\nu 2x\cdot 2=6(\sigma\upsilon\nu 3x-\sigma\upsilon\nu 2x).$$

Έχουμε:

$$0\leq x<\frac{\pi}{6} \Rightarrow 0\leq 3x<\frac{\pi}{2} \text{ και } 0\leq x<\frac{\pi}{6} \Rightarrow 0\leq 2x<\frac{\pi}{3}.$$

Επίσης, για $0<x<\frac{\pi}{6}$ είναι $3x>2x \underset{[0,\pi/2]}{\overset{\sigma\upsilon\nu x \downarrow}{\Leftrightarrow}} \sigma\upsilon\nu 3x<\sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 3x-\sigma\upsilon\nu 2x<0.$

Άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right),$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{6}\right).$

Τότε έχουμε:

$$0<x<\frac{\pi}{6} \Rightarrow f(0)<f(x) \Rightarrow 2\eta\mu 3x-3\eta\mu 2x<0.$$

23. 46 **α.** Οι συναρτήσεις f και f' είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμες.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ έχουμε:

$$f'(x)<(1-x)f''(x) \Leftrightarrow f'(x)+(x-1)f''(x)<0,\ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f'(x)\cdot(x-1),\ x\in\mathbb{R}.$

Η g είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με $g'(x) = f'(x) + (x-1)\cdot f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ από την (1). Άρα, η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε:

- $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$ είναι $g(x) < g(1) \Leftrightarrow f'(x)(x-1) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$ και
- $x < 1 \Leftrightarrow x - 1 < 0$ είναι $g(x) > g(1) \Leftrightarrow f'(x)(x-1) > 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$.

Άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Έχουμε:

- για $x > 1 \overset{f:\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$ και
- για $x < 1 \overset{f:\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$.

23. 47 Η g είναι παραγωγίσιμη στο [0, 4], άρα και συνεχής με:

$$g'(x) = 2f(x)\cdot f'(x) + f'(x) \Leftrightarrow g'(x) = f'(x)(2f(x)+1).$$

- Για $x \in [0, 2]$ είναι $f'(x) > 0$, άρα $f \uparrow [0, 2]$. Τότε:
  - για $0 \le x < \dfrac{4}{3} \Rightarrow f(x) < f\left(\dfrac{4}{3}\right) \Rightarrow f(x) < -\dfrac{1}{2} \Rightarrow 2f(x) + 1 < 0$,

    άρα $g'(x) < 0$ για $x \in \left[0, \dfrac{4}{3}\right)$,
  - για $\dfrac{4}{3} < x < 2 \Rightarrow f\left(\dfrac{4}{3}\right) < f(x) \Rightarrow 2f(x) + 1 > 0$, άρα $g'(x) < 0$ για $x \in \left(\dfrac{4}{3}, 2\right]$.
- Για $x \in (2, 4]$ είναι $f'(x) < 0$, άρα $f \downarrow (2, 4]$. Τότε:
  - για $2 < x < \dfrac{8}{3} \Rightarrow f(x) > f\left(\dfrac{8}{3}\right) \Rightarrow f(x) > -\dfrac{1}{2} \Rightarrow 2f(x) + 1 > 0$,

    άρα $g'(x) < 0$ για $x \in \left(2, \dfrac{8}{3}\right)$,
  - για $\dfrac{8}{3} \le x \le 4 \Rightarrow f\left(\dfrac{8}{3}\right) > f(x) \Rightarrow 2f(x) + 1 < 0$, άρα $g'(x) > 0$ για $x \in \left(\dfrac{8}{3}, 4\right]$.

Σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα μονοτονίας της g.

x	0		4/3		2		8/3		4
f′(x)		−	0	+		−	0	+	
f		↘		↗		↘		↗	

Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[\frac{4}{3}, 2\right]$, $\left[\frac{8}{3}, 4\right]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[0, \frac{4}{3}\right]$, $\left[2, \frac{8}{3}\right]$.

23. 48 **α.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, άρα και συνεχής με:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β. Για x > 0 έχουμε:

$$x(\ln x + 1) > 1 \Leftrightarrow \ln x + 1 > \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) > -1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} 0 < x < 1.$$

γ. Είναι $x^4 + 1 > 0$ και $x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η ανίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\ln\frac{x^4+1}{x^2+1} = \frac{x^2 - x^4}{(x^2+1)(x^4+1)} \Leftrightarrow \ln(x^4+1) - \ln(x^2+1) = \frac{x^2+1-(x^4+1)}{(x^2+1)(x^4+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^4+1) - \ln(x^2+1) = \frac{1}{x^4+1} - \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^4+1) - \frac{1}{x^4+1} = \ln(x^2+1) - \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x^4+1) = f(x^2+1) \Leftrightarrow x^4 + 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \{x = 0 \text{ ή } x = \pm 1\}.$$

23. 49 **α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$, $x \geq 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με:

$$f'(x) = 1 - 1\cdot\ln(1+x) - (1+x)\frac{1}{1+x} = -\ln(1+x).$$

Για κάθε x > 0 έχουμε:

$$x > 0 \Leftrightarrow x + 1 > 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow -\ln(x+1) < 0.$$

Άρα, για κάθε x > 0 είναι $f'(x) < 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Τότε έχουμε $x > 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow x - (1+x)\ln(1+x) < 0$.

β. Η g ορίζεται για $x \in A = (-1, +\infty)$ και είναι $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο A ως σύνθεση παραγωγίσιμων, άρα και συνεχής με:

$$g'(x)=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\cdot\left(\frac{\frac{1}{1+x}\cdot x-\ln(1+x)}{x^2}\right)=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\cdot\left(\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^2}\right)=$$

$$=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\cdot\frac{f(x)}{(1+x)x^2}.$$

- Για κάθε $x>0$ από το (α.) είναι $f(x)<0$, οπότε $g'(x)<0$ για κάθε $x>0$.
- Για $-1<x<0\Rightarrow x+1<1\Rightarrow \ln(x+1)<0\Rightarrow f'(x)>0$.

  Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,0]$ και έχουμε:

$$-1<x<0\Leftrightarrow f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<0,$$

οπότε $g'(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,0)$.

Άρα, η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,+\infty)$.

23. 50 **α.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής με:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot 2^x-x^2\cdot 2^x}{(2^x)^2}=\frac{x(2-x)}{2^x}.$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x(2-x)=0\Leftrightarrow\{x=0 \text{ ή } x=2\} \quad \text{και}$$

$$f'(x)>0\overset{2^x>0}{\Leftrightarrow}2x-x^2>0\Leftrightarrow 0<x<2.$$

Σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα μονοτονίας της f. Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$, $[2,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,2]$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	0	−	
f		↘		↗		↘	

β. Για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$2^{\text{συν}x}\cdot\text{ημ}^2 2x=2^{\text{ημ}2x}-2^{\text{ημ}2x}\cdot\text{ημ}^2x\Leftrightarrow 2^{\text{συν}x}\cdot\text{ημ}^2 2x=2^{\text{ημ}2x}\cdot\text{συν}^2x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\text{ημ}^2 2x}{2^{\text{ημ}2x}}=\frac{\text{συν}^2x}{2^{\text{συν}x}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\text{ημ}2x)=f(\text{συν}x),\ (1).$$

Για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $0<\text{συν}x<1$ και $0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0<2x<\pi$, οπότε $0<\text{ημ}2x<1$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)\subseteq[0,2]$ από το (α), άρα είναι και 1 – 1.

Η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$ημ2x = συνx \Leftrightarrow 2ημx \cdot συνx - συνx = 0 \Leftrightarrow συνx(2ημx - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{συνx = 0 \ \text{ή} \ ημx = \frac{1}{2}\right\}.$$

Επειδή $συνx \in (0, 1)$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, θα είναι $ημx = \frac{1}{2} \overset{x\in(0,\,\pi/2)}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{6}$.

23. 51 **α.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-1, +\infty)$, άρα και συνεχής με $f'(x) = e^x + \frac{1}{x+1} > 0$ για κάθε $x \in A$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο A.

β. Είναι $f(0) = 0$. Έχουμε:

- για $x > 0 \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ και
- για $-1 < x < 0 \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$.

γ. Είναι $x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$e^{x^2} - e^2 < \ln 3 - \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow e^{x^2} + \ln(x^2 + 1) < e^2 + \ln 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{x^2} - 1 + \ln(x^2 + 1) < e^2 - 1 + \ln(2 + 1), \ (1).$$

Επειδή $x^2 > -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $g(x) = f(x^2)$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$f(x^2) < f(2) \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2 < 2 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

23. 52 **α.** Η f ορίζεται για x > 0 και $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Άρα $D_f = A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A, άρα και συνεχής με:

$$f'(x) = \frac{2 \cdot 1 \cdot \ln x - 2x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = 2\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \quad \text{και}$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2(\ln x - 1)}{\ln^2 x} > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e.$$

Σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα μονοτονίας της f. Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(0, 1)$, $(1, e]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[e, +\infty)$.

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖ $-$	0	$+$
f	↘	‖ ↘		↗

β. • Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x) = -\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x} = 0$. Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(2x\cdot\frac{1}{\ln x}\right) = 0.$$

• Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}(2x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x) = 0$, οπότε εφόσον $\ln x > 0$ για $x > 1$, θα είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\ln x} = +\infty$. Τότε έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(2x\cdot\dfrac{1}{\ln x}\right) = +\infty$.

Άρα, η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

• Έχουμε $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{\ln x} = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x) = +\infty$. Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{\ln x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty}(2x) = +\infty.$$

Άρα, η C_f δεν έχει πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$.

γ. Για $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι ημx >0 και εφx > 0, οπότε είναι e + 2ημx > e και e + εφx > e.

Επιπλέον, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[e, +\infty)$, οπότε έχουμε:

$$f(e + 2\eta\mu x) \geq f(e + \varepsilon\varphi x) \Leftrightarrow e + 2\eta\mu x \geq e + \varepsilon\varphi x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu x \geq \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \underset{\sigma\upsilon\nu x > 0}{\overset{\eta\mu x > 0}{\Leftrightarrow}} \sigma\upsilon\nu x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \geq \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \underset{(0,\, \pi/2)}{\overset{\sigma\upsilon\nu x \downarrow}{\Leftrightarrow}} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$$

23. 53 **α.** Έστω $M(x, 2x+3)$, $x \in \mathbb{R}$, ένα σημείο της (ε). Τότε έχουμε:

$$(AM) = \sqrt{\left(x-(-1)\right)^2 + \left[2x+3-(-4)\right]^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (2x+7)^2} =$$

$$= \sqrt{5x^2 + 30x + 50},\ x \in \mathbb{R}.$$

Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $d(x) = \sqrt{5\left(x^2 + 6x + 10\right)}$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Η d είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής με:

$$d'(x)=\frac{\left(5\left(x^2+6x+10\right)\right)'}{2\sqrt{5\left(x^2+6x+10\right)}}=\frac{5(x+3)}{\sqrt{5\left(x^2+6x+10\right)}}.$$

Έχουμε $d'(x)>0\Leftrightarrow x+3>0\Leftrightarrow x>-3$. Άρα, η d είναι γνησίως αύξουσα στο $[-3,+\infty)$, δηλαδή η d αυξάνεται όταν $x\in[-3,+\infty)$.

23. 54 α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, άρα και συνεχής με $f'(x)=\sigmaυνx-\sqrt{3}\cdot ημx$.

Έχουμε $f'(x)=0\Leftrightarrow συνx=\sqrt{3}ημx$, (1). Είναι $συνx>0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{ημx}{συνx}\Leftrightarrow εφx=\frac{\sqrt{3}}{2}\overset{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow}x=\frac{\pi}{6}.$$

Επιπλέον, έχουμε:

$$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{6}\overset{εφx:\uparrow}{\Leftrightarrow}εφx<εφ\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\frac{ημx}{συνx}<\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow συνx-\sqrt{3}ημx>0\Leftrightarrow f'(x)>0.$$

Σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα μονοτονίας της f.

x	$-\pi/2$		$\pi/6$		$\pi/2$
f'(x)		+	0	−	
f		↗		↘	

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$.

β. Για $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ η εξίσωση γράφεται:

$$f(x)=2\Leftrightarrow ημx+\sqrt{3}συνx=2\Leftrightarrow\frac{1}{2}ημx+\frac{\sqrt{3}}{2}συνx=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow συν\frac{\pi}{3}\cdot ημx+ημ\frac{\pi}{3}\cdot συνx=1\Leftrightarrow ημ\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=ημ\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\Leftrightarrow\left\{x=2k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Έχουμε $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow-\frac{\pi}{2}<2k\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow-\frac{1}{3}<k<\frac{1}{6}\overset{k\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow}k=0$. Άρα $x=\frac{\pi}{6}$.

γ. Το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to0}\left[x^2\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to0}\left[x^2\cdot\left(ημ\frac{1}{x}+\sqrt{3}\cdot συν\frac{1}{x}\right)\right]$.

Για $x\neq0$ έχουμε:

$$\left|x^2 \cdot \left(\eta\mu\frac{1}{x} + \sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)\right| = x^2 \cdot \left|\left(\eta\mu\frac{1}{x} + \sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)\right| \leq$$

$$\leq x^2 \cdot \left[\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| + \sqrt{3}\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right|\right] \leq x^2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2\left(1+\sqrt{3}\right) \leq x^2\left(\eta\mu\frac{1}{x} + \sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right) \leq x^2\left(1+\sqrt{3}\right).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left[-x^2\left(1+\sqrt{3}\right)\right] = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2\left(1+\sqrt{3}\right)\right] = 0$.

Άρα, από το κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε τελικά:

$$\lim_{x\to 0}\left[x^2\cdot\left(\eta\mu\frac{1}{x} + \sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)\right] = 0.$$

Σημείωση

Οι πράξεις απλουστεύονται, αν γράψουμε τη συνάρτηση στη μορφή:

$$f(x) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\eta\mu x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu x\right) = 2\cdot\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

23. 55 **α.** Η συνάρτηση S είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,\ 7]$ με:

$$S'(t) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6 \text{ και } S''(t) = 3t^2 - 12t + 11.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\upsilon(t) = S'(t) \Leftrightarrow \upsilon(t) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6,\ t\in[0,\ 7] \text{ και}$$

$$\alpha(t) = \upsilon'(t) = S''(t) \Leftrightarrow \alpha(t) = 3t^2 - 12t + 11,\ t\in[0,\ 7].$$

Το κινητό είναι ακίνητο, όταν:

$$\upsilon(t) = 0 \Leftrightarrow t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^2 - 5t + 6\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{t = 0 \text{ ή } t = 2 \text{ ή } t = 3\}.$$

β. Αν η θετική φορά κίνησης είναι προς τα δεξιά, τότε το κινητό κινείται προς τα δεξιά, όταν $\upsilon(t) > 0$ και αντίστοιχα κινείται προς τα αριστερά, όταν $\upsilon(t) < 0$ για $t\in[0,\ 7]$.

Σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα προσήμων της ταχύτητας.

t	0		1		2		3		7
$t-1$		−	0	+		+		+	
t^2-5t+6		+		+	0	−	0	+	
$\upsilon(t)$		−	0	+	0	−	0	+	

Άρα, το κινητό κινείται προς τα δεξιά, όταν $t\in(1,\ 2)$ ή $t\in(3,\ 7)$, ενώ κινείται προς τα αριστερά, όταν $t\in(0,\ 1)$ ή $t\in(2,\ 3)$.

γ. Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη, όταν $\alpha(t)>0$ και είναι επιβραδυνόμενη, όταν $\alpha(t)<0$.

Σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα προσήμων της επιτάχυνσης.

t	0		$2-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$2+\frac{\sqrt{3}}{3}$		7
$\alpha(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα, η κίνηση είναι επιταχυνόμενη, όταν $t\in\left(2-\frac{\sqrt{3}}{3},\ 2+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, ενώ είναι επιβραδυνόμενη, όταν $t\in\left(0,\ 2-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ή $t\in\left(2+\frac{\sqrt{3}}{3},\ 7\right)$.

23. 56 Η συνάρτηση T είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\ 5]$, άρα και συνεχής με:

$$T'(t)=50\cdot\frac{4t^3\cdot\left(t^2+2\right)^2-t^4\cdot 2\cdot\left(t^2+2\right)\cdot 2t}{\left(\left(t^2+2\right)^2\right)^2}=50\cdot\frac{4t^3\cdot\left(t^2+2-t^2\right)}{\left(t^2+2\right)^3}=$$

$$=400\cdot\frac{t^3}{\left(t^2+2\right)^3}>0 \text{ για κάθε } t\in(0,\ 5).$$

Άρα, η T είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 5), οπότε η ταχύτητα T αυξάνεται συνεχώς.

Η αρχική ταχύτητα του πυραύλου είναι $T(0)=100$, δηλαδή είναι $1000\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Επιπλέον, αρκεί:

$$T(t)\le\frac{3}{2}\cdot T(0)\Leftrightarrow\frac{50t^4}{\left(t^2+2\right)^2}+100\le\frac{3}{2}\cdot 100\Leftrightarrow\frac{50t^4}{\left(t^2+2\right)^2}\le 50\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^4\le\left(t^2+2\right)^2\Leftrightarrow 0\le 4t^2+4$$

που ισχύει.

23. 57 **α.** Είναι $M(x,\ \ln x)$, $x>0$ και $A(x,\ 0)$, $B(0,\ \ln x)$. Το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο στο O, οπότε έχουμε:

$$(OAB)=E=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot x\cdot|\ln x|\Rightarrow E(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x\ln x &, x\ge 1\\ -\frac{1}{2}x\ln x, & 0<x<1\cdot\end{cases}$$

β. Για $x>1$ η E είναι παραγωγίσιμη με $E'(x)=\frac{1}{2}(\ln x+1)>0$ για κάθε $x>1$.

Για $x \in (0,1)$ η Ε είναι παραγωγίσιμη με $E'(x) = -\frac{1}{2}(\ln x + 1)$ και έχουμε:

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow 0 < x < e^{-1}.$$

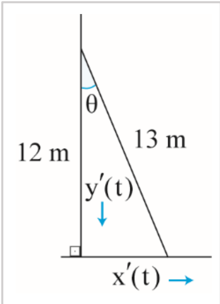
Η Ε είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, διότι:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 0 \text{ και } \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{2}x\ln x\right) = 0.$$

Άρα, το εμβαδόν αυξάνεται, όταν η Ε είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή όταν:

$$x \in \left(0, e^{-1}\right] \text{ ή } x \in [1, +\infty).$$

23. 58 **α.** Έστω x η απόσταση του κάτω μέρους της δοκού από τον τοίχο και y η απόσταση του πάνω μέρους της δοκού από το δάπεδο. Σε χρόνο t ισχύει:



$$x^2(t) + y^2(t) = 13^2, \quad (1).$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $y(t_0) = 12$ m και από την (1) βρίσκουμε:

$$x^2(t_0) + 12^2 = 13^2 \Rightarrow x(t_0) = 5 \text{ m}.$$

Παραγωγίζοντας ως προς t την (1) κατά μέλη έχουμε:

$$2x(t)\cdot x'(t) + 2y(t)\cdot y'(t) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(t)\cdot x'(t) + y(t)\cdot y'(t) = 0, \quad (2).$$

Σε χρόνο t_0 η (2) γράφεται:

$$x(t_0)\cdot x'(t_0) + y(t_0)\cdot y'(t_0) = 0 \Rightarrow y'(t_0) = -\frac{5\cdot 0{,}1}{13} \Rightarrow y'(t_0) \simeq -0{,}04 \text{ m/s}.$$

β. Ισχύουν οι σχέσεις ημθ $= \frac{x}{13}$ και συνθ. $= \frac{y}{13}$. οι οποίες σε χρόνο t λαμβάνουν τη μορφή:

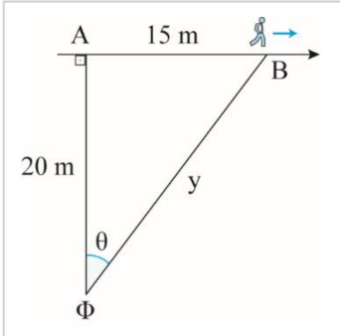
$$\text{ημθ}(t) = \frac{x(t)}{13} \text{ και } \text{συνθ}(t) = \frac{y(t)}{13}.$$

Έχουμε:

$$\text{συνθ}(t) = \frac{y(t)}{13} \Rightarrow -\text{ημθ}(t)\cdot\theta'(t) = \frac{y'(t)}{13} \Rightarrow -\frac{x(t)}{13}\cdot\theta'(t) = \frac{y'(t)}{13} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \theta'(t) = -\frac{y'(t)}{x(t)}.$$

Τη χρονική στιγμή t_0 βρίσκουμε $\theta'(t_0) = -\frac{y'(t_0)}{x(t_0)} = -\frac{-0{,}04}{5} = 0{,}008$ rad/s.

23. 59 Έστω x η απόσταση του άνδρα από την αφετηρία Α. Το τρίγωνο ΑΦΒ είναι ορθογώνιο στο Α και αν θ είναι η γωνία που διαγράφει η ακτίνα φωτός, τότε σε χρόνο t ισχύει:



$$\varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{x(t)}{20}.$$

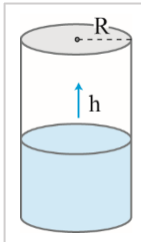
Παραγωγίζοντας ως προς t κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=\frac{x'(t)}{20}\Leftrightarrow\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t)\right)\cdot\theta'(t)=\frac{x'(t)}{20}\Leftrightarrow\left(1+\frac{x^2(t)}{20^2}\right)\cdot\theta'(t)=\frac{x'(t)}{20}.$$

Σε χρόνο t_0 βρίσκουμε:

$$\left(1+\frac{x^2(t_0)}{20^2}\right)\cdot\theta'(t_0)=\frac{x'(t_0)}{20}\Rightarrow\left(1+\left(\frac{15}{20}\right)^2\right)\cdot\theta'(t_0)=\frac{0,2}{20}\Rightarrow\theta'(t_0)=0,0064\ \text{rad/s}.$$

23. 60 Ο όγκος της δεξαμενής, ακτίνας $R=7$ m, είναι:

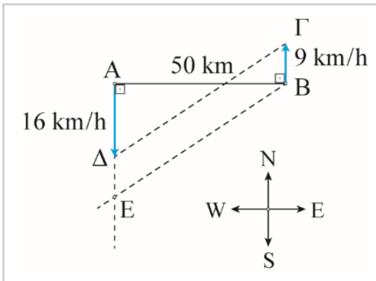


$$V=\pi\cdot R^2\cdot h\Rightarrow V=49\cdot\pi\cdot h\ \text{ σε m}^3.$$

Η δεξαμενή γεμίζει με ταχύτητα $V'(t)=4\ m^3/\min$. Σε χρόνο t είναι $V(t)=49\cdot\pi\cdot h(t)$. Παραγωγίζοντας ως προς t κατά μέλη έχουμε:

$$V'(t)=49\cdot\pi\cdot h'(t)\Rightarrow h'(t)=\frac{4}{49\cdot\pi}\ \text{m/min}.$$

23. 61 **α.** Έστω ΔΓ η απόσταση των πλοίων Α, Β μετά από χρόνο t ώρες.
Τότε ΑΔ = 16t km και ΒΓ = 9t km.
Αναζητούμε την απόσταση d = ΔΓ σε συνάρτηση με τον χρόνο. Από το Β φέρνουμε παράλληλη προς τη ΔΓ που τέμνει την ΑΔ στο Ε. Τότε το ΔΓΒΕ είναι παραλληλόγραμμο και ισχύουν ΔΕ = ΓΒ και ΕΒ=ΔΓ.
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΒ, όπου $A=90^{o}$, έχουμε:



$$EB^2=AB^2+AE^2\Rightarrow d^2=AB^2+(A\Delta+\Delta E)^2\Rightarrow d(t)=\sqrt{50^2+(16t+9t)^2}$$

$$\Rightarrow d(t)=\sqrt{50^2+25^2t^2}\Rightarrow d(t)=25\sqrt{4+t^2}$$

όπου $t\geq 0$ είναι ο χρόνος σε ώρες.

Επιπλέον, η d είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ και συνεχής στο $[0,\ +\infty)$ με:

$$d'(t)=\frac{25t}{\sqrt{4+t^2}}>0 \text{ για κάθε } t>0.$$

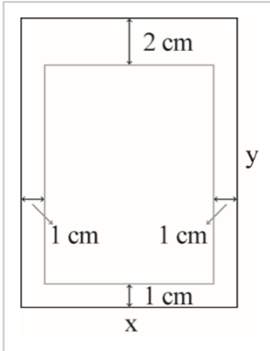
Άρα, η d είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$, δηλαδή η d αυξάνεται συνεχώς.

β. Έχουμε:

$$d'(6)=\frac{25\cdot 6}{\sqrt{4+6^2}}=\frac{150}{\sqrt{10}}\ \text{km/h}.$$

23. 62 **α.** Έστω x, y οι διαστάσεις του χαρτιού. Τότε:

$$x\cdot y=1350\ \text{cm}^2 \Rightarrow y=\frac{1350}{x},\ (1).$$



Η εκτύπωση θα έχει εμβαδόν:

$$E=(x-2)\cdot(y-3)\overset{(1)}{=}(x-2)\cdot\left(\frac{1350}{x}-3\right).$$

Πρέπει x > 2 και y > 3, οπότε από την (1) βρίσκουμε:

$$\frac{1350}{x}>3\Rightarrow x<450 \quad \text{και} \quad \frac{1350}{y}>2\Rightarrow y<675.$$

Άρα $x\in(2,\ 450)$ και $y\in(3,\ 675)$.

β. Η E είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$, άρα και συνεχής με:

$$E'(x)=1\cdot\left(\frac{1350}{x}-3\right)+(x-2)\cdot\left(-\frac{1350}{x^2}\right)=$$

$$=\frac{1350}{x}-3-\frac{1350}{x}+\frac{1350}{x^2}\cdot 2=\frac{3}{x^2}\left(900-x^2\right)=$$

$$=\frac{3}{x^2}(30+x)(30-x).$$

Έχουμε $E'(x)>0\overset{x>2}{\Leftrightarrow}30-x>0\Leftrightarrow 2<x<30$ και $E'(x)<0\Leftrightarrow 30<x<450.$

Άρα, το εμβαδόν αυξάνεται, όταν $x\in(2,\ 30)$ και μειώνεται, όταν $x>30.$

23. 63 **α.** Η g είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{4},\ 0\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων με:

- $g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}+\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{3}=-\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}<0$ και
- $g(0)=0+1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}>0.$

Οπότε ισχύει $g\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot g(0)<0.$ Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{4},\,0\right)$ τέτοιο, ώστε g(α) = 0.

β. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=2-\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R},$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R},$ άρα και 1 – 1. Επομένως, η x = α είναι η μοναδική ρίζα. Τότε έχουμε:

- για $x>\alpha\Leftrightarrow g(x)>g(\alpha)\Leftrightarrow g(x)>0$ και ομοίως
- για $x<\alpha\Leftrightarrow g(x)<0.$

γ. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x+\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{3}=g(x).$

Επομένως, σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα μονοτονίας της f. Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\,\alpha]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\,+\infty).$

x	$-\infty$	$-\pi/4$	α	0	$+\infty$
$f'(x)=g(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

δ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0\in\left(0,\,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0)=g'(x_0)\Leftrightarrow g(x_0)=g'(x_0)\Leftrightarrow 2x_0+\sigma\upsilon\nu x_0-\frac{1}{3}=2-\eta\mu x_0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_0+\eta\mu x_0+\sigma\upsilon\nu x_0-\frac{7}{3}=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=2x+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-\frac{7}{3},\ x\in\left[0,\,\frac{\pi}{4}\right].$

Η h είναι συνεχής στο $\left[0,\,\frac{\pi}{4}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και έχουμε:

- $h(0)=1-\frac{7}{3}=-\frac{4}{3}$ και
- $h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{7}{3}=\frac{3\pi+6\sqrt{2}-14}{6}>0.$

Οπότε ισχύει $h(0)\cdot h\left(\frac{\pi}{4}\right)<0.$ Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0$ που είναι το ζητούμενο.

23. 64 α. Η f είναι συνεχής στα $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ και έχουμε:

- $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2} - \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{4-\pi}{4}\right) < 0$ και
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \eta\mu\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\pi-4}{4}\right) < 0.$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano:

- υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$ και
- υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.

β. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, άρα και συνεχής με:

$$h'(x) = x - \eta\mu 2x = f(x).$$

Είναι $f'(x) = 1 - 2\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Επειδή $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, βρίσκουμε $x = -\frac{\pi}{6}$ ή $x = \frac{\pi}{6}$.

Η f' είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και έτσι διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα μεταξύ των διαδοχικών ριζών της. Είναι $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 > 0$, $f'(0) = -1 < 0$ και $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 > 0$, οπότε σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα μονοτονίας της f.

x	$-\pi/2$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$
$f'(x)$	+		0	−	0	+	
f	↗			↘		↗	

Από το (α.) έχουμε $f(x_1) = f(x_2) = 0$ και επιπλέον $f(0) = 0$, άρα:

- για $-\frac{\pi}{2} < x < x_1 \Rightarrow f(x) < f(x_1) = 0$,
- για $x_1 < x < -\frac{\pi}{6} \Rightarrow f(x_1) < f(x) \Rightarrow f(x) > 0$,

- για $-\dfrac{\pi}{6} < x < 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$,
- για $0 < x < \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow f(0) > f(x) \Rightarrow f(x) < 0$,
- για $\dfrac{\pi}{6} < x < x_2 \Rightarrow f(x) < f(x_2) = 0$,
- για $x_2 < x < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow f(x_2) < f(x) \Rightarrow f(x) > 0$.

Κατασκευάζουμε έτσι τον ακόλουθο πίνακα από τον οποίο προκύπτει ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[-\dfrac{\pi}{2},\, x_1\right]$, $[0,\, x_2]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[x_1,\, 0]$, $\left[x_2,\, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

x	$-\pi/2$		x_1		$-\pi/6$		0		$\pi/6$		x_2		$\pi/2$
$h'(x)=f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
h		↘		↗		↗		↘		↘		↗	

23. 65 α. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, άρα είναι συνεχής και στο $[0,\, 2]$. Έχουμε:

$$f(2) = 0 \Rightarrow 8\alpha + 4\beta + 2\gamma + 6 = 0 \Rightarrow 4\alpha + 2\beta + \gamma = -3, \ (1).$$

Είναι $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma,\ x \in \mathbb{R}$ και $f'(2) = 5 \Leftrightarrow 12\alpha + 4\beta + \gamma = 5,\ (2)$.

Επειδή $f(2) = 0$, το $x - 2$ είναι παράγοντας του $f(x)$, οπότε από το σχήμα Horner για $\rho = 2$ γράφουμε την f στη μορφή:

$$f(x) = (x-2)\cdot \Pi(x), \ (3)$$

α	β	γ	6	2
	2α	2β+4α	8α+4β+2γ	
α	β+2α	4α+2β+γ	8α+4β+2γ+6	

όπου:

$$\Pi(x) = \alpha x^2 + (\beta + 2\alpha)x + 4\alpha + 2\beta + \gamma.$$

Η Π είναι συνεχής στο $[0,\, 2]$ ως πολυωνυμική με:

- $\Pi(0) = 4\alpha + 2\beta + \gamma \overset{(1)}{=} -3$ και
- $\Pi(2) = 4\alpha + (\beta + 2\alpha)2 + 4\alpha + 2\beta + \gamma \overset{(2)}{=} 5$.

Οπότε ισχύει $\Pi(0)\cdot\Pi(2) = -15 < 0$. Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,\, 2)$ τέτοιο, ώστε $\Pi(x_0) = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} f(x_0) = 0$.

β. Έχουμε:

$$f(-3)=0 \Rightarrow -27\alpha+9\beta-3\gamma+6=0 \Rightarrow -9\alpha+3\beta-\gamma=-2,\ (4).$$

Από τις (1), (2) και (4) προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} 4\alpha+2\beta+\gamma=-3 \\ 12\alpha+4\beta+\gamma=5 \\ -9\alpha+3\beta-\gamma=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha+\beta=-1 \\ 3\alpha+7\beta=3 \\ -9\alpha+3\beta-\gamma=-2 \end{cases} \Rightarrow \alpha=1,\ \beta=0,\ \gamma=-7.$$

Τότε είναι $f(x)=x^3-7x+6 \overset{(\alpha)}{=} (x-2)\cdot(x^2+2x-3)$ και έχουμε:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-3.$$

Άρα $x_0=1$.

23. 66 Η δοθείσα σχέση γράφεται:

$$\left(f(x)-x^2\right)^2=\left(e^{-x+2}-\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left|f(x)-x^2\right|=\left|e^{-x+2}-\frac{x}{2}\right| \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},\ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^{-x+2}-\dfrac{x}{2}$.

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών.

Παρατηρούμε ότι $g(2)=e^{-2+2}-\dfrac{2}{2}=e^0-1=0$. Επιπλέον, έχουμε:

$$g'(x)=-e^{-x+2}-\frac{1}{2}<0,\ x\in\mathbb{R}.$$

Συνεπώς, η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η $x=2$ είναι η μοναδική ρίζα της g.

Άρα, για $x\neq 2$ είναι $\left|f(x)-x^2\right|\neq 0$, οπότε η συνεχής συνάρτηση $k(x)=f(x)-x^2$ διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 2)$ και $(2, +\infty)$.

Επιπλέον, έχουμε:

- αν $x>2 \Leftrightarrow g(x)<g(2) \Leftrightarrow e^{-x+2}-\dfrac{x}{2}<0$ και
- αν $x<2 \Leftrightarrow g(x)>g(2) \Leftrightarrow e^{-x+2}-\dfrac{x}{2}>0$.

Άρα, έχουμε τις παρακάτω τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+e^{-x+2}-\dfrac{x}{2}, & x\geq 2 \\ x^2+e^{-x+2}-\dfrac{x}{2}, & x<2 \end{cases} = x^2+e^{-x+2}-\frac{x}{2},\ x\in\mathbb{R}, \text{ ή}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+e^{-x+2}-\dfrac{x}{2}, & x\geq 2\\ x^2-e^{-x+2}+\dfrac{x}{2}, & x<2\end{cases} \quad ή \quad f(x)=\begin{cases} x^2-e^{-x+2}+\dfrac{x}{2}, & x\geq 2\\ x^2+e^{-x+2}-\dfrac{x}{2}, & x<2\end{cases} \quad ή$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-e^{-x+2}+\dfrac{x}{2}, & x\geq 2\\ x^2-e^{-x+2}+\dfrac{x}{2}, & x<2\end{cases} = x^2-e^{-x+2}+\frac{x}{2},\ x\in\mathbb{R}.$$

23. 67 Η f είναι συνεχής στο [α, β], άρα λαμβάνει μέγιστη τιμή σε αυτό. Αρκεί να αποδείξουμε ότι αυτό το μέγιστο δεν το λαμβάνει για x = α ή για x = β.

- Αν η f είχε μέγιστο για x = α, τότε θα ίσχυε $f(x)\leq f(\alpha)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

  Τότε θα ήταν:

  $$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\leq 0,\ \text{άρα και } f'(\alpha)=\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\leq 0$$

  που είναι άτοπο από υπόθεση.

- Ομοίως, αν η f είχε μέγιστο για x = β, τότε θα ίσχυε $f(x)\leq f(\beta)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

  Τότε θα ήταν:

  $$\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\leq 0,\ \text{άρα και } f'(\beta)=\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\leq 0$$

  που είναι άτοπο από υπόθεση.

Άρα, η f παρουσιάζει μέγιστο σε σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$.

23. 68 **α.** Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^x-1<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$. Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το:

$$f((-\infty,0])=\left[f(0),\ \lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=[3,+\infty),$$

αφού $f(0)=e^0-0+2=3$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-x+2\right)\overset{0-(-\infty)+2}{==}+\infty$.

β. Η f είναι συνεχής στο $[-1,+\infty)$ ως πολυωνυμική, καθώς και παραγωγίσιμη με $f'(x)=2x+2>0$ για κάθε $x>-1$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το:

$$f([-1,+\infty))=\left[f(-1),\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[4,+\infty),$$

αφού $f(-1)=4$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2x+5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$.

23. 69 **α.** Η f είναι συνεχής στο $[1,\,2]$ ως ρητή με $f(x)=2+\dfrac{1}{x+2}$, οπότε βρίσκουμε

$f'(x)=-\dfrac{1}{(x+2)^2}<0$ για κάθε $x\in(1,\,2)$.

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,\,2]$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το:

$$f([1,\,2])=[f(2),\,f(1)]=\left[\frac{9}{4},\,\frac{7}{3}\right].$$

β. Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ως άθροισμα συνεχών με $f'(x)=\text{συν}x+2>0$ για $x\in\left(0,\,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\,\dfrac{\pi}{2}\right)$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το:

$$f\left(\left[0,\,\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left[f(0),\,\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)\right)=[0,\,\pi+1),$$

αφού $f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\text{ημ}x+2x)=1+2\dfrac{\pi}{2}=1+\pi$.

γ. Η f είναι συνεχής στο $(0,\,e)$ ως διαφορά συνεχών με:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{-1-x}{x^2}<0 \text{ για κάθε } x\in(0,\,e).$$

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\,e)$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το:

$$f((0,\,e))=\left(\lim_{x\to e^-} f(x),\,\lim_{x\to 0^+} f(x)\right)=\left(\frac{1}{e}-1,\,+\infty\right),$$

αφού $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)=\lim\limits_{x\to e^-}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)=\dfrac{1}{e}-1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)\overset{(+\infty)-(-\infty)}{=\!=}+\infty$.

δ. Η f είναι συνεχής στο $(-2,\,2]$ ως διαφορά και συνθέσεις συνεχών με:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{2\sqrt{2-x}}>0 \text{ για } x\in(-2,\,2).$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-2,\,2]$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το:

$$f((-2,\,2])=\left(\lim_{x\to -2^+} f(x),\,f(2)\right]=(-2,\,2],$$

αφού $f(2)=2$ και $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)=0-\sqrt{4}=-2.$

23. 70 Η $f(x)=\dfrac{6}{x}-2x^2+3$ είναι συνεχής στο $A=(0,\,4]$ ως ρητή, καθώς και παραγωγίσιμη με $f'(x)=-\dfrac{6}{x^2}-4x<0$ για κάθε $x\in A.$

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το:

$$f(A)=\left[f(4),\ \lim_{x\to 0^+} f(x)\right)=\left[-\frac{55}{2},\ +\infty\right),$$

αφού $f(4)=\dfrac{6}{4}-2\cdot 4^2+3=-\dfrac{55}{2}.$

23. 71 Είναι $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1-1}{x^2+1}=1-\dfrac{1}{x^2+1},\ x\in[0,\,10].$

Η f είναι συνεχής στο $[0,\,10]$ ως ρητή, καθώς και παραγωγίσιμη στο $(0,\,10)$ με:

$$f'(x)=\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)'=-\frac{-2x}{x^2+1}=\frac{2x}{x^2+1}>0 \text{ για κάθε } x\in(0,\,10).$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\,10]$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το:

$$f([0,\,10])=[f(0),\,f(10)]=\left[0,\ \frac{100}{101}\right].$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\,10]$, θα είναι 1 – 1, άρα αντιστρέψιμη και έχουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=1-\frac{1}{x^2+1}\Leftrightarrow 1-y=\frac{1}{x^2+1}\Leftrightarrow x^2+1=\frac{1}{1-y}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{1-y}-1\Leftrightarrow x^2=\frac{y}{1+y}\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{\frac{y}{1+y}} \text{ ή } f^{-1}(y)=\sqrt{\frac{y}{1+y}}.$$

Άρα $f^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1+x}},\ x\in\left[0,\ \dfrac{100}{101}\right].$

Παρατήρηση

Η $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι παραγωγίσιμη και στο $[0,\,10]$, αντί του $(0,\,10)$ που αναφέραμε στη λύση. Ωστόσο, για τη χρήση του θεωρήματος για το κριτήριο της πρώτης παραγώγου αρκούμαστε στο $(0,\,10)$.

23. 72 **α.** Ισχύει $f(\eta\mu x)=\sigma\upsilon\nu^2 x+x-1,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ (1).$

Παραγωγίζοντας την (1) κατά μέλη βρίσκουμε:

$$f'(\eta\mu x)\cdot\sigma\upsilon\nu x=-2\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x+1,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ (2).$$

Από την (1) για x = 0 προκύπτει ότι $f(0)=0$ και από τη (2) για x = 0 προκύπτει ότι $f'(0)=1.$ Άρα, η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $A(0,f(0))$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon:\ y-f(0)=f'(0)(x-0)\ \text{ή}\ \varepsilon:\ y-0=1\cdot(x-0)\ \text{ή}\ \varepsilon:\ y=x.$$

β. Η εφαπτομένη (η) της C_f στο σημείο της $M(\xi,f(\xi))$ έχει εξίσωση:

$$\eta:\ y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi).$$

Η (η) διέρχεται από το $N\left(0,\frac{1}{5}\right)$, αν ισχύει:

$$\frac{1}{5}-f(\xi)=f'(\xi)(0-\xi)\Leftrightarrow\xi\cdot f'(\xi)-f(\xi)+\frac{1}{5}=0.$$

Άρα, για να ισχύει το ζητούμενο, αρκεί ισοδύναμα να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $\xi\cdot f'(\xi)-f(\xi)+\frac{1}{5}=0.$

Από τις (1) και (2) για $x=\frac{\pi}{4}$ έχουμε:

- $f\left(\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-1=\frac{\pi-2}{4}\Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi-2}{4},$
- $f'\left(\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{4}+1\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0\Rightarrow f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x\cdot f'(x)-f(x)+\frac{1}{5},\ x\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$

Η g είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και έχουμε:

- $g(0)=0\cdot f'(0)-f(0)+\frac{1}{5}\overset{(\alpha)}{=}0\cdot1-0+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}>0$ και
- $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot0-\frac{\pi-2}{4}+\frac{-5\pi+14}{5}<0,$

  αφού $\pi>3\Rightarrow-5\pi<-15\Rightarrow-5\pi+14<-1<0.$

Οπότε ισχύει $g(0)\cdot g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<0$. Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει

$\xi\in\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi)=0\Leftrightarrow \xi\cdot f'(\xi)-f(\xi)+\frac{1}{5}=0$.

Άρα, ισχύει και το ζητούμενο.

23. 73 α. Η $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ είναι παραγωγίσιμη στο D με:

$$f'(x)=\frac{\frac{\ln x}{\ln(x+1)}-\frac{\ln(x+1)}{\ln x}}{\ln^2 x}=\frac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}.$$

- Για $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)=\frac{1}{(x+1)\ln x}-\frac{\ln(x+1)}{x\ln^2 x}$ και έχουμε:
  - $\ln x<0$, οπότε $\frac{1}{(x+1)\ln x}<0$,
  - $x+1>1\Rightarrow \ln(x+1)>0$, οπότε $\frac{\ln(x+1)}{x\ln^2 x}>0\Rightarrow -\frac{\ln(x+1)}{x\ln^2 x}<0$.

  Συνεπώς $f'(x)<0,\ x\in(0,1)$. Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$.
- Για $x>1$ είναι $f'(x)=\frac{g(x)-g(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}$ όπου $g(x)=x\ln x,\ x>1$ με

  $g'(x)=\ln x+1>0$ για $x>1$.

  Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$, οπότε:

  $$x<x+1\Rightarrow g(x)<g(x+1)\Rightarrow g(x)-g(x+1)<0.$$

  Συνεπώς $f'(x)<0,\ x>1$. Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

Συμπεραίνουμε τελικά ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1),\ (1,+\infty)$.

β. Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0. Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{\ln x}=\lim_{x\to0^+}\left[\ln(x+1)\cdot\frac{1}{\ln x}\right]\overset{\left(0\cdot\frac{1}{-\infty}\right)}{=\!=}0\cdot0=0.$$

Άρα, η x = 0 δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 1. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \overset{\left(\frac{\ln 2}{0^-}\right)}{=\!=} -\infty.$$

Άρα, η x = 1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Αναζητούμε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \underset{\text{D.L.H}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Άρα, η y = 1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

γ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) > 1$ για $x > 1$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$, άρα έχει σε αυτό σύνολο τιμών το:

$$f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x\to +\infty} f(x),\ \lim_{x\to 1^+} f(x)\right) = (1, +\infty),$$

αφού $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \overset{\left(\frac{\ln 2}{0^+}\right)}{=} +\infty$ και $\lim_{x\to +\infty} f(x) \overset{(\beta)}{=} 1$. Άρα $f(x) > 1$ για $x > 1$.

23. 74 α. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\ln(x+1) - \frac{1}{x} - \ln x < 0,\ x > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln(x+1) - \frac{1}{x} - \ln x < 0,\ x > 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με:

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1-x}{x^2} = \frac{x^2 + (1-x)(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0$$

για x > 0. Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το $g((0, +\infty)) = \left(\lim_{x\to 0^+} g(x),\ \lim_{x\to +\infty} g(x)\right)$. Έχουμε:

- $\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right] = 0 - 0 = 0,$
- $L = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[\ln(x+1) - \frac{1}{x} - \ln x\right] = \lim_{x\to 0^+} \left[\ln(x+1) - \frac{1}{x}\cdot(1 + x\ln x)\right].$

Είναι $\lim_{x\to 0^+} (x\ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0,$ οπότε βρίσκουμε

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}\cdot(1+x\ln x)\right]\overset{(+\infty)(1+0)}{=\!=}+\infty.\ \text{Συνεπώς } L=\lim_{x\to 0^+} g(x)\overset{0-(+\infty)}{=\!=}-\infty.$$

Τελικά το σύνολο τιμών της g είναι το $g((0,\ +\infty))=(-\infty,\ 0)$.

Άρα $g(x)<0,\ x>0$ ή $\ln(x+1)<\frac{1}{x}+\ln x<0,\ x>0$.

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(x+1)+\frac{1}{x+1}-\ln x-\frac{x+1}{x}= \\ &= \ln(x+1)-\ln x+\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x}\overset{(\alpha)}{<}\frac{1}{x}+\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x}= \\ &= \frac{x}{x+1}-1=\frac{-1}{x+1}<0 \text{ για } x>0. \end{aligned}$$

Άρα $f'(x)<0,\ x>0$, συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\ +\infty)$.

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\underset{u\to 1}{\overset{1+\frac{1}{x}=u}{=\!=}}\lim_{u\to 1}\frac{\ln u}{u-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{u\to 1}\frac{\frac{1}{u}}{1}=1.$$

δ. Για $x>0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} x^{x+1}=(x+1)^x &\Leftrightarrow \ln x^{x+1}=\ln(x+1)^x \Leftrightarrow (x+1)\ln x-x\ln(x+1)=0\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x)=0. \end{aligned}$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,\ +\infty)$, άρα έχει σύνολο τιμών:

$$f((0,\ +\infty))=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\ \lim_{x\to 0^+}f(x)\right)=(-\infty,\ +\infty)=\mathbb{R},$$

αφού:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[x\ln(x+1)-(x+1)\ln x\right]\overset{0-1\cdot(-\infty)}{=\!=}+\infty \text{ και}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left[x\ln(x+1)-x\ln x-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\ln x\right]= \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\ln x\right]\overset{(1-\infty)}{=}-\infty. \end{aligned}$$

Επειδή $0\in f((0,\ +\infty))=\mathbb{R}$, υπάρχει μοναδικό $\alpha>0$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\alpha)=0\Leftrightarrow \alpha^{\alpha+1}=(\alpha+1)^{\alpha}.$$

16ο

Κριτηριο Αξιολογησης

Θέμα A

Α1. Θεωρία.

Α2. **α.** Ψ

β. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Ωστόσο, $f'(x)\geq 0,\ x\in\mathbb{R}$ με $f'(0)=0$.

Α3. **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό.

Θέμα B

Β1. Οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι:

ταχύτητα $\upsilon(t)=(1+t)(1-t)e^{-t}$ σε m/s και $t\geq 0$,

επιτάχυνση $\alpha(t)=e^{-t}(t^2-2t-1)$ σε m/s^2 και $t\geq 0$.

Β2. Η ταχύτητα μηδενίζεται τη χρονική στιγμή $t=1$ s.

Εκείνη τη χρονική στιγμή η επιτάχυνση είναι $\alpha(1)=-2e^{-1}$ m/s^2.

Β3. Το κινητό κινείται προς τη θετική φορά για $0\leq t<1$ και προς την αρνητική φορά για $t>1$.

Β4. Το ζητούμενο διάστημα είναι:

$$S=|S(1)-S(0)|+|S(2)-S(1)|=\frac{-e^2+8e-9}{e^2}\ \text{m}.$$

Θέμα Γ

Γ1. Η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Είναι $h(x)>0\Leftrightarrow x<3$ και $h(x)<0\Leftrightarrow x>3$.

Γ3. Αποδεικνύουμε ότι για $x<3$ και για $x>3$ είναι $f'(x)<0$.

Γ4. Βρίσκουμε $x=0$.

Θέμα Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.

Δ2. Από το Δ1 έχουμε $f(x) \leq f(2),\ x \geq 0$.

Δ3. Ο συντελεστής διεύθυνσης αυξάνεται, όταν $x \in \left[0, 2-\sqrt{2}\right]$ ή $x \in \left[2+\sqrt{2}, +\infty\right)$, ενώ μειώνεται, όταν $x \in \left[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right]$.

Δ4. **α.** $-\infty$

β. $x = 2$.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο
ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΛΥΣΕΙΣ	Επαναληπτικών θεμάτων εξετάσεων
	Επαναληπτικών κριτηρίων αξιολόγησης

24η Ενότητα	51 Επαναληπτικά θέματα εξετάσεων
	1ο Επαναληπτικό Κριτήριο Αξιολόγησης
	2ο Επαναληπτικό Κριτήριο Αξιολόγησης
	3ο Επαναληπτικό Κριτήριο Αξιολόγησης

24η Ενότητα

51 Επαναληπτικά θέματα εξετάσεων

24. 1 **α.** Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο 0, οπότε ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, (2).

Από την (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f^2(x) \le \lim_{x\to 0}\left(2xf(x) - \eta\mu^2 x\right) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f^2(0) \le 0 \Rightarrow f(0) = 0,$$

διότι $f^2(0) \ge 0$.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x-1)f(x) + 4\ln(x+1) - 2$.

Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών με:

- $g(0) = -f(0) + 4\ln 1 - 2 \overset{(\alpha)}{=} -2 < 0$ και
- $g(1) = 4\ln 2 - 2 = \ln\dfrac{2^4}{e^2} > 0$, διότι $\dfrac{2^4}{e^2} > 1 \Leftrightarrow 4^2 > e^2$, αληθής.

Οπότε ισχύει $g(0)\cdot g(1) < 0$. Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $g(\gamma) = 0 \Leftrightarrow (\gamma - 1)f(\gamma) + 4\ln(\gamma + 1) = 2$.

γ. Για $x \ne 0$ είναι $x^2 > 0$, οπότε η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{f^2(x)}{x^2} + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} \le \frac{2xf(x)}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 - 2\frac{f(x)}{x} + 1 \le 1 - \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2.$$

Άρα $0 \le \left(\dfrac{f(x)}{x} - 1\right)^2 \le 1 - \left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 - \left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right) = 1 - 1^2 = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1.$$

δ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \Leftrightarrow f'(0) = 1$. Η εφαπτομένη της C_f στο $O(0, f(0))$ έχει εξίσωση ε: $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ ή ε: $y = x$.

24. 2 **α.** Η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$, άρα:

$$g([1,\ 2]) = [g(2),\ g(1)] \Leftrightarrow [2,\ 7] = [g(2),\ g(1)].$$

Οπότε $g(2) = 2$ και $g(1) = 7$.

Για $x > 1$, κοντά στο 1, θέτουμε $h(x) = \dfrac{f(x) - 2}{x - 1} \Leftrightarrow (x-1)\cdot h(x) + 2 = f(x)$ με $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = 2021$. Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left[(x-1)\cdot h(x) + 2\right] \overset{f:\text{συνεχής}}{\Rightarrow} f(1) = 0\cdot 2021 + 2 \Rightarrow f(1) = 2.$$

Επιπλέον, για κάθε $x \in [1,\ 2]$ έχουμε:

$$\left|(x-2)f(x) - \eta\mu(12x - 24)\right| \le (x-2)^{2021} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(x-2)^{2021} \le (x-2)f(x) - \eta\mu(12x-24) \le (x-2)^{2021} \underset{x\neq 2}{\overset{x-2<0}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu\left[12(x-2)\right] - (x-2)^{2021}}{x-2} \ge f(x) \ge \frac{\eta\mu\left[12(x-2)\right] + (x-2)^{2021}}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu\left[12(x-2)\right]}{x-2} - (x-2)^{2020} \ge f(x) \ge \frac{\eta\mu\left[12(x-2)\right]}{x-2} + (x-2)^{2020},\ \ (1).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\eta\mu\left[12(x-2)\right]}{x-2} - (x-2)^{2020}\right) = 12 - 0 = 12$, αφού:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu\left[12(x-2)\right]}{x-2} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{\eta\mu\left[12(x-2)\right]}{12(x-2)}\cdot 12\right) \underset{u\to 0}{\overset{12\cdot(x-2)=u}{=\!=}} \lim_{u\to 0}\left(\frac{\eta\mu u}{u}\cdot 12\right) = 1\cdot 12 = 12.$$

Ομοίως, βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\eta\mu\left[12(x-2)\right]}{x-2} + (x-2)^{2020}\right) = 12.$

Από την (1) και το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 12$ και επειδή η f είναι συνεχής, θα είναι $f(2) = 12$.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) + x^2 + 5 - g(x) - 2x$. Η φ είναι συνεχής στο $[1,\ 2]$ ως πράξεις συνεχών. Έχουμε:

- $\varphi(1) = f(1) + 1 + 5 - g(1) - 2 \overset{(\alpha)}{=} -1$ και
- $\varphi(2) = f(2) + 4 + 5 - g(2) - 4 \overset{(\alpha)}{=} 15.$

Οπότε ισχύει $\varphi(1)\cdot\varphi(2) = -15 < 0$. Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,\ 2)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0^2 + 5 = g(x_0) + 2x_0$.

Η συνάρτηση φ γράφεται στη μορφή $\varphi(x)=f(x)-g(x)+(x-1)^2+4,\ x\in[1,2]$ και έστω $x_1, x_2\in[1,2]$ με:

$$1\le x_1<x_2\le 2\Rightarrow\begin{cases}f(x_1)<f(x_2)\\ g(x_1)>g(x_2)\\ 0\le x_1-1\le x_2-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x_1)<f(x_2)\\ -g(x_1)<-g(x_2)\\ (x_1-1)^2\le(x_2-1)^2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1)-g(x_1)+(x_1-1)^2<f(x_2)-g(x_2)+(x_2-1)^2\overset{+4}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\varphi(x_1)<\varphi(x_2).$$

Άρα, η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$, οπότε είναι και 1 – 1. Συνεπώς, το x_0 είναι μοναδικό.

24. 3 **α.** Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στα σημεία 1 και 2, οπότε ισχύουν:

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1),\ (1)\quad\text{και}\quad\lim_{x\to2}f(x)=f(2),\ (2).$$

Για x κοντά στο 2 θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)+1}{x^2-4}\Leftrightarrow f(x)=(x^2-4)g(x)-1$

με $\lim\limits_{x\to2}g(x)=2$. Τότε έχουμε $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\left[(x^2-4)g(x)-1\right]\overset{(1)}{\Rightarrow}f(1)=-1.$

Επιπλέον, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$2\eta\mu(x-1)\le(x-1)\cdot f(x)\le x^2-1\Rightarrow\begin{cases}2\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\le f(x)\le x+1,\ (3)\\[2mm] 2\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\ge f(x)\ge x+1,\ (4)\end{cases}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$ και $\lim\limits_{x\to1}2\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\underset{u\to0}{\overset{(x-1=u)}{=\!=}}\lim\limits_{x\to1}2\dfrac{\eta\mu u}{u}=2\cdot1=2.$

Από το κριτήριο παρεμβολής και την (3) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2.$

Από το κριτήριο παρεμβολής και την (4) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2.$

Άρα $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2\overset{(2)}{\Leftrightarrow}f(2)=2.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=(\eta\mu\alpha-\alpha)(f(x)+1)+(1-e^{\alpha})(f(x)-2).$

Η h είναι συνεχής στο $[1,2]$, αφού η f είναι συνεχής. Έχουμε:

- $h(1)=-3(1-e^{\alpha})>0$, διότι $\alpha>0\Leftrightarrow e^{\alpha}>e^0\Leftrightarrow1-e^{\alpha}<0$ και
- $h(2)=3(\eta\mu\alpha-\alpha)<0$, διότι για $\alpha>0$ είναι $\eta\mu\alpha<\alpha\Leftrightarrow\eta\mu\alpha-\alpha<0.$

Οπότε ισχύει φ $h(1)\cdot h(2)<0$. Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,\,2)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x_0)+1}{1-e^{\alpha}}+\dfrac{f(x_0)-2}{\eta\mu\alpha-\alpha}=0.$

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+1}{x^2-4}=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)+1}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}\right)=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(1)}{x-2}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=2 \Leftrightarrow f'(2)\cdot\frac{1}{4}=2 \Leftrightarrow f'(2)=8\cdot$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(2,\,f(2))$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon:\ y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y=8x-14.$$

Η (ε) τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(0,\,-14)$ και $B\left(\dfrac{7}{4},\,0\right)$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=(AOB)=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot|-14|\cdot\frac{7}{4}=\frac{49}{4}\ \text{τ. μ.}$$

24. 4 **α.** Για $x\in D_f=A=(0,\,+\infty)$ είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln^2 x-4\ln x-\dfrac{9}{8}=0,\ (1).$

Θέτουμε $\ln x=t\in\mathbb{R}$ και η (1) γίνεται:

$$2t^2-4t-\frac{9}{8}=0 \Rightarrow \left\{t=-\frac{1}{4}\ \text{ή}\ t=\frac{9}{4}\right\}.$$

- Αν $t=-\dfrac{1}{4}$, τότε έχουμε $\ln x=-\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$.
- Αν $t=\dfrac{9}{4}$, τότε έχουμε $\ln x=\dfrac{9}{4} \Leftrightarrow x=e^{\frac{9}{4}}=e^2\cdot\sqrt[4]{e}$.

Άρα, η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $M\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}},\,0\right)$, $N\left(e^2\cdot\sqrt[4]{e},\,0\right)$, ενώ δεν τέμνει τον άξονα $y'y$, αφού $0\notin D_f$.

β. Έχουμε:

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2\ln^2 x-4\ln x-\frac{9}{8}\right)\overset{(+\infty)-(-\infty)}{=\!=}+\infty$, αφού $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

  και

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\ln^2 x-4\ln x-\frac{9}{8}\right)\underset{u\to+\infty}{\overset{\ln x=u}{=\!=}}\lim_{x\to+\infty}\left(2u^2-4u-\frac{9}{8}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2u^2\right)=+\infty.$

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A με $f'(x)=4\ln x\cdot\frac{1}{x}-4\cdot\frac{1}{x}=\frac{4}{x}\cdot(\ln x-1)$.

- Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{4}{x}\cdot(\ln x-1)\right]\overset{(+\infty)\cdot(-\infty)}{=\!=}-\infty,$$

αφού $\lim_{x\to0^+}\frac{4}{x}=+\infty$ και $\lim_{x\to0^+}(\ln x-1)=-\infty$.

Άρα, η ε_1: $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f'}$.

- Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4(\ln x-1)}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{4\frac{1}{x}}{1}=0.$$

Άρα, η ε_2: $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_{f'}$ στο $+\infty$.

δ. Για $x>e$ έχουμε:

$$x>e\Leftrightarrow\ln x>1\Leftrightarrow\ln x-1>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\frac{4}{x}(\ln x-1)>0\Leftrightarrow f'(x)>0$$

και εφόσον η f είναι συνεχής στο $[e,+\infty)$, θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$.

Επομένως, το σύνολο τιμών της f στο $[e,+\infty)$ είναι το:

$$f([e,+\infty))=\left[f(e),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)\overset{(\beta)}{=}\left[-\frac{25}{8},+\infty\right).$$

24. 5 **α.** Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο A ως ρητή συνάρτηση και ο τύπος της γράφεται:

$$f(x)=\frac{2x+6-6-1}{x+3}=\frac{2(x+3)-7}{x+3}=2-\frac{7}{x+3}.$$

Είναι $f'(x)=\frac{7}{(x+3)^2}>0$ για κάθε $x\in A$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο A.

Συνεπώς, η f είναι 1 – 1, άρα αντιστρέφεται. Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f:

$$f(A)=\left(\lim_{x\to-2}f(x),f(4)\right]=(-5,1],$$

αφού $f(4)=2-\frac{7}{4+3}=1$ και $\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\left(2-\frac{7}{x+3}\right)=2-\frac{7}{-2+3}=-5$.

Για τον τύπο της f^{-1} έχουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow2-\frac{7}{x+3}=y\Leftrightarrow2-y=\frac{7}{x+3}\Leftrightarrow\frac{7}{2-y}-3=x.$$

Άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{7}{2-x}-3,\ x\in f(A)$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι η f είναι 1 – 1 θεωρώντας $x_1,\ x_2\in(-2,\ 4]$ με:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\ldots\Rightarrow x_1=x_2$$

και να προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών της από τη λύση της $f(x)=y$ ως προς x.

β. Η f^{-1} έχει σύνολο τιμών το A, οπότε για κάθε $x\in f(A)$ είναι $-2<f^{-1}(x)\le 4,\ (1)$.

Η ζητούμενη γράφεται ισοδύναμα:

$$6\cdot f^{-1}(x_1)=2\cdot\frac{7}{2-\alpha}+\frac{7}{2-\beta}+3\cdot\frac{7}{2-\gamma}-6-3-9\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\cdot f^{-1}(x_1)=2\cdot\left(\frac{7}{2-\alpha}-3\right)+\left(\frac{7}{2-\beta}-3\right)+3\cdot\left(\frac{7}{2-\gamma}-3\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6f^{-1}(x_0)=2f^{-1}(\alpha)+f^{-1}(\beta)+3f^{-1}(\gamma).$$

Η (1) για x = α, x = β, x = γ γίνεται διαδοχικά:

$$-2<f^{-1}(\alpha)<4\Leftrightarrow -4<2f^{-1}(\alpha)<8,$$

$$-2<f^{-1}(\beta)<4,$$

$$-2<f^{-1}(\gamma)<4\Leftrightarrow -6<3f^{-1}(\gamma)<12.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και βρίσκουμε:

$$-12<2f^{-1}(\alpha)+f^{-1}(\beta)+3f^{-1}(\gamma)<24\Leftrightarrow -2<\frac{2f^{-1}(\alpha)+f^{-1}(\beta)+3f^{-1}(\gamma)}{6}<4.$$

Άρα, υπάρχει $x_1\in(-5,1)$ τέτοιο, ώστε $f^{-1}(x_1)=\dfrac{2f^{-1}(\alpha)+f^{-1}(\beta)+3f^{-1}(\gamma)}{6}$.

Θα αποδείξουμε ότι η αντίστροφη είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.

Έστω ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.

Τότε υπάρχουν $x_1,\ x_2\in f(A)$ τέτοια, ώστε:

$$x_1<x_2\Rightarrow f^{-1}(x_1)\ge f^{-1}(x_2)\overset{f\uparrow A}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(x_1)\right)\ge f\left(f^{-1}(x_2)\right)\Rightarrow x_1\ge x_2$$

που είναι άτοπο. Άρα, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$, συνεπώς είναι και 1 – 1, οπότε το x_1 είναι μοναδικό.

γ. Η ευθεία που ορίζουν τα A, B έχει εξίσωση:

$$\varepsilon:\ y-f(4)=\frac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)}(x-4)\ \text{ή}\ \varepsilon:\ y=x-3$$

όπου $f(4)=1$ και $f(-2)=-5$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x)\geq x-3$ για κάθε $x\in[-2,\,4]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x+3\Leftrightarrow g(x)=5-\dfrac{7}{x+3}-x$ η οποία είναι συνεχής στο $[-2,\,4]$ ως παραγωγίσιμη με:

$$g'(x)=\frac{7}{(x+3)^2}-1=\frac{-\left(x^2+6x+2\right)}{(x+3)^2}.$$

Έχουμε $g'(x)=0\Leftrightarrow x^2+6x+2=0\Leftrightarrow x=-3\pm\sqrt{7}$ και σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα μονοτονίας της g.

x	$-3-\sqrt{7}$		-2		$-3+\sqrt{7}$		4	
$g'(x)$	0			$+$	0	$-$		
g				$\nearrow$		$\searrow$		

Άρα:

- για $-2\leq x<-3+\sqrt{7}\Rightarrow g(-2)\leq g(x)\Rightarrow 0\leq g(x)$ και
- για $-3+\sqrt{7}<x\leq 4\Rightarrow g(x)\geq g(4)\Rightarrow g(x)\geq 0$.

Συνεπώς, για κάθε $x\in[-2,\,4]$ είναι $g(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq x-3$.

24. 6 α. Α΄ τρόπος

Έστω ότι υπάρχουν $x_1,\,x_2\in A$ τέτοια, ώστε $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$. Τότε έχουμε:

$$\begin{cases} e^{2f(x_1)}\geq e^{2f(x_2)} \\ e^{f(x_1)+1}\geq e^{f(x_2)+1} \\ f^3(x_1)\geq f^3(x_2) \end{cases} \Rightarrow e^{2f(x_1)}+e^{f(x_1)+1}+f^3(x_1)\geq e^{2f(x_2)}+e^{f(x_2)+1}+f^3(x_2)\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow e^{x_1}-1\geq e^{x_2}-1\Rightarrow x_1\geq x_2$$

που είναι άτοπο.

Άρα, για κάθε $x_1,\,x_2\in A$ είναι $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο A.

Β΄ τρόπος

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $h(x)=e^{2x}+e^{x+1}+x^3,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ως βασική συνάρτηση. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=e^{2x}\cdot 2+e^{x+1}+3x^2>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η (1) γράφεται ισοδύναμα $h(f(x))=g(x)$ για κάθε $x\in A$, (2).

Άρα, η $h \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο Α. Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$.

Τότε έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow h\left(f\left(x_1\right)\right) < h\left(f\left(x_2\right)\right) \overset{h:\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right).$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α.

β. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α, είναι και 1 – 1, οπότε ορίζεται η f^{-1} στο $f(A) = [0, +\infty)$. Θέτουμε στη (2) όπου x το $f^{-1}(x)$ και έχουμε:

$$h\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right] = g\left(f^{-1}(x)\right) \Rightarrow h(x) = e^{f^{-1}(x)} - 1 \Rightarrow h(x) + 1 = e^{f^{-1}(x)}.$$

Όμως για $x \geq 0$ είναι $h(x) + 1 > 0,$ άρα:

$$f^{-1}(x) = \ln\left(h(x) + 1\right) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \ln\left(e^{2x} + e^{x+1} + x^3 + 1\right).$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Θέτουμε στην αρχική όπου $f(x)$ το y και όπου x το $f^{-1}(y)$.

γ. Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(A)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων με:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{2e^{2x} + e^{x+1} + 3x^2}{e^{2x} + e^{x+1} + x^3 + 1} > 0 \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Άρα, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο Α.

Επιπλέον, ισχύει $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R},$ οπότε η ανίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$f^{-1}\left(e^x\right) < \ln 2 + \ln\left(e^2 + 1\right) \Leftrightarrow f^{-1}\left(e^x\right) < \ln\left(2\left(e^2 + 1\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}\left(e^x\right) < f^{-1}(1) \overset{f^{-1}:\uparrow}{\Leftrightarrow} e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

24. 7 **α.** Είναι $f(2) = 1$ και $f(3) = 0.$

Επίσης, ισχύει $2 < 3 \Leftrightarrow f(2) > f(3)$ και εφόσον η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, θα είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα, η f είναι 1 – 1 και συνεπώς αντιστρέφεται.

Έστω ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in f(\mathbb{R})$ τέτοια, ώστε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}\left(x_1\right) \leq f^{-1}\left(x_2\right) \overset{f:\downarrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}\left(x_1\right)\right) \geq f\left(f^{-1}\left(x_2\right)\right) \Rightarrow x_1 \geq x_2$$

που είναι άτοπο.

Άρα, η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

β. **i.** Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f\left[1+f^{-1}\left(e^x+x\right)\right]=0 \Leftrightarrow f\left[1+f^{-1}\left(e^x+x\right)\right]=f(3) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} 1+f^{-1}\left(e^x+x\right)=3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}\left(e^x+x\right)=2 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}\left(e^x+x\right)\right)=f(2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^x+x=1,\ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x+x,\ x\in\mathbb{R}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=e^x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα, η h είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς 1 – 1.

Από την (1) έχουμε ισοδύναμα:

$$h(x)=h(0)\Leftrightarrow x=0$$

που είναι μοναδική ρίζα.

ii. Για $x>0$ είναι $f^{-1}\left[f\left(\ln x+e^{x-1}+2\right)+1\right]=2$.

Επειδή $f(2)=1\Leftrightarrow 2=f^{-1}(1)$, η προηγούμενη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$f^{-1}\left[f\left(\ln x+e^{x-1}+2\right)+1\right]=f^{-1}(1) \overset{f^{-1}:1-1}{\Leftrightarrow} f\left(\ln x+e^{x-1}+2\right)+1=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f\left(\ln x+e^{x-1}+2\right)=0\Leftrightarrow f\left(\ln x+e^{x-1}+2\right)=f(3) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} \ln x+e^{x-1}+2=3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln x+e^{x-1}=1,\ (2).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln x+e^{x-1}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\dfrac{1}{x}+e^{x-1}>0$ για κάθε $x>0$.

Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και συνεπώς 1 – 1.

Από τη (2) έχουμε ισοδύναμα $g(x)=g(1) \overset{g:1-1}{\Leftrightarrow} x=1$ που είναι μοναδική ρίζα.

γ. i. Για $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f\left[f^{-1}\left(e^x+x-1\right)-1\right]\le 1 \Leftrightarrow f\left[f^{-1}\left(e^x+x-1\right)-1\right]\le f(2) \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}\left(e^x+x-1\right)-1\le 2\Leftrightarrow f^{-1}\left(e^x+x-1\right)\le 3 \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow f\left[f^{-1}\left(e^x+x-1\right)\right]\le f(3)\Leftrightarrow e^x+x-1\le 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^x+x\le 1 \overset{(\beta.i)}{\Leftrightarrow} h(x)\le h(0) \overset{h:\uparrow}{\Leftrightarrow} x\le 0.$$

ii. Για $x>0$ έχουμε:

$$f^{-1}\left[f\left(\ln x+e^{x-1}+1\right)-1\right]\le 3 \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}\left[f\left(\ln x+e^{x-1}+1\right)-1\right]\le f(3)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f\left(\ln x+e^{x-1}+1\right)-1\le 0\Leftrightarrow f\left(\ln x+e^{x-1}+1\right)\le 1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f\left(\ln x+e^{x-1}+1\right)\le f(2)\overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow}\ln x+e^{x-1}+1\le 2\overset{(\beta.ii)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow g(x)\le g(1)\underset{x>0}{\overset{g\uparrow}{=}}0<x\le 1.$$

24. 8 **α.** Για κάθε $x\in A_f$ είναι $f(x)\ge f(x_0)$, (1).

Επειδή η $g\circ f$ ορίζεται και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A_g, η (1) γράφεται ισοδύναμα $g(f(x))\le g(f(x_0))$. Άρα, η $g\circ f$ παρουσιάζει μέγιστο στο x_0.

β. Για κάθε $x\in A_f$ είναι $f(x)\le f(x_0)$, (2).

Επειδή η $g\circ f$ ορίζεται και η g είναι γνησίως αύξουσα στο A_g, η (2) γράφεται ισοδύναμα $g(f(x))\le g(f(x_0))$. Άρα, η $g\circ f$ παρουσιάζει μέγιστο στο x_0.

24. 9 **α.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^3(x)-x\cdot f^2(x)=x^2\left(f(x)+2x\right)\overset{x\ne 0}{\Rightarrow}\frac{f^3(x)}{x^3}-\frac{x\cdot f^2(x)}{x^3}=\frac{x^2\left(f(x)+2x\right)}{x^3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3-\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2-\frac{f(x)}{x}-2=0,\ (1).$$

Αν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\ell\in\mathbb{R}$, τότε από την (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3-\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2-\frac{f(x)}{x}-2\right]=\lim_{x\to 0}0\Rightarrow \ell^3-\ell^2-\ell-2=0$$

που με τη βοήθεια του σχήματος Horner γράφεται:

1	−1	−1	−2	2
	2	2	2	
1	1	1	0	

$$(\ell-2)\left(\ell^2+\ell+1\right)=0\Leftrightarrow \ell=2.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2.$

β. Α΄ τρόπος

Για x = 0 από την (1) βρίσκουμε $f^3(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$. Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2\Leftrightarrow f'(0)=2.$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, θα είναι και συνεχής στο 0.

Β΄ τρόπος

Έστω $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow x\cdot h(x)=f(x)$ για x κοντά στο 0 με $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=2.$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\big(x\cdot h(x)\big)=0\Rightarrow \lim_{x\to 0}f(x)=f(0).$$

Άρα, η f είναι συνεχής στο 0.

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\big(f(x)-\eta\mu x\big)-3x^2}{f^2(x)-3\sigma\upsilon\nu^2 x}\overset{x\neq 0}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\big(f(x)-\eta\mu x\big)-3x^2}{f^2(x)-3\big(1-\eta\mu^2 x\big)}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}-3}{\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2-\dfrac{4}{x^2}+\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{\eta\mu x}{x}-3\right)\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2-\dfrac{4}{x^2}+\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2}\right]=0,$$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}-3\right)=2-1-3=-2$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{x^2}\overset{x^2>0}{\underset{x\neq 0}{=}}+\infty,$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2-\dfrac{4}{x^2}+\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right)\overset{5-(+\infty)}{=}-\infty$ και συνεπώς

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2-\dfrac{4}{x^2}+\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2}=0.$$

δ. i. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\big(\eta\mu^2 x\big)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f\big(\eta\mu^2 x\big)}{\eta\mu^2 x}\cdot\dfrac{\eta\mu^2 x}{x}\right).$

Αν $\eta\mu^2 x=u,$ τότε $\lim\limits_{x\to 0}\big(\eta\mu^2 x\big)=0$ και συνεπώς $u\to 0.$ Τότε έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\big(\eta\mu^2 x\big)}{\eta\mu^2 x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}\overset{(\alpha)}{=}2$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=0\cdot 1=0.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\big(\eta\mu^2 x\big)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\big(\eta\mu^2 x\big)}{\eta\mu^2 x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x}{x}=2\cdot 0=0.$

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f\left(x^2-4\right)}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f\left(x^2-4\right)}{x^2-4}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right)$.

Αν $x^2-4=u$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-4\right)=2^2-4=0$ και συνεπώς $u\to 0$. Τότε έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f\left(x^2-4\right)}{x^2-4}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}\overset{(\alpha)}{=}2$ και
- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x}{2x-3}=\dfrac{4}{4-3}=4.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f\left(x^2-4\right)}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f\left(x^2-4\right)}{x^2-4}\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}=2\cdot 4=8.$

24. 10 α. Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu^2(x-2)\cdot f(x)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\eta\mu^2(x-2)}{(x-2)^2}\cdot\dfrac{(x-2)f(x)}{x+2}\right)$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu^2(x-2)}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\right)^2\underset{u\to 0}{\overset{x-2=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)^2=1^2=1.$
- Ισχύει $1<f(x)\le 4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, (1).

  Οπότε για $x\neq 2$ κοντά στο 2 είναι $x+2>0$ και η (1) γράφεται:

$$\frac{1}{x+2}<\frac{f(x)}{x+2}\le\frac{4}{x+2}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+2}<\dfrac{(x-2)f(x)}{x+2}\le\dfrac{4(x-2)}{x+2}, & \text{αν } x>2,\ (2)\\[2ex] \dfrac{x-2}{x+2}>\dfrac{(x-2)f(x)}{x+2}\ge\dfrac{4(x-2)}{x+2}, & \text{αν } x<2,\ (3)\end{cases}.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{0}{4}=0$ και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4(x-2)}{x+2}=4\cdot 0=0$, από το κριτήριο παρεμβολής και τη (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)f(x)}{x+2}=0$ και από το κριτήριο παρεμβολής και την (3) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)f(x)}{x+2}=0$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)f(x)}{x+2}=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu^2(x-2)\cdot f(x)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu^2(x-2)}{(x-2)^2}\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)f(x)}{x+2}=1\cdot 0=0.$

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\ln(x-1)\right] \overset{x-1=u>0}{\underset{u\to 0^+}{=\!=}} \lim\limits_{u\to 0^+}(\ln u) = -\infty,$ οπότε για x κοντά στο 1 θα είναι $\ln(x-1)<0$ και η (1) γράφεται:

$$\ln(x-1) > \ln(x-1)\cdot f(x) \le 4\cdot\ln(x-1).$$

Από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\ln(x-1)\cdot f(x)\right] = -\infty.$

γ. Από την (1) έχουμε $1 > \dfrac{1}{f(x)} \ge \dfrac{1}{4} \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} e^x > \dfrac{e^x}{f(x)} \ge \dfrac{e^x}{4}.$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{f(x)} = +\infty.$$

δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x)\cdot\ln(x-1)+1.$ Η h είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

- Από το (β) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)\cdot\ln(x-1)+1\right] = -\infty.$

  Άρα, υπάρχει $x_1 > 1$ κοντά στο 1 τέτοιο, ώστε $h(x_1) < 0.$
- Είναι $h(2) = 1.$

Οπότε ισχύει $h(x_1)\cdot h(2) < 0.$ Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, 2) \subseteq (1, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln(x_0-1) = \dfrac{-1}{f(x_0)}.$

24. 11 α. Για $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f\left(e^{x-2}+2x-7\right) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}\left(f\left(e^{x-2}+2x-7\right)\right) = f^{-1}(0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{x-2}+2x-7 = -2 \Leftrightarrow e^{x-2}+2x = 5,\ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{x-2}+2x,\ x\in\mathbb{R}.$ Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = e^{x-2}+2 > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}.$ Άρα, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R},$ οπότε είναι και 1 – 1. Τότε η (1) γράφεται ισοδύναμα $h(x) = h(2) \Leftrightarrow x = 2.$

β. Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\left(f^{-1}\right)'(x) = 3x^2+1 > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}.$

Άρα, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}.$ Επειδή η f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, θα έχει σύνολο τιμών το $f^{-1}(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)\right) = \mathbb{R}$ που είναι το πεδίο ορισμού της f, αφού:

$$\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+x-2\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3\right)=-\infty \text{ και ομοίως } \lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=+\infty.$$

Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2) \overset{f^{-1}\uparrow}{\Rightarrow} f^{-1}\left(f(x_1)\right)\geq f^{-1}\left(f(x_2)\right) \Rightarrow x_1\geq x_2, \text{ άτοπο.}$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο, ώστε:

$$f\left(e^{x_0}+\ln x_0\right)=0 \Leftrightarrow f^{-1}\left(f\left(e^{x_0}+\ln x_0\right)\right)=f^{-1}(0) \Leftrightarrow e^{x_0}+\ln x_0=-2.$$

Α΄ τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x+\ln x,\ x\in A=(0, +\infty)$. Η g είναι συνεχής στο A ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με $g'(x)=e^x+\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x\in A$. Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο A. Τότε το σύνολο τιμών της g είναι το $g(A)=\left(\lim\limits_{x\to0^+} g(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right)=\mathbb{R}$, αφού:

- $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x+\ln x\right)\overset{1+(-\infty)}{=\!=}-\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+\ln x\right)\overset{(+\infty)+(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

Επειδή $-2\in\mathbb{R}=g(A)$, υπάρχει $x_0\in A$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=-2 \Leftrightarrow e^{x_0}+\ln x_0=-2$ και το x_0 είναι μοναδικό, διότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο A.

Β΄ τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=e^x+\ln x+2,\ x\in A=(0, +\infty)$. Η φ είναι συνεχής στο A ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

- Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} \varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x+\ln x+2\right)\overset{3+(-\infty)}{=\!=}-\infty$,

  άρα υπάρχει $x_1>0$ κοντά στο 0 τέτοιο, ώστε $\varphi(x_1)<0$.
- Είναι $\varphi(1)=e+2$.

Οπότε ισχύει $\varphi(x_1)\cdot\varphi(1)<0$. Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(x_1, 1)\subseteq(0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}+\ln x_0=-2$.

24. 12 α. Θέτουμε $e^x-1=\omega \Leftrightarrow e^x=\omega+1 \Leftrightarrow x=\ln(\omega+1),\ \omega>-1$.

Τότε η δοθείσα γράφεται ισοδύναμα:

$$f(\omega)=\ln(\omega+1)+e^{3\ln(\omega+1)}-2=\ln(\omega+1)+e^{\ln(\omega+1)^3}-2=\ln(\omega+1)+(\omega+1)^3-2 \quad ή$$

$$f(x)=\ln(x+1)+(x+1)^3-2,\ x\in A=(-1,+\infty).$$

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α με $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+3(x+1)^2$ για κάθε $x\in A$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α, οπότε είναι 1 – 1 και συνεπώς αντιστρέφεται.

Η f^{-1} ορίζεται στο $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-1}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R}$, διότι:

- $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\left(\ln(x+1)+(x+1)^3-2\right)\overset{(-\infty)-2}{=\!=}-\infty,$

  αφού $\lim\limits_{x\to-1}\ln(x+1)\underset{u\to0^+}{\overset{x+1=u>0}{=\!=}}\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$ και

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1)+(x+1)^3-2\right)\overset{(+\infty)+(+\infty)-2}{=\!=}+\infty,$

  αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)\underset{u\to+\infty}{\overset{x+1=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)^3=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x^3=+\infty.$

Επιπλέον, θα αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έστω ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχουν $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$x_1<x_2\Rightarrow f^{-1}(x_1)\ge f^{-1}(x_2)\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f\left(f^{-1}(x_1)\right)\ge f\left(f^{-1}(x_2)\right)\Rightarrow x_1\ge x_2,\ \text{άτοπο.}$$

Άρα, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Είναι $f^{-1}(x)=0\Leftrightarrow x=f(0)\Leftrightarrow x=-1.$

- Για $x>-1\overset{f^{-1}\uparrow}{\Leftrightarrow}f^{-1}(x)>f^{-1}(-1)\Leftrightarrow f^{-1}(x)>0.$

- Για $x<-1\overset{f^{-1}\uparrow}{\Leftrightarrow}f^{-1}(x)<f^{-1}(-1)\Leftrightarrow f^{-1}(x)<0.$

δ. Για $x\in\mathbb{R}$ είναι $f^{-1}(x-1)-2=f^{-1}(e^3-1),\ (1).$

Αν $f^{-1}(e^3-1)=\alpha$, τότε έχουμε:

$$f^{-1}(e^3-1)=\alpha\Leftrightarrow e^3-1=f(\alpha)\Leftrightarrow f(e-1)=f(\alpha)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}e-1=\alpha.$$

Άρα, η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$f^{-1}(x-1)-2=e-1\Leftrightarrow f^{-1}(x-1)=e+1\Leftrightarrow x-1=f(e+1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=1+f(e+1).$$

Όπου $f(e+1)=\ln(e+2)+(e+2)^3-2.$

24. 13 α. Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $A=(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ +\infty)$, οπότε αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f στο $x_0=-2$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{3x-4}{x+2}=\lim_{x\to -2^-}\left[(3x-4)\cdot\frac{1}{x+2}\right]\overset{(-10)\cdot(-\infty)}{=}+\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{3x-4}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}\left[(3x-4)\cdot\frac{1}{x+2}\right]\overset{(-10)\cdot(+\infty)}{=}-\infty.$$

Άρα, η $x=-2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Αναζητούμε οριζόντια ασύμπτωτη της C_f σε $-\infty$ και $+\infty$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x}{x}=3.$

  Άρα, η $y=3$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x}{x}=3.$

  Άρα, η $y=3$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β. Για $x>-2$ είναι $f(x)<3 \Leftrightarrow \frac{3x-4}{x+2}<3 \overset{x+2>0}{\Leftrightarrow} 3x-4<3(x+2) \Leftrightarrow -4<6$ η οποία είναι αληθής.

Άρα, η C_f βρίσκεται κάτω από την $y=3$ για $x>-2$.

Για $x<-2$ είναι $f(x)>3 \Leftrightarrow \frac{3x-4}{x+2}>3 \overset{x+2<0}{\Leftrightarrow} 3x-4<3(x+2) \Leftrightarrow -4<6$ η οποία είναι αληθής.

Άρα, η C_f βρίσκεται πάνω από την $y=3$ για $x<-2$.

Παρατήρηση

Ελέγξαμε στο πρόχειρο, αν $f(x)>3$ για $x>-2$ και καταλήξαμε σε άτοπο, οπότε αποδείξαμε ότι $f(x)<3$ για $x>-2$. Ομοίως, εργαζόμαστε για $x<-2$.

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A με:

$$f'(x)=\left(\frac{3x-4}{x+2}\right)'=\frac{3\cdot(x+2)-(3x-4)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{10}{(x+2)^2}>0 \text{ για κάθε } x\in A.$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ -2)$ και στο $(-2,\ +\infty)$.

Το σύνολο τιμών της f στο $(-\infty,\ -2)$ είναι το:

$$\Delta_1=f\left((-\infty,\ -2)\right)=\left(\lim_{x\to -\infty} f(x),\ \lim_{x\to -2^-} f(x)\right)=(3,\ +\infty).$$

Το σύνολο τιμών της f στο $(-2,\ +\infty)$ είναι το:

$$\Delta_2 = f\left(\left(2, +\infty\right)\right) = \left(\lim_{x\to -2^+} f(x),\ \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = (-\infty, 3).$$

Είναι $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$, οπότε η $f(x) = y$ με $y \in \Delta_1 \cup \Delta_2$ έχει πάντα μοναδική λύση ως προς x. Άρα, η f είναι 1 – 1, οπότε αντιστρέφεται.

Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $f(A) = \Delta_1 \cup \Delta_2 = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$. Έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{3x-4}{x+2} = y \Leftrightarrow 3x - 4 = x\cdot y + 2y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3-y)x = 2y + 4 \Leftrightarrow x = \frac{2y+4}{3-y}.$$

Άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+4}{3-x}$, $x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

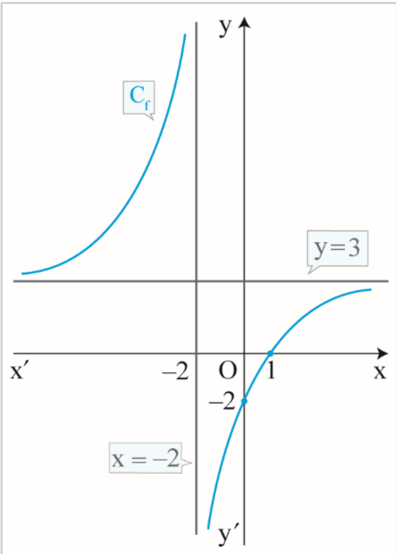
Παρατήρηση

Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{3x-4}{x+2} = \frac{3x+6-6-4}{x+2} = \frac{3(x+2)-10}{x+2} = 3 - \frac{10}{x+2},\quad x \neq -2.$$

Στη μορφή αυτή, η μονοτονία προσδιορίζεται και με τον ορισμό.

Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της f και των ασυμπτώτων της.



24. 14 α. Είναι $OB = 10 = R$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΛ με $\Lambda = 90^\circ$ έχουμε:

$$\text{OM}^2=\text{OΛ}^2+\text{MΛ}^2 \Rightarrow \text{OΛ}^2=10^2-x^2 \Rightarrow \text{OΛ}=\sqrt{100-x^2} \text{ με } 0\le x\le 10.$$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E=\text{KΛ}\cdot\text{MΛ}=2\cdot\text{OΛ}\cdot\text{MΛ}=2\cdot\sqrt{100-x^2}\cdot x.$

Άρα, η συνάρτηση που παρέχει το εμβαδόν του ΚΛΜΝ είναι η:

$$f(x)=2x\sqrt{100-x^2},\ 0\le x\le 10.$$

β. Το εμβαδόν αυξάνεται στα διαστήματα όπου η f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ μειώνεται στα διαστήματα όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,10)$ με:

$$f'(x)=2\sqrt{100-x^2}+2x\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=2\sqrt{100-x^2}-\frac{2x^2}{2\sqrt{100-x^2}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{100-x^2}^{\,2}-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}=\frac{200-4x^2}{\sqrt{100-x^2}}=\frac{4\left(50-x^2\right)}{\sqrt{100-x^2}}.$$

Έχουμε:

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{4\left(50-x^2\right)}{\sqrt{100-x^2}}>0 \Leftrightarrow 50-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<50 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x|<\sqrt{50} \Leftrightarrow -5\sqrt{2}<x<5\sqrt{2}.$$

Επειδή $0<x<10,$ είναι $f'(x)>0 \Leftrightarrow 0<x<5\sqrt{2}$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow 5\sqrt{2}<x<10.$

Άρα, το εμβαδόν αυξάνεται, αν $x\in\left(0,5\sqrt{2}\right)$ και μειώνεται, αν $x\in\left(5\sqrt{2},10\right).$

γ. Για $x>0$ είναι $f(x)>0$ και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sqrt{100-x^2}\right)=0.$

Επιπλέον, για $x>0$ έχουμε:

$$-1\le \eta\mu\frac{1}{x}\le 1 \Rightarrow -f(x)\le f(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\le f(x).$$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0.$

Επειδή $f(6)=96,$ το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\ell=\lim_{x\to 6}\left[\frac{f(x)-f(6)}{x-6}\cdot(x-6)\cdot\ln(x-6)\right].$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}=f'(6)$

- $\lim\limits_{x\to 6}\left((x-6)\cdot\ln(x-6)\right)\overset{x-6=u}{=\!=}\lim\limits_{u\to 0^+}(u\cdot\ln u)\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\ln u}{\frac{1}{u}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}$

$$= \lim_{u \to 0^+} \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = \lim_{u \to 0^+}(-u) = 0.$$

Άρα $\ell = \lim_{x \to 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} \cdot \lim_{x \to 6}\left[\cdot(x-6) \cdot \ln(x-6)\right] = f'(6) \cdot 0 = 0.$

24. 15 α. Για $x = y = 0$ η (1) γίνεται $f(0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0.$

Αντικαθιστώντας όπου y το $-x$ η (1) γίνεται $f(0) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι περιττή.

β. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) = -f(-x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) + f(-x_2) = 0, \ (2).$$

Για $x = x_1$ και $y = -x_2$ (1) γίνεται:

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1) + f(-x_2) = 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(x_1 - x_2) = 0.$$

Όμως το 0 είναι η μοναδική ρίζα της f. Επομένως $x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Άρα, η f είναι 1 – 1.

γ. Για κάθε $y_1, y_2 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ υπάρχουν αντίστοιχα μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow x_1 = f^{-1}(y_1) \text{ και } f(x_2) = y_2 \Leftrightarrow x_2 = f^{-1}(y_2).$$

Τότε έχουμε:

$$f(x_1) + f(x_2) = y_1 + y_2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x_1 + x_2) = y_1 + y_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = f^{-1}(y_1 + y_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2) = f^{-1}(y_1 + y_2)$$

που ισχύει για κάθε $y_1, y_2 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

δ. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(g(x)) = f(\eta\mu x) - f(x) \Leftrightarrow f(x) + f(g(x)) = f(\eta\mu x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x + g(x)) = f(\eta\mu x) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow x + g(x) = \eta\mu x \Leftrightarrow g(x) = \eta\mu x - x, \ x \in \mathbb{R}.$$

24. 16 α. Έστω $M(x, f(x))$, $x \geq 0$. Τότε είναι $\overrightarrow{OM} = (x, f(x))$ και $\overrightarrow{ON} = (x, f(x))$. Έχουμε:

$$\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot x + e^{-x} \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{-x} \cdot f(x) = -2x^2 \Leftrightarrow f(x) = -2x^2 e^{-x}, \ x \geq 0.$$

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με:

$$f'(x) = -4x \cdot e^x - 2x^2 \cdot e^x = -2x \cdot e^x (2 + x) < 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

και αφού είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα, η f είναι 1 – 1, οπότε αντιστρέφεται.

Επίσης, ισχύει $f(0)=0 \Leftrightarrow 0=f^{-1}(0)$.

Θα αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $f([0, +\infty))$ για το οποίο έχουμε:

$$f([0, +\infty)) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\, f(0)\right] = (-\infty, 0],$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x\cdot e^{x}\right) \overset{-(+\infty)\cdot(+\infty)}{=\!=} -\infty.$

Έστω ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(x_1) \le f^{-1}(x_2) \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(x_1)\right) \ge f\left(f^{-1}(x_2)\right) \Rightarrow x_1 \ge x_2, \text{ άτοπο.}$$

Άρα, η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$. Τότε έχουμε:

$$x<0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) > f^{-1}(0) \Leftrightarrow f^{-1}(x) > 0.$$

γ. Έστω $\alpha \in [0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f^{-1}(-2e)=\alpha \Leftrightarrow -2e = f(\alpha) \Leftrightarrow f(1) = f(\alpha) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} 1=\alpha.$

Άρα $f^{-1}(-2e)=1$. Η ζητούμενη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$f(1+1) = -2(x+1)^2\cdot e^{x+1} \Leftrightarrow f(2) = f(x+1) \overset{x+1>0}{\Leftrightarrow} 2 = x+1 \Leftrightarrow x=1.$$

24. 17 α. Θέτουμε $e^x+1=u \Leftrightarrow e^x = u-1$. Είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x+1\right)=2$, άρα $u\to2$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to0}\frac{f\left(e^x+1\right)-3e^x-1}{e^{2x}+2e^x-3} = \lim_{u\to2}\frac{f(u)-3(u-1)-1}{(u-1)^2+2(u-1)-3} =$$

$$= \lim_{u\to2}\frac{f(u)-3u+2}{u^2-4} = -2 \text{ ή } \lim_{x\to2}\frac{f(x)-3x+2}{x^2-4} = -2.$$

Για x κοντά στο 2 θεωρούμε:

$$\frac{f(x)-3x+2}{x^2-4} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)\left(x^2-4\right)+3x-2, \quad (1)$$

με $\lim\limits_{x\to2} g(x) = -2$. Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2}\left[g(x)\left(x^2-4\right)+3x-2\right] = -2\cdot0+6-2=4.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο 2, οπότε $\lim\limits_{x\to2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow f(2)=4$.

β. Θέτουμε $u=\dfrac{2x+7}{x+3}$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+7}{x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$, οπότε $u\to2$. Το u γράφεται:

$$u=\frac{2x+7}{x+3}=\frac{2x+6-6+7}{x+3}=\frac{2(x+3)+1}{x+3}=2+\frac{1}{x+3}\Leftrightarrow$$
$$u-2=\frac{1}{x+3}\Leftrightarrow\frac{1}{u-2}=x+3.$$

Για το ζητούμενο όριο έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\left[(x+3)\left(f\left(\frac{2x+7}{x+3}\right)-f(2)\right)\right]=\lim_{u\to 2}\frac{f(u)-f(2)}{u-2}\overset{(1)}{=}$$
$$=\lim_{u\to 2}\frac{g(u)(u^2-4)+3u-2-4}{u-2}=\lim_{u\to 2}\frac{g(u)(u-2)(u+2)+3(u-2)}{u-2}=$$
$$=\lim_{u\to 2}\left[g(u)\cdot(u-2)+3\right]=-2\cdot 4+3=-5.$$

γ. Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-5\Leftrightarrow f'(2)=-5.$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=2$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon:\ y-f(2)=f'(2)(x-2)\ \text{ ή }\ \varepsilon:\ y=-5x+14.$$

24. 18 α. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g των συναρτήσεων $f(x)=\ln(x+1),\ x\in A=(-1,+\infty)$ και $g(x)=\dfrac{-x}{x+1},\ x\in B=\mathbb{R}-\{-1\}$ έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x)=g(x)\overset{x>-1}{\Leftrightarrow}\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}=0,\ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1},\ x>-1$ που είναι παραγωγίσιμη με:

$$h'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}>0$$

για κάθε $x>-1.$ Άρα, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty),$ οπότε είναι 1 – 1.

Η (1) γράφεται ισοδύναμα $h(x)=h(0)\Leftrightarrow x=0.$

Άρα, το κοινό σημείο των C_f και C_g είναι το $O(0,0),$ αφού $f(0)=g(0)=0.$

β. Για $x>0$ έχουμε $x>0\overset{h\uparrow\Delta}{\Leftrightarrow}h(x)>h(0)\Leftrightarrow f(x)-g(x)>0\Leftrightarrow f(x)>g(x).$

Άρα, η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g για $x>0.$

γ. Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g στο $x_0=-1.$ Έχουμε:

$$\lim_{x\to -1^-} g(x) = \lim_{x\to -1^-}\left((-x)\cdot\frac{1}{x+1}\right) \overset{(+1)\cdot(-\infty)}{=\!=} -\infty \text{ και } \lim_{x\to -1^+} g(x) = \lim_{x\to -1^+}\left((-x)\cdot\frac{1}{x+1}\right) \overset{(+1)\cdot(+\infty)}{=\!=} +\infty.$$

Άρα, η $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g.

Αναζητούμε πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη της C_f σε $-\infty$ και $+\infty$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty}\frac{-x}{x+2} = \lim_{x\to -\infty}\frac{-x}{x} = -1. \text{ και } \lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{-x}{x+2} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-x}{x} = -1.$$

Άρα, η $y=-1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

δ. Η $f\circ g$ ορίζεται στο $D=\{x\in B/\, g(x)\in A\} = \left\{x\neq -1/\, \frac{-x}{x+1} > -1\right\}$.

Έχουμε $\frac{-x}{x+1} > -1 \Leftrightarrow \frac{-x}{x+1}+1>0 \Leftrightarrow \frac{-x+x+1}{x+1}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}>0 \Leftrightarrow x>-1$.

Άρα $D=(-1, +\infty)=A_f$. Επίσης, έχουμε:

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(g(x)+1) = \ln\left(\frac{-x}{x+1}+1\right) > 0 = \ln\frac{1}{x+1} = -\ln(x+1).$$

Άρα $(f\circ g)(x) = -f(x)$.

24. 19 **α.** Η συνάρτηση $f(x)=e^{x+1}+\ln(x-1)$, $x\in(1, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο A με $f'(x)=e^{x+1}+\frac{1}{x-1}>0$ για κάθε $x\in A$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο A, οπότε είναι 1 – 1 και συνεπώς αντιστρέφεται.

Η f^{-1} ορίζεται στο $f(A)=\left(\lim_{x\to 1^+} f(x),\ \lim_{x\to +\infty} f(x)\right)=\mathbb{R}$, αφού:

- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(e^{x+1}+\ln(x-1)\right) \overset{e^2+(-\infty)}{=\!=} -\infty$,

  όπου $\lim_{x\to 1^+}\ln(x-1) \underset{u\to 0^+}{\overset{x-1=u>0}{=\!=}} \lim_{u\to 0^+}(\ln u) = -\infty$ και

- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(e^{x+1}+\ln(x-1)\right) \overset{(+\infty)+(+\infty)}{=\!=} +\infty$

  όπου $\lim_{x\to +\infty} e^{x+1} = e\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ και $\lim_{x\to +\infty}\ln(x-1) \underset{u\to +\infty}{\overset{x-1=u}{=\!=}} \lim_{u\to +\infty}\ln u = +\infty$.

β. Θα αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)=\mathbb{R}$.

Έστω ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(x_1) \le f^{-1}(x_2) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(x_1)\right) \ge f\left(f^{-1}(x_2)\right) \Rightarrow x_1 \ge x_2, \text{ άτοπο.}$$

Άρα, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A) = \mathbb{R}$.

γ. Α΄ τρόπος

Εφόσον η f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα, θα έχει σύνολο τιμών το $f^{-1}(\mathbb{R}) = A = (1, +\infty)$. Είναι όμως $f^{-1}(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)\right)$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.

Β΄ τρόπος

Έστω $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$.

- Αν $x \to -\infty$, τότε $f(u) \to -\infty$ που συμβαίνει, όταν $u \to 1$ από το (α).

  Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x) = \lim\limits_{u\to1} u = 1$.

- Αν $x \to +\infty$, τότε $f(u) \to +\infty$ που συμβαίνει, όταν $u \to +\infty$ από το (α).

  Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = \lim\limits_{u\to+\infty} u = +\infty$.

δ. i. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\left(f^{-1}(x)\right)^2 + 3} - 2}{f^{-1}(x) - 1} \underset{u\to1}{\overset{f^{-1}(x)=u}{=\!=}} \lim_{u\to1} \frac{\sqrt{u^2+3} - 2}{u-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{u\to1} \frac{\frac{2u}{2\sqrt{u^2+3}}}{1} =$$

$$= \lim_{u\to1} \frac{u}{\sqrt{u^2+3}} = \frac{1}{2}.$$

ii. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu f^{-1}(x) + f^{-1}(x)}{\left(f^{-1}(x)\right)^2 + f^{-1}(x)} \underset{u\to+\infty}{\overset{f^{-1}(x)=u}{=\!=}} \lim_{u\to+\infty} \left(\frac{\eta\mu u + u}{u^2 + u} \cdot \frac{\frac{1}{u^2}}{\frac{1}{u^2}} \right) =$$

$$= \lim_{u\to1} \frac{\frac{1}{u^2} \cdot \eta\mu u + \frac{1}{u}}{1 + \frac{1}{u}} = 0,$$

αφού:

- $\lim\limits_{u\to1} \left(1 + \frac{1}{u}\right) = 1 + 0 = 1,$

- για $u>0$ έχουμε $\left|\frac{1}{u^2}\cdot ημu\right| = \frac{1}{u^2}|ημu| \le \frac{1}{u^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{u^2} \le \frac{1}{u^2}ημu \le \frac{1}{u^2}$ με

$\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{u^2}=0,$

$\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{u^2}\right)=0.$ Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$\lim\limits_{u\to 1}\left(\frac{1}{u^2}\cdot ημu\right)=0,$ άρα $\lim\limits_{u\to 1}\left(\frac{1}{u^2}\cdot ημu+\frac{1}{u}\right)=0.$

24. 20 α. Έστω $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1))=f(g(x_2)) \underset{1-1}{\overset{f\circ g}{\Rightarrow}} x_1=x_2.$

Άρα, η g είναι 1 – 1.

β. Για $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x)+x^3-x=f(x)+2x-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x+1=0,\ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x^3-3x+1,\ x\in\mathbb{R}.$

Η h είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $h(-2)=-1,\ h(-1)=3,$ $h(0)=1,\ h(1)=-1,\ h(2)=6.$

Οπότε έχουμε $h(-2)\cdot h(-1)=-3<0,\ h(1)\cdot h(0)=-1<0,\ h(2)\cdot h(1)=-6<0.$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει:

- τουλάχιστον ένα $x_1\in(-2,-1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_1)=0,$
- τουλάχιστον ένα $x_2\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_2)=0,$
- τουλάχιστον ένα $x_3\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $h(x_3)=0.$

Επειδή η $h(x)=0$ είναι πολυωνυμική εξίσωση τρίτου βαθμού και έχει παράγοντες τους $x-x_1,\ x-x_2,\ x-x_3,$ θα λαμβάνει τη μορφή $h(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ η οποία είναι τρίτου βαθμού. Άρα, τα $x_1,\ x_2,\ x_3$ είναι οι μοναδικές ρίζες της h.

24. 21 α. Είναι $A_f=(0,+\infty)$ και $A_g=(-\infty,1)\cup(1,+\infty).$

Η $f\circ g$ ορίζεται στο σύνολο $D=\left\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\right\}=\left\{x\ne 1 \,/\, \frac{x}{1-x}>0\right\}=(0,1),$

αφού $\frac{x}{1-x}>0 \Leftrightarrow x(1-x)>0 \Leftrightarrow x\in(0,1).$ Για τον τύπο της $f\circ g$ έχουμε:

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln g(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$. Άρα $h(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.

β. Για $\alpha\in\mathbb{R}$ έχουμε $x\left(1+e^{\alpha}\right)=e^{\alpha}\Leftrightarrow x+xe^{\alpha}=e^{\alpha}\Leftrightarrow x=e^{\alpha}(1-x)$, (1).

Αν $x=1$, τότε από την (1) προκύπτει ότι $1=0$, άτοπο. Άρα $x\neq 1$. Τότε είναι $\dfrac{x}{1-x}=e^{\alpha}$ και πρέπει $\dfrac{x}{1-x}>0\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}x\in(0,1)$, οπότε έχουμε $\ln\dfrac{x}{1-x}=\alpha\Leftrightarrow h(x)=\alpha$.

Η h είναι συνεχής στο D ως σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμη με:

$$h'(x)=\frac{1}{\frac{x}{1-x}}\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{x(1-x)}>0 \text{ για κάθε } x\in(0,1).$$

Άρα, η h είναι γνησίως αύξουσα στο D, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το:

$$h(D)=\left(\lim_{x\to 0^+}h(x),\ \lim_{x\to 1^-}h(x)\right)=\mathbb{R},$$

αφού:

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}h(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{x}{1-x}\right)\overset{\frac{x}{1-x}=u>0}{\underset{u\to 0^+}{==}}\lim_{u\to 0^+}(\ln u)=-\infty$ και
- $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}h(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\ln\frac{x}{1-x}\right)\overset{\frac{x}{1-x}=u}{\underset{u\to +\infty}{==}}\lim_{x\to 1^-}(\ln u)=+\infty.$

Επιπλέον, επειδή $\alpha\in\mathbb{R}$, η εξίσωση $h(x)=\alpha$ έχει μοναδική λύση στο $(0,1)$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

γ. Από το (β) προκύπτει ότι η h είναι 1 – 1, οπότε αντιστρέφεται και είναι $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$h(x)=y\Leftrightarrow\ln\frac{x}{1-x}=y\Leftrightarrow\frac{x}{1-x}=e^{y}\Leftrightarrow-\frac{1-x-1}{1-x}=e^{y}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-1+\frac{1}{1-x}=e^{y}\Leftrightarrow 1-x=\frac{1}{e^{y}+1}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{e^{y}+1}=x.$$

Άρα $h^{-1}(x)=1-\dfrac{1}{e^{x}+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

24. 22 α. Για κάθε $x\neq 0$ είναι $f^{2}(x)-\dfrac{e^{x}}{x^{2}}<0\Leftrightarrow 0\leq f^{2}(x)<\dfrac{e^{x}}{x^{2}}$.

Έχουμε $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}}{x^{2}}=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x}\cdot\frac{1}{x^{2}}\right)=0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f^{2}(x)=0.$

Για $x<0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}|f(x)| = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{|f(x)|^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{f^2(x)} = 0$.

Ισχύει $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Άρα, ο άξονας x′x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

β. i. Το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3\cdot ημ\frac{1}{x}}{x^2 f(x)-e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cdot ημ\frac{1}{x}}{f(x)-\frac{e^x}{x^2}}$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\cdot ημ\dfrac{1}{x}\right) \underset{u\to0}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=\!=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ημu}{u} = 1$ και $f(x)\in(-\infty,\,0)\cup(1,\,+\infty)$.

Για $x<0$ έχουμε:

- αν $f(x)<0$, τότε $f(x)<f^2(x)$ και
- αν $f(x)>1$, τότε $f(x)<f^2(x)$.

Άρα, σε κάθε περίπτωση είναι $f(x)<f^2(x)<\dfrac{e^x}{x^2} \Rightarrow f(x)-\dfrac{e^x}{x^2}<0$.

Εφόσον $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\dfrac{e^x}{x^2}\right)=0$, από το (α) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)-\frac{e^x}{x^2}} = -\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3\cdot ημ\frac{1}{x}}{x^2 f(x)-e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(x\cdot ημ\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{1}{f(x)-\frac{e^x}{x^2}}\right] = -\infty$.

ii. Αν $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$, τότε $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x = -\infty$ και $y\to-\infty$. Επομένως, έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(\ln x)+1}{ημx} = \lim_{y\to-\infty}\frac{f(y)+1}{ημe^x} = \lim_{y\to-\infty}\left(\frac{f(y)+1}{\frac{ημe^x}{e^x}}\cdot\frac{1}{e^x}\right) = +\infty,$$

αφού:

- $\lim\limits_{y\to-\infty}\dfrac{ημe^x}{e^x} \underset{u\to0}{\overset{e^x=u}{=\!=}} \lim\limits_{u\to0}\dfrac{ημu}{u} = 1$,
- $\lim\limits_{y\to-\infty}\left(f(y)+1\right) = 0+1 = 1$ και
- $\lim\limits_{y\to-\infty}\dfrac{1}{e^y} = \lim\limits_{y\to-\infty}e^{-y} \underset{u\to+\infty}{\overset{-y=u}{=\!=}} \lim\limits_{u\to+\infty}e^u = +\infty$.

24. 23 **α.** Για x κοντά στο 1 θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}\Leftrightarrow(x-1)\varphi(x)=f(x)$ με $\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)=\ell\in\mathbb{R}$. Έχουμε $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\big((x-1)\varphi(x)\big)=0\cdot\ell=0$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο 1, οπότε $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)\Rightarrow f(1)=0$.

β. Έχουμε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(3x-1)}{x}=\dfrac{f(2)}{1}\Rightarrow f(2)=1$. Η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και είναι $1<2\Rightarrow f(1)<f(2)$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον, έχουμε:

- για $x>1\Leftrightarrow f(x)>f(1)\Leftrightarrow f(x)>0$ και
- για $x<1\Leftrightarrow f(x)<f(1)\Leftrightarrow f(x)<0$.

γ. Η f είναι 1 – 1, άρα αντιστρέφεται και είναι $f(\mathbb{R})<\mathbb{R}$. Η f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Έχουμε $f(1)=0\Leftrightarrow 1=f^{-1}(0)$ και $f(2)=1\Leftrightarrow 2=f^{-1}(1)$. Επομένως:

$$\lim_{x\to0}f^{-1}\big(f^{-1}(x)\big)=f^{-1}\big(f^{-1}(0)\big)=f^{-1}(1)=2.$$

24. 24 **α.** Το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha^{x+2}-5^{x-1}}{5^x+\alpha^{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha^x\cdot\alpha^2-5^x\cdot\frac{1}{5}}{5^x+\alpha\cdot\alpha^x}$.

Αν $\alpha=5$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha^{x+2}-5^{x-1}}{5^x+\alpha^{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x\cdot25-5^x\cdot\frac{1}{5}}{5^x+5\cdot5^x}=\frac{25-\frac{1}{5}}{1+5}=\frac{62}{15}.$$

Αν $\alpha>5\Leftrightarrow\dfrac{5}{\alpha}<1$, τότε είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5}{\alpha}\right)^x=0$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha^x\cdot\left(\alpha^2-\left(\frac{5}{\alpha}\right)^x\cdot\frac{1}{5}\right)}{\alpha^x\cdot\left(\left(\frac{5}{\alpha}\right)^x+\alpha\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha^2-\left(\frac{5}{\alpha}\right)^x\cdot\frac{1}{5}}{\left(\frac{5}{\alpha}\right)^x+\alpha}=\frac{\alpha^2-0}{0+\alpha}=\alpha.$$

Αν $0<\alpha<5\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{5}<1$, τότε είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha}{5}\right)^x=0$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x\cdot\left(\left(\frac{\alpha}{5}\right)^x\cdot\alpha^2-\frac{1}{5}\right)}{5^x\cdot\left(1+\alpha\cdot\left(\frac{\alpha}{5}\right)^x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\alpha}{5}\right)^x\cdot\alpha^2-\frac{1}{5}}{1+\alpha\cdot\left(\frac{\alpha}{5}\right)^x}=\frac{0-\frac{1}{5}}{1+0}=-\frac{1}{5}.$$

β. Από το (α) έχουμε $f(\alpha)=\begin{cases} -\frac{1}{5}, & 0<\alpha<5 \\ \alpha, & \alpha>5 \\ \frac{62}{15}, & \alpha=5 \end{cases}$.

Είναι $\lim\limits_{\alpha\to 5^+} f(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to 5^+}(\alpha)=5\neq f(5)$. Άρα, η f δεν είναι συνεχής στο $\alpha_0=5$.

Ωστόσο, η f είναι συνεχής στο $(0,5)$ ως σταθερή και στο $(5,+\infty)$ ως ταυτοτική.

24. 25 α. Η $f(x)=\ln x+x^3-1$ είναι παραγωγίσιμη στο $A=(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1}{x}+3x^2>0$ για κάθε $x\in A$, συνεπώς είναι γνησίως αύξουσα στο A.

Επιπλέον $f(1)=0$, οπότε έχουμε:

- για $0<x<1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(1)\Leftrightarrow f(x)<0$ και
- για $x>1\Leftrightarrow f(x)>f(1)\Leftrightarrow f(x)>0$.

β. Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f στο 0. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\ln x+x^3+1\right)\overset{(-\infty)+0-1}{=\!=}-\infty.$$

Άρα, η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Η f είναι συνεχής στο A και γνησίως αύξουσα, οπότε το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A)=\left(\lim_{x\to 0} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=\mathbb{R},$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x+x^3-1\right)\overset{(+\infty)+(+\infty)-1}{=\!=}+\infty$.

γ. Για να ορίζεται η $g(x)=\sqrt{1-f(x)}$ πρέπει $x\in A$ και $1-f(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\leq 1$, (1).

Είναι $1\in f(A)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο A, οπότε υπάρχει μοναδικό $\alpha\in f(A)$ τέτοιο, ώστε $f(\alpha)=1$.

Τότε η (1) γράφεται ισοδύναμα $f(x)\leq f(\alpha)\Leftrightarrow 0<x\leq\alpha$. Άρα, το πεδίο ορισμού της g είναι το $B=(0,\alpha]$.

Επιπλέον, η g είναι συνεχής στο B ως σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμη με $g'(x)=\frac{-f'(x)}{2\sqrt{1-f(x)}}<0$ για κάθε $x\in B\subseteq A$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο B, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το:

$$g(B)=\left(g(\alpha),\ \lim_{x\to 0}g(x)\right)=[0,\ +\infty),$$

αφού:

- $g(\alpha)=\sqrt{1-f(\alpha)}=0$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-f(x)}\ \underset{u\to+\infty}{\overset{f(x)=u}{=}}\ \lim\limits_{u\to+\infty}\sqrt{u}=+\infty.$

δ. Από το (β) προκύπτει ότι $g(B)\cap A=(0,\ +\infty)\neq\varnothing$. Άρα, ορίζεται η $f\circ g$.

24. 26 α. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι 1 – 1 στο $\mathbb{R}$.

Έστω ότι η f δεν είναι 1 – 1 στο $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχουν $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε έχουμε:

$$\begin{cases}\eta\mu^2 f(x_1)=\eta\mu^2 f(x_2)\\ 8f(x_1)=8f(x_2)\end{cases}\Rightarrow \eta\mu^2 f(x_1)+8f(x_1)=\eta\mu^2 f(x_2)+8f(x_2)\overset{(1)}{\Rightarrow} x_1=x_2$$

που είναι άτοπο. Άρα, η f είναι 1 – 1, οπότε αντιστρέφεται.

β. Αν $y=f(x)\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$, τότε η (1) γίνεται $\eta\mu^2 y+8y=f^{-1}(y),\ y\in\mathbb{R}$.

Άρα $f^{-1}(x)=\eta\mu^2 x+8x,\ x\in\mathbb{R}$.

Επιπλέον, ισχύει $f^{-1}(0)=0\Leftrightarrow 0=f(0)$.

γ. Η f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Άρα, η $C_{f^{-1}}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}f^{-1}(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\eta\mu^2 x+8x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\frac{\eta\mu^2 x}{x}+8\right)\right]=+\infty,$$

αφού για κάθε $x>0$ είναι $0\leq\eta\mu^2 x\leq 1\Rightarrow 0\leq\dfrac{\eta\mu^2 x}{x}\leq\dfrac{1}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}0=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0,$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu^2 x}{x}=0.$

Άρα, η $C_{f^{-1}}$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\eta\mu^2 x+8x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\cdot\left(\frac{\eta\mu^2 x}{x}+8\right)\right]=-\infty,$$

αφού για κάθε $x<0$ είναι $0\leq\eta\mu^2 x\leq 1\Rightarrow 0\geq\dfrac{\eta\mu^2 x}{x}\geq\dfrac{1}{x}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}0=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0,$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu^2 x}{x}=0.$

Άρα, η $C_{f^{-1}}$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Επιπλέον, έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu^2 x}{x}+8\right)=0+8=8 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f^{-1}(x)-8x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\eta\mu^2 x\right) \text{ που δεν υπάρχει.}$$

Άρα, η $C_{f^{-1}}$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Ομοίως, αποδεικνύουμε ότι η $C_{f^{-1}}$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

24. 27 α. Η $f(x)=e^{2x}+x^3+x,\ x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με $f'(x)=2e^{2x}+3x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών της f είναι το:

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R},$$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}+x^3+x\right)\overset{(+\infty)+(+\infty)}{=\!=}+\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}+x^3+x\right)\overset{0+(-\infty)}{=\!=}-\infty$ όπου $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\right)=-\infty$.

Επιπλέον $e^{-2}\in\mathbb{R}$. Άρα, υπάρχει $\gamma\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma)=e^{-2}$ και το γ είναι μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$e^{2x^2}+x^6+x^2>e^4+10\Leftrightarrow f\left(x^2\right)>f(2)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}x^2>2\Leftrightarrow|x|>\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{x<-\sqrt{2}\ \text{ ή }\ x>\sqrt{2}\right\}.$$

γ. Η $g(x)=\ln(1-x)$ ορίζεται στο $A=(-\infty,1)$.

Η $g\circ f$ ορίζεται στο $D=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ f(x)\in A\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ f(x)<1\right\}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\right)=-\infty$. Άρα $D=(-\infty,0)$.

Για τον τύπο της σύνθεσης έχουμε:

$$(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=\ln\left(1-f(x)\right)=\ln\left(1-e^{2x}-x^3-x\right).$$

δ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)-e^{2x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+x}-x\right)\overset{(+\infty)-(+\infty)}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3+x}^{\,2}-x^2}{\sqrt{x^3+x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2+x}{\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}\overset{x>0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^{3/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x^{1/2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x^{3/2}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)=+\infty,$$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{3/2}=+\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}}=1,$

όπου $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1-0+0=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\sqrt{1+0}+0=1.$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]\overset{(+\infty)\cdot(1-0)}{=\!=}+\infty.$$

24. 28 α. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$ όπου $g(x)=\dfrac{(f(\kappa)-1)x^\nu+2}{(3-f(\kappa))x^3+x^2+1}$, $\nu\in\mathbb{N}$ ρητή συνάρτηση, οπότε

έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(f(\kappa)-1)x^\nu+2}{(3-f(\kappa))x^3+x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(f(\kappa)-1)x^\nu}{(3-f(\kappa))x^3}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(\kappa)-1}{3-f(\kappa)}x^{\nu-3}\right)$$

για $f(\kappa)\neq1$ και $f(\kappa)\neq3.$

- Αν $\nu-3>0\Leftrightarrow\nu>3,$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ ή $-\infty,$ άτοπο.

- Αν $\nu-3<0 \Leftrightarrow \nu<3$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$, άτοπο.
- Αν $\nu-3=0 \Leftrightarrow \nu=3$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\frac{f(\kappa)-1}{3-f(\kappa)} \Rightarrow \frac{f(\kappa)-1}{3-f(\kappa)}=1 \Rightarrow f(\kappa)-1=3-f(\kappa) \Rightarrow f(\kappa)=2.$$

β. Είναι $\kappa\in(-1,0)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\cdot f\left(e^x\right)\right]=\ell\in\mathbb{R}$, (1).

Θέτουμε $e^x=y>0 \Leftrightarrow x=\ln y$ και είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, οπότε $y\to0^+$.

Τότε η (1) γράφεται:

$$\lim_{y\to0^+}\left(\ln y\cdot f(y)\right)=\ell\in\mathbb{R}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(y)=\ln y\cdot f(y)$ για y κοντά στο 0 με $y>0$.

Είναι $f(y)=h(y)\cdot\dfrac{1}{\ln y}$ και έχουμε:

- $\lim\limits_{y\to0^+} h(y)=\ell\in\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{y\to0^+}\ln y=-\infty$, οπότε $\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{1}{\ln y}=0$.

Άρα $\lim\limits_{y\to0^+} f(y)=\lim\limits_{y\to0^+}\left(h(y)\cdot\dfrac{1}{\ln y}\right)=\ell\cdot0=0$ και αφού η f είναι συνεχής, θα ισχύει:

$$\lim_{y\to0^+} f(y)=f(0)\Rightarrow f(0)=0.$$

Ισχύουν οι σχέσεις $0<\kappa$ και $f(0)<f(\kappa)$. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

24. 29 α. Έχουμε:

$$\left|\frac{\eta\mu\left(x+e^x\right)}{x^2+x+1}\right|=\frac{\left|\eta\mu\left(x+e^x\right)\right|}{x^2+x+1}\le\frac{1}{x^2+x+1}\Leftrightarrow-\frac{1}{x^2+x+1}\le\frac{\eta\mu\left(x+e^x\right)}{x^2+x+1}\le\frac{1}{x^2+x+1}$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x^2+x+1>0$, αφού $\Delta=-3<0$ και $\alpha=1>0$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2+x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\left(x+e^x\right)}{x^2+x+1}=0$.

β. Για κάθε $x<9$ είναι $f\left(\dfrac{2x^2+20}{x^2+x+1}\right)=\dfrac{\eta\mu\left(x+e^x\right)}{x^2+x+1}$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f\left(\frac{2x^2+20}{x^2+x+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu\left(x+e^x\right)}{x^2+x+1} \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} \lim_{x\to-\infty} f\left(\frac{2x^2+20}{x^2+x+1}\right)=0,\ (1).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+20}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2,$ οπότε θέτοντας $\frac{2x^2+20}{x^2+x+1}=y$ προκύπτει ότι το $y\to 2,$ όταν $x\to-\infty.$

Τότε η (1) γράφεται $\lim\limits_{y\to 2} f(y)=0$ και αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R},$ θα είναι και στο 2. Άρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Rightarrow f(2)=0.$

γ. Από τη δοθείσα σχέση

- για $x=0$ βρίσκουμε $f(20)=\eta\mu 1$ και
- για $x=-1$ βρίσκουμε $f(22)=\eta\mu\left(-1+\frac{1}{e}\right)=\eta\mu\left(\frac{1-e}{e}\right)=-\eta\mu\left(\frac{e-1}{e}\right).$

  Επειδή $0<\frac{e-1}{e}<1,$ θα είναι $\eta\mu\left(\frac{e-1}{e}\right)>0\Rightarrow f(22)<0.$

Οπότε ισχύει $f(20)\cdot f(22)<0$ και η f είναι συνεχής στο $[20,\ 22].$ Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(20,\ 22)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0.$

24. 30 α. Η $f(x)=-x^3,\ x\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ ως βασική συνάρτηση. Άρα, η f είναι 1 – 1, οπότε αντιστρέφεται. Η f^{-1} ορίζεται στο σύνολο:

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x)\right)=\mathbb{R},$$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)\overset{-(-\infty)}{=\!=}+\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3\right)\overset{-(+\infty)}{=\!=}-\infty.$

Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow -x^3=y\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\sqrt[3]{y}, & y\geq 0\\ x=\sqrt[3]{-y}, & y<0\end{cases}.$

Άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt[3]{x}, & x\geq 0\\ \sqrt[3]{-x}, & x<0\end{cases}.$

β.
- Για $x=0$ είναι $f(0)=0=f^{-1}(0).$ Άρα οι $C_f,\ C_{f^{-1}}$ τέμνονται στο $O(0,\ 0).$
- Αν $x>0,$ τότε έχουμε:

$$f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow -x^3=-\sqrt[3]{x}\Leftrightarrow x^3=\sqrt[3]{x}\Leftrightarrow x^9-x=0\Leftrightarrow x\cdot\left(x^8-1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=1 \text{ και } f(1)=-1.$$

- Αν $x<0$, τότε έχουμε:

$$f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow -x^3=\sqrt[3]{-x}\overset{-x=u>0}{\Leftrightarrow} u^3=\sqrt[3]{u}\Leftrightarrow u^9-u=0\overset{u>0}{\Leftrightarrow} u=1,$$

άρα $-x^3=1\Leftrightarrow x=-1$ και $f(-1)=1.$

Επομένως, τα σημεία τομής των C_f, $C_{f^{-1}}$ είναι τα $O(0,\,0)$, $A(1,\,-1)$ και $B(-1,\,1)$.

γ. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x^3-x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu^3 x}{x^3-x^2+x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{-3\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{3x^2-2x+1}\right)=$$

$$=-3\cdot\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\cdot x^2\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x}{3x^2-2x+1}\right)=-3\cdot\left(1^2\cdot 0\cdot\frac{1}{1}\right)=0.$$

24. 31 α. Η $h\circ g$ ορίζεται στο $A=\left\{x\ge 0\,/\,g(x)\in\mathbb{R}\right\}=[0,\,+\infty)$.

Για κάθε $x\in[0,\,x_0]$ έχουμε:

$$0\le x\le x_0\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)\le g(x_0)\overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow} h(g(x))\ge h(g(x_0)).$$

Για κάθε $x\in[x_0,\,+\infty)$ έχουμε:

$$x\ge x_0\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)\ge g(x_0)\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(g(x))\ge h(g(x_0)).$$

Άρα, για κάθε $x\in[0,\,+\infty)$ είναι $h(g(x))\ge h(g(x_0))$, δηλαδή η $h\circ g$ παρουσιάζει στο x_0 (ολικό) ελάχιστο.

β. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(t)=\sqrt{t}$, $t\ge 0$ που είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\,+\infty)$.

Η $f(t)=h(g(t))$ ορίζεται στο $D=\left\{t\ge 0\,/\,\sqrt{t}\in[0,\,2]\right\}=[0,\,4]$ και έχει τύπο:

$$f(t)=20\cdot\sqrt{t}^2-40\cdot\sqrt{t}+50=20t-40\sqrt{t}+50.$$

Η h ως τριώνυμο του x με $\alpha=20>0$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=-\dfrac{40}{2\cdot 20}=1.$

Από το (α) προκύπτει ότι η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $t_0=1$, το $f(1)=10$. Δηλαδή τα οχήματα κινούνται με ελάχιστη ταχύτητα ίση με $10\ \text{km}/\text{h}$ στις 7 π. μ.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Είναι $f'(t)=20\dfrac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}}$ και κάνουμε χρήση του κριτηρίου της πρώτης παραγώγου.

ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\,4]$ και συνεχής στο $[0,\,4]$ με:

$$f'(t)=20-\frac{20}{\sqrt{t}}=20\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}}.$$

Έχουμε:

- $f'(t)>0 \Leftrightarrow 20\dfrac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}}>0 \Leftrightarrow \sqrt{t}>1 \Leftrightarrow 4\geq t>1$ και
- $f'(t)<0 \Leftrightarrow 20\dfrac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}}<0 \Leftrightarrow \sqrt{t}<1 \Leftrightarrow 0<t<1.$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\,4]$ και γνησίως φθίνουσα $[0,\,1]$.

Το σύνολο τιμών της f είναι το:

$$f([0,\,4])=\big(f(1),\,\{\max f(0), f(4)\}\big)=[10,\,50],$$

αφού $f(0)=f(4)=50$.

Δηλαδή τα οχήματα κινούνται με μέση ταχύτητα από 10 km/h έως 50 km/h.

24. 32 α. Η ευθεία με εξίσωση ε: $y=2x+5$ είναι (πλάγια) ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, οπότε ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2,\ (1)\quad \text{και}\quad \lim_{x\to+\infty}\big[f(x)-2x\big]=5,\ (2).$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu\cdot f(x)+4x}{x\cdot f(x)-2x^2+3x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mu\cdot f(x)+4x}{x\cdot f(x)-2x^2+3x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mu\cdot\frac{f(x)}{x}+4}{\big(f(x)-2x\big)+3}\right)\overset{(1)}{\underset{(2)}{=}}\frac{\mu\cdot 2+4}{5+3}=\frac{2\mu+4}{8}.$$

Επομένως $\dfrac{2\mu+4}{8}=1\Leftrightarrow \mu=2.$

β. Το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)(x-1)^2}{ημ\left(x^3-1\right)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)}{\dfrac{1}{x-1}}.\dfrac{1}{\dfrac{ημ\left(x^3-1\right)}{x-1}}\right].$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)}{\dfrac{1}{x-1}}\overset{\frac{1}{x-1}=u}{\underset{u\to+\infty}{=\!=}}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(u)}{u}=2$ και

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ημ\left(x^3-1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{ημ\left(x^3-1\right)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}.\left(x^2+x+1\right)\right]=$

$$=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{ημ\left(x^3-1\right)}{x^3-1}.\left(x^2+x+1\right)\right]=3$$

όπου $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ημ\left(x^3-1\right)}{x^3-1}\overset{x^3-1=u}{\underset{u\to 0}{=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{ημu}{u}=1$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+x+1\right)=3.$

Άρα, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)(x-1)^2}{ημ\left(x^3-1\right)}=2\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}.$

γ. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2.$ Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow f(x)=xg(x)$ για $x>M,$ όπου $M>0,$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2.$ Τότε έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)\cdot x\right)=+\infty.$

Επιπλέον, είναι $f(x)<2x+5$ για κάθε $x\in\mathbb{R},$ (1) και $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+5)=-\infty,$ οπότε από την (1) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.$ Η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R},$ αν για κάθε $y_0\in\mathbb{R}$ υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=y_0.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-y_0,$ για τυχαίο $y_0,$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\infty,$ άρα υπάρχει $x_1<0$ τέτοιο, ώστε $h(x_1)<0$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty,$ άρα υπάρχει $x_2>0$ τέτοιο, ώστε $h(x_2)>0.$

Οπότε ισχύει $h(x_1)\cdot h(x_2)<0.$ Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(x_1,\,x_2)\subseteq\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=y_0.$

24. 33 **α.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1 – 1 και συνεπώς αντιστρέφεται. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f που είναι το:

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R},$$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x+1\right)\overset{0+(-\infty)+1}{=\!=}-\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x+1\right)\overset{(+\infty)+(+\infty)+1}{=\!=}+\infty.$

β. Είναι $A_h=(0,+\infty)$ και η F ορίζεται στο:

$$D=\{x\in A_h\ /\ h(x)\in A_f\}=\{x>0\ /\ \ln x\in\mathbb{R}\}=(0,+\infty)$$

και έχει τύπο:

$$F(x)=f(\ln x)=e^{\ln x}+\ln x+1=x+\ln x+1.$$

Επιπλέον, αν $x_1,\ \ x_2\in D$ με $x_1<x_2$, τότε έχουμε:

$$x_1<x_2\Leftrightarrow\ln x_1<\ln x_2\overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow}f\left(h(x_1)\right)<f\left(h(x_2)\right)\Leftrightarrow F(x_1)<F(x_2).$$

Άρα, η F είναι γνησίως αύξουσα στο D.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Η F είναι παραγωγίσιμη στο D με $F'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$. Άρα, η F είναι γνησίως αύξουσα στο D.

γ. Η εξίσωση ορίζεται, αν $x^3-2x>0\Leftrightarrow x(x^2-2)>0$.

Με τη βοήθεια του διπλανού πίνακα προσήμων του γινομένου $x(x^2-2)$ προκύπτει ότι:

$$x\in\left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$$

x	$-\infty$ $\quad -\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
x	$-$	$-$ 0 $+$		$+$
x^2-2	$-$ 0	$-$	$-$ 0	$+$
Γινόμενο	$-$	$+$	$-$	$+$

και πρέπει $x^2>0$ που ισχύει για κάθε $x\neq0$. Τότε για $x\in\left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$ έχουμε:

$$F(x^3-2x)=F(x^2)\overset{F:\uparrow}{\Leftrightarrow}x^3-2x=x^2\Leftrightarrow x\cdot(x^2-x-2)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\{x=0\ \text{ή}\ x=-1\ \text{ή}\ x=2\}.$$

Δεκτές ρίζες είναι οι $x=-1$ και $x=2$.

δ. Η ανίσωση ορίζεται, αν $|x-1|>0$ που ισχύει για κάθε $x\neq 1$ και, αν $|\eta\mu(x-1)|>0$ που ισχύει για κάθε $x\neq 1+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Για $x\neq 1+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, έχουμε:

$$F(|x-1|)-F(\eta\mu|(x-1)|)\geq 0 \Leftrightarrow F(|x-1|)\geq F(\eta\mu|(x-1)|) \overset{F:\uparrow}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow |x-1|=\eta\mu|(x-1)|,\ (1).$$

Όμως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x|\leq|x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα, η (1) αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

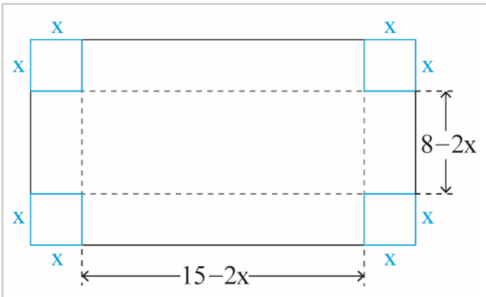
ε. Η f είναι συνεχής στο $[-2,\ -1]$ και έχουμε:

- $f(-2)=e^{-2}-2+1=\dfrac{1}{e^2}-1$ και
- $f(-1)=e^{-1}-1+1=\dfrac{1}{e}$.

Οπότε ισχύει $f(-2)\cdot f(-1)<0$. Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(-2,\ -1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, το x_0 είναι μοναδικό.

24. 34 **α.** Οι διαστάσεις του κουτιού σε cm είναι $15-2x,\ 8-2x$ και x. Οπότε ο όγκος του κουτιού σε cm^3 είναι:

$$V=(15-2x)(8-2x)x.$$



Πρέπει:

- $8-2x<0\Leftrightarrow x<4$,
- $x>0$ και
- $15-2x<0\Leftrightarrow x<\dfrac{15}{2}$.

Άρα, για τη συνάρτηση που εκφράζει τον όγκο του κουτιού έχουμε:

$$f(x)=x(8-2x)(15-2x)=2x(2x^2-23x+60)=$$
$$=4x^3-46x^2+120x \text{ με } x\in(0,\ 4).$$

β. Η επιφάνεια του κουτιού έχει εμβαδόν σε cm^2:

$$E=2x(15-2x)+2x(8-2x)+(15-2x)(8-2x),\ x\in(0,\ 4).$$

Άρα, για τη συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν της επιφάνειας του κουτιού έχουμε:

$$g(x)=2x(15-2x)+2x(8-2x)+(15-2x)(8-2x)=4(30-x^2),\ x\in(0,\ 4).$$

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 4)$ με:

$$f'(x) = 12x^2 - 92x + 120 = 4 \cdot (3x^2 - 23x + 30),\ 0 < x < 4.$$

Ο όγκος αυξάνεται, όταν η f είναι γνησίως αύξουσα και μειώνεται, όταν η f είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως, θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της f'. Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 23x + 30 = 0 \Leftrightarrow \left\{x = 6 \text{ ή } x = \frac{5}{3}\right\} \text{ με } x \in (0, 4).$$

Σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα μονοτονίας της f.

x	0 $\quad$ $5/3$ $\quad$ 4
$f'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
f	$\nearrow$ $\quad$ $\searrow$

Άρα, ο όγκος του κουτιού αυξάνεται, αν $x \in \left(0, \frac{5}{3}\right]$, ενώ μειώνεται, αν $x \in \left[\frac{5}{3}, 4\right)$.

δ. Αρκεί να υπολογίσουμε το σύνολο τιμών της f. Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, 4)$, έχουμε:

$$f((0,4)) = f\left(\left(0, \frac{5}{3}\right]\right) \cup f\left(\left[\frac{5}{3}, 4\right)\right)$$

όπου

$$f\left(\left(0, \frac{5}{3}\right]\right) = \left(\lim_{x \to 0^+} f(x), f\left(\frac{5}{3}\right)\right] = \left(0, \frac{2450}{27}\right] \text{ και}$$

$$f\left(\left[\frac{5}{3}, 4\right)\right) = \left(\lim_{x \to 4^-} f(x), f\left(\frac{5}{3}\right)\right] = \left(0, \frac{2450}{27}\right].$$

Άρα $f((0,4)) = \left(0, \frac{2450}{27}\right]$.

ε. Από το (δ) έχουμε:

$$f(x) \le f\left(\frac{5}{3}\right) \Leftrightarrow f(x) \le \frac{2450}{27} \Leftrightarrow 27f(x) - 2450 \le 0 \text{ για κάθε } x \in (0, 4).$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x \to \frac{5}{3}} (27f(x) - 2450) = 0$, άρα $\lim\limits_{x \to \frac{5}{3}} \dfrac{1}{27f(x) - 2450} = -\infty$ και
- $\lim\limits_{x \to \frac{5}{3}} \ln(x - 1) = \ln\left(\frac{5}{3} - 1\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0.$

Άρα $\lim\limits_{x \to \frac{5}{3}} \dfrac{\ln(x-1)}{27f(x) - 2450} = +\infty.$

24. 35 Τη χρονική στιγμή που το φως του προβολέα πέφτει στον παρατηρητή, το πλοιάριο βρίσκεται σε σημείο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ στο οποίο άγεται εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο Π.

Είναι $f'(x)=-\frac{5}{2}\cdot 2x+0=-5x,\ x\in\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon\colon y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right) \text{ ή } \varepsilon\colon y-\left(-\frac{5}{2}x_0^2+10\right)=-5x_0\left(x-x_0\right).$$

Η (ε) διέρχεται από το $\Pi\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, όταν:

$$0-\left(-\frac{5}{2}x_0^2+10\right)=-5x_0\left(\frac{5}{2}-x_0\right)\Leftrightarrow\frac{5}{2}\left(x_0^2-5x_0+4\right)=0\Leftrightarrow\left\{x_0=0 \text{ ή } x_0=4\right\}.$$

Το $x_0=4$ απορρίπτεται, διότι η παραβολική τροχιά συναντά την ακτή στο σημείο $(2, 0)$. Άρα, πρέπει $x_0\le 2$.

Για $x_0=1$ προκύπτει ότι $M\left(1, \frac{15}{2}\right)$ που βρίσκεται πριν τον παρατηρητή, άρα είναι το ζητούμενο σημείο. Τότε έχουμε:

$$(NM)=\sqrt{\left(1-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{15}{2}-0\right)^2}=\frac{\sqrt{234}}{2}\cdot 100 \text{ m}.$$

24. 36 **α.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αρκεί η λύση ως προς y να είναι μοναδική. Έχουμε:

$$y\cdot x^2+2(y-x)=1\Leftrightarrow y\cdot x^2+2y-2x=1\Leftrightarrow y\cdot\left(x^2+2\right)=2x+1\Leftrightarrow y=\frac{2x+1}{x^2+2}$$

που είναι μοναδική λύση ως προς y για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα, η αντιστοιχία $y=\frac{2x+1}{x^2+2}$ είναι συνάρτηση.

β. **Α΄ τρόπος**

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής με:

$$f'(x)=\frac{2\cdot\left(x^2+2\right)-(2x+1)\cdot 2x}{\left(x^2+2\right)^2}=-2\cdot\frac{x^2+x-2}{\left(x^2+2\right)^2}.$$

Έχουμε:

$$f'(x)>0\Leftrightarrow -2\cdot\frac{x^2+x-2}{\left(x^2+2\right)^2}>0\Leftrightarrow x^2+x-2<0\Leftrightarrow -2<x<1 \quad\text{και}$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow x^2+x-2>0\Leftrightarrow\left\{x<-2 \text{ ή } x<1\right\}.$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2,\ 1]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,\ -2]$, $[1,\ +\infty)$.

Β΄ τρόπος

Είναι $f(0)=\dfrac{1}{2}$, $f(3)=\dfrac{7}{11}$, $f(2)=\dfrac{5}{6}$.

Ισχύουν $0<1 \Rightarrow f(0)<f(1)$ και $2<3 \Rightarrow f(2)>f(3)$.

Άρα, η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

γ. Το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f(\mathbb{R})=f\left((-\infty,\ -2]\right)\cup f\left([-2,\ 1]\right)\cup f\left([1,\ +\infty)\right).$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}=0,$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0,$
- $f(-2)=\dfrac{-3}{6}=-\dfrac{1}{2},$
- $f(1)=1.$

Επομένως:

- $f\left((-\infty,\ -2]\right)=\left[f(-2),\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=\left[-\dfrac{1}{2},\ 0\right),$
- $f\left([-2,\ 1]\right)=\left[f(-2),\ f(1)\right]=\left[-\dfrac{1}{2},\ 1\right],$
- $f\left([1,\ +\infty)\right)=\left[\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\ f(1)\right)=(0,\ 1].$

Άρα $f(\mathbb{R})=[-1,\ 1]$.

δ. Από το (γ) προκύπτει ότι $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θέτουμε όπου x το συνx $\in\mathbb{R}$ και έχουμε $-\dfrac{1}{2}\le f(\text{συν}x)\le 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} -\dfrac{1}{2x}\le\dfrac{f(\text{συν}x)}{x}\le\dfrac{1}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2x}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(\text{συν}x)}{x}=0$.

ε. Από το (γ) προκύπτει ότι $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 1$.

Αν $f(x)\in\left[-\dfrac{1}{2},\ 0\right]$, τότε η εξίσωση $\eta\mu x\cdot f(x)=x$, με $x\in(0,\ \pi)$ όπου $\eta\mu x>0$, είναι αδύνατη. Αφού θα είναι $\eta\mu x\cdot f(x)\le x$ και $x>0$, πρέπει $0<f(x)\le 1$.

Επιπλέον, για κάθε $x\in(0,\ \pi)$ έχουμε $0<\eta\mu x\le|\eta\mu x|<|x|=x\Rightarrow\dfrac{x}{\eta\mu x}>1$, δηλαδή $f(x)=\dfrac{x}{\eta\mu x}>1$ που είναι αδύνατον από το (γ). Άρα, η εξίσωση είναι αδύνατη.

24. 37 **α.** Έστω $x_0=g(2)-5$. Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to g(2)-5}\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=1\Rightarrow\left|\frac{\eta\mu x_0}{x_0}\right|=1\Rightarrow|\eta\mu x_0|=|x_0|,\ (1).$$

Όμως είναι $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Άρα, από την (1) έχουμε:

$$x_0=0\Rightarrow g(2)-5=0\Rightarrow 4+2-\beta-5=0\Rightarrow\beta=1.$$

β. Αν για κάθε $x\ge 1$ είναι $f(x)=g(x)$, τότε πρέπει $\alpha^2=1\Leftrightarrow\{\alpha=-1 \text{ ή } \alpha=1\}$.

- Αν $\alpha=1$, τότε $f(x)=x^2+|x-1|\overset{x\ge1}{=}x^2+x-1=g(x)$.
- Αν $\alpha=-1$, τότε $f(x)=x^2+|x+1|\overset{x\ge1}{=}x^2+x+1\ne g(x)$.

Άρα $\alpha=1$.

γ. **i.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,\ +\infty)$ με $f'(x)=2x+1>0$ για κάθε $x\ge1$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$, οπότε είναι και 1 – 1.

Άρα, δεν υπάρχουν σημεία της C_f με την ίδια τεταγμένη.

ii. Έστω $f^{-1}(5)=\kappa\Leftrightarrow f^{-1}(f(2))=\kappa\Leftrightarrow 2=\kappa$. Άρα $f^{-1}(5)=2$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(2+\sigma\upsilon\nu x)-11}{f^{-1}(5)\cdot x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(2+\sigma\upsilon\nu x)-11}{2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(2+\sigma\upsilon\nu x)^2+2+\sigma\upsilon\nu x-12}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(2+\sigma\upsilon\nu x)^2+\sigma\upsilon\nu x-10}{2x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2(2+\sigma\upsilon\nu x)(-\eta\mu x)-\eta\mu x}{4x}=\lim_{x\to0}\left[(2+\sigma\upsilon\nu x)\frac{-\eta\mu x}{2x}-\frac{\eta\mu x}{4x}\right]=$$

$$=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}=-\frac{7}{4}.$$

Οπότε $\ell = \frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) = -\frac{3}{4}$.

Όμως για $x \geq 1 \overset{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 1$ και $-\frac{3}{4} < 1$.

Άρα, δεν υπάρχει $x \in [1, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x) = -\frac{3}{4}$.

24. 38 α. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + \lambda x + \mu \neq 0\}$.

Η εξίσωση $x^2 + \lambda x + \mu = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες και αφού $-2, 1 \notin A$, το -2 και το 1 θα είναι ρίζες της. Επομένως:

$$(-2)^2 + \lambda \cdot (-2) + \mu = 0 \Leftrightarrow -2\lambda + \mu = -4 \text{ και } 1^2 + \lambda \cdot 1 + \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda + \mu = -1.$$

Από τις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε $\lambda = 1$ και $\mu = -2$.

Επιπλέον, είναι $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + \kappa}$ που ορίζεται στο $B = \{x \in \mathbb{R} / x + \kappa x \neq 0\}$ και αφού $2 \notin B$, το 2 είναι η ρίζα της $x + \kappa x = 0$. Επομένως $2 + \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = -2$.

Άρα $f(x) = \frac{x-2}{x^2 + x - 2}$, $x \in A = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

β. • Έχουμε:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-2}{x^2 + x - 2} \overset{(\alpha)}{=} \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{1}{x-1}\right) \underset{x<1}{\overset{\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(+\infty)}{=\!=}} +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{1}{x-1}\right) \underset{x>1}{\overset{\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(+\infty)}{=\!=}} -\infty.$$

Άρα, η $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

• Επίσης, έχουμε:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \left(\frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{1}{x+2}\right) \underset{x<-2}{\overset{\left(\frac{4}{3}\right)\cdot(-\infty)}{=\!=}} -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \left(\frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{1}{x+2}\right) \underset{x>-2}{\overset{\left(\frac{4}{3}\right)\cdot(+\infty)}{=\!=}} +\infty.$$

Άρα, η $x = -2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

• Έχουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x^2+x-2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Άρα, η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f σε $+\infty$ και $-\infty$.

γ. i. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$|\eta\mu x|\le|x| \Leftrightarrow -|x|<\eta\mu x<|x| \text{ από όπου } \begin{cases}\text{για } x>0:\ \eta\mu x<x \Rightarrow \dfrac{\eta\mu x}{x}<1\\ \text{για } x<0:\ \eta\mu x>x \Rightarrow \dfrac{\eta\mu x}{x}<1\end{cases}.$$

Αν $\frac{\eta\mu x}{x}=u$, τότε με $x\to 0$ είναι $u\to 1^-$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right) = \lim_{u\to 1^-} f(u) \overset{(\beta)}{=} +\infty.$$

ii. Αν $u=\frac{x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}$, τότε με $x<0$ είναι:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}>0 \Rightarrow 1+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}>1 \Rightarrow u>1 \quad \text{και}$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}>0 \Rightarrow 1+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}>1 \Rightarrow u>1$$

Άρα $u\to 1^+$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right) = \lim_{u\to 1^+} f(u) \overset{(\beta)}{=} -\infty.$$

iii. Έστω $\frac{2x^4+x^2}{1-x^4}=u$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^4+x^2}{1-x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^4}{-x^4}=-2.$

Όμως $\frac{2x^4+x^2}{1-x^4}<-2$, αφού για $x>x_0>0$ με $1-x^4<0$ έχουμε:

$$2x^4+x^2>-2\left(1-x^4\right) \Leftrightarrow x^2>-2 \text{ που ισχύει.}$$

Άρα $u\to -2^-$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{f\left(\dfrac{2x^4+x^2}{1-x^4}\right)} = \lim_{u\to -2^-}\frac{1}{f(u)} \overset{(\beta)}{=} 0.$$

24. 39 α. Το πεδίο ορισμού της f είναι η προβολή της C_f στον άξονα $x'x$. Άρα, από το δοθέν σχήμα προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=(1,\ 5)\cup(5,\ 9]$.

Το σύνολο τιμών της f είναι η προβολή της C_f στον άξονα $y'y$. Άρα, από το δοθέν σχήμα προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A)=(-2,\ 5]$.

β. Η εξίσωση $f(x)=0,\ x\in A$ έχει λύσεις τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$. Από το δοθέν σχήμα προκύπτει ότι $f(x)=0\Leftrightarrow\{x=2 \text{ ή } x=6\}$.

Η ανίσωση $f(x)>0,\ x\in A$ έχει λύσεις τις τετμημένες των σημείων της C_f όπου η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. Από το δοθέν σχήμα προκύπτει ότι $f(x)>0\Leftrightarrow x\in(2,\ 5)\cup(5,\ 6)\cup(6,\ 9)$.

γ. i. Η $y=-2$ δεν τέμνει τη C_f. Άρα, η $f(x)=-2$ είναι αδύνατη.

ii. Η $y=1$ τέμνει τη C_f σε τρία σημεία. Άρα, η $f(x)=1$ έχει τρεις ρίζες.

iii. Η $y=4$ τέμνει τη C_f σε δύο σημεία. Άρα, η $f(x)=4$ έχει δύο ρίζες.

iv. Η $y=5$ τέμνει τη C_f σε ένα σημείο. Άρα, η $f(x)=5$ έχει μια ρίζα.

δ. i. Για $x\in(3-\delta,\ 3)$ όπου $\delta>0$ μικρός αριθμός, είναι:

$$f(x)<1\Leftrightarrow f(x)-1<0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to3^-}(f(x)-1)=f(3)-1=0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1}{f(x)-1}=-\infty$.

ii. Η f είναι συνεχής στο 4 και $f(4)=4$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to4}f(f(x))\ \underset{u\to4}{\overset{f(x)=u}{=\!=}}\ \lim_{u\to4}f(u)=f(4)=4.$$

iii. Από το δοθέν σχήμα προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to5}f(x)=3$.

Για $x\in(5-\delta,\ 5)$ όπου $\delta>0$ μικρός αριθμός, είναι $f(x)>3\Leftrightarrow f(x)-3>0$, οπότε:

$$\lim_{x\to5^-}\frac{1}{f(x)-3}=+\infty.$$

Για $x\in(5,\ 5+\delta)$ όπου $\delta>0$ μικρός αριθμός, είναι $f(x)<3\Leftrightarrow f(x)-3<0$, οπότε:

$$\lim_{x\to5^+}\frac{1}{f(x)-3}=-\infty.$$

Άρα, το $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{1}{f(x)-3}$ δεν υπάρχει.

24. 40 **α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=2e^x$, $x\in\mathbb{R}$, που είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και τη συνάρτηση $g(x)=x^3+x$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g'(x)=3x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Τότε η (1) γράφεται ισοδύναμα $g(f(x))=h(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η $g\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έστω x_1, $x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow g(f(x_1))<g(f(x_2)) \overset{g:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1 – 1 και συνεπώς αντιστρέφεται.

β. Για $x=0$ η (1) γίνεται:

$$f^3(0)+f(0)-2=0 \Leftrightarrow (f(0)-1)(f^2(0)+f(0)+2)=0 \Leftrightarrow f(0)=1,$$

αφού η $f^2(0)+f(0)+2=0$ είναι αδύνατη (το τριώνυμο του $f(0)$ έχει $\Delta=-7<0$).

Η (1) γράφεται ισοδύναμα $f(x)\cdot(f^2(x)+1)=2e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή $f^2(x)+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θα είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\ln f(x)<0 \Leftrightarrow \ln f(x)<\ln 1 \Leftrightarrow f(x)<1 \Leftrightarrow f(x)<f(0) \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} x<0.$$

γ. **Α΄ τρόπος**

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^2(x)+1>1 \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)+1}<1,\ (2).$$

Η (1) γράφεται ισοδύναμα $f(x)=\dfrac{2e^x}{f^2(x)+1} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 0<f(x)<2e^x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x)=2\cdot 0=0$. Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0.$$

Β΄ τρόπος

Για $x\in\mathbb{R}$ είναι $f^2(x)+1\geq 1$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$|f(x)|\leq |f(x)(f^2(x)+1)|=|2e^x|=2e^x \Leftrightarrow -2e^x\leq f(x)\leq 2e^x.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2e^x)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x)=0$. Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0.$$

24. 41 **α.** Η ευθεία $y=2x+6$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2,\ (1)\quad \text{και}\quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=6,\ (2).$$

Από την (1) έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2+1}{(\beta x-\alpha-1)x}=2\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2}{\beta x^2}=2\Rightarrow\dfrac{\alpha}{\beta}=2,\ (3).$

Από τη (2) έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha x^2+1}{\beta x-\alpha-1}-2x\right)=6\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2+1-2x(\beta x-\alpha-1)}{\beta x-\alpha-1}=6\overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{2(\alpha+1)x}{\beta x}=6\Rightarrow\frac{2(\alpha+1)}{\beta}=6\overset{(3)}{\Rightarrow}2\beta+1=3\beta\Rightarrow\beta=1.$$

Από την (3) προκύπτει ότι $\alpha=2$.

Τότε είναι $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x-3}$, $x\neq 3$, άρα $\gamma=3$, οπότε $x\in A=\mathbb{R}-\{3\}$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\left(\left(2x^2+1\right)\cdot\dfrac{1}{x-3}\right)\overset{19\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty.$

Άρα, η ευθεία $x=3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

β. Η $g(x)=\ln x$ ορίζεται στο $B=(0,+\infty)$, οπότε η $h=f\circ g$ ορίζεται στο:

$$D=\{x\in B\,/\,g(x)\in A\}=\{x>0\,/\,\ln x\neq3\}=\{x>0\,/\,x\neq e^3\},$$

άρα $D=(0,e^3)\cup(e^3,+\infty)$. Ο τύπος της h είναι $h(x)=f(g(x))=\dfrac{2\ln^2x+1}{\ln x-3}$.

Το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu^2 g(x)}{h(x)g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{h(x)}\cdot\dfrac{\eta\mu^2 g(x)}{g(x)}\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{g(x)}=0$.

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to0}h(x)=\lim_{x\to0}f(g(x))\underset{u\to-\infty}{\overset{g(x)=u}{=\!=}}\lim_{u\to-\infty}f(u)=\lim_{u\to-\infty}\frac{2u^2+1}{u-3}=\lim_{u\to-\infty}\frac{2u^2}{u}=\lim_{u\to-\infty}2u=-\infty,$$

οπότε $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{h(x)}=0$.

Για $x>0$ έχουμε $\left|\dfrac{\eta\mu^2g(x)}{g(x)}\right|=\dfrac{\left|\eta\mu^2g(x)\right|}{|g(x)|}\leq\dfrac{1}{g(x)}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|g(x)|}\leq\dfrac{\eta\mu^2g(x)}{g(x)}\leq\dfrac{1}{|g(x)|}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{|g(x)|}=0$. Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 g(x)}{g(x)}=0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 g(x)}{h(x)g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{h(x)}\cdot\dfrac{\eta\mu^2 g(x)}{g(x)}\right)=0\cdot 0=0.$

γ. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=3$ τότε πρέπει $\lim\limits_{x\to 3}\varphi(x)=\varphi(3)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3^+}\varphi(x)=5.$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 3^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 3^+}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{2x^2+1}{x-3}-\lambda x\right)=$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{2x^2+1-\lambda x(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(2-\lambda)x^2+3\lambda x+1}{x-3}.$$

Για x κοντά στο 3 με $x>3$ έχουμε:

$$\varphi(x)=\frac{(2-\lambda)x^2+3\lambda x+1}{x-3}\Leftrightarrow (x-3)\varphi(x)=(2-\lambda)x^2+3\lambda x+1 \text{ με } \lim_{x\to 3^+}\varphi(x)=5.$$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 3^+}(x-3)\varphi(x)=\lim_{x\to 3^+}\left[(2-\lambda)x^2+3\lambda x+1\right]\Rightarrow 0=(2-\lambda)9+9\lambda+1\Rightarrow 0=17$$

που είναι αδύνατον.

Άρα, δεν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε η φ να είναι συνεχής στο $x_0=3$.

δ. i. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty.$$

Το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^3(x)+f(x)-1}-f^2(x)\right)\overset{f(x)=u}{\underset{u\to+\infty}{=\!=}}\lim_{u\to+\infty}\left(\sqrt{u^3+u-1}-u^2\right)=$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\left(\sqrt{u^3\left(1+\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^3}\right)}-u^2\right)\overset{u>0}{=}\lim_{u\to+\infty}\left(u^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^3}}-u^2\right)=$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\left(u^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^3}}-u\right)\right)\overset{(+\infty)\cdot(1-(+\infty))}{=\!=}-\infty.$$

ii. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f^2(x)\cdot\eta\mu\frac{3}{f^3(x)}\right)\overset{\frac{1}{f(x)}=u>0}{\underset{u\to 0^+}{=\!=}}\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{1}{u^2}\cdot\eta\mu 3u\right)=\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{1}{u}\cdot\frac{\eta\mu 3u}{u}\right)=+\infty,$$

αφού $\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$ και $\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\eta\mu 3u}{u}\overset{3u=y}{\underset{y\to 0}{=}}\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu y}{y}\cdot 3\right)=3.$

iii. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)\cdot\etaμ\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x-3}\cdot\etaμ\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x(x-3)}\cdot\frac{\etaμ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=2,$$

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\etaμ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=u<0}{\underset{u\to0^-}{=}}\lim\limits_{u\to0^-}\dfrac{\etaμu}{u}=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+1}{x(x-3)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2.$

24. 42 α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με:

$$f'(x)=2συνx+\frac{1}{συν^2x}-3=2συνx+1+εφ^2x-3=2συνx-2+εφ^2x$$

και $f'(0)=0$. Έχουμε:

$$f''(x)=-2ημx+2εφx\cdot\frac{1}{συν^2x}=-2ημx+\frac{2ημx}{συν^3x}=$$
$$=2ημx\cdot\left(\frac{1}{συν^3x}-1\right)=2ημx\cdot\frac{1-συν^3x}{συν^3x}.$$

- Αν $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, τότε $ημx<0$ και $\frac{1-συν^3x}{συν^3x}>0$, οπότε $f''(x)<0$.

  Συνεπώς, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$ και έχουμε:

  $-\frac{\pi}{2}<x<0\Rightarrow f'(x)>0$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$.

- Αν $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, τότε $ημx>0$ και $\frac{1-συν^3x}{συν^3x}>0$, οπότε $f''(x)>0$.

  Συνεπώς, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και έχουμε:

  $0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow f'(x)>0$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Η f είναι συνεχής στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, άρα θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

β. Από το (α) προκύπτει ότι η f είναι 1 – 1. Άρα $f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(0)\Leftrightarrow x=0$.

γ. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και συνεχής, άρα το σύνολο τιμών της είναι το:

$$f\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x),\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = \mathbb{R},$$

αφού:

- $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\left(2\eta\mu x + \eta\mu x\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - 3x\right) \overset{2+\frac{3\pi}{2}+(-\infty)}{=\!=} -\infty$

  όπου $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \sigma\upsilon\nu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x < 0$ για $x > -\frac{\pi}{2}$ κοντά στο $-\frac{\pi}{2}$,

  άρα $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = -\infty$ και

- $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(2\eta\mu x + \eta\mu x\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - 3x\right) \overset{2-\frac{3\pi}{2}+(+\infty)}{=\!=} +\infty$

  όπου $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sigma\upsilon\nu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x > 0$ για $x < \frac{\pi}{2}$ κοντά στο $\frac{\pi}{2}$, άρα $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty.$

δ. Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$0 \le x < \frac{\pi}{2} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(0) \le f(x) \Rightarrow 0 \le 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x \Rightarrow 0 \le 2\eta\mu x + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - 3x \overset{\sigma\upsilon\nu x>0}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow 0 \le 2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - 3x\cdot\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow 0 \le (2\eta\mu x - 3x)\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x.$$

24. 43 α. Η f ορίζεται, αν $x-1 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 1$ και $x > 0$. Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι το $A = (0, 1)\cup(1, +\infty)$. Η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με $f'(x) = \dfrac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x} < 0$ για κάθε $x \in A$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$ με σύνολο τιμών:

$$f(A) = f((0, 1)) \cup f((1, +\infty)).$$

Έχουμε:

- $f((0, 1)) = \left(\lim_{x\to 1^-} f(x),\ \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = \mathbb{R},$

  αφού $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left((x+1)\frac{1}{x-1} - \ln x\right) \overset{2\cdot(-\infty)-0}{=\!=} -\infty$ και

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x\right) \overset{-1-(-\infty)-0}{=\!=} +\infty.$$

- $f\big((1, +\infty)\big) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to 1^+} f(x)\right) = \mathbb{R},$

  αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x\right) \overset{1-(+\infty)}{=\!=} -\infty$ και

  $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left((x+1)\frac{1}{x-1} - \ln x\right) \overset{2\cdot(+\infty)-0}{=\!=} +\infty.$$

Άρα $f(A) = \mathbb{R} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}.$

β.
- Είναι $0 \in f\big((0, 1)\big)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$.

  Συνεπώς, υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.
- Επίσης, $0 \in f\big((1, +\infty)\big)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

  Συνεπώς, υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.

Άρα, η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο A.

γ. Είναι $g'(x) = \frac{1}{x},\ x > 0$ και $h'(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη της C_g στο $A(\alpha, \ln\alpha)$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon_1: y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x - \alpha) \quad ή \quad \varepsilon_1: y = \frac{1}{\alpha}x + \ln\alpha - 1$$

και η εφαπτομένη της C_h στο $B(\beta, e^\beta)$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon_2: y - h(\beta) = h'(\beta)(x - \beta) \quad ή \quad \varepsilon_2: y = e^\beta x - \beta e^\beta + e^\beta.$$

Επειδή οι ευθείες ε_1 και ε_2 ταυτίζονται, ισχύουν:

$$\frac{1}{\alpha} = e^\beta,\ (1) \quad \text{και} \quad \ln\alpha - 1 = -\beta\cdot e^\beta + e^\beta,\ (2).$$

Από την (1) με $\alpha > 0$ έχουμε $\ln\frac{1}{\alpha} = \beta \Leftrightarrow -\ln\alpha = \beta$ και η (2) γράφεται ισοδύναμα:

$$\ln\alpha - 1 = \ln\alpha\cdot e^{\ln\frac{1}{\alpha}} + e^{\ln\frac{1}{\alpha}} \Leftrightarrow \ln\alpha - 1 = \frac{\ln\alpha}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) - \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{\alpha - 1}{\alpha} - \frac{\alpha + 1}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow -\ln(\alpha - 1) + (\alpha + 1) = 0,\ (3).$$

Αν $\alpha = 1$, τότε από την (1) βρίσκουμε $\frac{1}{\alpha} = e^\beta \Rightarrow \beta = 0$, οπότε από τη (2) προκύπτει ότι $-1 = 1$ που είναι άτοπο. Άρα $\alpha \neq 1$, οπότε από την (3) έχουμε:

$$-\ln\alpha+\frac{\alpha+1}{\alpha-1}=0\Leftrightarrow f(\alpha)=0.$$

Επομένως, ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

24. 44 **α.** Για $x\neq 1$ η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $f(1)=1$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}}{1}=e^{0}=1.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$, οπότε η f είναι συνεχής στο 1 και συνεπώς είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{e^{x-1}-1}{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1-x+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-x}{(x-1)^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{2(x-1)}\overset{(\alpha)}{=}\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}.$$

Άρα $f'(1)=\frac{1}{2}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,\, f(1))$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon:\ y-f(1)=f'(1)(x-1)\quad \text{ή}\quad \varepsilon:\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

γ. Για $x\neq 1$ είναι $f'(x)=\dfrac{e^{x-1}\cdot(x-1)-\left(e^{x-1}-1\right)\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{xe^{x-1}-2e^{x-1}+1}{(x-1)^2}$, οπότε:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xe^{x-1}-2e^{x-1}+1}{(x-1)^2}, & x\neq 1\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0,\, f(x_0))$ είναι οριζόντια, αν $f'(x_0)=0$ με $x_0\leq 1$. Είναι $f'(1)=\frac{1}{2}$, άρα $x_0\neq 1$.

Για $x\neq 1$ έχουμε $f'(x)=0\Leftrightarrow xe^{x-1}-2e^{x-1}+1=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=xe^{x-1}-2e^{x-1}+1$, $x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=xe^{x-1}+e^{x-1}-2e^{x-1}=e^{x-1}(x-1)$.

- Αν $x>1$, τότε $h'(x)>0$. Άρα, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, οπότε έχουμε $x>1 \Leftrightarrow h(x)>h(1) \Leftrightarrow h(x)>0$. Επομένως $f'(x)>0$ για $x>1$.
- Αν $x<1$, τότε $h'(x)<0$. Άρα, η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$, οπότε έχουμε $x<1 \Leftrightarrow h(x)>h(1) \Leftrightarrow h(x)>0$. Επομένως $f'(x)>0$ για $x<1$.

Άρα $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η C_f δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη.

24. 45 α. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f(x)(f(x)-2x)=x^2(\ln^2 x-1)\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2\ln^2 x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x)-x)^2=(x\ln x)^2\Leftrightarrow |f(x)-x|=x|\ln x|,\ x>0,\ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$, $x>0$ η οποία είναι συνεχής, οπότε η (1) γράφεται ισοδύναμα $|g(x)|=x|f(x)|$ για $x>0$. Έχουμε:

$$g(x)=0\Leftrightarrow |g(x)|=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow} x|\ln x|=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x=0\Leftrightarrow x=1$$

και είναι $\ln x>0\Leftrightarrow x>1$ και $\ln x<0\Leftrightarrow 0<x<1$.

Οπότε οι πιθανοί τύποι της g είναι:

$$g(x)=x\ln x\Leftrightarrow f(x)=x\ln x+x,\ x\in(0, +\infty) \text{ ή}$$

$$g(x)=-x\ln x\Leftrightarrow f(x)=-x\ln x+x,\ x\in(0, +\infty) \text{ ή}$$

$$g(x)=\begin{cases} x\ln x &, x\geq 1\\ -x\ln x, & 0<x<1\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} x\ln x+x &, x\geq 1\\ -x\ln x+x, & 0<x<1\end{cases} \text{ ή}$$

$$g(x)=\begin{cases} -x\ln x, & x\geq 1\\ x\ln x &, 0<x<1\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} -x\ln x+x, & x\geq 1\\ x\ln x+x &, 0<x<1\end{cases} \text{ ή}$$

Είναι $f(e)=2e$ και $f(e^{-2})=-e^{-2}$. Άρα $f(x)=x\ln x+x$, $x\in(0, +\infty)$.

β. Για $x>0$ έχουμε $f(x)=0\Leftrightarrow x(\ln x+1)=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}$.

Είναι:

- $x>e^{-1}\Leftrightarrow \ln x>-1\overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(x)>0$ και
- $0<x<e^{-1}\Leftrightarrow \ln x<-1\overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(x)<0$.

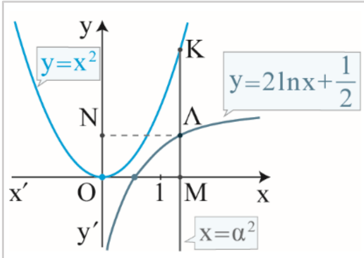
Επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x)=\ln x+2$ και έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x+2=0\Leftrightarrow x=e^{-2}.$$

Είναι $x > e^{-2} \Leftrightarrow \ln x > -2 \Leftrightarrow f'(x) > 0$, οπότε σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα μονοτονίας της f. Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, e^{-2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[e^{-2}, +\infty\right)$.

x	0		e^{-2}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

γ. i. Είναι $M\left[\alpha^2, \alpha\right)$ και $N\left[0, \ln\alpha + \frac{1}{2}\right)$.



Το εμβαδόν του τριγώνου ΜΟΝ είναι:

$$E = \frac{1}{2}\cdot(OM)\cdot(ON) = \frac{1}{2}\alpha^2\left(\ln\alpha + \frac{1}{2}\right).$$

Άρα:

$$E(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}\left(\ln\alpha + \frac{1}{2}\right),\ \alpha > \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

ii. Η Ε είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$, άρα και συνεχής με:

$$E'(\alpha) = \alpha\left(\ln\alpha + \frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{1}{\alpha} = \alpha\ln\alpha + \alpha = f(\alpha).$$

Από το (α) σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα μονοτονίας της συνάρτησης Ε. Άρα, το εμβαδόν αυξάνεται, αν $\alpha \in [1, +\infty)$.

α	0	$1/\sqrt{e}$		1		$+\infty$
$E'(\alpha)$			$-$	0	$+$	
E			$\searrow$		$\nearrow$	

24. 46 α. Η h είναι παραγωγίσιμη στο Α, άρα και συνεχής με:

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{-2x^2 + x + 1}{x} = \frac{(-2x-1)(x-1)}{x}.$$

Έχουμε:

$$h'(x) = 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 1 \text{ και } h'(x) > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} -(2x+1)(x-1) > 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα μονοτονίας της συνάρτησης h. Άρα, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Στο $x_0 = 1$ η C_h έχει οριζόντια εφαπτομένη με εξίσωση:

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$		$\searrow$	

$$\varepsilon: y = h(1) \ \text{ ή } \ \varepsilon: y = 0.$$

β. Για $x > 0$ το κοινό σημείο των C_f και C_g έχει τετμημένη τη λύση της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln x - x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow h(x) = 0,\ (1).$$

Από το (α) βρίσκουμε $h(1)=0$ και $h'(1)=0$. Ισχύουν:

- για $x>1 \Rightarrow h(x)<h(1) \Rightarrow h(x)<0$,
- για $0<x<1 \Rightarrow h(x)>h(1) \Rightarrow h(x)>0$.

Άρα, η $x=1$ είναι η μοναδική λύση της (1) και αφού $h'(1)=0 \Leftrightarrow f'(1)=g'(1)$, οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $N(1,0)$ όπου $f(1)=g(1)=0$.

Είναι $f'(x)=\frac{1}{x}-1$, οπότε $f'(1)=0$. Άρα, η κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g έχει εξίσωση $\varepsilon: y=f(1)$ ή $\varepsilon: y=0$.

γ. Είναι $\frac{2e^x-3}{e^x+1}=\frac{2(e^x+1)-5}{e^x+1}=2-\frac{5}{e^x+1}$. Θέτουμε $\frac{-5}{e^x+1}=h \Leftrightarrow e^x+1=\frac{-5}{h}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+1)=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5}{e^x+1}=0$. Άρα $h\to 0$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(e^x+1)\left(h\left(\frac{2e^x-3}{e^x+1}\right)-\ln 2+2\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-5}{h}\big(h(2+h)-h(2)\big)\right]=-5h'(2)=\frac{25}{2}$$

όπου $h'(2)=\frac{-8+3}{2}=-\frac{5}{2}$.

δ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $h'(x_0)=e$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=h'(x)-e=\frac{1}{x}-2x+1-e$.

Η φ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών με:

- $\varphi\left(\frac{1}{4}\right)=4-\frac{1}{2}+1-e=\frac{9-2e}{e}>0$ και
- $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=2-1+1=2-e<0$.

Οπότε ισχύει $\varphi\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\varphi\left(\frac{1}{2}\right)<0$. Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=0 \Leftrightarrow h'(x_0)=e$. Η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$, άρα το x_0 είναι μοναδικό.

24. 47 α. i. Η δοθείσα γράφεται ισοδύναμα:

$$f^2(x)+x^2=2xf(x)+e^{2\frac{\ln x}{x}} \Leftrightarrow (f(x)-x)^2=\left(e^{\frac{\ln x}{x}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f(x)-x|=e^{\frac{\ln x}{x}} \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty),\ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=f(x)-x,\ x>0.$ Η k είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, οπότε η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$|k(x)|=e^{\frac{\ln x}{x}}>0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Άρα $k(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty),$ οπότε η k διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty).$

Τότε έχουμε:

$$k(x)=e^{\frac{\ln x}{x}} \Leftrightarrow f(x)=x+e^{\frac{\ln x}{x}} \text{ για κάθε } x>0 \text{ ή}$$

$$k(x)=-e^{\frac{\ln x}{x}} \Leftrightarrow f(x)=x-e^{\frac{\ln x}{x}} \text{ για κάθε } x>0.$$

Επειδή $f(1)=2,$ θα είναι $f(x)=x+e^{\frac{\ln x}{x}},\ x>0.$

Είναι $f(0)=0,$ άρα βρίσκουμε τελικά:

$$f(x)=\begin{cases} x+e^{\frac{\ln x}{x}}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=-\infty,$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln x}{x}} \overset{\frac{\ln x}{x}=u}{\underset{u\to-\infty}{=\!=}} \lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0.$

Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x+e^{\frac{\ln x}{x}}\right)=0+0=0=f(0).$$

Άρα, η f είναι συνεχής στο $x_0=0.$

Επιπλέον, η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Άρα, η f είναι συνεχής στο $D_f=[0,+\infty).$

iii. Για $x\in(1,1)$ η ζητούμενη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(x-2)(f(3)-2)+\ln x\cdot(f(e)-2)-2020(x-2)\ln x=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=(x-2)(f(3)-2)+\ln x\cdot(f(e)-2)-2020(x-2)\ln x.$$

Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων με:

$$g(1) = -(f(3)-2) \text{ και } g(2) = \ln 2(f(e)-2).$$

Ισχύουν:

- $1 < 3 \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(1) < f(3) \Rightarrow f(3) + 2 < 0 \Rightarrow g(1) < 0$ και
- $1 < e \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(1) < f(e) \Rightarrow f(e) - 2 > 0 \overset{\ln 2 > 0}{\Rightarrow} g(2) > 0.$

Οπότε ισχύει $g(1) \cdot g(2) < 0.$ Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(3)-2}{\ln x_0} + \frac{f(e)-2}{x_0 - 2} = 2020.$$

β. Η εξίσωση $f(x) + f(x^{20}) = f(x^{31}) + f(x^{47})$ έχει προφανείς ρίζες τις $x = 0$ και $x = 1.$

- Αν $0 < x < 1,$ τότε:

$$\left.\begin{array}{l} x^{31} < x \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x^{31}) < f(x) \\ x^{47} < x^{20} \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x^{47}) < f(x^{20}) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x^{31}) + f(x^{47}) < f(x) + f(x^{20}).$$

- Αν $x > 1,$ τότε:

$$\left.\begin{array}{l} x < x^{31} \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x^{31}) \\ x^{20} < x^{47} \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x^{20}) < f(x^{47}) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) + f(x^{20}) < f(x^{31}) + f(x^{47}).$$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδικές ρίζες τις $x = 0$ και $x = 1.$

γ. Έχουμε:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h^2) + f(1+3h^2) - 4}{h^2} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(1+2h^2) - 2}{h^2} + \frac{f(1+3h^2) - 2}{h^2} \right) = 6 + 9 = 15,$$

αφού:

- $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h^2) - 2}{h^2} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(1+2h^2) - f(1)}{2h^2} \cdot 2 \right) \underset{u \to 0}{\overset{2h^2 = u}{=\!=}}$

$$= 2 \lim_{u \to 0} \left(\frac{f(1+u) - f(1)}{u} \right) = 2f'(1) = 6 \quad \text{και}$$

- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(1+3h^2\right)-2}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f\left(1+3h^2\right)-f\left(1\right)}{3h^2}\cdot 3\right)\underset{u\to 0}{\overset{3h^2=u}{=\!=}}$

$$=3\lim_{u\to 0}\left(\frac{f\left(1+u\right)-f\left(1\right)}{u}\right)=3f'\left(1\right)=9.$$

24. 48 **α.** Η f ορίζεται, αν $e^{2x}-4>0\Leftrightarrow 2x>\ln 4\Leftrightarrow x>\ln 2$.

Συνεπώς $A_f=\left(\ln 2,+\infty\right)$ και είναι $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x}-4\right)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A, άρα και συνεχής με $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}-4}=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-4}>0$

για κάθε $x\in A$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο A.

β. Από το (α) προκύπτει ότι η f είναι 1 – 1 και συνεπώς αντιστρέφεται.
Η f^{-1} ορίζεται στο:

$$f\left(A\right)=\left(\lim_{x\to\ln 2}f\left(x\right),\ \lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)\right)=\mathbb{R},$$

αφού:

- $\lim\limits_{x\to\ln 2}\left(\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x}-4\right)\right)\underset{u\to 0^+}{\overset{e^{2x}-4=u}{=\!=}}\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to\ln 2}\left(\ln u\right)=-\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x}-4\right)\right)\underset{u\to+\infty}{\overset{e^{2x}-4=u}{=\!=}}\dfrac{1}{2}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\ln u\right)=+\infty.$

Για τον τύπο της f^{-1} έχουμε:

$$f\left(x\right)=y\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}-4\right)=y\Leftrightarrow e^{2x}-4=e^{2y}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=\ln\left(e^{2y}+4\right)\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(e^{2y}+4\right).$$

Άρα $f^{-1}\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+4\right)$.

γ. Αν $u=f\left(x\right)$, τότε από το (β) προκύπτει ότι $u\to+\infty$ και το ζητούμενο όριο γράφεται ισοδύναμα:

$$\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{1}{u}\eta\mu u^2+u\eta\mu\frac{1}{u}\right)=0,$$

αφού:

- $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(u\eta\mu\dfrac{1}{u}\right)\underset{x\to 0}{\overset{\frac{1}{u}=x}{=\!=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$ και

- για $u>0$ έχουμε $\left|\frac{1}{u}\cdot ημu^2\right|=\frac{1}{u}\left|ημu^2\right|\le\frac{1}{u}\Leftrightarrow-\frac{1}{u}\le\frac{1}{u}ημu^2\le\frac{1}{u}.$

  Είναι $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{u}\right)=0,\ \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{u}=0.$

  Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\frac{1}{u}ημu^2\right)=0.$

δ. Η συνάρτηση $g(x)=f\left(\ln\left(\sqrt{x}-1\right)\right)$ ορίζεται, αν:

- $x\ge 0,$
- $\sqrt{x}-1>0\Leftrightarrow x>1$ και
- $\ln\left(\sqrt{x}-1\right)\in A\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{x}-1\right)>\ln 2\Leftrightarrow\sqrt{x}-1>2\Leftrightarrow x>9.$

Άρα $D_g=(9,+\infty)$.

24. 49 α. Για οποιοδήποτε σταθερό x έχουμε:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2+\left(f(x)-4x^2\right)t-2}-t\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t^2+\left(f(x)-4x^2\right)t-2}^{\,2}-t^2}{\sqrt{t^2+\left(f(x)-4x^2\right)t-2}+t}\overset{t>0}{=}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{t\left(f(x)-4x^2-\frac{2}{t}\right)}{t\sqrt{1+\frac{f(x)-4x^2}{t}-\frac{2}{t^2}}+t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{f(x)-4x^2-\frac{2}{t}}{\sqrt{1+\frac{f(x)-4x^2}{t}-\frac{2}{t^2}}+1}=\frac{f(x)-4x^2}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)-4x^2}{2}=-\frac{x^2}{2}\Rightarrow f(x)=3x^2.$$

β. **i.** Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=6x$ και $g'(x)=2e^{2x}$.

Αν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ στο οποίο οι C_f και C_g τέμνονται και δέχονται κοινή εφαπτομένη, τότε έχουμε:

$$f(x_0)=g(x_0)\Leftrightarrow 3x_0^2=e^{2x_0},\ (1)\ \text{με}\ x_0\ne 0,\ (2)\ \text{και}$$

$$f'(x_0)=g'(x_0)\Leftrightarrow 6x_0=2e^{2x_0}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}6x_0=6x_0^2\overset{(2)}{\Leftrightarrow}1=x_0.$$

Όμως η (1) δεν επαληθεύεται για $x_0=1$. Άρα, δεν υπάρχει τέτοιο σημείο.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=\ln 3x+x-1,\ x\in\left[\frac{1}{3},1\right]$.

Η k είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{3},1\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων με:

$$k\left(\frac{1}{3}\right)=\ln 1+\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3} \quad \text{και} \quad k(1)=\ln 3+1-1=\ln 3.$$

Οπότε ισχύει $k\left(\frac{1}{3}\right)\cdot k(1)<0$. Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(\frac{1}{3},1\right)$ τέτοιο, ώστε $k(x_0)=0$.

Επιπλέον, η k είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $k'(x)=\frac{1}{x}+1>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Άρα, η k είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε η $k(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα, δηλαδή το $x_0\in\left(\frac{1}{3},1\right)$ είναι μοναδικό.

γ. i. Για $x>0$ είναι $h(x)=3x^2+e^x>0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με:

$$h'(x)=6x+2e^x>0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Άρα, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε είναι 1 – 1 και συνεπώς αντιστρέφεται.

ii. Η h^{-1} ορίζεται στο $h\left([0,+\infty)\right)=\left[h(0),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)=[1,+\infty)$, αφού:

- $h(0)=0+1=1$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+e^x\right)=+\infty$.

Για $x\in h\left([0,+\infty)\right)$ είναι $h\left(h^{-1}(x)\right)=x$ και παραγωγίζοντας βρίσκουμε:

$$h'\left(h^{-1}(x)\right)\cdot\left(h^{-1}\right)'(x)=1.$$

Για $x=1$ είναι $h'\left(h^{-1}(1)\right)\cdot\left(h^{-1}\right)'(1)=1$, (1).

Είναι $h^{-1}(1)=h^{-1}\left(h(0)\right)=0$ και $h'(0)=2$. Άρα $h'\left(h^{-1}(1)\right)=h'(0)=2$, οπότε από την (1) προκύπτει ότι $\left(h^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{2}$.

Η εφαπτομένη της $C_{h^{-1}}$ στο $x_0=1$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-h^{-1}(1)=\left(h^{-1}\right)'(x-1) \text{ ή } \varepsilon: y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}.$$

24. 50 α. Έστω οι συναρτήσεις:

$$h(x)=\ln x+2x,\ x\in A_1=(0,+\infty) \text{ και } g(x)=-x^3+1,\ x\in A_2=\mathbb{R}.$$

- Η συνάρτηση $f\left(\ln x+2x\right)=\left(f\circ h\right)\left(x\right)$ ορίζεται στο:

$$D_1=\left\{x\in A_1 / h\left(x\right)\in A\right\}=\left\{x>0/h\left(x\right)\leq 2\right\}.$$

Είναι $h'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+2>0$ για κάθε $x\in A_1$.

Άρα, η h είναι γνησίως αύξουσα στο A_1, οπότε:

$$h\left(x\right)\leq 2\Leftrightarrow h\left(x\right)\leq h\left(1\right)\leq 2\Leftrightarrow 0<x\leq 1.$$

Επομένως $D_1=\left(0,1\right]$.

- Η συνάρτηση $f\left(-x^3+1\right)=\left(f\circ g\right)\left(x\right)$ ορίζεται στο:

$$D_2=\left\{x\in A_2 / g\left(x\right)\in A\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/-x^3+1\leq 2\right\}=\left[-1,+\infty\right),$$

διότι $-x^3+1\leq 2\Leftrightarrow x^3+1\geq 0\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1.$

Άρα, η συνάρτηση $F\left(x\right)=\left(f\circ h\right)\left(x\right)-\left(f\circ g\right)\left(x\right)$ ορίζεται στο $A=D_1\cap D_2=\left(0,1\right]$.

β. Έστω $x_1,\ x_2\in D$ με:

$$x_1<x_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}h\left(x_1\right)<h\left(x_2\right)\overset{f:\downarrow}{\Rightarrow}f\left(h\left(x_1\right)\right)>f\left(h\left(x_2\right)\right)\\[2ex] -x_1^3+1>-x_2^3+1\overset{f:\downarrow}{\Rightarrow}f\left(-x_1^3+1\right)<f\left(-x_2^3+1\right)\Rightarrow -f\left(g\left(x_1\right)\right)>-f\left(g\left(x_2\right)\right)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(h\left(x_1\right)\right)-f\left(g\left(x_1\right)\right)>f\left(h\left(x_2\right)\right)-f\left(g\left(x_2\right)\right)\Rightarrow F\left(x_1\right)>F\left(x_2\right).$$

Άρα, η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο D.

γ. Για $x\in D$ έχουμε:

$$F\left(x\right)=0\Leftrightarrow f\left(\ln x+2x\right)=f\left(-x^3+1\right)\overset{f:\downarrow}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \ln x+2x=-x^3+1\Leftrightarrow \ln x+2x+x^3-1=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k\left(x\right)=\ln x+2x+x^3-1,\ x\in\left(0,1\right]$.

Η k είναι συνεχής στο D ως πράξεις συνεχών με:

- $k\left(1\right)=2$ και
- $\lim\limits_{x\to 0^+}k\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x+2x+x^3-1\right)=-\infty$, άρα υπάρχει $x_1>0$ κοντά στο 0 με $k\left(x_1\right)<0$.

Οπότε ισχύει $k\left(1\right)\cdot k\left(x_1\right)<0$. Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\alpha\in\left(x_1,1\right)\subseteq\left(0,1\right)$ τέτοιο, ώστε $k\left(\alpha\right)=0\Leftrightarrow F\left(\alpha\right)=0$. Το α είναι μοναδικό, διότι η F είναι γνησίως φθίνουσα στο D.

δ. i. Είναι $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\left(x^2+x-3\right)=\alpha^2+\alpha-3.$

Έχουμε:

- $0<\alpha<1 \Leftrightarrow 0<\alpha^2<1$, άρα $\alpha^2+\alpha<2 \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha-3<-1<0.$

  Είναι $\ln\alpha<0$, οπότε $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{x^2+x-3}{\ln x}=\dfrac{\alpha^2+\alpha-3}{\ln\alpha}>0.$

- $1>x>\alpha \overset{F:\downarrow}{\Leftrightarrow} F(x)<F(0) \Rightarrow F(x)<0$, οπότε $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{1}{F(x)}=-\infty.$

Άρα $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{x^2+x-3}{\ln x\cdot F(x)}=\lim\limits_{x\to\alpha^+}\left(\dfrac{x^2+x-3}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{F(x)}\right)=-\infty.$

ii. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln|x|+x^2}{x^2-x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}+2x}{2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+1}{2x^2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{2x^2}=2.$$

Άρα, υπάρχει $M<0$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{\ln|x|+x^2}{x^2-x}>0 \text{ για κάθε } x<M \text{ και } \lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty.$$

Επίσης, έχουμε:

$$x\le 2 \overset{f:\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)\ge f(2) \Rightarrow f(x)\cdot\frac{\ln|x|+x^2}{x^2-x}\cdot e^{-x}\ge\frac{\ln|x|+x^2}{x^2-x}\cdot e^{-x}\cdot f(2).$$

Επειδή $f(2)>0$, θα είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\ln|x|+x^2}{x^2-x}\cdot e^{-x}\cdot f(2)\right)=+\infty$, άρα:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)\cdot\frac{\ln|x|+x^2}{x^2-x}\cdot e^{-x}\right)=+\infty.$$

24. 51 α. Είναι $D_f=(1,+\infty)$ και $D_g=\mathbb{R}$. Η $f\circ g$ ορίζεται για:

$$\begin{cases}x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ e^x\in(1,+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ e^x>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0,+\infty).$$

Άρα $D_{f\circ g}=(0,+\infty)$ και η $f\circ g$ έχει τύπο $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{g(x)+2}{g(x)-1}=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}.$

β. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ η $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο:

$$(f\circ g)'(x)=\left(\frac{e^x+2}{e^x-1}\right)'=\frac{e^x\left(e^x-1\right)-\left(e^x+2\right)e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=-\frac{3e^x}{\left(e^x-1\right)^2}<0$$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Άρα, η $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε θα είναι $1-1$.

Επιπλέον, η $f \circ g$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών:

$$(f \circ g)\big((0, +\infty)\big) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = (1, +\infty),$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+2}{e^x-1} \underset{u\to+\infty}{\overset{u=e^x}{=\!=}} \lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{u+2}{u-1} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x+2}{e^x-1} \underset{u\to 1^+}{\overset{u=e^x}{=\!=}} \lim\limits_{u\to 1^+} \dfrac{u+2}{u-1} = +\infty$.

Επομένως, η $(f \circ g)^{-1}$ ορίζεται στο $(f \circ g)\big((0, +\infty)\big) = (1, +\infty)$ και για $y > 1$ έχουμε:

$$(f \circ g)(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x+2}{e^x-1} = y \Leftrightarrow e^x + 2 = y\left(e^x - 1\right) \Leftrightarrow e^x(1-y) = -y-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right).$$

Άρα $(f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$ με $x > 1$.

γ. Η $\varphi(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$ με $x > 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $D_\varphi = (1, +\infty)$ με:

$$\varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x+2)(x-1)} < 0 \text{ για κάθε } x > 1.$$

Άρα, η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

δ. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right) = \lim\limits_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$, διότι αν $u = \dfrac{x+2}{x-1}$ με $x \to 1^+$, τότε το $u \to +\infty$.

Επιπλέον $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right) = \lim\limits_{u\to 1} \ln u = 0$, διότι αν $u = \dfrac{x+2}{x-1}$ με $x \to +\infty$, τότε το $u \to \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{x-1} = 1$.

1ο

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα Α

Α1. Θεωρία.

Α2. Θεωρία.

Α3. Θεωρία.

Α4. **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος.

Θέμα Β

Β1. Από τη σχέση $x^2-1<f(x)<e^x$ η οποία ισχύει για κάθε $x\geq 0$ προκύπτουν τα εξής:

- Για $x=1$ είναι $0<f(1)<e$, (1).
- Για $x=2$ είναι $3<f(2)<e^2$, (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $0<f(1)<e<3<f(2)<e^2$, δηλαδή $f(1)<f(2)$. Επομένως, ισχύουν $1<2$ και $f(1)<f(2)$. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως αύξουσα.

Β2. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=x+1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 2)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x-1$, $x\in[0, +\infty)$. Η h είναι συνεχής στο $[0, 2]$ ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων $f(x)$ και $-x-1$.

Από τη σχέση $x^2-1<f(x)<e^x$ έχουμε:

$$x^2-1-x<f(x)-x<e^x-x \Leftrightarrow x^2-1-x-1<f(x)-x-1<e^x-x-1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-2<h(x)<e^x-x-1.$$

Η σχέση αυτή:

- για $x=0$ γίνεται $-2<h(0)<0$, άρα $h(0)<0$,
- για $x=2$ γίνεται $0<h(2)<e^2-3$, άρα $h(2)>0$.

Οπότε ισχύει $h(0)\cdot h(2)<0$. Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\alpha\in(0, 2)$ τέτοιο, ώστε η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)-x-1=0\Leftrightarrow f(x)=x+1$ να έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 2)$.

Β3. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = [0, +\infty)$, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$. Για $x = 0$ η σχέση $x^2 - 1 < f(x) < e^x$ γίνεται $-1 < f(0) < 1$, οπότε $f(x) \neq -1$ για κάθε $x \geq 0$. Άρα $A_g = [0, +\infty)$.

Η g γράφεται στη μορφή $g(x) = \dfrac{f(x)}{f(x)+1} = \dfrac{f(x)+1-1}{f(x)+1} = 1 - \dfrac{1}{f(x)+1}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \overset{f:\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1)+1 < f(x_2)+1 \overset{(*)}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{f(x_1)+1} > \frac{1}{f(x_2)+1} \Rightarrow -\frac{1}{f(x_1)+1} < -\frac{1}{f(x_2)+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{f(x_1)+1} < 1 - \frac{1}{f(x_2)+1} \Rightarrow g(x_1) < g(x_2).$$

Άρα, η g γνησίως αύξουσα.

(*) Παρατήρηση

Έχουμε $0 < x_1 < x_2 \overset{f:\uparrow}{\Rightarrow} f(0) < f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f(0)+1 < f(x_1)+1 < f(x_2)+1$.
Επειδή $-1 < f(0) < 1 \Rightarrow 0 < f(0)+1 < 2$, οι αριθμοί $f(x_1)+1$, $f(x_2)+1$ θα είναι ομόσημοι.

Θέμα Γ

Γ1. Α΄ τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2f(x) - f(-2) - f(3)$, $x \in [-2, 3]$.

Η g συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-2, 3]$ και έχουμε:

- $g(-2) = 2f(-2) - f(-2) - f(3) = f(-2) - f(3) > 0$,

  διότι $-2 < 3 \overset{f:\downarrow}{\Rightarrow} f(-2) > f(3) \Rightarrow f(-2) - f(3) > 0$,
- $g(3) = 2f(3) - f(-2) - f(3) = f(3) - f(-2) < 0$.

Οπότε ισχύει $g(-2)\cdot g(3) < 0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-2, 3)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2f(x_0) - f(-2) - f(3) = 0 \Leftrightarrow 2f(x_0) = f(-2) + f(3).$$

Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,3]$, διότι για κάθε $x_1, x_2 \in [-2,3]$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \overset{f:\downarrow}{\Rightarrow} f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow 2f(x_1) > 2f(x_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2f(x_1) - f(-2) - f(3) > 2f(x_2) - f(-2) - f(3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g(x_1) > g(x_2).$$

Άρα, το x_0 είναι μοναδικό.

Β΄ τρόπος

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = [-2,3]$, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(\Delta) = [f(3), f(-2)]$. Επομένως, για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(3) \le f(x) \le f(-2)$, (1).

- Για $x = -2$ η (1) γίνεται $f(3) < f(-2) \le f(-2)$, (2).
- Για $x = 3$ η (1) γίνεται $f(3) \le f(3) < f(-2)$, (3).

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$2f(3) < f(-2) + f(3) < 2f(-2) \Leftrightarrow f(3) < \frac{f(-2)+f(3)}{2} < f(-2).$$

Ο αριθμός $\dfrac{f(-2)+f(3)}{2}$ ανήκει στο $f(\Delta)$, άρα υπάρχει $x_0 \in \Delta$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = \frac{f(-2)+f(3)}{2} \Leftrightarrow 2f(x_0) = f(-2) + f(3).$$

◦ Αν $x_0 = -2$, τότε $2f(-2) = f(-2) + f(3) \Leftrightarrow f(-2) = f(3) \underset{f:\downarrow}{\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}} -2 = 3$, άτοπο.

◦ Αν $x_0 = 3$, τότε $2f(3) = f(-2) + f(3) \Leftrightarrow f(3) = f(-2) \underset{f:\downarrow}{\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}} 3 = -2$, άτοπο.

Άρα $x_0 \in (-2,3)$. Επιπλέον, το x_0 είναι μοναδικό (απόδειξη όπως στον Α΄ τρόπο).

Γ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (3x-7)(f(x) - f(-2)) - (x+1)(f(3) - f(x))$, $x \in \Delta$.

Υπολογίζουμε τις τιμές $h(-2)$, $h(x_0)$, $h(3)$.

- $h(-2) = (3\cdot(-2)-7)(f(-2) - f(-2)) - (-2+1)(f(3) - f(-2)) = f(3) - f(-2) < 0$,

  διότι $-2 < 3 \overset{f:\downarrow}{\Rightarrow} f(-2) > f(3) \Rightarrow f(3) - f(-2) < 0$.

- $h(x_0) = (3x_0 - 7)(f(x_0) - f(-2)) - (x_0+1)(f(3) - f(x_0)) =$

$$= (3x_0 - 7)\left(\frac{f(3)-f(-2)}{2}\right) - (x_0+1)\left(\frac{f(3)-f(-2)}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{f(3)-f(-2)}{2}\right)(3x_0 - 7 - x_0 - 1) = \left(\frac{f(3)-f(-2)}{2}\right)(2x_0 - 8) > 0,$$

διότι:

$$-2 < x_0 < 3 < 4 \Rightarrow -4 < 2x_0 < 8 \Rightarrow 2x_0 - 8 < 0 \quad \text{και}$$

$$-2 < 3 \overset{f:\downarrow}{\Rightarrow} f(-2) > f(3) \Rightarrow f(3) - f(-2) < 0.$$

- $h(3) = (3\cdot 3 - 7)\big(f(3) - f(-2)\big) - (3+1)\big(f(3) - f(3)\big) = 2\big(f(3) - f(-2)\big) < 0,$

  διότι $f(3) - f(-2) < 0$.

Η h είναι συνεχής στο $[-2,\ x_0]$ και ισχύει $h(-2)\cdot h(x_0) < 0$.

Συνεπώς, η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-2,\ x_0)$.

Η h είναι συνεχής στο $[x_0,\ 3]$ και ισχύει $h(3)\cdot h(x_0) < 0$.

Συνεπώς, η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(x_0,\ 3)$.

Άρα, η εξίσωση:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow (3x - 7)\big(f(x) - f(-2)\big) - (x+1)\big(f(3) - f(x)\big) = 0$$

έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-2,\ 3)$.

Γ3. Ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$$\varphi(x) = \ln|x-1| = \begin{cases} \ln(1-x), & x < 1 \\ \ln(x-1), & x > 1 \end{cases}.$$

Για $x < 1$ έχουμε:

$$\ln(1-x) > 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) > \ln 1 \Leftrightarrow 1 - x > 1 \Leftrightarrow x < 0 \quad \text{και}$$

$$\ln(1-x) < 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) < \ln 1 \Leftrightarrow 1 - x < 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

Για $x > 1$ έχουμε:

$$\ln(x-1) > 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) > \ln 1 \Leftrightarrow x - 1 > 1 \Leftrightarrow x > 2 \quad \text{και}$$

$$\ln(x-1) < 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) < \ln 1 \Leftrightarrow x - 1 < 1 \Leftrightarrow x < 2.$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$\ln\|x-1\|$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Ή

- $\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow \ln|x-1| > 0 \Leftrightarrow \ln|x-1| > \ln 1 \Leftrightarrow |x-1| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 1 \\ \text{ή} \\ x - 1 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \text{ή} \\ x < 0 \end{cases}.$

- $\varphi(x) < 0 \Leftrightarrow \ln|x-1| < 0 \Leftrightarrow \ln|x-1| < \ln 1 \Leftrightarrow |x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$

Για κάθε $x \in [-2,\ 3]$ ισχύει $f(3) \le f(x) \le f(-2)$, οπότε έχουμε:

$$f(3)\le f\left(\frac{1}{1+\eta\mu(x-1)}\right)\le f(-2)\Leftrightarrow \frac{f(3)}{\ln|x-1|}\ge \frac{f\left(\frac{1}{1+\eta\mu(x-1)}\right)}{\ln|x-1|}\ge \frac{f(-2)}{\ln|x-1|}$$

όπου θεωρήσαμε $\ln|x-1|<0$ κοντά στο 1.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\ln|x-1|=-\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\ln|x-1|}=0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(3)}{\ln|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(-2)}{\ln|x-1|}=0.$

Συνεπώς, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f\left(\frac{1}{1+\eta\mu(x-1)}\right)}{\ln|x-1|}=0.$

Γ4. Η συνάρτηση $g(x)=f\left(e^x+x-3\right)$ είναι σύνθεση της συνάρτησης $m(x)=e^x+x-3$ με $A_m=\mathbb{R}$ και της συνάρτησης $f(x)$ με $A_f=\Delta=[-2,3]$. Άρα $g(x)=(f\circ m)(x)$ και για το πεδίο ορισμού της g πρέπει να ισχύουν:

$$\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ \text{και} \\ -2\le e^x+x-3\le 3 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ \text{και} \\ 0\le e^x+x-1\le 5 \end{cases}.$$

Επομένως $A_g\ne\varnothing$.

Έστω η συνάρτηση $k(x)=e^x+x-1$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $k(0)=0$, οπότε για κάθε $x\ge 0$ έχουμε $x\ge 0\Leftrightarrow k(x)\ge k(0)\Leftrightarrow e^x+x-1\ge 0.$

Το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

Άρα, υπάρχει μοναδικό $\alpha>0$ τέτοιο, ώστε $k(\alpha)=5$.

Επομένως, έχουμε $x\le\alpha\Leftrightarrow k(x)\le k(\alpha)\Leftrightarrow k(x)\le 5$, οπότε το πεδίο ορισμού της είναι το $D=[0,\alpha]$.

Επιπλέον, η $m(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η σύνθεσή τους $g=f\circ m$ είναι γνησίως φθίνουσα, αφού για $x_1,x_2\in D$ έχουμε:

$$x_1<x_2\overset{m\uparrow}{\Rightarrow} m(x_1)<m(x_2)\overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f\left(m(x_1)\right)>f\left(m(x_2)\right)\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2).$$

Θέμα Δ

Δ1. Ισχύει ότι $f^3(x)+3f(x)=e^x-1$ για κάθε $x\ge 0$, (1).

Για $x=\alpha$ έχουμε $f^3(\alpha)+3f(\alpha)=e^\alpha-1$ και με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$f^3(x)-f^3(\alpha)+3f(x)-3f(\alpha)=e^x-e^\alpha\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)-f(\alpha)\right)\left(f^2(x)+f(x)\cdot f(\alpha)+f^2(\alpha)\right)+3\left(f(x)-f(\alpha)\right)=e^x-e^\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(f(x)-f(\alpha)\right)\left(f^2(x)+f(x)\cdot f(\alpha)+f^2(\alpha)+3\right)=e^x-e^\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(f(x)-f(\alpha)\right)=\frac{e^x-e^\alpha}{f^2(x)+f(x)\cdot f(\alpha)+f^2(\alpha)+3}.$$

Η παράσταση $f^2(x)+f(x)\cdot f(\alpha)+f^2(\alpha)$ είναι θετική για κάθε $\alpha,\ x\geq 0$, διότι:

$$f^2(x)+f(x)\cdot f(\alpha)+f^2(\alpha)=\frac{1}{2}\left(2f^2(x)+2f(x)\cdot f(\alpha)+2f^2(\alpha)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[f^2(\alpha)+\left(f(x)+f(\alpha)\right)^2+f^2(\alpha)\right]>0.$$

Επομένως, είναι $\left|f(x)-f(\alpha)\right|=\left|\frac{e^x-e^\alpha}{f^2(x)+f(x)\cdot f(\alpha)+f^2(\alpha)+3}\right|<\frac{\left|e^x-e^\alpha\right|}{3}<\left|e^x-e^\alpha\right|$ από την οποία έχουμε:

$$-\left|e^x-e^\alpha\right|<f(x)-f(\alpha)<\left|e^x-e^\alpha\right|.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to\alpha}\left|e^x-e^\alpha\right|=\lim\limits_{x\to\alpha}\left(-\left|e^x-e^\alpha\right|\right)=0$, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to\alpha}\left(f(x)-f(\alpha)\right)=0\Leftrightarrow \lim_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha).$$

Άρα, η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Δ2. Α΄ τρόπος

Έστω οι συναρτήσεις $g(x)=x^3+3x$, $x\in\mathbb{R}$ και $h(x)=e^x-1$.

Τότε η δοθείσα γράφεται ισοδύναμα $g\left(f(x)\right)=h(x)$ για κάθε $x\geq 0$.

Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα και η $g\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x_1,\ x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{\ 3}<x_2^{\ 3} \\ 3x_1<3x_2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} x_1^{\ 3}+3x_1<x_2^{\ 3}+3x_2\Rightarrow g(x_1)<g(x_2).$$

Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Επιπλέον, για κάθε $x_1,\ x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)\Leftrightarrow g\left(f(x_1)\right)<g\left(f(x_2)\right)\overset{g:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Β΄ τρόπος

Για κάθε $x_1,\ x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} f^3(x_1) + 3f(x_1) < f^3(x_2) + 3f(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^3(x_1) + 3f(x_1) - f^3(x_2) - 3f(x_2) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(f(x_1) - f(x_2)\right)\left(f^2(x_1) + f(x_1)\cdot f(x_2) + f^2(x_2) + 3\right) < 0, \ (2).$$

Η παράσταση $f^2(x_1) + f(x_1)\cdot f(x_2) + f^2(x_2)$ είναι θετική για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ (βλ. Α΄ τρόπο).

Επομένως, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Δ3. Η συνάρτηση $g(x) = x^3 + 3x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και είναι συνεχής ως πολυωνυμική, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $g(A) = \left[g(0), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right) = [0, +\infty)$, διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3 + 3x\right) = +\infty$.

Άρα $g(x) + 1 = x^3 + 3x + 1 \geq 1 > 0$ για κάθε $x \geq 0$, (3).

Επιπλέον, η f αντιστρέφεται, οπότε $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ και η (1) γίνεται:

$$y^3 + 3y + 1 = e^{f^{-1}(y)} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y) = \ln\left(y^3 + 3y + 1\right) \text{ ή } f^{-1}(x) = \ln\left(x^3 + 3x + 1\right)$$

με $x \in [0, +\infty)$.

Άρα $f(A) = A_{f^{-1}} = [0, +\infty)$.

Δ4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^{-1}(x) - \ln\left(x^3 + 2x + 7\right)}{x^3 - \eta\mu(2017x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^3 + 3x + 1\right) - \ln\left(x^3 + 2x + 7\right)}{x^3 - \eta\mu(2017x)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{x^3 + 3x + 1}{x^3 + 2x + 7}\right)}{x^3 - \eta\mu(2017x)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^3 + 3x + 1}{x^3 + 2x + 7}\right) \frac{1}{x^3\left(1 - \dfrac{1}{x^3}\eta\mu(2017x)\right)}.$$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 + 3x + 1}{x^3 + 2x + 7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^3} = 1$ και αν $u = \dfrac{x^3 + 3x + 1}{x^3 + 2x + 7}$, τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^3 + 3x + 1}{x^3 + 2x + 7}\right) = \lim_{u\to1} \ln u = \ln 1 = 0,$$

- $\left|\frac{1}{x^3}\eta\mu(2017x)\right| \le \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^3} \le \frac{1}{x^3}\eta\mu(2017x) \le \frac{1}{x^3}$, διότι $x > 0$.

  Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3} = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}\eta\mu(2017x) = 0.$$

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\eta\mu(2017x)\right)} = 0\cdot\frac{1}{1-0} = 0.$$

Επομένως, το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)-\ln\left(x^3+2x+7\right)}{x^3-\eta\mu(2017x)} = 1\cdot 0 = 0.$$

2ο

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα A

A1. Θεωρία.

A2. Θεωρία.

A3. Θεωρία.

A4. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος.

Θέμα B

B1. • Πρέπει $\lim\limits_{x\to-\beta^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-\beta^+} f(x) = f(-\beta)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\beta^-} f(x) = \dfrac{2}{\beta}$, $\lim\limits_{x\to-\beta^+} f(x) = 2$, $f(-\beta) = 2$, οπότε $\dfrac{2}{\beta} = 2 \Leftrightarrow \beta = 1$.

• Πρέπει $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = \dfrac{2}{\alpha}$, $f(\alpha) = 2$, οπότε $\dfrac{2}{\alpha} = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

B2. Για $\alpha = \beta = 1$ η συνάρτηση f γίνεται $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x}, & x < -1 \\ 2, & -1 \le x \le 1. \\ \dfrac{2}{x}, & x > 1 \end{cases}$

• Έχουμε:

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1^-} \frac{-\frac{2}{x}-2}{x+1} = \lim_{x\to-1^-} \frac{-2}{x} = 2 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1^+} \frac{2-2}{x+1} = 0.$$

Συνεπώς, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_1 = -1$. Άρα, η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2-2}{x-1}=0$ και $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\frac{2}{x}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-2}{x}=-2.$

  Συνεπώς, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_2=1$.

Άρα, το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη είναι το σύνολο $A=\mathbb{R}-\{\pm2\}$.

B3. Έστω (ε_1), (ε_2) οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_0,f(x_0))$ και $B(-x_0,f(-x_0))$ αντίστοιχα. Τότε έχουμε:

$$\varepsilon_1: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=\frac{-2}{x_0^2}x+\frac{4}{x_0} \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_2: y-f(-x_0)=f'(-x_0)(x+x_0)\Leftrightarrow y=\frac{2}{x_0^2}x+\frac{4}{x_0}.$$

B4. Για να βρούμε το σημείο τομής, λύνουμε το σύστημα των (ε_1), (ε_2). Έχουμε:

$$\begin{cases}\varepsilon_1: y=\dfrac{-2}{x_0^2}x+\dfrac{4}{x_0}\\ \varepsilon_2: y=\dfrac{2}{x_0^2}x+\dfrac{4}{x_0}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{-2}{x_0^2}x+\dfrac{4}{x_0}\\ 2y=\dfrac{8}{x_0}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4}{x_0}=\dfrac{-2}{x_0^2}x+\dfrac{4}{x_0}\\ y=\dfrac{4}{x_0}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\dfrac{4}{x_0}\end{cases}.$$

Επομένως, το σημείο τομής είναι το $M\left(0,\dfrac{4}{x_0}\right)$.

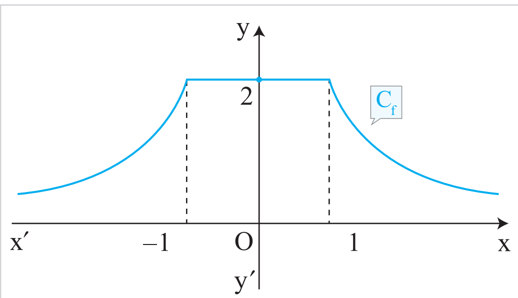
Έστω $x=0$, $y=\dfrac{4}{x_0}$. Τότε, «αρχικά» το M κινείται πάνω στον άξονα $y'y$.

Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{4}{x}$ με $x\in\Delta=(1,+\infty)$. Επειδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα

και συνεχής στο Δ, θα είναι $\varphi(\Delta)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x),\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)\right)=(0,4)$.

Επομένως, το σημείο M κινείται στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ με Κ(0, 0), Λ(0, 4) με εξαίρεση τα άκρα Κ και Λ.

B5.



Β6. Η f είναι συνεχής στο $[-\kappa, \kappa]$, οπότε θα ισχύει $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in [-\kappa, \kappa]$.

Για $x = \frac{\kappa}{2} \in [-\kappa, \kappa]$ είναι $m \le f\left(\frac{\kappa}{2}\right) \le M \Leftrightarrow 3m \le 3f\left(\frac{\kappa}{2}\right) \le 3M$.

Για $x = -\frac{\kappa}{2} \in [-\kappa, \kappa]$ είναι $m \le f\left(-\frac{\kappa}{2}\right) \le M \Leftrightarrow 2m \le 2f\left(-\frac{\kappa}{2}\right) \le 2M$.

Για $x = \frac{\kappa}{3} \in [-\kappa, \kappa]$ είναι $m \le f\left(\frac{\kappa}{3}\right) \le M \Leftrightarrow 4m \le 4f\left(\frac{\kappa}{3}\right) \le 4M$.

Για $x = -\frac{\kappa}{3} \in [-\kappa, \kappa]$ είναι $m \le f\left(-\frac{\kappa}{3}\right) \le M$.

Επομένως:

$$10m \le 3f\left(\frac{\kappa}{2}\right) + 2f\left(-\frac{\kappa}{2}\right) + 4f\left(\frac{\kappa}{3}\right) + f\left(-\frac{\kappa}{3}\right) \le 10M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \le \frac{3f\left(\frac{\kappa}{2}\right) + 2f\left(-\frac{\kappa}{2}\right) + 4f\left(\frac{\kappa}{3}\right) + f\left(-\frac{\kappa}{3}\right)}{10} \le M. \ .$$

- Αν $m = M$ τότε για κάθε $x \in [-\kappa, \kappa]$ θα ισχύει:

$$f(x) = \frac{3f\left(\frac{\kappa}{2}\right) + 2f\left(-\frac{\kappa}{2}\right) + 4f\left(\frac{\kappa}{3}\right) + f\left(-\frac{\kappa}{3}\right)}{10}.$$

  Άρα, το ξ είναι οποιοδήποτε $x \in [-\kappa, \kappa]$.

- Αν $m < M$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-\kappa, \kappa)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = \frac{3f\left(\frac{\kappa}{2}\right) + 2f\left(-\frac{\kappa}{2}\right) + 4f\left(\frac{\kappa}{3}\right) + f\left(-\frac{\kappa}{3}\right)}{10}.$$

Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε:

$$f(x) - 1 = \frac{2\ln x}{f(x)+1} \Leftrightarrow f^2(x) - 1 = 2\ln x \Leftrightarrow f^2(x) = 2\ln x + 1 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{2\ln x + 1}$$

και είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2\ln x + 1} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$.

Επομένως, για κάθε $x > e^{-\frac{1}{2}}$ η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο.

Επειδή $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[\left(\frac{1}{2} - f(1)\right)x^3 + x^2 + 1\right] = +\infty$, πρέπει $\frac{1}{2} - f(1) \le 0 \Leftrightarrow f(1) \ge \frac{1}{2} > 0$.

Επομένως θα ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x>e^{-\frac{1}{2}}$.

Άρα:

$$f(x)=\sqrt{2\ln x+1},\quad x\geq e^{-\frac{1}{2}}.$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Λόγω του περιορισμού $f(x)\neq -1$, το ερώτημα λύνεται και χωρίς τη βοήθεια του ορίου υπολογίζοντας το $f(1)$, διότι είναι:

$$f^2(1)=2\ln 1+1\Leftrightarrow f^2(1)=1\Leftrightarrow f(1)=1 \text{ ή } f(1)=-1 \text{ που απορρίπτεται.}$$

Γ2. Για κάθε $x_1, x_2\in\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow \ln x_1<\ln x_2\Rightarrow 2\ln x_1<2\ln x_2\Rightarrow 2\ln x_1+1<2\ln x_2+1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt{2\ln x_1+1}<\sqrt{2\ln x_2+1}.$$

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και αντιστρέψιμη.

Μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μονοτονία και με το πρόσημο της f'.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{2\ln x+1}}>0$ για $x>e^{-\frac{1}{2}}>0$, άρα $f\uparrow\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο Α, θα είναι:

$$f(A)=\left[f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right), \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[0, +\infty).$$

Οπότε για κάθε $x\in\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ και $y\in[0, +\infty)$ λύνουμε την εξίσωση $y=f(x)$

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\sqrt{2\ln x+1}\Leftrightarrow\frac{y^2-1}{2}=\ln x\Leftrightarrow x=e^{\frac{y^2-1}{2}},$$

Άρα $f^{-1}(x)=e^{\frac{x^2-1}{2}}$, $x\in[0, +\infty)$.

Γ3. Έστω $K(\xi, f(\xi))$ το σημείο επαφής μεταξύ της C_f και της εφαπτομένης.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $K(\xi, f(\xi))$ είναι:

$$\varepsilon: y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)\Leftrightarrow y=\frac{1}{\xi\sqrt{2\ln\xi+1}}x+\frac{2\ln\xi}{\sqrt{2\ln\xi+1}}.$$

Επειδή η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων, θα έχουμε:

$$0=\frac{1}{\xi\sqrt{2\ln\xi+1}}\cdot 0+\frac{2\ln\xi}{\sqrt{2\ln\xi+1}}\Leftrightarrow\frac{2\ln\xi}{\sqrt{2\ln\xi+1}}=0\Leftrightarrow\ln\xi=0\Leftrightarrow\xi=1.$$

Για $\xi=1$ η εξίσωση της (ε) γίνεται ε: $y=x$.

Γ4. Στο σημείο $M\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\varepsilon:\ y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)\Leftrightarrow y=\frac{1}{x_0\sqrt{2\ln x_0+1}}x+\frac{2\ln x_0}{\sqrt{2\ln x_0+1}}.$$

Για να διέρχεται από το $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{1}{2}=\frac{2\ln x_0}{\sqrt{2\ln x_0+1}}\Leftrightarrow 4\ln x_0=\sqrt{2\ln x_0+1}\Leftrightarrow 4\ln x_0-\sqrt{2\ln x_0+1}=0.$$

Έστω η συνάρτηση $q\left(x\right)=4\ln x-\sqrt{2\ln x+1}$, $x\in\left[1,e\right]$.

Η q είναι συνεχής στο διάστημα [1, e] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων με $q(1)=-1<0$ και $q\left(e\right)=4-\sqrt{3}>0$.

Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(1,e\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$q\left(x_0\right)=0\Leftrightarrow 4\ln x_0-\sqrt{2\ln x_0+1}=0=0.$$

Επιπλέον, έχουμε:

$$q'\left(x\right)=\frac{4}{x}-\frac{\frac{2}{x}}{2\sqrt{2\ln x+1}}=\frac{4}{x}-\frac{1}{x\sqrt{2\ln x+1}}=\frac{4\sqrt{2\ln x+1}-1}{x\sqrt{2\ln x+1}}>0 \text{ για } x\in\left[1,e\right].$$

Συνεπώς $q\uparrow\left[1,e\right]$, οπότε η ρίζα $x_0\in\left(1,e\right)$ είναι μοναδική.

Γ5. Έχουμε:

- $$\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x\right)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=f'\left(1\right)=1.$$
- $$\lim_{x\to e}\frac{xf\left(x\right)-ef\left(e\right)}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{xf\left(x\right)-xf\left(e\right)+xf\left(e\right)-ef\left(e\right)}{x-e}=$$

$$=\lim_{x\to e}\frac{x\left(f\left(x\right)-f\left(e\right)\right)-f\left(e\right)\left(x-e\right)}{x-e}=$$

$$=\lim_{x\to e}\left[x\frac{f\left(x\right)-f\left(e\right)}{x-e}-f\left(e\right)\right]=ef'\left(e\right)-f\left(e\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}.$$

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$, οπότε θα υπάρχει αριθμός $\kappa\in(M,+\infty)$ όπου M πολύ μεγάλος αριθμός τέτοιος, ώστε $g(\kappa)>0$. Επίσης, ισχύει $g(1)=-1<0$.

Η $g(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}$ είναι συνεχής στο [1, κ] με $g(1)\cdot g(\kappa)<0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,\kappa)\subseteq(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$. Επιπλέον, για κάθε $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow \ln x_1<\ln x_2 \text{ και } x_1<x_2\Rightarrow \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\Rightarrow -\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{x_2}.$$

Οπότε, με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι $g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\uparrow(1,+\infty)$.

Επομένως η ρίζα $x_0\in(1,+\infty)$ είναι μοναδική.

Δ2. Είναι $x>x_0\overset{g:\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(x_0)\Leftrightarrow g(x)>0$. Άρα $f(x)g(x)=1\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{g(x)}$.

Για κάθε $x_1,\ x_2\in(x_0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\overset{g:\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x_1)<g(x_2)\Leftrightarrow \frac{1}{g(x_1)}>\frac{1}{g(x_2)}\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Άρα $f\downarrow(x_0,+\infty)$.

Δ3. Έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{g(x)}=+\infty$.

Δ4. Έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x^x=\lim\limits_{x\to x_0}(x\ln x)=x_0\ln x_0=x_0\dfrac{1}{x_0}=1$.

Επίσης, είναι $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{g(x)}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{g(x)}=-\infty$.

Άρα, το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g(x)}$ δεν υπάρχει.

Δ5. Επειδή $f\downarrow(x_0,+\infty)$, η f είναι 1 – 1, άρα και αντιστρέψιμη. Έχουμε:

$$A=(x_0,+\infty)\ \underset{\text{συνεχής}}{\overset{f:\downarrow}{=}}\ f(A)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to x_0^+} f(x)\right)=(0,+\infty),$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{g(x)}=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{g(x)}=+\infty$.

Επομένως, το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι $D_{f^{-1}} = f(A) = (0, +\infty)$.

Δ6. Έστω η συνάρτηση $q(x) = (x-1) + (x - x_0)g^2(x),\ x \in [1, x_0]$.

Η q είναι συνεχής στο διάστημα $[1, x_0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων με $q(1) = (1 - x_0)g^2(1) < 0$ και $q(x_0) = x_0 - 1 > 0$.

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x_0)$ τέτοιο, ώστε:

$$q(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{g(\xi)}}{\xi - x_0} + \frac{g(\xi)}{\xi - 1} = 0.$$

3ο

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα Α

A1. Θεωρία.

A2. Θεωρία.

A3. Θεωρία.

A4. **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος.

Θέμα Β

B1. Για $x=0$ είναι $f(0)=-2f(0) \Leftrightarrow f(0)=0$ και για $x=2$ είναι $f(2)=\dfrac{4f(1)}{6}+2 \Leftrightarrow f(2)=6$.

Επομένως $f(x)=x^2+x,\ x\in\mathbb{R}$.

B2. Αν $f(x)=x^2+x \Leftrightarrow f(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$ με $x<-\dfrac{1}{2}$, τότε είναι $f'(x)=2x+1<0$ για κάθε $x<-\dfrac{1}{2}$.

Άρα $f\downarrow\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$, οπότε είναι $1-1$ και συνεπώς αντιστρέφεται.

Θέτουμε $y=f(x)$ και έχουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\overset{y>-\frac{1}{4}}{\Leftrightarrow}\sqrt{y+\frac{1}{4}}=\left|x+\frac{1}{2}\right|\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}-\sqrt{y+\frac{1}{4}},\ y>-\frac{1}{4}.$$

Άρα $f^{-1}(x)=-\dfrac{1}{2}-\sqrt{x+\dfrac{1}{4}},\ x>-\dfrac{1}{4}$.

B3. Για το πεδίο ορισμού της $f\circ f$ πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l} x\in D_f \\ f(x)\in D_f \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x<-\dfrac{1}{2} \\ x^2+x+\dfrac{1}{2}<0 \end{array}\right\}$$

που είναι αδύνατον, διότι $x^2+x+\frac{1}{2}>0$ $(\Delta<0)$. Επομένως η $f\circ f$ δεν ορίζεται.

Β4. Είναι $g(x)=\frac{x+1}{f(x)}=\frac{x+1}{x^2+x}=\frac{1}{x}$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

Συνεπώς, η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$.

Β5. Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+3x\right)=+\infty$.

Θέμα Γ

Γ1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$x^2+1>x^2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>|x|\Leftrightarrow-\sqrt{x^2+1}<x<\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow-2\sqrt{x^2+1}<x-\sqrt{x^2+1}<0\Leftrightarrow g(x)<0.$$

Ομοίως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$x^2+1>x^2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>|x|\Leftrightarrow-\sqrt{x^2+1}<x<\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0<x+\sqrt{x^2+1}<2\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow\Leftrightarrow h(x)>0.$$

Γ2. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\overset{x>0}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1-1}{1+1}=0.$$

Γ3. Έχουμε:

$$f(h(x))=g(x)\Leftrightarrow f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=x-\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}.$$

Θέτουμε $u=x+\sqrt{x^2+1}$ με $u>0$, οπότε $f(u)=-\frac{1}{u}$, $u>0$.

Επιπλέον, επειδή η f είναι περιττή, για $w=-u\Leftrightarrow u=-w$ έχουμε:

$$f(-w)=-\frac{1}{-w}\Leftrightarrow-f(w)=\frac{1}{w}\Leftrightarrow f(w)=-\frac{1}{w},\ w<0.$$

Επομένως $f(x)=-\frac{1}{x}$, $x\neq0$.

Γ4. Θεωρούμε συνάρτηση $t(x)=e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

Η δοθείσα ανίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$e^{f(x)}+f(x)-1>0 \Leftrightarrow t(f(x))>t(0) \overset{t\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>0 \Leftrightarrow x<0.$$

Γ5. Έστω $A(\xi, f(\xi)),\ B(-\xi, f(-\xi))\in C_f$ ή $A\left(\xi, -\frac{1}{\xi}\right),\ B\left(-\xi, \frac{1}{\xi}\right)\in C_f$ με $\xi>0$. Τότε είναι:

$$(AB)=\sqrt{(2\xi)^2+\left(\frac{2}{\xi}\right)^2}=2\sqrt{\xi^2+\frac{1}{\xi^2}}.$$

Έχουμε $\xi^2>0 \Rightarrow \xi^2+\frac{1}{\xi^2}\geq 2 \Rightarrow 2\sqrt{\xi^2+\frac{1}{\xi^2}}\geq 2\sqrt{2}.$

Άρα $(AB)\geq 2\sqrt{2}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $\xi^2=1 \overset{\xi>0}{\Leftrightarrow} \xi=1.$

Επομένως, τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A(1, -1),\ B(-1, 1)$.

Θέμα Δ

Δ1. Για κάθε $x\in(0, +\infty)$ είναι $g'(x)=-\frac{1}{x^2}-e^{-x}<0.$ Άρα $g\downarrow(0, +\infty)$.

Δ2. Για κάθε $x_1, x_2\in[e, +\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

- $x_1<x_2 \Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2) \overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{g(x_1)}<\frac{1}{g(x_2)}$ και
- $x_1<x_2 \Leftrightarrow \ln x_1<\ln x_2 \Rightarrow \ln x_1-1<\ln x_2-1$ (με $\ln x-1>0$).

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη προκύπτει ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e, +\infty)$, οπότε είναι 1 – 1 και συνεπώς αντιστρέψιμη.

Δ3. Έχουμε:

$$f^{-1}(\eta\mu x)<f^{-1}(-\sigma\upsilon\nu x) \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} \eta\mu x<-\sigma\upsilon\nu x \underset{\sigma\upsilon\nu x<0}{\overset{x\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)}{\Leftrightarrow}} \varepsilon\varphi x>-1$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x>\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4} \overset{\varepsilon\varphi x\uparrow\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)}{\Leftrightarrow} x\in\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$$

Δ4. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x-1}{e^{-x}+\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\ln x-1)\cdot\dfrac{1}{e^{-x}+\frac{1}{x}}\right].$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-1)=+\infty$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\dfrac{1}{x}\right)=0$ με $e^{-x}+\dfrac{1}{x}>0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\overset{(+\infty)\cdot(+\infty)}{=\!=}+\infty$.

Άρα, η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Δ5. Επειδή $2\alpha-2\alpha^2-1<0$ για οποιαδήποτε τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$, η ευθεία βρίσκεται στο 2ο και το 4ο τεταρτημόριο. Επίσης, η C_f βρίσκεται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο. Επομένως, η ευθεία και η C_f δεν έχουν κοινά σημεία.


Θοδωρής Πενέσης – Διονύσης Συνοδινός
ΦΥΣΙΚΗ
Γ΄ Λυκείου
Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών
Α΄ ΤΟΜΟΣ
ΚΡΟΥΣΕΙΣ - ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ
ΕΛΛΗΝΟΕΚΔΟΤΙΚΗ
Θοδωρής Πενέσης – Διονύσης Συνοδινός
ΦΥΣΙΚΗ
Γ΄ Λυκείου
Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών
Β΄ ΤΟΜΟΣ
ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER – ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ – ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
ΕΛΛΗΝΟΕΚΔΟΤΙΚΗ
Θοδωρής Πενέσης – Διονύσης Συνοδινός
ΦΥΣΙΚΗ
Γ΄ Λυκείου
Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ
ΕΛΛΗΝΟΕΚΔΟΤΙΚΗ


ΑΝΕΣΤΗΣ ΘΕΟΔΩΡΟΥ
ΧΗΜΕΙΑ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών
Α΄ ΤΟΜΟΣ
ΟΞΕΙΔΟΑΝΑΓΩΓΗ - ΘΕΡΜΟΧΗΜΕΙΑ - ΧΗΜΙΚΗ ΚΙΝΗΤΙΚΗ - ΧΗΜΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ - ΙΟΝΤΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ
Συνοδεύεται από Βιβλίο Λύσεων
ΕΛΛΗΝΟΕΚΔΟΤΙΚΗ
ΑΝΕΣΤΗΣ ΘΕΟΔΩΡΟΥ
ΧΗΜΕΙΑ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών
Β΄ ΤΟΜΟΣ
ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΑΚΗ ΔΟΜΗ ΤΩΝ ΑΤΟΜΩΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ – ΟΡΓΑΝΙΚΗ ΧΗΜΕΙΑ
Συνοδεύεται από Βιβλίο λύσεων
ΕΛΛΗΝΟΕΚΔΟΤΙΚΗ
ΑΝΕΣΤΗΣ ΘΕΟΔΩΡΟΥ
ΧΗΜΕΙΑ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών
Γ΄ ΤΟΜΟΣ
ΜΕ ΤΗ ΝΕΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ - ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ
Συνοδεύεται από Βιβλίο Λύσεων
ΕΛΛΗΝΟΕΚΔΟΤΙΚΗ


ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΜΗΤΣΕΛΟΣ – ΣΠΥΡΟΣ ΜΗΤΣΕΛΟΣ
ΝΕΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ
Γ΄ Λυκείου
Ενιαία Εξέταση
Νεοελληνικής Γλώσσας
και Λογοτεχνίας
Έκδοση 2020 - 2021
Συνοδεύεται από Βιβλίο Απαντήσεων
ΕΛΛΗΝΟΕΚΔΟΤΙΚΗ


ΜΑΝΟΣ ΦΟΡΛΙΔΑΣ
ΜΑΡΙΑ ΜΗΤΡΑΚΟΥ
ΤΕΧΝΗ
ΚΑΙ
ΤΕΧΝΙΚΗ
ΣΤΑ
ΝΕΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ
Γ΄ Λυκείου
Ενιαία Εξέταση
Συνοδεύεται από Βιβλίο Απαντήσεων
ΕΛΛΗΝΟΕΚΔΟΤΙΚΗ

ΕΛΛΗΝΟΕΚΔΟΤΙΚΗ

www.ellinoekdotiki.gr